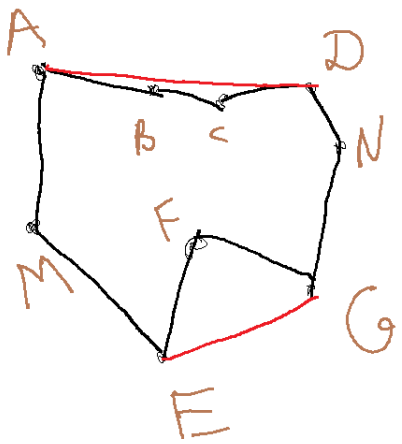
Работа с фигурой, заданной последовательностью точек

Леманский К.Ю., студент ВИШ РУТ МИИТ

Цель: Целью статьи является вывод и описание методики преобразования фигуры заданной последовательностью точек в набор точек принадлежащей фигуре.
Задачи: Проверка принадлежности точки выпуклой фигуре, проверка принадлежности точки не выпуклой фигуре, преобразование не выпуклой фигуры, заданной последовательностью точек, в набор точек принадлежащих ей.
Актуальность: На сегодняшний день техника обработки карты содержащий данные является весьма востребованной, поэтому методику можно применить в большом спектре задач при работе с картами и данными карты(например GeoJson).

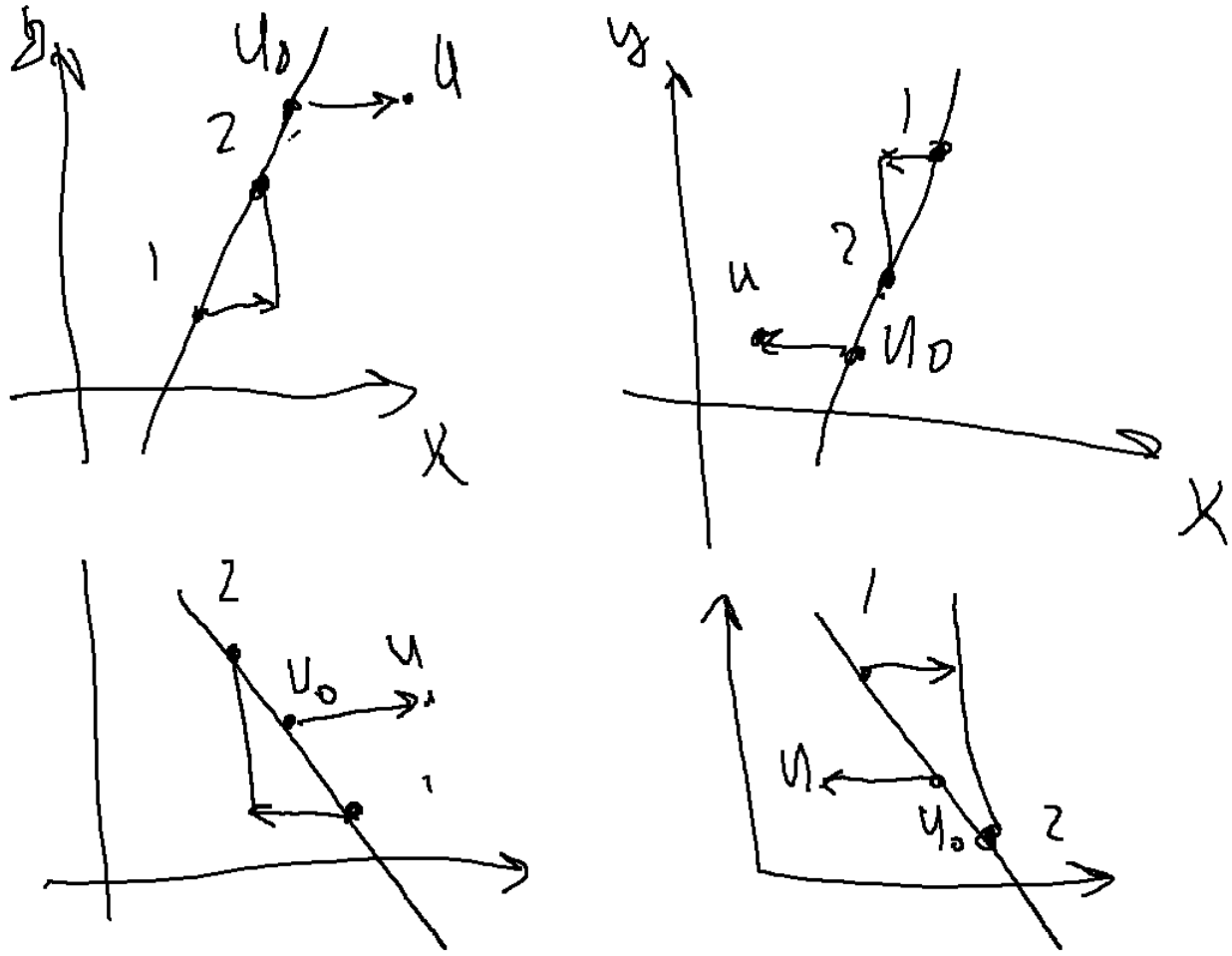
Проблема: Входные данные - не всегда выпуклые многоугольники занчит определить принадлежит ли точка многоугольнику нельзя просто проверив принадлежит ли точка всем полуплоскостям образованными гранями.

Решение: Изменим многоугольник вырезая вершины так, что он станет выпуклым. Получим:



в даном случае остается проверить для точки $U = (x, y)$, $U \in ADGEM \cap U \notin FEG \cap U \notin ABCD$.

Как же найти такие EFG? Как мы знаем уравнение прямой выглядит так: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Теперь как определить что точка лежит справа? Можно просто посмоттеть где прямая через т U пересекает ось X например:



Подставим y от U в уравнение получим:$x_3 = \dfrac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} +$ x_1 тогда $U_0 = (x_3, y_U)$ тогда если $\dfrac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} > 0$ то U должна лежать правее точки U_0 получаем по знаку $x_U - \dfrac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 \equiv x_2 - x_1$ иначе U должна лежать левее точки U_0 получаем по знак $x_U - \dfrac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 \equiv -(x_2 - x_1)$ соеденяем

получаем $x_U - \dfrac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 \equiv \dfrac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot (x_2 - x_1) \implies$ $(x_U - x_1) - \dfrac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} \equiv \dfrac{(x_2 - x_1)^2}{y_2 - y_1} \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) - (y_U - y_1)(x_2 - x_1) \equiv (x_2 - x_1)^2 \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) - (y_U - y_1)(x_2 - x_1) \equiv 1 \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) > (y_U - y_1)(x_2 - x_1)$. Случай $U \in \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ нужно расмотреть отдельно но пусть в таком счучае будем считать, что принадлежит.

Итак формулы мы получили начнем писать код. Для начала хорошо бы создать класс точка с полями x, y. Так же прописать функцию поиска растояния и функции отрезка. Функцию отрезка можно получить вида $y = f(x)$ из ранее уже выведеной.

```
import math
class point:
    def __init__(self, x:float, y:float):
        self.x = x
        self.y = y

    def lenf(self, other):
        return math.sqrt((self.x - other.x)** 2 + (self.y - other

    def equatian(self, other, **printer):
        x_1, y_1 = self.x, self.y
        x_2, y_2 = other.x, other.y
        equatin = f"x * {(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)} - {x_1 * (y_2
        if printer:
            print(f"y = {equatin}")
```

```
        return equatin

    def __eq__(self, other):
        return self.x == other.x and self.y == other.y

    def __hash__(self):
        return hash((self.x, self.y))
```

И для красоты добавим функции print-а.

```
    def __str__(self):
        return f"({self.x}, {self.y})"

    def __repr__(self):
        return f"<<{self.x}, {self.y}>>"
```

Проверим "лежит точка справа от отрезка?":
Функция принисает 3 точки 2 из которых задают направленую прямую и 3-я это проверяемая точка. Все необходимые функции мы уже вывели.

```
def point_right_line(point1, point2, u) -> bool:
    return (u.x - point1.x) * (point2.y - point1.y
    ) > (u.y - point1.y) * (point2.x - point1.x)
```

Проверяем лежит ли точка в выпуклой фигуре.

```
def point_in_normal_figure(pl:List[Point], u:Point):
    if len(pl) < 3: print("errore!!!!! Beckend  line")
    orintation_right = point_right_line(pl[0], pl[1], pl[2])
    point1 = pl[0]
```

```
    for point2 in pl[1:]:
        if orintation_right != point_right_line(point1, point2, u)
            return False
        point1 = point2
    if orintation_right != point_right_line(pl[-1], plt[0], u):
        return False
    return True
```

А если многоугольник не выпуклый? Как уже было сказанно, будем делит на выпуклые фигуры и для них проверять лежит ли в них фигура. Самое сложное определить находится внутряняя часть фигуры справа или слева. Я предлагаю способ, который возможно будет работать не вегда, но в большинстве способов. Просто определить для каждого отрезка сколько точек лежит справа сколько слева. И так для всех и сложить. Получим два числа например r, l(r-спрва l-слева). И тогда если $r > l$ то спарава иначе слева.

Тогда код будет выглядеть так:

```
def orintation_righ(main_fig:List[Point]):
    r, l = 0, 0
    temp_ln = len(main_fig)
    for i in range(temp_ln):
        for j in range(temp_ln):
            if j != i and j != (i + 1) % temp_ln:
                if point_right_line(main_fig[i], main_fig[(i + 1)
                r += 1
            else:
                l += 1
```

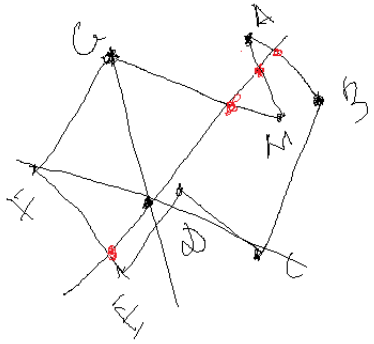
```
    return r > l


def fig_decision(main_fig: List[Point]):
    main_fig = copy.copy(main_fig)
    added_fig = []
    orintation_right = orintation_righ(main_fig)
    count = 0
    i = 0
    while True:
        points = [main_fig[i % len(main_fig)], main_fig[(i + 2) %
        if (point_right_line(points[0], points[1], points[2]) and
        (not point_right_line(points[0], points[1], points[2])) an
            count += 1
        else:
            added_fig += [points]
            main_fig.remove(main_fig[(i + 1) % len(main_fig)])
            count = 0
        i += 1
        if count == len(main_fig) + 3:
            break
    return (main_fig, added_fig)


def point_in_bad_figure(main_fig: List[Point], added_fig: List[Poi
    in_fig = point_in_normal_figure(main_fig, u)
    for i in added_fig:
        in_fig = in_fig and (not point_in_normal_figure(i, u))
    return in_fig
```

И наконец функция разбиенияя на точки.

```
def bad_fig_to_point(main_fig:List[Point], step:float):
    fig_list = []
    maxx, maxy = minx, miny =  (
    main_fig[0].x, main_fig[0].y)
    for i in main_fig:
        if i.x > maxx:
            maxx = i.x
        if i.x < minx:
            minx = i.x
        if i.y > maxy:
            maxy = i.y
        if i.y < miny:
            miny = i.y
    x_list = list(x * step for x in range(int(minx / step), int(max
    y_list = list(y * step for y in range(int(miny / step), int(max
    main_fig, added_fig = fig_decision(main_fig)
    for x, y in itertools.product(x_list, y_list):
        point = Point(x, y)
        if point_in_bad_figure(main_fig, added_fig, point):
            fig_list += [point]
    return fig_list
```

Но есть еще один способ проверки принадлежности точки плоскости. Проведем через точку прямую, такую, что она будет пересекать грани фигуры(не вершины) тогда если пойти вдоль этой прямой от какого либо ее края, то каждое пересечение с гранью это вход или выход и тогда можно сказать,

что если с каждой стороны от точки находится ничетное колво пересечений с гранями то мы получим что точка находится внутри фигуры. Теперь разберемся как получить прямую пересекающую только грани? Пусть у многоугольника к вершин тогда проведем к + 1 прямую и хотя бы одна не будет содержать вершин.



Итак начнем писать алгоритм класс точки возьмем из преведущего алгоритма. А метод проверки принадлежит ли точка прямой почти аналогичен функции проверки лежит ли точка справа от прямой, только знак неравенства нужно заметить равенством. Для класса Line нужно найти пересечение двух прямых. Для этого возьмем ур-е прямой $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} (k_2 - k_1)x = b_1 - b_2 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} \\ y = k_2\frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} + b_2 \end{cases}$$

```
class Line:
    def __init__(self, p1:Point, p2:Point):
        self.p1 = p1
        self.p2 = p2

    def equatian(self):
```

```
        return list(map(float,
        self.p1.equatian(self.p2).replace("x*", "").split("-")))

    def crossing(self, other):
        pr1 = self.p1.x == self.p2.x
        pr2 = other.p1.x == other.p2.x
        if pr1 and pr2:
            return None
        elif pr1:
            k2, b2 = other.equatian()
            return Point(self.p1.x, self.p1.x * k2 + b2)
        elif pr2:
            k1, b1 = self.equatian()
            return Point(other.p1.x, other.p1.x * k1 + b1)
        k1, b1 = self.equatian()
        k2, b2 = other.equatian()
        if k1 == k2:
            return None
        x = (b1 - b2) / (k2 - k1)
        y = k2 * x + b2
        return Point(x, y)

    def on(self, u:Point):
        return ((u.x - self.p1.x) * (self.p2.y - self.p1.y) ==
        (u.y - self.p1.y) * (self.p2.x - self.p1.x))

    def in(self, u:Point):
        x1, x2 = min(self.p1.x, self.p2.x), max(
        self.p1.x, self.p2.x)
        y1, y2 = min(self.p1.y, self.p2.y), max(
```

```
        self.p1.y, self.p2.y)
        return x1 <= u.x <= x2 and y1<= u.y <= y2
```

Ок, а теперь сама функция. Мы получаем фигуру для нее нам понадобится список отрезков которыми она образованна и потом будем проводить прямую пока не найдем прямую которая не будет содержать вершину.

```
def point_in_fig(main_fig:List[Point], u:Point):
    if u in main_fig:return True
    lines = [Line(main_fig[i], main_fig[(i + 1) % len(main_fig)])
        for i in range(len(main_fig))]
    teastpoint = Point(u.x, u.y + 1)
    dx = 1
    while True:
        dx += 1
        teastpoint.x += dx
        teastpoint.y += 1
        testline = Line(u, teastpoint)
        if all(map(lambda x: not testline.on(x), main_fig)):
            crossings = []
            for line in lines:
                c = testline.crossing(line)
                if c is not None:
                    if line.inl(c):
                        crossings += [c]
            if all(list(map(lambda x: x not in main_fig, crossings)
                break
    cross = {"r": 0, "l": 0}
    for c in crossings:
        if c.y > u.y or (c.y == u.y and c.x > u.x):
```

```
            cross["l"] += 1
        else:
            cross["r"] += 1
    return cross["r"] % 2 == cross["l"] % 2 == 1
```

Ок, а что на счет 3D? Думаю о направлении тут говорить нет смысла, так что прийдется использовать какой-то другой метод. Можно через каждую точку проводить прямую параллельную оси x и смотреть пересечения с фигурой если пересечения с каждой стороны нечетное кол-во то точка внутри иначе снаружи. Стоит учесть что это работает потому, что можно говорить о вхождении/выходе прямой из фигуры, но нужно сказать, что есть вид пересечение 2 граней в месте ребра и в таком месте может быть выход прямой из фигуры или его может и не быть. Эта проблема выпуклости, и решать ее будем так же, те разделем невыпуклую фигуру на выпуклые и обработаем включения/искючения.

Итак, начнем опять с точки.

```
class Point3:
    def __init__(self, x:float , y:float, z:float):
        self.x = x
        self.y = y
        self.z = z
```

Теперь класс отрезка. Определять мы будем по 2 точкам. Так же добавим функцию проверки лежит ли точка на прямой. Только есть проблема с типом float во всем програмировании, но ее можно решить просто добавив метод round тогда прямая конечно станет условно широкаой, но для нашей зада-

чи ширинва 10^{-5} не так уж и страшно. Алгоритм аналогичен 2D проверка истиности $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

```
class line:
    def __init__(self, p1:Point3, p2:Point3):
        self.p1 = p1
        self.p2 = p2

    def include(self, p:Point3):
        return round((self.p.y - self.p2.y) *
         (self.p1.x - self.p2.x) - (self.p.x - self.p2.x)
          * (self.p1.y - self.p2.y), 5) == round(
          (self.p2.y - self.p.y) *  (self.p1.z - self.p2.z) -
          (self.p2.z - self.p.z)
          * (self.p1.y - self.p2.y), 5) == 0
```

Теперь плоскость.

```
class plane:
    def __init__(self, lines:List[Points]):
```