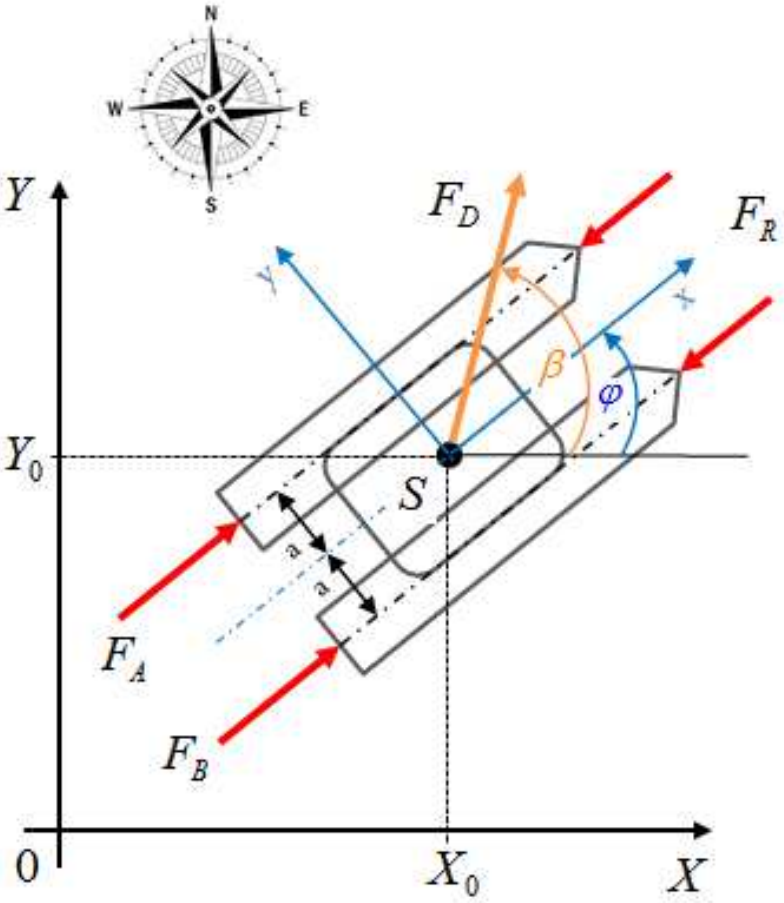
Unmanned Surface Vehicle (USV)

Schiffsdynamik

Aufgabenstellung

Das dynamische Modell des Katamarans beschreibt die Schiffsdynamik unter der Voraussetzung zweier symmetrischer Antriebe. Das Modell wird stufenweise aufgebaut.

Modell 1: ohne Reibkräfte
ohne Driftkräfte durch Wellen, Wind und Strömungen
ohne Corioliskräfte



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Modell 1

Schubkraft Motor A	F_A	
Schubkraft Motor B	F_B	
Abstand der Motoren zur Mittelachse	a	
Schiffsmasse	m_S	
Massenträgheitsmoment des Gesamtschiffes	J_S	
Startwinkel	φ_0	
Kurswinkel	$\varphi(t)$	
Startkoordinaten	X_0	Y_0
Schiffsbewegung im Inertialsystem	$X(t)$	$Y(t)$

Bewegungsgleichungen (reibungsfrei)

Drehimpulssatz um z

$$J_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi\right) = -F_A \cdot a + F_B \cdot a$$

Drehwinkel

$$\varphi(t) = \int_0^t \int_0^t (F_B - F_a) \cdot \frac{a}{J_S}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi(t) = \frac{a \cdot t^2 \cdot (F_A - F_B)}{2 \cdot J_S} + \varphi_0$$

Impulssatz in x-Richtung

$$m_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x\right) = F_A + F_B$$

Impulssatz in y-Richtung

$$m_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y\right) = 0$$

Beschleunigung in x-Richtung

$$x'' = \frac{F_A + F_B}{m_S}$$

Geschwindigkeit in x-Richtung

$$x' = \frac{F_A + F_B}{m} \cdot t + C_1 \qquad C_1 = v_{x0}$$

Weg in x-Richtung

$$x = \frac{F_A + F_B}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 \qquad C_2 = x_0$$

Beschleunigung in y-Richtung

$$y'' = 0$$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Bewegungsgleichungen (reibungsfrei)

Geschwindigkeit in y-Richtung	$y' = C_3$	$C_3 = v_{y0} = 0$
Weg in y-Richtung	$y = C_3 \cdot t + C_4$	$C_4 = y_0$

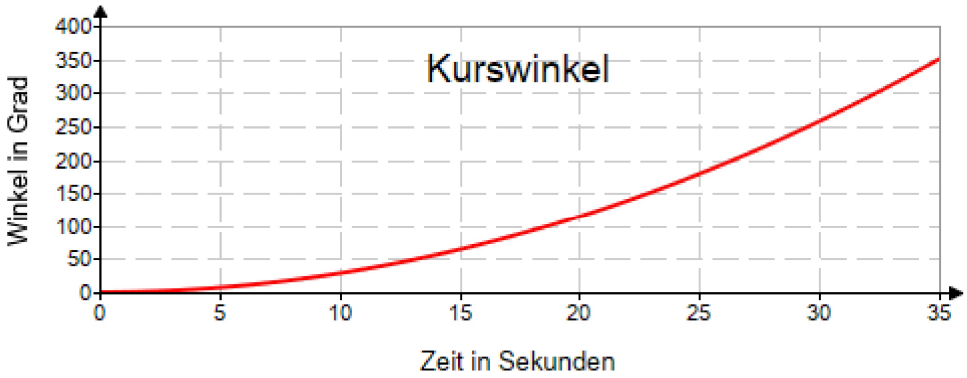
Beispielrechnung

gegebene Größen

Schubkraft Motor A	$F_A := 1\ N$
Schubkraft Motor B	$F_B := 2\ N$
Abstand der Motoren zur Mittelachse	$a := 0.1\ m$
Schiffsmasse	$m_S := 100\ kg$
Massenträgheitsmoment Gesamtschiff	$J_S := 10 \cdot kg \cdot m^2$
Startwinkel	$\varphi_0 := 0\ deg$
Startkoordinate in X-Richtung (Inertialsystem)	$X_0 := 1 \cdot m$
Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung	$v_{x0} := 0$
Startkoordinate in Y-Richtung (Inertialsystem)	$Y_0 := 1 \cdot m$
Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung	$v_{y0} := 0$

Grenzen	$t_{max} := 35 \cdot s \qquad Step := 0.1 \cdot s$
Simulationszeit	$t := 0 \cdot s, Step .. t_{max}$
Kurswinkel	$\varphi(t) := \int_0^t \int_0^t (F_B - F_A) \cdot \frac{a}{J_S} \, dt \, dt + \varphi_0$
Geschwindigkeit in x	$v_x(t) := \frac{F_A + F_B}{m_S} \cdot t + v_{x0}$

Nur nichtkommerzielle Verwendung



Weg in x-Richtung
(körperfestes Koordinatensystem)

$$x(t) := \frac{F_A + F_B}{m_S} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Impuls in y-Richtung ist null

$$y(t) := 0 \cdot \boldsymbol{m}$$

Bahngeschwindigkeit in X

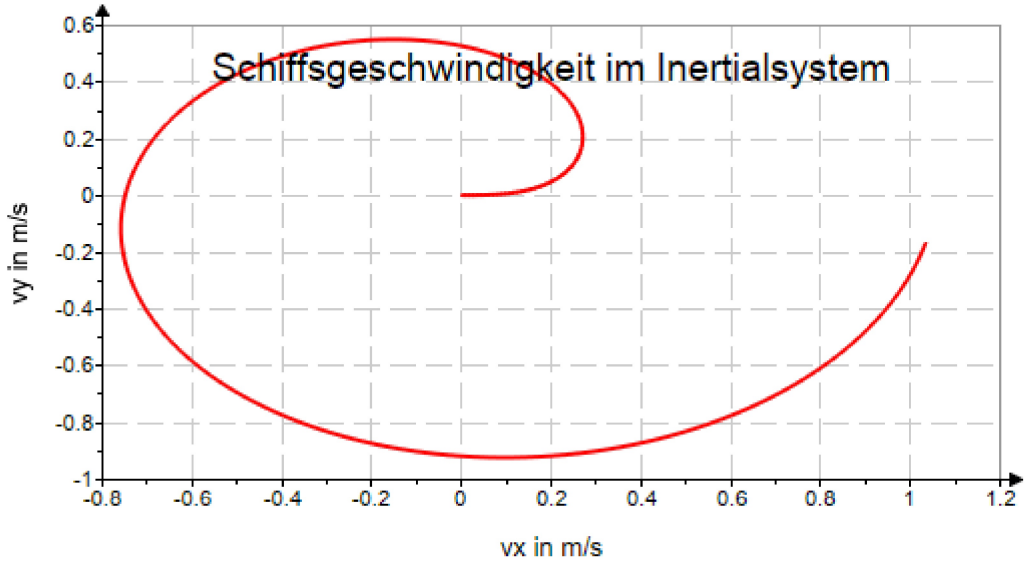
$$V_X(t) = x'(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - y'(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

Bahngeschwindigkeit in Y

$$V_Y(t) = y'(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + x'(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

$$V_X(t) := v_x(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$

$$V_Y(t) := v_x(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

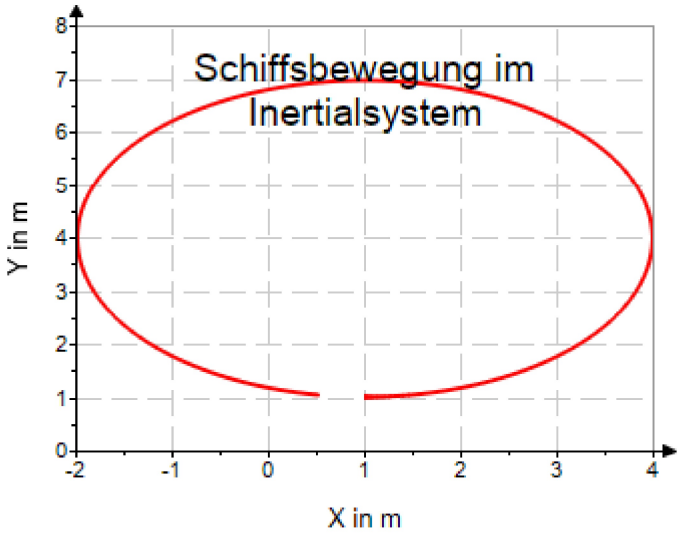


Nur nichtkommerzielle Verwendung

Koordinatentransformation in Bahnkoordinaten

Bahn in X $$X(t) := \int_0^t V_X(t)\,\mathrm{d}t + X_0$$

Bahn in Y $$Y(t) := \int_0^t V_Y(t)\,\mathrm{d}t + Y_0$$



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Modell 2

Reibkräfte in Fahrtrichtung (x-Richtung)
Reibkräfte quer zur Fahrtrichtung (y-Richtung)
Reibkräfte in Rotationsrichtung
Driftkräfte durch Wind
Geschwindigkeiten durch Strömungen

Schubkraft Motor A	F_A	
Schubkraft Motor B	F_B	
Abstand der Motoren zur Mittelachse	a	
Schiffsmasse	m_S	
Massenträgheitsmoment des Gesamtschiffes	J_S	
Driftkräfte (Wind)	F_D	
Driftwinkel (Wind)	β	
Strömungsgeschwindigkeit	v_{St}	
Strömungswinkel	γ	
STOKES'sche Reibung in Fahrtrichtung	k_x	
STOKES'sche Reibung quer zur Fahrtrichtung	k_y	
Torsionsreibung um die z-Achse	k_t	
Startwinkel	φ_0	
Kurswinkel	$\varphi(t)$	
Startkoordinaten	X_0	Y_0
Schiffsbewegung im Inertialsystem	$X(t)$	$Y(t)$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Bewegungsgleichungen Stufe 2

Drehung

Drehimpulssatz um z $$J_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi\right) = -F_A \cdot a + F_B \cdot a - k_t \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\right)$$

Winkelbeschleunigung $$\varphi'' = \frac{a}{J_S} \cdot \left(F_B - F_A\right) - \frac{k_t}{J_S} \cdot \varphi'$$

x-Achse

Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung $$v_{Stx} = v_{St} \cdot cos\left(\gamma - \varphi\right)$$

Reibkraft für Translation in x $$F_{Rx} = k_x \cdot \left(v_x - v_{Stx}\right)$$

Driftkraft in x-Richtung (Winddrift) $$F_{Dx} = F_D \cdot cos\left(\beta - \varphi\right)$$

Impulssatz in x-Richtung $$m_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x\right) = F_A + F_B - F_{Rx} + F_{Dx}$$

Beschleunigung in x-Richtung $$x'' = \frac{1}{m_S} \cdot \left(F_A + F_B - F_{Rx} + F_{Dx}\right)$$

y-Achse

Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung $$v_{Sty} = v_{St} \cdot sin\left(\gamma - \varphi\right)$$

Reibkraft für Translation in y $$F_{Ry} = k_y \cdot \left(v_y - v_{Stx}\right)$$

Driftkraft in y-Richtung (Winddrift) $$F_{Dy} = F_D \cdot sin\left(\beta - \varphi\right)$$

Impulssatz in y-Richtung $$m_S \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y\right) = F_{Dy} - F_{Ry}$$

Beschleunigung in y-Richtung $$y'' = \frac{1}{m_S} \cdot \left(F_{Dy} - F_{Ry}\right)$$

Koordinatentransformation in Bahnkoordinaten

Bahngeschwindigkeit in X $$v_X(t) = x'(t) \cdot cos\left(\varphi(t)\right) - y'(t) \cdot sin\left(\varphi(t)\right)$$

Bahngeschwindigkeit in Y $$v_Y(t) = y'(t) \cdot cos\left(\varphi(t)\right) + x'(t) \cdot sin\left(\varphi(t)\right)$$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Beispielrechnung

gegebene Größen

Schubkraft Motor A	$F_A := 1\ N$
Schubkraft Motor B	$F_B := 2\ N$
Abstand der Motoren zur Mittelachse	$a := 0.1\ m$
Schiffsmasse	$m_S := 100 \cdot kg$
Massenträgheitsmoment des Gesamtschiffes	$J_S := 10\ kg \cdot m^2$
Driftkräfte (Wind)	$F_D := 0\ N$
Driftwinkel (Wind)	$\beta := 0\ deg$
Strömungsgeschwindigkeit	$v_{St} := 0 \cdot \frac{m}{s}$
Strömungswinkel	$\gamma := 0\ deg$
STOKES'sche Reibung in Fahrtrichtung	$k_x := 40 \cdot \frac{kg}{s}$
STOKES'sche Reibung quer zur Fahrtrichtung	$k_y := 80 \cdot \frac{kg}{s}$
Torsionsreibung um die z-Achse	$k_t := 5\ N \cdot m \cdot s$
Anfangsbedingungen	$\varphi_0 := 0 \cdot rad$ $\quad \omega_0 := 0 \cdot \frac{rad}{s}$
	$X_0 := 1\ m$ $\quad v_{x0} := 0\ \frac{m}{s}$
	$Y_0 := 1\ m$ $\quad v_{y0} := 0\ \frac{m}{s}$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Dgl.-System

Simulationszeit $t_S := 300\ s$

Nebenbedingungen Schätzwerte

$$\varphi''(t) = -\frac{k_t}{J_S} \cdot \varphi'(t) + \frac{a}{J_S} \cdot (F_B - F_A)$$

$$v_x'(t) = \frac{1}{m_S} \cdot \left(F_A + F_B - k_x \cdot \left(v_x(t) - v_{St} \cdot cos(\gamma - \varphi(t))\right) + F_D \cdot cos(\beta - \varphi(t))\right)$$

$$v_y'(t) = \frac{1}{m_S} \cdot \left(F_D \cdot sin(\beta - \varphi(t)) - k_y \cdot \left(v_y(t) - v_{St} \cdot sin(\gamma - \varphi(t))\right)\right)$$

$$v_x(0) = v_{x0}$$

$$v_y(0) = v_{y0}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \qquad \varphi'(0) = \omega_0$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}, t_S\right)$$

Visualisierung der Lösung

Berechnungsintervall $t := 0 \cdot s, 0.1 \cdot s .. 300 \cdot s$

Koordinatentransformation in Bahnkoordinaten

Bahngeschwindigkeit in X $V_X(t) := v_x(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - v_y(t) \cdot \sin(\varphi(t))$

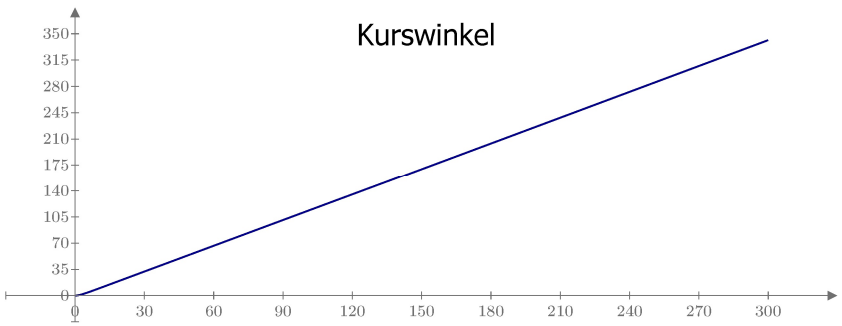
Bahngeschwindigkeit in Y $V_Y(t) := v_y(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + v_x(t) \cdot \sin(\varphi(t))$

Bahngeschwindigkeit $V(t) := \sqrt{V_X(t)^2 + V_Y(t)^2}$

Bahnkurve X(t) $X(t) := \int_0^t V_X(t)\, dt + X_0$

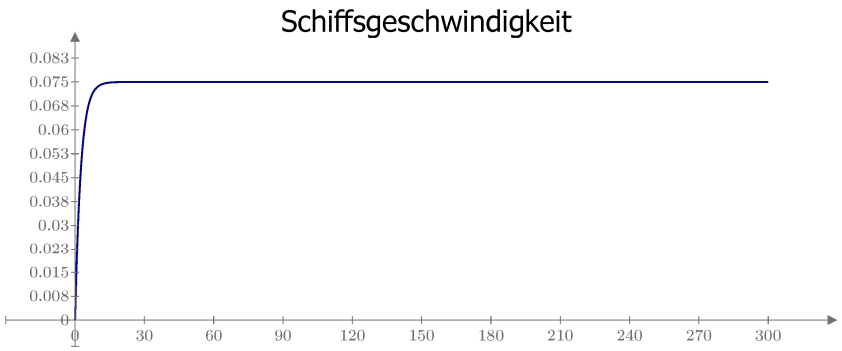
Bahnkurve Y(t) $Y(t) := \int_0^t V_Y(t)\, dt + Y_0$

Nur nichtkommerzielle Verwendung



$\varphi(t)\ (deg)$

$t\ (s)$



$V(t)\ \left(\frac{m}{s}\right)$

$t\ (s)$

Nur nichtkommerzielle Verwendung