

Работа с фигурой, заданной последовательностью точек

Леманский К.Ю., студент ВИШ РУТ МИИТ

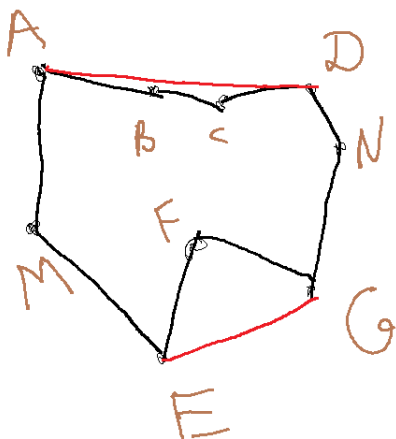
Цель: Целью статьи является вывод и описание методики преобразования фигуры заданной последовательностью точек в набор точек принадлежащей фигуре.

Задачи: Проверка принадлежности точки выпуклой фигуре, проверка принадлежности точки не выпуклой фигуре, преобразование не выпуклой фигуры, заданной последовательностью точек, в набор точек принадлежащих ей.

Актуальность: На сегодняшний день техника обработки карты содержащий данные является весьма востребованной, поэтому методику можно применить в большом спектре задач при работе с картами и данными карты(например GeoJson).

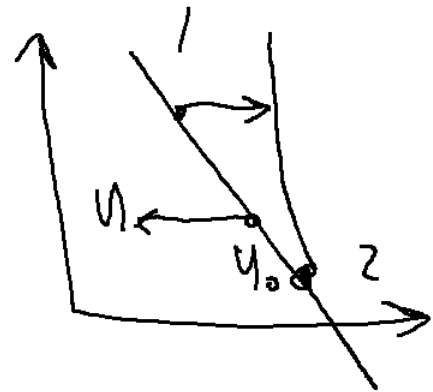
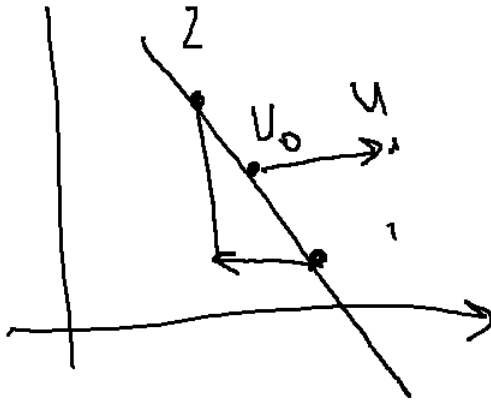
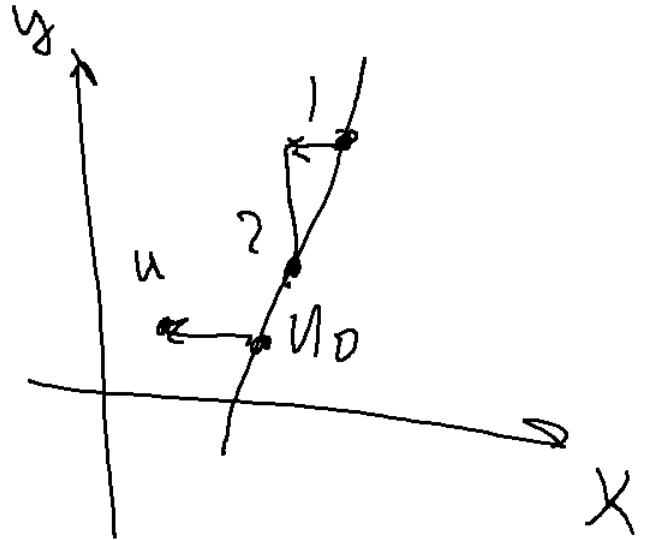
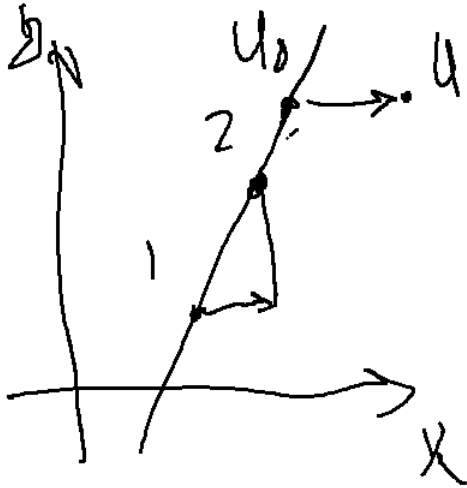
Проблема: Входные данные - не всегда выпуклые многоугольники значит определить принадлежит ли точка многоугольнику нельзя просто проверив принадлежит ли точка всем полуплоскостям образованными гранями.

Решение: Изменим многоугольник вырезая вершины так, что он станет выпуклым. Получим:



в данном случае остается проверить для точки $U = (x, y)$, $U \in ADGEM \cap U \notin FEG \cap U \notin ABCD$.

Как же найти такие EFG? Как мы знаем уравнение прямой выглядит так: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Теперь как определить что точка лежит справа? Можно просто посмотреть где прямая через U пересекает ось X например:



Подставим y от U в уравнение получим: $x_3 = \frac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} +$

x_1 тогда $U_0 = (x_3, y_U)$ тогда если $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} > 0$ то U должна ле-

жать правее точки U_0 получаем по знаку $x_U - \frac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} -$

$x_1 \equiv x_2 - x_1$ иначе U должна лежать левее точки U_0 получаем

по знак $x_U - \frac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 \equiv -(x_2 - x_1)$ соединяем

получаем $x_U - \frac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 \equiv \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot (x_2 - x_1) \implies$
 $(x_U - x_1) - \frac{(y_U - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} \equiv \frac{(x_2 - x_1)^2}{y_2 - y_1} \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) - (y_U - y_1)(x_2 - x_1) \equiv (x_2 - x_1)^2 \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) - (y_U - y_1)(x_2 - x_1) \equiv 1 \implies (x_U - x_1)(y_2 - y_1) > (y_U - y_1)(x_2 - x_1).$
 Случай $U \in \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ нужно рассмотреть отдельно но пусть в таком случае будем считать, что принадлежит.

Итак формулы мы получили начнем писать код. Для начала хорошо бы создать класс точка с полями x, y. Так же прописать функцию поиска расстояния и функции отрезка. Функцию отрезка можно получить вида $y = f(x)$ из ранее уже выведенной.

```
import math
class point:
    def __init__(self, x:float, y:float):
        self.x = x
        self.y = y

    def lenf(self, other):
        return math.sqrt((self.x - other.x)** 2 + (self.y - other.y)** 2)

    def equation(self, other, **printer):
        x_1, y_1 = self.x, self.y
        x_2, y_2 = other.x, other.y
        equatin = f"x * {(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)} - {x_1 * (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)}"
        if printer:
            print(f"y = {equatin}")
```

```

        return equatin

    def __eq__(self, other):
        return self.x == other.x and self.y == other.y

    def __hash__(self):
        return hash((self.x, self.y))

```

И для красоты добавим функции print-a.

```

    def __str__(self):
        return f"({self.x}, {self.y})"

    def __repr__(self):
        return f"<<{self.x}, {self.y}>>"

```

Проверим "лежит точка справа от отрезка?":

Функция принисает 3 точки 2 из которых задают направле-
ную прямую и 3-я это проверяемая точка. Все необходимые
функции мы уже вывели.

```

def point_right_line(point1, point2, u) -> bool:
    return (u.x - point1.x) * (point2.y - point1.y)
        > (u.y - point1.y) * (point2.x - point1.x)

```

Проверяем лежит ли точка в выпуклой фигуре.

```

def point_in_normal_figure(pl:List[Point], u:Point):
    if len(pl) < 3: print("errore!!!! Beckend line")
    orintation_right = point_right_line(pl[0], pl[1], pl[2])
    point1 = pl[0]

```

```

for point2 in pl[1:]:
    if orintation_right != point_right_line(point1, point2, u):
        return False
    point1 = point2
if orintation_right != point_right_line(pl[-1], plt[0], u):
    return False
return True

```

А если многоугольник не выпуклый? Как уже было сказано, будем делить на выпуклые фигуры и для них проверять лежит ли в них фигура. Самое сложное определить находится внутренняя часть фигуры справа или слева. Я предлагаю способ, который возможно будет работать не всегда, но в большинстве случаев. Просто определить для каждого отрезка сколько точек лежит справа сколько слева. И так для всех и сложить. Получим два числа например r , l (r -справа l -слева). И тогда если $r > l$ то справа иначе слева.

Тогда код будет выглядеть так:

```

def orintation_righ(main_fig:List[Point]):
    r, l = 0, 0
    temp_ln = len(main_fig)
    for i in range(temp_ln):
        for j in range(temp_ln):
            if j != i and j != (i + 1) % temp_ln:
                if point_right_line(main_fig[i], main_fig[(i + 1) % temp_ln], u):
                    r += 1
            else:
                l += 1

```

```
return r > 1
```

```
def fig_decision(main_fig: List[Point]):  
    main_fig = copy.copy(main_fig)  
    added_fig = []  
    orintation_right = orintation_righ(main_fig)  
    count = 0  
    i = 0  
    while True:  
        points = [main_fig[i % len(main_fig)], main_fig[(i + 2) %  
        if (point_right_line(points[0], points[1], points[2]) and  
        (not point_right_line(points[0], points[1], points[2])) an  
            count += 1  
        else:  
            added_fig += [points]  
            main_fig.remove(main_fig[(i + 1) % len(main_fig)])  
            count = 0  
        i += 1  
        if count == len(main_fig) + 3:  
            break  
    return (main_fig, added_fig)
```

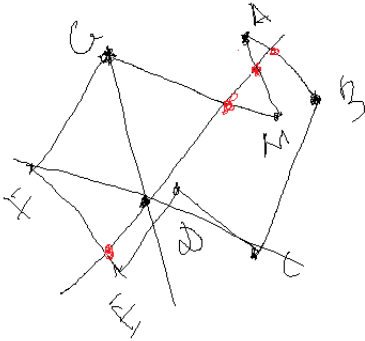
```
def point_in_bad_figure(main_fig: List[Point], added_fig: List[Poi  
    in_fig = point_in_normal_figure(main_fig, u)  
    for i in added_fig:  
        in_fig = in_fig and (not point_in_normal_figure(i, u))  
    return in_fig
```

И наконец функция разбиения на точки.

```
def bad_fig_to_point(main_fig:List[Point], step:float):
    fig_list = []
    maxx, maxy = minx, miny = (
        main_fig[0].x, main_fig[0].y)
    for i in main_fig:
        if i.x > maxx:
            maxx = i.x
        if i.x < minx:
            minx = i.x
        if i.y > maxy:
            maxy = i.y
        if i.y < miny:
            miny = i.y
    x_list = list(x * step for x in range(int(minx / step), int(maxx / step)))
    y_list = list(y * step for y in range(int(miny / step), int(maxy / step)))
    main_fig, added_fig = fig_decision(main_fig)
    for x, y in itertools.product(x_list, y_list):
        point = Point(x, y)
        if point_in_bad_figure(main_fig, added_fig, point):
            fig_list += [point]
    return fig_list
```

Но есть еще один способ проверки принадлежности точки плоскости. Проведем через точку прямую, такую, что она будет пересекать грани фигуры(не вершины) тогда если пойти вдоль этой прямой от какого либо ее края, то каждое пересечение с гранью это вход или выход и тогда можно сказать,

что если с каждой стороны от точки находится нечетное количество пересечений с гранями то мы получим что точка находится внутри фигуры. Теперь разберемся как получить прямую пересекающую только грани? Пусть у многоугольника к вершин тогда проведем $k + 1$ прямую и хотя бы одна не будет содержать вершин.



Итак начнем писать алгоритм класс точки возьмем из преведущего алгоритма. А метод проверки принадлежит ли точка прямой почти аналогичен функции проверки лежит ли точка справа от прямой, только знак неравенства нужно заметить равенством. Для класса Line нужно найти пересечение двух прямых. Для этого возьмем ур-е прямо

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \implies \begin{cases} (k_2 - k_1)x = b_1 - b_2 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} \\ y = k_2 \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} + b_2 \end{cases}$$

```
class Line:
    def __init__(self, p1:Point, p2:Point):
        self.p1 = p1
        self.p2 = p2

    def equation(self):
        return list(map(float,
```

```

        self.p1.equation(self.p2).replace("x*", "").split("-"))

def crossing(self, other):
    pr1 = self.p1.x == self.p2.x
    pr2 = other.p1.x == other.p2.x
    if pr1 and pr2:
        return None
    elif pr1:
        k2, b2 = other.equation()
        return Point(self.p1.x, self.p1.x * k2 + b2)
    elif pr2:
        k1, b1 = self.equation()
        return Point(other.p1.x, other.p1.x * k1 + b1)
    k1, b1 = self.equation()
    k2, b2 = other.equation()
    if k1 == k2:
        return None
    x = (b1 - b2) / (k2 - k1)
    y = k2 * x + b2
    return Point(x, y)

def on(self, u:Point):
    return ((u.x - self.p1.x) * (self.p2.y - self.p1.y) ==
            (u.y - self.p1.y) * (self.p2.x - self.p1.x))

def in(self, u:Point):
    x1, x2 = min(self.p1.x, self.p2.x), max(
        self.p1.x, self.p2.x)
    y1, y2 = min(self.p1.y, self.p2.y), max(
        self.p1.y, self.p2.y)

```

```
return x1 <= u.x <= x2 and y1<= u.y <= y2
```

Ок, а теперь сама функция. Мы получаем фигуру для нее нам понадобится список отрезков которыми она образованна и потом будем проводить прямую пока не найдем прямую которая не будет содержать вершину.

```
def point_in_fig(main_fig:List[Point], u:Point):
    if u in main_fig:return True
    lines = [Line(main_fig[i], main_fig[(i + 1) % len(main_fig)])
              for i in range(len(main_fig))]
    teastpoint = Point(u.x, u.y + 1)
    dx = 1
    while True:
        dx += 1
        teastpoint.x += dx
        teastpoint.y += 1
        testline = Line(u, teastpoint)
        if all(map(lambda x: not testline.on(x), main_fig)):
            crossings = []
            for line in lines:
                c = testline.crossing(line)
                if c is not None:
                    if line.inl(c):
                        crossings += [c]
            if all(list(map(lambda x: x not in main_fig, crossings))):
                break
    cross = {"r": 0, "l": 0}
    for c in crossings:
        if c.y > u.y or (c.y == u.y and c.x > u.x):
            cross["l"] += 1
```

```

else:
    cross["r"] += 1

return cross["r"] % 2 == cross["l"] % 2 == 1

```

Ок, а что на счет 3D? Думаю о направлении тут говорить нет смысла, так что придется использовать какой-то другой метод. Можно через каждую точку проводить прямую параллельную оси x и смотреть пересечения с фигурой если пересечения с каждой стороны нечетное кол-во то точка внутри иначе снаружи. Стоит учесть что это работает потому, что можно говорить о вхождении/выходе прямой из фигуры, но нужно сказать, что есть вид пересечение 2 граней в месте ребра и в таком месте может быть выход прямой из фигуры или его может и не быть. Эта проблема выпуклости, и решать ее будем так же, те разделим невыпуклую фигуру на выпуклые и обработаем включения/исключения.

Итак, начнем опять с точки.

```

class Point3:
    def __init__(self, x:float , y:float, z:float):
        self.x = x
        self.y = y
        self.z = z

```

Теперь класс отрезка. Определять мы будем по 2 точкам. Так же добавим функцию проверки лежит ли точка на прямой. Алгоритм аналогичен 2D проверка истинности $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

```

class line:

```

```

def __init__(self, p1:Point3, p2:Point3):
    self.p1 = p1
    self.p2 = p2

def include(self, p:Point3):
    return round((self.p.y - self.p2.y) *
        (self.p1.x - self.p2.x) - (self.p.x - self.p2.x)
        * (self.p1.y - self.p2.y), 5) == round(
        (self.p2.y - self.p.y) * (self.p1.z - self.p2.z) -
        (self.p2.z - self.p.z)
        * (self.p1.y - self.p2.y), 5) == 0

```

Теперь плоскость. Ур-е плоскости $Ax + By + Cz = 1$. Для определения плоскости достаточно трех точек. Решим ур-е:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 1 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 1 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B\frac{y_1}{x_1} - C\frac{z_1}{x_1} \\ B = 1 - A\frac{x_2}{y_2} - C\frac{z_2}{y_2} \\ C = 1 - B\frac{y_3}{z_3} - A\frac{x_3}{z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B\frac{y_1}{x_1} - C\frac{z_1}{x_1} \\ B = 1 - A\frac{x_2}{y_2} - \left(1 - B\frac{y_3}{z_3} - A\frac{x_3}{z_3}\right)\frac{z_2}{y_2} \\ C = 1 - B\frac{y_3}{z_3} - A\frac{x_3}{z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B\frac{y_1}{x_1} - C\frac{z_1}{x_1} \\ B\left(1 + \frac{y_3}{z_3}\frac{z_2}{y_2}\right) = 1 - \frac{z_2}{y_2} - A\left(\frac{x_3}{z_3}\frac{z_2}{y_2} + \frac{x_2}{y_2}\right) \\ C = 1 - B\frac{y_3}{z_3} - A\frac{x_3}{z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
A = 1 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = \frac{1 - \frac{z_2}{y_2} - A(\frac{x_3}{z_3} \frac{z_2}{y_2} + \frac{x_2}{y_2})}{(1 + \frac{y_3}{z_3} \frac{z_2}{y_2})} \\
C = 1 - B \frac{y_3}{z_3} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{cases}
\begin{cases}
A = 1 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = \frac{1 - \frac{z_2}{y_2} - A(\frac{x_3 z_2 + x_2 z_3}{z_3 y_2})}{(\frac{z_3 y_2 + y_3 z_2}{z_3 y_2})} \\
C = 1 - \left(\frac{1 - \frac{z_2}{y_2} - A(\frac{x_3 z_2 + x_2 z_3}{z_3 y_2})}{(\frac{z_3 y_2 + y_3 z_2}{z_3 y_2})} \right) \frac{y_3}{z_3} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{cases}
\begin{cases}
A = 1 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = \frac{z_3 y_2 - z_2 z_3 - A(x_3 z_2 + x_2 z_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \\
C = 1 - \frac{y_3 y_2 - z_2 y_3 - A(\frac{y_3 x_3 z_2}{z_3} + x_2 y_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{cases}
\begin{cases}
A = 1 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = \frac{z_3 y_2 - z_2 z_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \frac{(x_3 z_2 + x_2 z_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \\
C = 1 - \frac{y_3 y_2 - z_2 y_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \left(\frac{(\frac{y_3 x_3 z_2}{z_3} + x_2 y_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} + \frac{x_3}{z_3} \right)
\end{cases}
\begin{cases}
A = 1 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = \frac{z_3 y_2 - z_2 z_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \frac{(x_3 z_2 + x_2 z_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \\
C = 1 - \frac{y_3 y_2 - z_2 y_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \left(\frac{2y_3 x_3 z_2 + x_2 y_3 z_3 + z_3 y_2 x_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2) z_3} \right)
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 - \left(\frac{z_3 y_2 - z_2 z_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \right) \frac{y_1}{x_1} - \left(1 - \frac{y_3 y_2 - z_2 y_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \right) \frac{z_1}{x_1}}{\left(1 + \frac{(x_3 z_2 + x_2 z_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \frac{y_1}{x_1} + \frac{2y_3 x_3 z_2 + x_2 y_3 z_3 + z_3 y_2 x_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \frac{z_1}{z_3 x_1} \right)} \\
A &= \frac{(z_3 y_2 + y_3 z_2) x_1 z_3 - ((z_3 y_2 - z_2 z_3)) z_3 y_1 - ((z_3 y_2 + y_3 z_2) - (y_3 y_2 - z_2 y_3)) z_3 z_1}{((z_3 y_2 + y_3 z_2) z_3 + (x_3 z_2 + x_2 z_3) z_3 y_1 + (2y_3 x_3 z_2 + x_2 y_3 z_3^2 + y_2 x_3 z_3) z_1)} \\
B &= \frac{z_3 y_2 - z_2 z_3}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} - A \frac{(x_3 z_2 + x_2 z_3)}{(z_3 y_2 + y_3 z_2)} \\
C &= 1 - B \frac{y_3}{z_3} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{aligned}$$

Та форма ур-я плоскости почти верна, но есть один граничный случай, когда она не работает, тогда на помощь приходит:

$$\begin{cases}
Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0 \\
Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0 \\
Ax_3 + By_3 + Cz_3 = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A = 0 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \frac{x_2}{y_2} - C \frac{z_2}{y_2} \\
C = 0 - B \frac{y_3}{z_3} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A = 0 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \frac{x_2}{y_2} - C \frac{z_2}{y_2} \\
C = A \frac{x_2}{y_2} \frac{y_3}{z_3} + C \frac{z_2}{y_2} \frac{y_3}{z_3} - A \frac{x_3}{z_3}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A = 0 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \frac{x_2}{y_2} - C \frac{z_2}{y_2} \\
C = \frac{A(\frac{x_2}{y_2} \frac{y_3}{z_3} - \frac{x_3}{z_3})}{1 - \frac{z_2}{y_2} \frac{y_3}{z_3}}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A = 0 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \frac{x_2}{y_2} - \frac{A(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3y_2 - z_2y_3} z_2 \\
C = \frac{A(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3 - \frac{z_2}{y_2}y_3}
\end{cases}
\begin{cases}
A = 0 - B \frac{y_1}{x_1} - C \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3y_2 - z_2y_3} z_2 \right) \\
C = A \left(\frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3 - \frac{z_2}{y_2}y_3} \right)
\end{cases}
\begin{cases}
A = 0 + A \left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3y_2 - z_2y_3} z_2 \right) \frac{y_1}{x_1} - A \left(\frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3 - \frac{z_2}{y_2}y_3} \right) \frac{z_1}{x_1} \\
B = 0 - A \left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3y_2 - z_2y_3} z_2 \right) \\
C = A \left(\frac{(\frac{x_2}{y_2}y_3 - x_3)}{z_3 - \frac{z_2}{y_2}y_3} \right)
\end{cases}$$

Для того что-бы определить лежит точка на плоскости достаточно подставить координаты точки в ур-е плоскости. А вот что-бы определить лежит ли точка на грани придется писать ту же функцию которую мы уже писали но в 3D, но мы схитрим. Точка лежит внутри фигуры если

1. она лежит в той же плоскости
2. Если она лежит в проекции фигуры.

Тогда для удобства будем проецировать грань на плоскость образованную осями о.X, о.Y. Учтем что при проецировании плоскость не должна быть параллельна о.Z, и если такое случится будем проецировать на о.Z, о.Y или на о.X, о.Z.

А теперь найдем пересечение прямой и плоскости. Для этого опять решим систему:

$$\begin{cases}
 Ax + By + Cz = 1 \\
 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\
 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\
 x = 1 - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z \\
 y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\
 z = \frac{(z_2 - z_1)(y - y_1)}{y_2 - y_1} + z_1
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x = 1 - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z \\
 y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\
 z = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)(z_2 - z_1)}{x_2 - x_1} + z_1
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x = 1 - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z \\
 y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\
 z = \frac{(z_2 - z_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + z_1
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
x = 1 - \frac{B}{A} \left(\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \right) - \frac{C}{A} \left(\frac{(z_2 - z_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + z_1 \right) \\
y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\
z = \frac{(z_2 - z_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + z_1
\end{cases}$$

$$x = \frac{A - B \left(y_1 - \frac{(y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1} \right) - C \left(z_1 - \frac{(z_2 - z_1)x_1}{x_2 - x_1} \right)}{A + B \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + C \frac{(z_2 - z_1)}{x_2 - x_1}}$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1$$

$$z = \frac{(z_2 - z_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + z_1$$

$$x = \frac{A(x_2 - x_1) - B(y_1(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)x_1) - C(z_1(x_2 - x_1) - (z_2 - z_1)x_1)}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}$$

$$y = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1$$

$$z = \frac{(z_2 - z_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + z_1$$

Если $x_1 = x_2$ получим

$$\begin{cases}
By = 1 - Ax_1 - Cz \\
z = \frac{(z_2 - z_1)(y - y_1)}{y_2 - y_1} + z_1
\end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1 - Ax_1 + C \frac{(z_2 - z_1)y_1}{y_2 - y_1} - Cz_1}{B + C \frac{(z_2 - z_1)}{y_2 - y_1}} \\ z = \frac{(z_2 - z_1)(y - y_1)}{y_2 - y_1} + z_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(y_2 - y_1) - Ax_1(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)y_1 - Cz_1(y_2 - y_1)}{B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)} \\ z = \frac{(z_2 - z_1)(y - y_1)}{y_2 - y_1} + z_1 \end{array} \right.$$

Осталось это перенести в код:

```
class plane:
    def __init__(self, lines:List[Points]):
```

$$\vec{N} = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix} \right) = (y_1 z_2 - z_1 y_2, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \implies \begin{cases} x = \lambda(x_2 - x_1) + x_1 \\ y = \lambda(y_2 - y_1) + y_1 \\ z = \lambda(z_2 - z_1) + z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda(x_2 - x_1) + x_1 \\ y = \lambda(y_2 - y_1) + y_1 \\ z = \lambda(z_2 - z_1) + z_1 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda(x_2 - x_1) + x_1 \\ y = \lambda(y_2 - y_1) + y_1 \\ z = \lambda(z_2 - z_1) + z_1 \\ \lambda = \frac{-Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)\lambda + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)\lambda + y_1 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = (x_2 - x_1)\lambda + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)\lambda + y_1 \\ \lambda = \frac{-(ax_1 + by_1 + c)}{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)} \end{cases}$$

$$a((x_2 - x_1)\lambda + x_1) + b((y_2 - y_1)\lambda + y_1) + c = 0$$

$$(a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1))\lambda = -(ax_1 + by_1 + c)$$

$$\lambda = \frac{-(ax_1 + by_1 + c)}{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)}$$