作业三：Mandelbrot Set 的生成和探索

邵柯欣

专业：信息与计算科学学号：3200103310

2022 年 7 月 2 日

1 摘要

让一个复系数的二次多项式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$, 经过无穷次迭代依旧可以保持收敛的复数 c 集合称为 $Mandelbrotset$。本文将通过 $C++$ 编程绘制,$Mandelbrotset$ 二维平面 (x 轴代表实部,y 轴代表虚部) 表示的图像 (称为 $Mandelbrotset$ 图像), 并对该图像不同的位置进行缩放对比, 切实感受 $Mandelbrotset$ 图像的魅力。

2 引言

因为 $Mandelbrotset$ 图像在美学上拥有独特的吸引力，并且还是一个根据简单规则产生复杂结构的代表例子, 这使得曼德布洛特集在数学之外的其他领域中也十分流行。它也是数学可视化和表现数学之美的最著名例子之一。随着个人计算机的普及, 绘制 $Mandelbrotset$ 图像变得十分方便快捷。理论上 $Mandelbrotset$ 图像可以无限放大，但实际操作时, 由于 $double$ 类型精度的影响, 放大到一定程度会造成失真。本文中，将对 $Mandelbrotset$ 图像进行缩放展示，探究不同部位 $Mandelbrotset$ 图像的不同。

3 问题的背景介绍

$Mandelbrotset$ 起源于 20 世纪初由法国数学家 $PierreFatou$ 和 $GastonJulia$ 首先研究的复杂动力学。首次确切定义分形，并绘制出可视化的分形图案得益于 $RobertW.Brooks$ 和 $PeterMatelski$ 在 1978 年对 $KleinianGroups$ 的

部分研究工作。在此基础上,1980 年 3 月 1 日,在位于纽约的 $YorktownHeights$ 的 IBM 的 $ThomasJ.WatsonResearchCenter$, $BenotB.Mandelbrot$ 首次绘制出曼德布洛特集的可视化图形。且 $BenotB.Mandelbrot$ 在 1980 年发表了一篇关于二次多项式的参数空间 $ParameterSpace$ 的研究论文。对曼德布洛特集的数学研究真正始于数学家 $AdrienDouady$ 和 $JohnH.Hubbard$ 的一系列研究工作。他们探明了曼德布洛特集的许多基本性质,$AdrienDouady$ 为纪念 $BenotB.Mandelbrot$ 在分形几何中做出的杰出贡献,将该集合命名为 $Mandelbrotset$。

4 数学理论

$Mandelbrotset$ 指复数集 c, 对任意的 $c \in C$, 给定 $z_0 = 0$, 满足经过方程 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 保持有界(即不发散)。

存在定理:复数趋向于无穷大,当且仅当它在某一点上具有模量 >2。(仅适用于 $z_{n+1} = z_n^2 + c$)

所以, 在用 $C++$ 绘制 $Mandelbrotset$ 图像时, 我们只需要验证在给定的迭代次数里,z_n 的模长是否大于 2, 就可以判断该二维平面的点所表示的复数 c 是否属于 $Mandelbrotset$。

5 算法

$Mandelbrotset$ 图像可以通过在屏幕上选取不同点 $p(x, y)$(代表复数 c), 并判断其所对应的数列 z_n 是否在预设迭代次数内模长超过 2, 若未超过则对其进行染色 (通常是黑色) 来得到。

```
dim z_0=0;
dim N=给定值;
给定ox,oy,d;
dim image=[ox-d,ox+d]*[oy-d,oy+d];
for p=(x,y) in image:
  the color of p = white;
  c=x+y*i;
  dim n=0;
  while n<N and |z_n|<=2:
```

```
    z_{n+1}=z_n^2+c;
    n=n+1;
  loop;
  if n=N:
    the color of p = black;
  endif
endfor
```

6 数值算例

6.1 算例一：图片参数 $ox = 0.0, oy = 0.0, d = 2.5$

图 1: 整体的 $Mandelbrotset$ 图像

图 2: $Mandelbrotset$ 的局部放大

7 结论