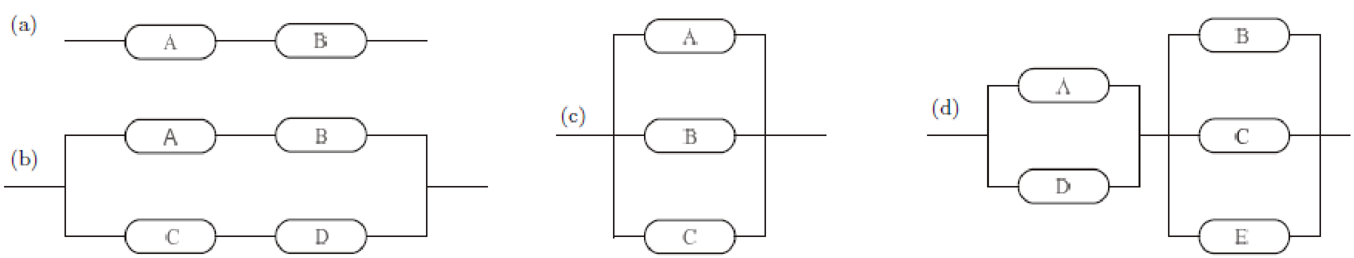
1 Prawdopodobieństwo

Zadanie 1. Nowy wirus komputerowy może przedostać się do systemu za pośrednictwem poczty elektronicznej z prawdopodobieństwem 0.3 lub Internetu z prawdopodobieństwem 0.4. Ponadto wirus przedostaje się do systemu jednocześnie poprzez pocztę elektroniczną i Internet z prawdopodobieństwem 0.15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wirus w ogóle nie przedostanie się do systemu? Odp. 0.45.

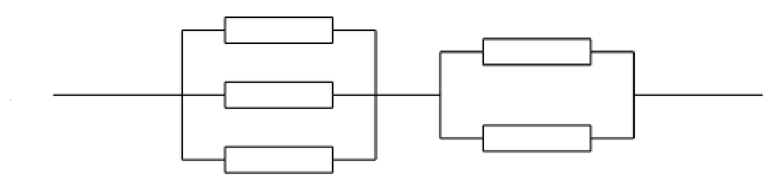
Zadanie 2. Program komputerowy sprawdzany jest za pomocą trzech niezależnych testów. Jeśli wystąpi błąd, testy te wykryją go z prawdopodobieństwem odpowiednio 0.2, 0.3 i 0.5. Załóżmy, że program zawiera błąd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zostanie on wykryty w co najmniej jednym teście? Odp. 0.72.

Zadanie 3. Program komputerowy składa się z dwóch bloków napisanych niezależnie przez dwóch różnych programistów. Prawdopodobieństwo, że w pierwszym bloku jest błąd wynosi 0.2, a w drugim 0.3. Jeśli program zwrócił błąd, jakie jest prawdopodobieństwo, że pojawił się on w obu blokach? Odp. 0.1364.

Zadanie 4. Oblicz niezawodność podanych systemów, jeżeli niezawodność elementów A, B, C, D i E jest równa odpowiednio 0.9, 0.8, 0.7, 0.6 i 0.5. Odp. (a) 0.72 (b) 0.8376 (c) 0.994 (d) 0.9312.



Zadanie 5. Oblicz niezawodność systemu, jeżeli prawdopodobieństwo awarii każdego elementu wynosi 0.3, a elementy są niezależne od siebie. Odp. 0.88543.



Zadanie 6. Producent komputerów otrzymuje części od trzech dostawców w następujących proporcjach: 10% od D_1, 70% od D_2 i 20% od D_3. Wadliwość elementów dostarczanych przez D_1, D_2 i D_3 wynosi odpowiednio 5%, 3% i 6%.

1. Jaka jest wadliwość dostaw ogółem? Odp. 0.038.
2. Klient zgłosił, że pewna część jego niedawno zakupionego komputera jest uszkodzona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że część ta została dostarczona przez dostawcę D_1? Odp. $\frac{5}{38} \approx 0.1316$.

Zadanie 7. Kondensatory są dostarczane przez trzy zakłady, przy czym prawdopodobieństwo, że dany detal był przygotowany w pierwszym zakładzie wynosi 0.2, w drugim 0.3, w trzecim 0.5. Niezawodność kondensatorów pochodzących z pierwszego, drugiego i trzeciego zakładu jest równa odpowiednio 0.9, 0.92, 0.808.

1. Jaka jest niezawodność kondensatorów ogółem? Odp. 0.86.
2. Przypuśćmy, że kondensator nie przetrzymał ustalonego czasu pracy i uległ uszkodzeniu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodził on z
   (a) pierwszego zakładu? Odp. $\frac{1}{7} \approx 0.1434$.
   (b) drugiego zakładu? Odp. $\frac{6}{35} \approx 0.171$.
   (c) trzeciego zakładu? Odp. $\frac{24}{35} \approx 0.68$.

2 Zmienne losowe dyskretne

Zadanie 8. Wirus komputerowy próbuje uszkodzić dwa pliki. Prawdopodobieństwo uszkodzenia pierwszego pliku wynosi 0.4, a drugiego 0.3 niezależnie od pierwszego. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę uszkodzonych plików.

1. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.
2. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 9. Dzienna liczba awarii zasilania jest zmienną losową o rozkładzie

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.7	0.2	0.1

Mała firma zajmująca się handlem internetowym szacuje, że każda awaria sieci skutkuje stratą 500 USD. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dziennych strat Y tej firmy z powodu awarii zasilania. Odp. $\mathbb{E}[Y] = 200$, $\mathrm{Var}\,(Y) = 110000$.

Zadanie 10. Funkcja prawdopodobieństwa łącznego zmiennych losowych X, Y dana jest w tabeli

(a)

X \ Y	0	2
-1	0.045	0.055
3	0.405	0.495

(b)

X \ Y	1	3
0	0.4	0.4
2	0.05	0
5	0.05	0.1

(c)

X \ Y	-2	0	1
0	0.1	0	0.2
2	0.2	0.2	0.3

1. Wyznacz rozkłady brzegowe.
2. Sprawdź, czy zmienne X, Y są niezależne. Odp. (a) Tak (b) Nie (c) Nie.

Zadanie 11. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę awarii sprzętu, a zmienna Y liczbę awarii oprogramowania danego dnia w pewnej pracowni komputerowej. Funkcja prawdopodobieństwa łącznego zmiennych dana jest w tabeli

X \ Y	0	1
0	0.6	0.1
1	0.1	0.2

1. Sprawdź, czy awarie sprzętu i oprogramowania są niezależne. Odp. Nie.
2. Oblicz oczekiwaną całkowitą liczbę awarii w pracowni. Odp. $\mathbb{E}[X + Y] = 0.6$.

Zadanie 12. Wyszukiwarka internetowa wyszukuje pewne słowo kluczowe na niezależnych względem siebie stronach internetowych. Uważa się, że 20% witryn zawiera to słowo kluczowe. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej 5 z pierwszych 10 witryn zawiera dane słowo kluczowe. Odp. 0.0328.

Zadanie 13. Inżynier kontroli jakości sprawdza jakość produkowanych komputerów. Załóżmy, że 5% komputerów ma defekty, a te występują niezależnie od siebie. Oblicz prawdopodobieństwo, że w dostawie 20 komputerów dokładnie 3 będą wadliwe. Odp. 0.0596.

Zadanie 14. Średnio 1 komputer na 800 ulega awarii podczas silnej burzy. Pewna firma miała 4000 działających komputerów, kiedy okolicę nawiedziła silna burza.

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie 10 komputerów uległo awarii. Odp. 0.01809875.
2. Oblicz prawdopodobieństwo, że mniej niż 10 komputerów uległo awarii. Odp. 0.9682626.

Jaki będzie wynik w przypadku aproksymacji rozkładem Poissona? Odp. 1) 0.01813279 2) 0.9681719.

Zadanie 15. Liczba samoistnych wyłączeń komputera w miesiącu ma rozkład Poissona o średniej 0.25. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu następnego roku komputer wyłączy się co najmniej 3 razy. Odp. 0.57681.

Zadanie 16. Awarie sieci to nieoczekiwane, rzadkie zdarzenia, które występują średnio co 3 tygodnie. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż 4 awarii w ciągu 21 tygodni. Odp. 0.827.

3 Zmienne losowe ciągłe

Zadanie 17. Żywotność (w latach) pewnych dysków twardych jest ciągłą zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} c - \frac{1}{50}x & x \in (0,10) \\ 0 & x \notin (0,10) \end{cases}$$

1. Oblicz stałą c. Odp. $c = 0.2$
2. Oblicz prawdopodobieństwo, że dysk przestanie działać w ciągu pierwszych 5 lat. Odp. 0.75
3. Oblicz oczekiwaną średnią żywotność dysku. Odp. $3\frac{1}{3}$

Zadanie 18. Czas (w godzinach) instalacji pewnego modułu oprogramowania ma gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^3) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

1. Oblicz stałą c. Odp. $c = \frac{4}{3}$
2. Oblicz prawdopodobieństwo, że instalacja tego modułu zajmie mniej niż pół godziny. Odp. $P(X < \frac{1}{2}) = \frac{31}{48} \approx 0.6458$
3. Oblicz oczekiwany średni czas instalacji modułu. Odp. 0.4 godz. (24 min)

Zadanie 19. W pewnej dużej korporacyjnej sieci komputerowej loguje się średnio 25 użytkowników na godzinę.

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu następnych 6 minut nie zaloguje się żaden użytkownik? Odp. 0.0821
2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na następne logowanie trzeba będzie czekać od 2 do 3 minut? Odp. 0.1481.

Zadanie 20. Drukarka otrzymuje średnio 8 zadań na godzinę.

1. Oblicz średni czas między zadaniami. Odp. 0.125 godz. (7.5 min)
2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kolejne zadanie zostanie wysłane w ciągu 1 minuty? Odp. 0.1243.

Zadanie 21. Czas potrzebny drukarce na wykonanie zadania drukowania jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = \frac{1}{12}$ sek^{-1}. O godzinie 10:00 wysyłamy zadanie drukowania, które pojawia się jako trzecie w kolejce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zadanie zostanie wykonane przed 10:01? Odp. 0.8753.

Zadanie 22. Program jest podzielony na 5 bloków, które są kompilowane jeden po drugim. Czas kompilacji każdego bloku ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0.5$ min^{-1}. Oblicz prawdopodobieństwo, że program zostanie skompilowany w mniej niż 8 minut. Odp. 0.3712.

Zadanie 23. Instalacja niektórych pakietów oprogramowania wymaga pobrania 82 plików. Pobranie jednego pliku zajmuje średnio 15 sekund, a wariancja wynosi 16 sek^2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oprogramowanie zostanie zainstalowane w mniej niż 20 minut? Odp. 0.2033.

Zadanie 24. Aktualizacja pewnego pakietu oprogramowania wymaga instalacji 68 nowych plików. Pliki są instalowane kolejno, jeden po drugim. Czas instalacji jest losowy, przy czym potrzeba średnio 15 sekund, z wariacją 11 sek^2 na jeden plik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cały pakiet zostanie zaktualizowany w czasie krótszym niż 12 minut? Odp. 0.

Zadanie 25. Z elektronicznego centrum transmisji zostało wysłanych 70 niezależnych wiadomości. Komunikaty przetwarzane są sekwencyjnie, jeden po drugim. Czas transmisji jednej wiadomości ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 5$ min^{-1}. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie wiadomości będą wysłane w mniej niż 12 minut. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego. Odp. 0.1151.

Zadanie 26. Komputer przetwarza zadania w kolejności ich otrzymania. Czas potrzebny na wykonanie jednego zadania ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0.5$ min^{-1}. Oblicz prawdopodobieństwo, że pakiet 50 zadań będzie przetworzony w mniej niż 2 godziny. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego. Odp. 0.9214.

4 Metoda Monte Carlo

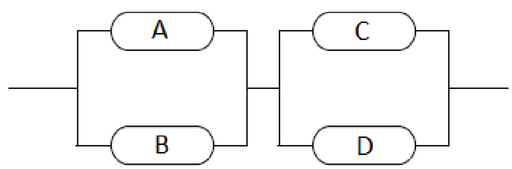
Zadanie 27. Dany jest program obliczający przybliżoną wartość liczby π metodą Monte Carlo. Uruchom kod i wyjaśnij, na czym polega pomysł.

```
N <- 100000
r <- 1
x <- runif(N, min= -r, max= r)
y <- runif(N, min= -r, max= r)
in.circle <- (x^2 + y^2 <= r^2)
pi.estimate <- 4 * sum(in.circle) / N
print(pi.estimate)
```

Zadanie 28. System składa się z dwóch podsystemów połączonych szeregowo, jak pokazano na rysunku. Żywotność (w latach) elementów A, B, C, D ma rozkład wykładniczy z parametrem odpowiednio 1, 0.1, 0.2, 0.2.

1. Oszacuj średni czas życia systemu za pomocą symulacji Monte Carlo. Przyjmij $N = 10000$. Odp. 4.75.
2. Oszacuj prawdopodobieństwo, że podsystem AB ulegnie awarii przed awarią podsystemu CD, korzystając z symulacji Monte Carlo dla $N = 10000$. Odp. 0.46.

Wskazówka: Zmienną losową Z_{AB} oznaczającą żywotność podsystemu AB można opisać wzorem $Z_{AB} = \max(Z_A, Z_B)$, gdzie Z_A - żywotność elementu A, Z_B - żywotność elementu B. Podobnie żywotność systemu $Z = \min(Z_{AB}, Z_{CD})$. Skorzystaj z funkcji `pmax` i `pmin`.



Zadanie 29. Oszacuj wartość całki $\int_0^4 e^{-x^2}dx$ i porównaj z wynikiem otrzymanym na `wolframalpha.com`.

Zadanie 30. Oszacuj prawdopodobieństwo $P(X > Y)$ dla $X \sim \text{Poi}(3)$, $Y \sim \text{Poi}(5)$ tak, aby błąd przybliżenia wynosił 0.005 z prawdopodobieństwem 0.95. Odp. 0.185.

Zadanie 31. Pokaż, że standaryzowana suma pięćdziesięciu zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = \frac{1}{3}$ ma w przybliżeniu standardowy rozkład normalny $N(0, 1)$. Zrób odpowiedni rysunek.

Zadanie 32. Twórcy oprogramowania codziennie poprawiają losową liczbę błędów znalezionych w kodzie.
Liczba błędów X_t w dniu t jest modelowana rozkładem Poissona(λ_t) z parametrem będącym najmniejszą liczbą błędów znalezionych w poprzednich trzech dniach: $\lambda_t = \min(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3})$. Załóżmy, że w ciągu pierwszych trzech dni programiści znaleźli 28, 22 i 18 błędów.

1. Ile czasu potrzeba na znalezienie wszystkich błędów? Odp. ok. 19.7 dni przy $N = 1000$ symulacji.
2. Oszacuj prawdopodobieństwo, że po 21 dniach nie wszystkie błędy zostaną wykryte. Odp. ok. 0.34.
3. Oszacuj całkowitą liczbę błędów w oprogramowaniu. Odp. ok. 222.

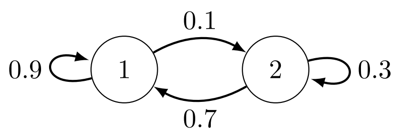
```
N <- 1000; Time <- rep(0,N); Nerrors <- rep(0,N)
for (k in 1:N) {
  Last3 <- c(28,22,18)
  Found <- sum(Last3)
  T <- 3; X <- Last3[3]
  while (X > 0) {
    # oblicz parametr lambda
    # wygeneruj zmienna losowa o rozkladzie Poissona
    T <- T + 1
    Found <- Found + X
    Last3 <- c(Last3[2:3], X)
  }
  Nerrors[k] <- Found
  Time[k] <- T - 1
}
mean(Time); mean(Time>21); mean(Nerrors)
```

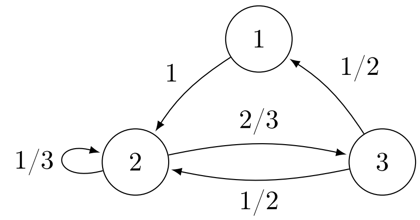
5 Procesy stochastyczne

Zadanie 33. Narysuj graf łańcucha Markowa odpowiadający macierzy prawdopodobieństw przejść

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 4/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 34. Zapisz macierz prawdopodobieństw przejść dla łańcucha Markowa przedstawionego grafem





Zadanie 35. Mała pracownia komputerowa ma 2 terminale. Liczba studentów pracujących w tym laboratorium jest rejestrowana na koniec każdej godziny. Zauważono następującą tendencję

- jeśli w laboratorium nie ma studentów lub jest jeden student, to liczba studentów w ciągu następnej godziny zwiększa się o 1 z prawdopodobieństwem 0.5 lub pozostaje bez zmian z prawdopodobieństwem 0.5;
- jeśli w laboratorium jest dwóch studentów, to liczba studentów w ciągu następnej godziny zmniejsza się o 1 z prawdopodobieństwem 0.5 lub pozostaje bez zmian z prawdopodobieństwem 0.5.

Zapisz macierz przejścia dla tego łańcucha Markowa i oblicz prawdopodobieństwo, że o 10:00 nikt nie będzie pracował, jeżeli o 7:00 laboratorium było puste. Odp. 0.125.

Zadanie 36. System komputerowy może działać w dwóch różnych trybach. Co godzinę przełącza się w inny tryb lub pozostaje w tym samym zgodnie z macierzą przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Oblicz macierz przejścia po dwóch godzinach. Odp. $P^2 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.52 \end{bmatrix}$
2. Jeśli system znajduje się w trybie I o godzinie 17:30, jakie jest prawdopodobieństwo, że w nim pozostanie o 20:30 tego samego dnia? Odp. 0.496.

Zadanie 37. Komputer otrzymuje średnio 6 zadań na minutę. Liczba zadań jest modelowana procesem liczącym dwumianowym o przedziałach długości $\Delta = 2$ sekundy.

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 10 sekund zostaną wysłane więcej niż 2 zadania. Skorzystaj z tablic dystrybuanty rozkładu dwumianowego. Odp. 0.058.
2. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 100 sekund zostanie wysłanych więcej niż 20 zadań. Skorzystaj z funkcji `pbinom` w R. Odp. 0.00032.

Zadanie 38. Drukarka otrzymuje średnio 3 zadania na minutę, a ich liczba jest modelowana procesem dwumianowym.

1. Ustal długość Δ przedziałów czasowych tak, aby prawdopodobieństwo pojawienia się nowego zadania w każdym z nich wynosiło 0.3. Odp. 6 sek.
2. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby zadań wysłanych do drukarki w ciągu 1 godziny. Odp. 180 i 126.
3. Oblicz średni czas i wariancję czasu między zadaniami. Odp. 1/3 min i 0.078 min^2.

Zadanie 39. Dostawca usług internetowych rejestruje średnio 12 nowych połączeń na minutę. Liczba tych połączeń jest modelowana procesem liczącym dwumianowym.

1. Ustal długość Δ przedziałów czasowych tak, aby prawdopodobieństwo pojawienia się nowego połączenia w każdym z nich wynosiło 0.15. Odp. 0.75 sek.
2. Oblicz średni czas i wariancję czasu między dwoma kolejnymi połączeniami. Odp. 5 sek. i 21.16 sek.^{2}

Zadanie 40. Wiadomości tekstowe napływają do centrum zarządzania SMS zgodnie z procesem liczącym dwumianowym przy ustalonych 20 przedziałach czasowych na minutę. Intensywność napływu to 40 wiadomości na godzinę.

1. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 45 wiadomości w ciągu następnej godziny? Odp. 0.231.
2. Oblicz odchylenie standardowe liczby wiadomości otrzymanych w godzinach od 10:00 do 10:30. Odp. 4.4.

6 Teoria kolejek

Zadanie 41. Korzystając z prawa Little'a, oblicz oczekiwany czas obsługi, jeżeli w banku przebywa zazwyczaj 15 klientów, a nowi klienci przychodzą średnio co 3 minuty. Odp. 45 min.

Zadanie 42. Bankomat obsługuje 10 klientów na godzinę, a transakcje każdego z nich zajmują średnio 2 minuty. System ten jest modelowany jednoserwerowym procesem kolejkowym Bernoulli'ego o przedziałach czasowych długości $\Delta = 10$ sek. Zapisz macierz prawdopodobieństwa przejścia dla liczby klientów przy bankomacie na końcu każdego przedziału czasowego.

$$\text{Odp. } P = \begin{bmatrix} 35/36 & 1/36 & 0 & 0 & \dots \\ 35/432 & 386/432 & 11/432 & 0 & \dots \\ 0 & 35/432 & 386/432 & 11/432 & \dots \\ 0 & 0 & 35/432 & 386/432 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Zadanie 43. Myjnia samochodowa jest modelowana jednoserwerowym procesem kolejkowym Bernoulli'ego o przedziałach czasowych długości $\Delta = 2$ min i nieograniczonej pojemności. Samochody przyjeżdżają średnio co 10 minut, a czas obsługi każdego z nich wynosi średnio 6 minut. Załóżmy, że o 10:00 myjnia jest pusta. Oblicz prawdopodobieństwo, że o godzinie 10:04 jeden samochód zostanie umyty, a drugi będzie czekał w kolejce. Odp. $\frac{2}{75}$.

$$\text{Odp. } P = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & \dots \\ 4/15 & 9/15 & 2/15 & 0 & \dots \\ 0 & 4/15 & 9/15 & 2/15 & \dots \\ 0 & 0 & 4/15 & 9/15 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$