

Teoria

Niech $a \geq 1$ i $b > 1$ będą stałymi i $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób

1. jeżeli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ dla $\epsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,
2. jeżeli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$,
3. jeżeli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ dla $\epsilon > 0$ i $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$, to $T(n) = \Theta(f(n))$.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej opisuje czas działania algorytmu, który dzieli problem rozmiaru n na a podproblemów, każdy rozmiaru $\frac{n}{b}$. Każdy z a podproblemów jest rozwiązywany rekurencyjnie w czasie $T(\frac{n}{b})$. Koszt dzielenia problemów oraz łączenia rezultatów częściowych jest opisany funkcją $f(n)$.

Zadania

Zadanie 1. Skorzystaj z metody rekurencji uniwersalnej i podaj dokładne asymptotyczne oszacowania dla funkcji

- a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
- b) $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + n$
- c) $T(n) = 8T(\frac{n}{4}) + n$
- d) $T(n) = 8T(\frac{n}{4}) + n^2$
- e) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
- f) $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$

Zadanie 2. Napisz rekurencyjne funkcje liczące oraz program główny

- a) $n!$
- b) suma elementów nieparzystych z liczb $< 1, 2, \dots, n >$
- c) suma elementów podzielnych przez trzy z liczb $< 1, 2, \dots, n >$
- d) wyrazy ciągu $a_0 = 0, a_{n+1} = 2a_n + 3$
- e) wyrazy ciągu ($f(0) = 0, f(1) = 1, f(n+1) = 3f(n) - f(n-1)$ dla $n > 0$)

Zadanie 3. Mając do dyspozycji funkcje:

- `głowa(A)` - dla tablicy / łańcucha `A` zwraca pierwszy element

- $\text{ogon}(A)$ - dla tablicy / łańcucha A zwraca tablicę bez pierwszego elementu
- $\text{jestPusta}(A)$ - dla tablicy / łańcucha A zwraca informację o tym czy tablica/ łańcuch jest pusty

napisz w rekurencyjne funkcje, które (UWAGA: nie można używać pętli.):

- wypiszą na ekranie rewers słowa
- zwrócą informację, czy dany element x występuje w zbiorze nieuporządkowanym