レヴィ・チヴィタ記号と行列式

5418040　徐 輔賢

2022 年 4 月 5 日

数学的な意味づけをしていない、有限の数の並びを順列という。順列を構成する際に用いられる数は普通、自然数か整数である。今のところ、高校数学 A の「場合の数」で扱うような「順列」とは別の概念と捉えて構わない。また、順列 (数の並び) を構成する数が 2 つ以上重複して存在することはない[*1]。たとえば、最も基本的な順列として、以下のようなものが挙げられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

これを基本順列と呼ぶ[*2]。基本順列とは、左から順番に 1, 2, 3, ... と数字を入れるような数の並びをさす。

順列 (数の並び) を入れ換えることを「置換」という。順列に大して置換を行った結果の数の並びは順列である[*3]。たとえば、基本順列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるような操作を置換という。置換の代表例として、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるような操作を「恒等置換」という。これは、順列の入れ換えが起こっていない。また、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

から

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるような操作を「巡回置換」という[*4]。結論から述べると、巡回置換は「偶置換」である。

置換の中で、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[*1] 2 回同じ数が現れることはないということ。
[*2] $\mathbb{N}$ は自然数をさす。$n \in \mathbb{N}$ は「n は自然数である」という程度の意味。
[*3] 結果も置換と呼ぶ流派の方が実は多い。
[*4] 佐武一郎 著「線形代数学」(裳華房) より

となるような操作や、

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

となるような操作を「互換」という。「互換」とは、ある順列

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

の中から任意に 2 つの数を選び、その 2 つの数のみを入れ換える操作をさす。互換はもちろん、置換の一種である。

偶数回 (0 回を含む) 互換 (数の入れ換え) を行うような操作を「偶置換」、奇数回互換を行うような操作を「奇置換」という。基本順列

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

に戻すために偶数回互換 (数の入れ換え) を行う必要のある順列を「偶順列」、奇数回互換を行う必要のある順列を「奇順列」と呼ぶ。ここで、先ほど出てきた基本順列は偶順列であると定義する。なお、一般的な書物では、偶順列のことを「偶置換」、奇順列のことを「奇置換」と呼ぶことが多いことに注意。

偶順列と奇順列を用いて符号を定義したい。そのような関数を「符号関数」といい、ϵ であらわす。符号関数 ϵ は次のように定義される。

$$\epsilon\big(\text{偶順列}\big) = 1$$
$$\epsilon\big(\text{奇順列}\big) = -1$$

すなわち、偶順列に対しては $+1$ を、奇順列に対しては-1 を返すようなものを符号関数と呼ぶ。レヴィ・チヴィタ記号 ϵ_{ijk} は符号関数の代表例である。添え字の i, j, k がそれぞれ互いに数が重複しなければ、それは順列とみなせるからである。

補足事項：行列式の定義式は、一見非常に複雑なものに見える。しかし、実際は 2 次または 3 次の行列式から類推して、「同じ行または同じ列の成分同士の積はとりたくない」という動機のもとであのように定式化されている。