Podstawy

W matematyce **zbiór oraz należenie do zbioru są pojęciami pierwotnymi**, to znaczy, że nie definiuje się ich. Bazujemy więc na intuicji – chociaż historia pokazała, że naiwne postrzeganie zbioru prowadzi do problemów (paradoks Russella)

Oznaczenie 1

Dla zaznaczenia, że obiekt a *jest elementem zbioru* A (mówimy też, że a *należy do zbioru* A lub a *jest w* A) używamy symbolu $\in$ i piszemy:

$$a \in A.$$

Jeżeli obiekt a nie jest elementem zbioru A, to zamiast pisać $\neg(a \in A)$ piszemy:

$$a \notin A.$$

Oznaczenie 2

W większości przypadków używa się następujących oznaczeń:

- wielkich liter $A, B, C, ..., X, Y, Z$ do oznaczenia **zbiorów**;
- małych liter $a, b, c, ..., x, y, z$ do oznaczenia **elementów zbiorów**;
- liter kaligraficznych $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ..., \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ do oznaczenia **rodzin zbiorów**, czyli zbiorów, których elementami są zbiory.

Oznaczenie 3

W matematyce są też pewne „specjalne” oznaczenia zbiorów.

- $\emptyset$ lub $\varnothing$ – zbiór pusty.
- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych.
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych.
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych.
- $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

Podsumowanie 1

W matematyce większość zbiorów określamy za pomocą własności wyróżniającej elementy zbioru. Jeśli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową, to zapis

$$A = \{x : x \in X \wedge \varphi(x)\}$$

czytamy:

A jest zbiorem wszystkich tych x, które należą do X i mają własność φ.

Często piszemy krócej

$$A = \{x \in X : \varphi(x)\} \quad \text{lub} \quad A = \{x \in X | \varphi(x)\},$$

albo nawet

$$A = \{x : \varphi(x)\} \quad \text{lub} \quad A = \{x | \varphi(x)\},$$

gdy zbiór X jest znany.

Zadanie 1

Zapisz każdy z poniższych wzorów poprzez formułę wyróżniającą.

1. $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\} = \{2^x : x \in \mathbb{N}\}$
2. $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15\} = \{3x : x \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{0, 1, 3, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}$
4. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{x \in \mathbb{N} \colon 3 \leqslant x \leqslant 8\}$
5. $\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^x : x \in \mathbb{Z}\}$
6. $\{\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \dots\} = \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

Iloczyn kartezjański

Parą uporządkowaną elementów a i b oznacza się symbolem (a, b). Element a nazywa się pierwszą współrzędną, element b zaś – drugą współrzędną pary (a, b).

Przykład 1

Przykłady par uporządkowanych:

(a) $(2, 4)$

(b) $(4, 2)$

(c) (l, m),

(d) $(\{2, 5\}, \{3, 2\})$

(e) $((2, 4), (4, 2))$

(f) $(2, \{1, 2, 3\})$

(g) $(\mathbb{R}, (0, 0))$

Definicja 1

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Przykład 2

Jeśli $A = \{k, \ell, m\}$ oraz $B = \{q, r\}$, wtedy

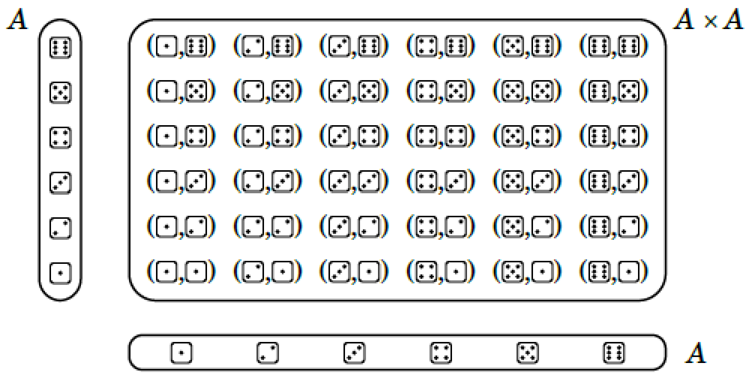
$$A \times B = \{(k, q), (k, r), (\ell, q), (\ell, r), (m, q), (m, r)\}.$$

Fakt 1

Jeśli A i B są skończonymi zbiorami, to $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Przykład 3

Niech A = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} będzie zbiorem składającym się z sześciu ścian kostki. Na mocy faktu 1 $|A \times A| = 6 \cdot 6 = 36$. Możemy myśleć o zbiorze $A \times A$ jako o zbiorze wszystkich możliwych wyników dwukrotnego rzutu kostką. Każdy element iloczyny jest parą uporządkowaną, którą można postrzegać jako $(\textit{wynik } 1\textit{szego rzutu}, \textit{wynik } 2\textit{go rzutu})$.



0.0.1 Suma, przekrój i różnica zbiorów

Definicja 2

Niech A i B będą zbiorami.

- Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ lub } x \in B\}$.
- Przekrojem (iloczynem) zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ oraz } x \in B\}$.
- Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \setminus B = A - B = \{x \colon x \in A \text{ oraz } x \notin B\}$.

Przykład 4

Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$ oraz $C = \{1, 2, 3\}$.

1. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$
2. $A \cap B = \{d, e\}$
3. $A \setminus B = \{a, b, c\}$
4. $B \setminus A = \{f\}$
5. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a, b, c, f\}$
6. $A \cup C = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}$
7. $A \cap C = \varnothing$
8. $A \setminus C = \{a, b, c, d, e\}$
9. $(A \cap C) \cup (A \setminus C) = \{a, b, c, d, e\}$
10. $(A \cap B) \times B = \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f)\}$
11. $(A \times C) \cap (B \times C) = \{(d, 1), (d, 2), (d, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3)\}$

Dopełnienie zbioru

Definiując dopełnienie zbioru, musimy odwołać się do całej przestrzeni (uniwersum), czyli pewnego ustalonego zbioru. Zwracamy uwagę, że po angielsku mawia się na to *universal set*.

Przykład 5

Naturalną przestrzenią do rozważania zbioru liczb pierwszych $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ jest cały zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Oczywiście $P \subseteq \mathbb{N}$.

Definicja 3

Nech X będzie ustalonym zbiorem i niech A będzie jego podzbiorem. Wtedy zbiór $X \setminus A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A do zbioru X (lub względem zbioru X). Jeśli z kontekstu jest jasne, czym jest zbiór X, to zbiór $X \setminus A$ nazywamy krótko dopełnieniem zbioru A i oznaczamy przez A', $A^{\complement}$ lub $\overline{A}$.

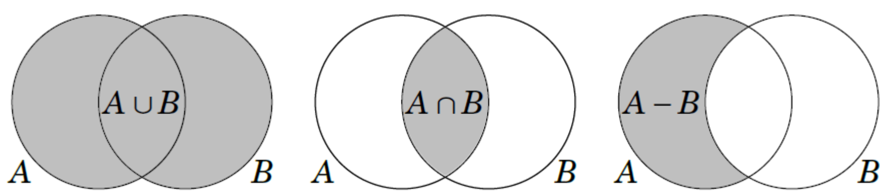
Przykład 6

Jeśli P jest zbiorem liczb pierwszych, to

$$P' = \mathbb{N} \setminus P = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \ldots\}.$$

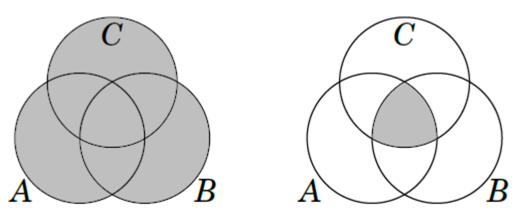
Diagramy Venna

Bardzo pomocnym narzędziem do analizowania działań na zbiorach mogą okazać się diagramy Venna. Poniżej działania na zbiorach na dwóch ukazane za pomocą wspomnianych diagramów Venna.



(a) (b) (c)

Jeśli zaś chodzi o sumę i iloczyn trzech zbiorów:

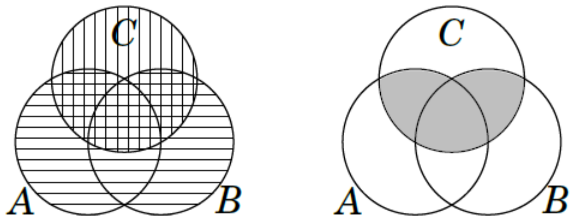


$A \cup B \cup C$ $A \cap B \cap C$

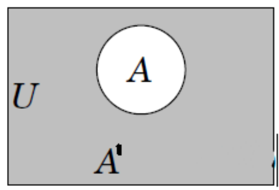
(a) (b)

Przykład 7

Załóżmy, że chcemy sobie zwizualizować zbiór $(A \cup B) \cap C$. Zaczniemy od narysowania trzech przecinających się okręgów, a następnie poziomymi kreskami zaznaczmy sumę $A \cup B$. Teraz pionowymi kreskami oznaczymy zbiór C. Jako że interesuje nas przekrój, więc zbiór $(A \cup B) \cap C$ ma swoje odzwierciedlenie w „zakratkowanym"obszarze.



W przypadku dopełnienia zbioru, istotna jest przestrzeń, w której żyje rozważany zbiór. Poniżej zbiór $A \subseteq U$ oraz zaznaczone dopełnienie zbioru A, czyli zbiór A'



PRZYKŁAD 8

Dzięki diagramom Venna można łatwo pokazać prawa de Morgana dla zbiorów. Zauważmy, że $(A \cap B)' = A' \cup B'$, ponieważ zbiór po lewej stronie równości to dokładnie zbiór po prawej stronie równości, zaprezentowanym poniżej na diagramie Venna.