

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

par Yves Chevallard
IUFM d'Aix-Marseille

Leçon 1. – La notion d'organisation praxéologique

1. Pourquoi *anthropologique* ?

L'étiquette d'approche – ou de théorie – *anthropologique* semble proclamer une exclusivité (les autres approches, existantes ou possibles, ne mériteraient pas ce qualificatif...) dont il faut dire tout de suite qu'elle n'est qu'un effet de langage. Il n'y a aucune raison pour que l'organisation de savoir qui sera présentée dans les développements qui suivent se voit accorder le monopole de la référence légitime au champ de l'anthropologie, même si elle semble bien être, aujourd'hui, la seule à s'autodésigner ainsi.

Pour l'essentiel, je parlerai donc de *la* théorie anthropologique du didactique – *la* TAD – comme, en tel village, on vous présentera *le* Louis, *le* Charles, *le* François, etc. L'exclusivité n'est évidemment pas garantie ! Le fait de s'appeler Louis, Charles ou François ne dit pas grand chose de la personne qui le porte. C'est là peut-être que s'arrête la comparaison précédente. Car, bien sûr, ce n'est pas *sans raison* que l'on dit *anthropologique* la théorisation dont certains éléments seront explicités dans ci-après. De fait, l'emploi de cet adjectif *veut dire* quelque chose, et quelque chose dont il vaut mieux être prévenu pour éviter d'aller d'incompréhensions en malentendus.

Le point crucial à cet égard, dont nous découvrirons peu à peu toutes les implications, est que *la TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales*. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à *traverser* en tous sens – ou même à *ignorer* – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de *se tenir*, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme *allant de soi*, quasi *naturel*, et en fin de compte *obligé*.

Selon cette *vulgate* du « culturellement correct », parler valablement de didactique des mathématiques, par exemple, suppose que l'on parle de certains objets distinctifs – les mathématiques, d'abord, et ensuite, solidairement, les élèves, les professeurs, les manuels, etc. –, à *l'exclusion d'à peu près tout autre type d'objets*, et en particulier de tous ceux que l'on croit trop vite scientifiquement non pertinents pour cette raison qu'ils apparaissent *culturellement étrangers* aux objets tenus pour emblématiques des questions de didactique des mathématiques.

Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : *on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie*. Avant même d'examiner ce qu'est une praxéologie, on doit donc noter que l'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie *nullement* l'activité *mathématique* parmi les activités humaines : c'est *autrement* que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité.

2. La notion de praxéologie

2.1. Types de tâches. – À la racine de la notion de praxéologie se trouve les notions solidaires de *tâche*, t , et de *type* de tâches, T . Quand une tâche t relève d'un type de tâches T , on écrira parfois : $t \in T$. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un *verbe* : *balayer* la pièce, *développer* l'expression littérale donnée, *diviser* un entier par un autre, *saluer* un voisin, *lire* un mode d'emploi, *monter* l'escalier, *intégrer* la fonction $x \mapsto x \ln x$ entre $x = 1$ et $x = 2$, etc. Trois points doivent être soulignés immédiatement.

Tout d'abord, la notion de tâche employée ici est à l'évidence *plus large* que celle du français courant : se gratter la joue, marcher du divan jusqu'au buffet, et même sourire à quelqu'un, *sont ainsi des tâches*. Il s'agit là d'une mise en pratique particulièrement simple du « principe anthropologique » évoqué plus haut.

Ensuite, la notion de tâche, ou plutôt de *type* de tâches, suppose un objet relativement précis. *Monter un escalier* est un *type de tâches*, mais *monter*, tout court, n'en est pas un. De même, *calculer la valeur d'une fonction en un point* est un type de tâches ; mais *calculer*, tout court, est ce qu'on appellera un *genre de tâches*, qui appelle un déterminatif.

Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents *types* de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié. *Calculer...* est un genre de tâches ; *calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical* est un type de tâches, de même que *calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée*. Tout au long des années de collège, *le genre Calculer...* s'enrichit de nouveaux types de tâches ; il en sera de même au lycée, où l'élève va d'abord apprendre à *calculer avec des vecteurs*, puis, plus tard, à *calculer une intégrale* ou *une primitive*, etc. Il en va de même, bien sûr, des genres *Démontrer...*, *Construire...*, ou encore *Exprimer... en fonction de...*

Enfin, *tâches*, *types de tâches*, *genres de tâches* ne sont pas des données de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », *des construits institutionnels*, dont la *reconstruction* en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, *qui est l'objet même de la didactique*.

2.2. Techniques. – En dépit de la remarque précédente, on ne considérera d'abord, dans cette leçon, que la *statique* des praxéologies, en ignorant donc provisoirement la question de leur *dynamique*, et en particulier de leur *genèse*. Soit donc T un type de tâches donné. Une praxéologie relative à T précise (en principe) *une manière d'accomplir*, de *réaliser* les tâches $t \in T$: à une telle *manière de faire*, τ , on donne ici le nom de *technique* (du grec *tekhnê*, savoir-faire). Une praxéologie relative au type de tâches T contient donc, en principe, une technique τ relative à T . Elle contient ainsi un « bloc » $[T/\tau]$, qu'on appelle *bloc pratico-technique*, et qu'on identifiera génériquement à ce qu'on nomme couramment *un savoir-faire* : un certain type de tâches, T , et une certaine manière, τ , d'accomplir les tâches de ce type. Là encore, trois remarques doivent être faites d'emblée.

Tout d'abord, une *technique τ – une « manière de faire »* – ne réussit que sur une *partie* $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la *portée* de la technique : elle tend à *échouer* sur $T \setminus P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, *en général*, accomplir les tâches du type T ».

La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur \mathbb{N} échoue-t-elle à partir d'une certaine taille de nombres. Le fait qu'on ne sache pas *en général* factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de *cryptographie*.

À cet égard, une technique peut être *supérieure* à une autre, sinon sur T tout entier, du moins sur une certaine partie de T : sujet sur lequel on reviendra à propos de l'évaluation des praxéologies.

Ensuite, une technique τ n'est pas nécessairement de nature *algorithmique* ou *quasi algorithmique* : il n'en est ainsi que dans de trop rares cas. Axiomatiser tel domaine des mathématiques, peindre un paysage, fonder une famille sont ainsi des types de tâches pour lesquelles il n'existe guère de technique algorithmique... Mais il est vrai qu'il semble exister une tendance assez générale à l'algorithmisation – encore que ce processus de *progrès technique* paraisse parfois durablement arrêté, en telle institution, à propos de tel type de tâches ou de tel complexe de types de tâches.

Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I , d'une illusion de « naturalité » des techniques *institutionnelles* dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme *artificielles*, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I , de véritables *passions institutionnelles* pour les techniques naturalisées dans l'institution.

Ainsi on peut déterminer le *signe* d'un binôme $ax+b$ en récrivant cette expression sous la forme $a[x-(-\frac{b}{a})]$, ce qui permet de conclure moyennant un petit raisonnement : $2-3x = -3(x-\frac{2}{3})$ est négatif si $x > \frac{2}{3}$, positif pour $x < \frac{2}{3}$; $5x+3 = 5[x-(-0,6)]$ est positif pour $x > -0,6$, négatif pour $x < -0,6$; etc. Mais cette manière de faire, à peu près inconnue dans l'enseignement secondaire français d'aujourd'hui, y recevrait sans doute un flot de critiques.

2.3. Technologies. – On entend par *technologie*, et on note généralement θ , un *discours rationnel (logos)* sur la technique – la *tekhnê* – τ , discours ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T , c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis telle autre institution. À nouveau trois remarques compléteront cette présentation.

On admettra d'abord comme un fait d'observation que, dans une institution I , quel que soit le type de tâches T , la technique τ relative à T est toujours accompagnée d'au moins un *embryon* ou, plus souvent encore, d'un *vestige* de technologie, θ . En nombre de cas, même, certains éléments technologiques sont *intégrés dans la technique*.

Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit : « Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, soit 3 fois 10 F ».

En outre, le fait qu'existe dans I une technique *canonique*, en principe seule reconnue et seule employée, confère à cette technique une vertu « autotechnologique » : faire ainsi n'appelle pas, ou plus, de justification, puisque c'est *la bonne* manière de faire (dans I).

On notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer la technique*. Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer *pourquoi* il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de *justification* l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'*explication*.

On sait qu'une équation $ax^2+bx+c=0$ (où $a \neq 0$) a une racine double lorsque $b^2-4ac=0$, n'a pas de racine (dans \mathbf{R}) si $b^2-4ac < 0$ etc. On peut *expliquer* un tel résultat à l'aide de la technologie des *nombre complexes*. Soit en effet z et \bar{z} les racines complexes de l'équation. On a : $(z-\bar{z})^2 = (z+\bar{z})^2 - 4z\bar{z} = (b/a)^2 - 4(c/a) = (b^2-4ac)/a^2$. On voit ainsi que $b^2-4ac=0$ si et seulement si $z = \bar{z}$; que si $b^2-4ac < 0$, alors z et \bar{z} ne sauraient être réels, etc.

Enfin une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la fonction de *production* de techniques. On notera ainsi qu'il existe des technologies *potentielles*, en attente de techniques, qui ne sont encore technologies d'aucune technique ou de très peu de techniques. À cet égard, on soulignera le phénomène de *sous-exploitation* des technologies disponibles, tant du point de vue de la justification ou de l'explication que de la production.

C'est ainsi que la technologie des nombres *fractionnaires* (quotients de décimaux) permet d'engendrer une technique qui surclasse celle vue précédemment à propos du prix de sucettes, et que concrétise le schéma discursif suivant : « Si a choses valent b francs, alors x choses, soit $\frac{x}{a}$ fois a choses, vaudront $\frac{x}{a}$ fois plus, soit $\frac{x}{a}$ fois b francs. » Ainsi dira-t-on : « 11 sucettes coûtent $\frac{11}{8}$ fois plus (que 8 sucettes), soit $\frac{11}{8}$ fois 10 F (= 13,75 F) » ; et, par une extension hardie du sens de l'expression : « 3 sucettes coûtent $\frac{3}{8}$ fois plus (que 8 sucettes), soit $\frac{3}{8}$ fois 10 F (= 3,75 F) ». (On notera que l'on a : $\frac{3}{8} \times 10 \text{ F} = \frac{11}{8} \times 10 \text{ F} - \frac{8}{8} \times 10 \text{ F} = 13,75 \text{ F} - 10 \text{ F} = 3,75 \text{ F}$.) Plus correctement, on dira simplement que « x choses, c'est $\frac{x}{a}$ fois a choses », etc.

2.4. Théories. – À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ , laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Bien entendu, on peut imaginer que cette régression justificative se poursuive à l'infini – qu'il y ait une théorie de la théorie, etc. En fait, la description à trois niveaux présentée ici (technique/technologie/théorie) suffit, en général, à rendre compte de l'activité à analyser. La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissante : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens du classique « On démontre en mathématiques... » du professeur de physique, ou encore du « On a vu en géométrie... » du professeur de mathématiques d'autrefois.

En tout domaine, la *nature* de la théorie peut fluctuer, et de fait, fluctue historiquement. Comme il en va en matière technique ou technologique, il y a ici un *progrès théorique*, qui

conduit en général à substituer aux évidences « métaphysiques » des énoncés théoriques positifs.

Soit ainsi le principe de récurrence : $P \subseteq \mathbf{N} \wedge 0 \in P \wedge \forall n (n \in P \Rightarrow n+1 \in P) \Rightarrow P = \mathbf{N}$. Pour justifier cet ingrédient technologique principal des démonstrations par récurrence, on peut, entre autres choses, soit se référer, comme le faisait encore Henri Poincaré, à « la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*La science et l'hypothèse*, 1902), soit admettre comme un axiome que toute partie non vide de \mathbf{N} a un premier élément, et montrer alors que le principe de récurrence en découle.

En grec, *theôria* a pris à partir de Platon le sens moderne de « spéculation abstraite ». Mais à l'origine, il renvoyait simplement à l'idée de contemplation d'un spectacle, le *theôros* étant le spectateur qui regarde l'action sans y participer. De fait, les énoncés théoriques apparaissent fréquemment comme *abstrait*, éloignés des préoccupations des « simples » technologues et techniciens. Cet effet d'abstraction est corrélé à ce qui fonde la grande *générativité* des énoncés théoriques – leur capacité à justifier, à expliquer, à produire.

Le fait que, dans \mathbf{R} , la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 est un résultat technologique très « concret ». Sa justification théorique tient dans l'axiome d'Eudoxe-Archimède, tenu ordinairement pour fort abstrait : si A et ε sont des réels strictement positifs, alors il existe un entier n tel que $n\varepsilon > A$. On notera qu'en fait les deux assertions sont équivalentes !

2.5. Savoir-faire et savoirs. – Autour d'un type de tâches T , on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une *technique* (au moins), τ , d'une technologie de τ , θ , et d'une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie *ponctuelle*, ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T . Une telle praxéologie – ou *organisation praxéologique* – est donc constituée d'un *bloc pratico-technique*, $[T/\tau]$, et d'un bloc *technologico-théorique*, $[\theta/\Theta]$.

Le bloc $[\theta/\Theta]$ est, ordinairement, identifié comme *un savoir* (alors que le bloc $[T/\tau]$ constitue *un savoir-faire*). Par métonymie; on désigne couramment comme étant un savoir la praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ *toute entière*, ou même une partie quelconque de celle-ci. Mais cette manière de faire encourage à minorer le savoir-faire, notamment dans la production et la diffusion des praxéologies : ainsi qu'on l'a noté, on rencontre souvent des technologies qui « attendent leur premier emploi », ou qui ont « perdu leur emploi ».

Une telle mise en avant du savoir n'est nullement fortuite. On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij} . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations *locales*, $[T_i/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations *régionales*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . (Au-delà, on nommera organisation *globale* le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .) Or le passage d'une praxéologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ à une praxéologie locale $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta]$ met en avant la technologie θ , de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ portera au premier plan la théorie Θ . Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment de celle du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification : car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches T précède *génétiquement* le bloc $[\theta/\Theta]$ (lequel se construit alors comme moyen de produire et de

justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, *structuralement*, le savoir $[\theta/\Theta]$ permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire $[T/\tau]$ pourra être classiquement *présenté*, dans le *texte* du savoir, comme une simple *application* du « savoir » $[\theta/\Theta]$.

Dans l'enseignement des mathématiques, un *thème d'étude* (« Pythagore », « Thalès », etc.) est souvent identifié à une *technologie* θ déterminée (théorème de Pythagore, théorème de Thalès), ou plutôt, implicitement, au bloc de savoir $[\theta/\Theta]$ correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'applications, des techniques relatives à divers types de tâches. On notera cependant que d'autres thèmes d'étude (« factorisation », « développement », « résolution d'équations », etc.) s'expriment, très classiquement, en termes de types de tâches.

Une organisation praxéologique, même ponctuelle, n'est pas en général entièrement conforme aux canons évoqués ci-dessus. Le type de tâches autour duquel elle s'est construite, peut ainsi être mal identifié, tandis que la technique associée se révélera presque impraticable. La technologie pourra parfois se réduire à une pure pétition de principe, et la théorie être parfaitement sibylline. La notion de praxéologie apparaît ainsi comme une notion générique dont il convient d'approfondir l'étude – notamment par l'enquête empirique et l'analyse des données d'observation recueillies.

3. Des questions à étudier

3.1. Le routinier et le problématique. – On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une *dynamique* praxéologique, qu'on n'examinera ici que très brièvement.

Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies.

Jusqu'au milieu du XX^e siècle, ainsi, l'arithmétique scolaire contient, sous le nom de *théorie des rapports et proportions*, une praxéologie mathématique locale qui permet de traiter efficacement les problèmes de proportionnalité directe ou inverse : si 8 sucettes coûtent 10 francs, et si on veut connaître le prix, x francs, de 3 sucettes, on dira que « 8 est à 10 comme 3 est à x », ce qui se traduit par la *proportion* notée classiquement $8:10::3:x$, dans laquelle on sait que le produit des *extrêmes*, $8 \times x$, est égal au produit des *moyens*, 10×3 , égalité qui donne aussitôt $x = \frac{10 \times 3}{8}$. La réforme « des mathématiques modernes » a, autour de 1970, expulsé nombre d'éléments théoriques et technologiques des mathématiques « classiques » regardés comme obsolètes, dont la théorie des rapports et proportions, non sans éliminer en même temps des techniques élémentaires qui, de fait, ne seront pas immédiatement remplacées, ou ne le seront que par des praxéologies plus complexes, peu viables dans les petites classes de l'enseignement secondaire. Dès qu'on dispose de la notion de *fonction*, et plus particulièrement de la notion de fonction *linéaire*, ainsi que des notations usuelles à cet égard, on peut reprendre le problème des 3 sucettes en ces termes : f étant linéaire, si $f(8) = 10$, alors $f(3) = f\left(\frac{3}{8} \times 8\right) = \frac{3}{8} \times f(8) = \frac{3}{8} \times 10 = \dots$

Surtout, dans un univers de tâches *routinières* surgissent à tout instant, ici et là, des tâches *problématiques*, qu'on ne sait pas – pas encore – accomplir. De nouveaux types de tâches, qui sont alors des types *de problèmes*, s'affirment ainsi, autour desquels de nouvelles praxéologies devront se constituer.

À la rentrée 1998, les professeurs de mathématiques enseignant en Terminale S auront à traiter, en enseignement de spécialité, un type de problèmes inédit à ce niveau des études : étant donné $a, b \in \mathbb{N}^*$

premiers entre eux, trouver des entiers x, y tels que $ax+by = c$ (« équation de Bézout »). Lorsque les entiers a et b sont « petits » et qu'on travaille à la main, il est pratique de procéder comme sur l'exemple suivant (où $a = 151, b = 137, c = 1$). On commence par écrire la fraction a/b sous la forme d'une fraction continuée, que l'on arrête quand le numérateur de la dernière fraction obtenue est 1 :

$$\begin{aligned}\frac{151}{137} &= 1 + \frac{14}{137} = 1 + \frac{1}{\frac{137}{14}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{11}{14}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{\frac{14}{11}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{3}{11}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{3}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.\end{aligned}$$

On *supprime* alors cette dernière fraction (ici, $1/2$), et on calcule l'expression ainsi obtenue :

$$1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{\frac{49}{5}} = 1 + \frac{5}{49} = \frac{54}{49}$$

On obtient ainsi : $49 \cdot 151 - 54 \cdot 137 = 1$. Bien entendu, il resterait à *justifier* cette technique, et, plus encore peut-être, à l'*expliquer*.

Constamment, en une institution I donnée, de nouvelles praxéologies sont regardées, par au moins *une partie* des acteurs de I , comme nécessaires à un *meilleur* fonctionnement de I . Ces praxéologies devront en conséquence y être *produites* ou, plus souvent, *reproduites*, dans la mesure où elles existent *déjà* en quelque autre institution I' – à partir de laquelle on pourra se proposer de les « importer » dans I . Les conditions imposées par l'écologie de I font alors que la praxéologie désirée ne pourra y être reproduite *à l'identique*, mais qu'elle subira, dans ce « transfert », diverses modifications adaptatives : on parlera donc, non de transfert, mais de *transposition* de I' à I .

Les processus de transposition institutionnelle ne produisent pas nécessairement des versions *dégradées* – inférieures par exemple quant à la qualité de leur bloc technologico-théorique – des organisations praxéologiques transposées. Tout au contraire, en matière de transposition *didactique*, par exemple, c'est-à-dire lorsque I est une institution didactique (école, classe, etc.), il arrive assez fréquemment, notamment lorsque I' n'est pas une institution *savante*, que le travail transpositif soit l'occasion d'*améliorer* la praxéologie ainsi retravaillée – en la simplifiant, en en précisant certains éléments, etc. Dans tous les cas, en outre, la transposition enrichit le monde des praxéologies *socialement disponibles* – dans la mesure où elle crée une praxéologie adaptée à des conditions institutionnelles *inédites*.

3.2. Analyser les pratiques enseignantes. – *Ordinairement, la pénurie praxéologique se traduit d'abord par un manque de techniques.* Comment accomplir les tâches de tel type T ? Et aussi, et peut-être surtout, comment accomplir *mieux* les tâches de ce type ? Autant d'interrogations qui appellent une *production de techniques* et, donc, de *praxéologies*. D'une manière générale, on est ainsi conduit, étant donné un type de tâches T , à (*ré*)étudier la question, notée génériquement τ_T , d'une technique propre à permettre d'accomplir les tâches $t \in T$, et, plus complètement, d'une praxéologie correspondante. La question τ_T – *Comment accomplir les tâches du type T ?* – apparaît alors comme *génératrice* de la praxéologie $O_T = [T/\tau/\theta/\Theta]$ à (*re*)construire.

L'existence de cette université d'été montre ainsi qu'un certain nombre de personnes ont décidé d'y étudier et d'y faire étudier, à nouveaux frais, la question τ_T relative à un type de tâches T dont le libellé peut être : *Analyser les pratiques enseignantes*. Ce libellé, qui donne son titre à l'université d'été, renvoie implicitement à une problématique *plus large*, qu'on exprimera ici par un schéma générique articulant *quatre* grands types de tâches. Étant donné un objet o relatif aux pratiques enseignantes, il s'agira en effet d'abord d'*observer* l'objet o (T_1), puis de *décrire & analyser* l'objet o (T_2), ensuite d'*évaluer* l'objet o (T_3), enfin de *développer* l'objet o (T_4). Bien entendu, ces *types* de tâches, qui se définissent par référence à certains *genres* de tâches (*observer*, *décrire & analyser*, *évaluer*, *développer*) eux-mêmes plus ou moins bien définis dans la culture commune (que signifie *développer* par exemple ?), restent largement à *construire*, solidairement avec les autres composants – techniques, technologiques, théoriques – des praxéologies visées.

Dans la suite de ces trois journées, le type de tâches T_1 (l'observation) sera peu ou prou neutralisé par le recours à des corpus de données d'observation *tout constitués*. Les types de tâches T_3 (l'évaluation) et T_4 (le développement), sur lesquels on reviendra dans la leçon 3, seront davantage à l'horizon du travail qu'en son cœur. Au centre du travail, on placera donc le type de tâches T_2 – la description et l'analyse de certains objets o relatifs aux pratiques enseignantes.

Les types d'objets o envisagés seront eux-mêmes de deux sortes. Étant donné un thème d'étude mathématique θ , on considérera successivement a) *la réalité mathématique* qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ , b) *la manière* dont peut se construire cette réalité mathématique, c'est-à-dire la manière dont peut s'y réaliser l'étude du thème θ . Le premier objet – « la réalité mathématique qui... » – n'est rien d'autre qu'une *praxéologie mathématique* ou *organisation mathématique*, qu'on notera OM_θ . Le second objet – « la manière dont... » – est ce qu'on nommera une *organisation didactique*, qu'on notera, de manière analogue, OD_θ . Le travail d'étude à réaliser concerne donc principalement les deux sous-types de tâches suivants : *décrire & analyser* l'organisation *mathématique* OM_θ qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ (T_{21}) ; *décrire & analyser* l'organisation *didactique* OD_θ qui peut être mise en œuvre dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ (T_{22}).

Chacun des trois groupes de travail $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ (visites d'atelier & TD) travaillera sur un thème θ différent, qui restera pour chacun *le même* au long des trois journées d'étude afin de permettre au groupe un travail plus approfondi : pour Σ_1 {Michel Jullien & Jacques Tonnelle}, $\theta_1 = \textit{Écritures fractionnaires}$; pour Σ_2 {Michèle Artaud & Robert Noirfalise}, $\theta_2 = \textit{Nombres relatifs}$; pour Σ_3 {Gisèle Cirade & Yves Matheron}, $\theta_3 = \textit{Équations du 1^{er} degré et modélisation algébrique}$.

3.3. Analyser une organisation mathématique. – L'objet de cette première journée est de *construire*, ou du moins d'*ébaucher*, à partir des éléments théorico-technologiques introduits jusqu'ici, une technique τ_{21} de description et d'analyse d'une organisation mathématique OM_θ . À titre d'introduction, on considère ci-après un *spécimen* simple du type de tâches T_{21} , en choisissant le thème $\theta = \textit{div}$ de la *division des entiers* :

t_{div} : Décrire & analyser l'organisation OM_{div} qui peut se construire dans une classe où l'on étudie le thème de la division des entiers.

Une telle tâche doit être soigneusement distinguée de la tâche, notée $t_{\partial\text{div}}$, de description et d'analyse de l'organisation *didactique* correspondante :

$t_{\partial\text{div}}$: Décrire & analyser l'organisation didactique $OD_{\text{div}} = \partial OM_{\text{div}}$ qui peut être mise en œuvre dans une classe où l'on étudie le thème de la division des entiers.

Le travail requis est en fait ce qui, *grosso modo*, peut être attendu d'un candidat au CAPES de mathématiques lors de l'*exposé sur un thème donné*, première épreuve orale d'admission dont, au concours 1997, le sujet 08 était précisément libellé : *Division euclidienne dans \mathbf{Z} , unicité du quotient et du reste. Applications à l'arithmétique*. Le *résultat technologique principal* de OM_{div} est évidemment le suivant :

Θ_0 . [Théorème & définition] Étant donné deux entiers relatifs a et b , $b > 0$, il existe un couple et un seul d'entiers relatifs q et r tels que : $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Les nombres a et b s'appellent respectivement le *dividende* et le *diviseur*, les nombres q et r , le *quotient* et le *reste* de la division de a par b .

On s'assure aisément que l'assertion précédente équivaut à la suivante :

Θ_0' . [Théorème & définition] Étant donné deux entiers relatifs a et b , $b > 0$, il existe un et un seul entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. Le nombre q s'appelle le *quotient* de la division de a par b . On appelle *reste* de cette division l'entier $r = a - bq$.

Cet énoncé technologique n'est en fait que la *conclusion* d'un « discours technologique » plus vaste, qui le justifie, ou, comme on dit en mathématiques, qui le *démontre* :

Division des entiers : résultat fondamental

Soit deux entiers relatifs a et b , $b > 0$.

1. Démontrons qu'il existe au plus un entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. La suite arithmétique généralisée $(bk)_{k \in \mathbf{Z}}$ étant strictement croissante, si q_1 et q_2 vérifiaient tous deux cette double inégalité, avec par exemple $q_1 < q_2$, soit $q_1 + 1 \leq q_2$, on aurait $a < b(q_1 + 1) \leq bq_2 \leq a$, ce qui est impossible. D'où l'unicité de q .

2. Démontrons ensuite l'*existence* de q . Supposons d'abord $a \geq 0$. La suite $(bk)_{k \in \mathbf{N}}$ étant strictement croissante et non bornée, il existe un premier entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $bk > a$, de sorte en particulier que $b(k-1) \leq a$. Posons $q = k-1$; il vient alors $bq \leq a < b(q+1)$: l'entier q convient. Si, maintenant, on a $a < 0$, il existe q' tel que $bq' \leq -a < b(q'+1)$, soit encore $b(-q'-1) < a \leq b(-q')$. Si $a = b(-q')$, on peut prendre $q = -q'$. Sinon, on a $a < b(-q')$ et $b(-q'-1) < a$, soit $b(-q'-1) < a < b(-q')$; en prenant $q = -q'-1$ on obtient ainsi $bq < a < b(q+1)$: l'entier q convient.

3. Ainsi, étant donné deux entiers relatifs a et b , $b > 0$, il existe un et un seul entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. Le nombre q s'appelle le *quotient* de la division de a par b . On appelle *reste* de cette division l'entier $r = a - bq$.

Les *éléments théoriques* requis pour justifier la technologie précédente sont les suivants.

Division des entiers : éléments théoriques

1. La démonstration d'unicité utilise essentiellement le fait que la suite $(bk)_{k \in \mathbf{Z}}$ est strictement croissante.

1.1. Ce fait découle du résultat théorique suivant :

Θ_0 . L'ordre usuel sur \mathbf{Z} fait de \mathbf{Z} un anneau ordonné, c'est-à-dire que l'on a :

Θ_{01} . $\forall k \in \mathbf{Z}, \forall n, m \in \mathbf{Z}, n \leq m \Rightarrow n+k \leq m+k$;

Θ_{02} . $\forall k \in \mathbf{N}, \forall n, m \in \mathbf{Z}, n \leq m \Rightarrow kn \leq km$.

1.2. On utilise aussi la propriété ci-après, plus propre à l'anneau ordonné discret \mathbf{Z} :

Θ_1 . $\forall n, m \in \mathbf{Z}, n < m \Leftrightarrow n+1 \leq m$.

2. La démonstration d'existence repose sur l'affirmation suivante : la suite $(bk)_{k \in \mathbf{N}}$ étant strictement croissante et non bornée, il existe un premier entier k tel que $bk > a$.

2.1. Le fait que la suite arithmétique $(bk)_{k \in \mathbf{N}}$ est *strictement croissante* vient d'être examiné.

2.2. Le fait qu'elle soit non bornée découle de ce que \mathbf{Z} est un groupe *archimédien* :

Θ_2 . [propriété d'Eudoxe-Archimède] $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \exists k \in \mathbf{N}, bk > a$.

2.3. Le fait qu'il existe un *premier* entier k , c'est-à-dire un *plus petit* entier k , tel que $bk > a$ résulte du fait que l'ordre usuel sur \mathbf{N} est un *bon ordre* :

Θ_3 . [Propriété de bon ordre] Toute partie non vide de \mathbf{N} possède un plus petit élément.

Soit en effet F l'ensemble des entiers k tels que $bk > a$: d'après Θ_2 , F est non vide ; par suite, d'après Θ_3 , F possède un premier élément.

| 2.4. Remarque. On a : $\Theta_2 \Leftarrow \Theta_3$ [laissé au lecteur].

L'organisation mathématique à déterminer, OM_{div} , est *a priori* une organisation *locale* (et non pas ponctuelle), qui peut donc contenir *plusieurs* types de tâches. Faute de place, on ne considérera ici que le type de tâches mathématiques suivant :

| T_q . Étant donné deux entiers relatifs a et b , $b > 0$, calculer le quotient q de la division de a par b .

Le but de l'étude serait alors de préciser une technique τ_q pour accomplir les tâches du type T_q – ce qu'on ne fera ici que sur un point particulier. L'observation de OM_{div} dans la littérature des manuels anciens fait en effet rencontrer une « remarque » aujourd'hui si oubliée qu'elle en paraît d'abord peu crédible, et sur laquelle on s'arrêtera un instant. Un premier ouvrage indique ainsi :

Albert Millet, *Arithmétique* (enseignement primaire supérieur), Hachette, 1923, p. 84

Théorème. – Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, il suffit (si les divisions se font exactement) de diviser ce nombre par le premier facteur, le quotient obtenu par le second et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur. Le dernier quotient obtenu est le quotient cherché.

REMARQUE. – Ce théorème s'applique aux divisions avec reste. Nous l'admettons sans démonstration. Ainsi : **517 : (5 × 7 × 4)** peut s'obtenir en divisant : **517** par **5**, soit **103** ; **103** par **7**, soit **14** ; **14** par **4**, soit **3**. Le quotient de **517** par **5 × 7 × 4** soit **140** est **3**.

D'autres auteurs – et non des moindres ! – écrivent de même, à propos du même théorème :

Anna et Élie Cartan, *Arithmétique* (classes de 4^e et de 3^e), Armand Colin, 1934, p. 54

92. – Remarque. – Si un nombre n'est pas divisible par un produit de facteurs, on démontre qu'on peut néanmoins trouver le quotient du nombre par le produit en appliquant la deuxième partie du théorème IV (n° 91, p. 53). La règle donnée au n° 78 (p. 47) est une application de cette remarque. Pour avoir le quotient de 6 783 par le produit 100×9 , on peut diviser 6 783 par 100, ce qui donne 67 comme quotient, puis diviser 67 par 9.

La chose est-elle vraie ? Une justification s'impose, que d'autres manuels fournissent – telle l'*Arithmétique* de Roland Maillard et Albert Millet pour la classe de Mathématiques (Hachette, 1954, pp. 39-40). Il est intéressant de constater qu'une telle justification s'appuie sur un résultat technologique qui est une variante immédiate des résultats précédemment établis :

| θ_0 ". [Théorème] Le quotient q de la division de a par b est caractérisé par les inégalités : $bq \leq a$ & $a+1 \leq b(q+1)$.

On a alors le résultat suivant :

| θ_1 . [Théorème] Soit deux entiers relatifs a et b , $b > 0$. Si $b = b'b''$, soit q' le quotient de a par b' et q'' le quotient q' par b'' . Alors q'' est le quotient de a par b .

Démonstration. On a $b'q' \leq a$ et $b''q'' \leq q'$; d'où $bq'' = b'(b''q'') \leq b'q' \leq a$. On a de même $a+1 \leq b'(q'+1)$ et $q'+1 \leq b''(q''+1)$; d'où $b(q''+1) = b'(b''(q''+1)) \geq b'(q'+1) \geq a+1$. Par suite, et d'après θ_0 ", on a $q = q''$.

Ce développement technologique assure que la technique indiquée *marche* : le quotient de 4225 par 24 est ainsi, puisque $24 = 4 \cdot 6$, celui de 1056 par 6, soit encore, puisque $6 = 2 \cdot 3$; celui de 528 par 3, soit enfin 176. Mais cela ne permet pas vraiment – même si la chose est éminemment subjective ! – de *comprendre pourquoi* le phénomène en question se produit. La fonction d'*explication*, productrice d'*intelligibilité*, doit être prise en charge par un autre développement, comme ci-après.

| Il est clair que si a est divisible par b , alors on obtient q en divisant a par b' , puis en divisant le quotient q'

ainsi obtenu par b'' . Supposons maintenant que a soit divisible par b' , avec $a = b'q'$; il est clair alors – du moins l'admettra-t-on ici – que $q = q''$, où $q'' = [q'/b'']$. (Une démonstration de ce point procéderait de l'observation que l'on a $a = b'q' = b'(b''q'' + r'') = (b'b'')q'' + b'r''$, avec $b'r'' < b'b'' = b$.) Pourquoi alors peut-on, dans le cas général (où l'on ne suppose plus que b' divise a), « oublier » le reste r' de la division de a par b' ? L'explication fondamentale découle des deux faits généraux suivants, dont il convient d'abord de se persuader : ① le quotient par b de l'entier a est aussi le quotient par b des entiers $a-1, a-2, \dots, a-r$: on ne change pas le quotient si on remplace a par $a-k$, avec $0 \leq k \leq r$; ② le reste r (dans la division de a par b) est le premier entier k tel que $a-k$ soit divisible par b . On voit alors que, en « oubliant » le reste r' , soit en remplaçant a par $b'q' = a-r'$, le quotient final reste inchangé dès lors que $r' \leq r$ (d'après ①), ce qui est le cas (d'après ②) puisque $a-r (= bq = b'b''q)$ est divisible par b' .

3.4. Une remarque technique. – Bien qu'à peine esquissé, l'exemple précédent montre notamment que la composante technologique d'une organisation mathématique change avec les *types de tâches* et les *techniques* que l'on entend produire, justifier, expliquer.

Leçon 2. – Organisations didactiques & moments de l'étude

1. Le didactique, dimension du réel social

1.1. Étudier une question. – Dans la leçon 1, et tout au long de la première journée consacrée à la TAD, nous avons *vécu* une situation *problématique*, c'est-à-dire dans laquelle l'on nous proposait d'accomplir une tâche *problématique* – décrire et analyser une certaine praxéologie mathématique. Nous avons en outre *évoqué* d'autres types de tâches *a priori* problématiques – résoudre une « équation de Bézout » par exemple. On pourrait multiplier les exemples ; tous relèveraient d'un même schéma, que l'on examine rapidement ci-après.

Au point de départ, il y a, dans la vie sociale, une simple demande d'information, ou, comme on dira, une *question au sens faible*, qui prend généralement la forme d'une interrogation au sens grammatical du terme :

Où se trouve le bureau de poste le plus proche ?
 Quelle heure est-il ?
 Quel âge avez-vous ?
 Le train de 16h17 en provenance de Marseille, c'est quel quai ?
 Quelle est notre longitude ?
 $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, c'est bien irrationnel, non ?
 C'est vrai que n^3+11n est divisible par 6 quel que soit $n \in \mathbb{N}$?!

Du point de vue du questionneur, chacune de ces questions appelle une *réponse au sens faible*, sous forme d'un énoncé apportant l'information demandée : « Il est devant vous ! [le bureau de poste] », « Il est... 8h 47 ! », etc. L'hypothèse est ici que la personne questionnée *connaît la réponse*, ou, du moins, *peut la connaître à peu de frais* – par exemple en regardant sa montre, s'il s'agit de l'heure. On notera pourtant que, en réalité, cette réponse procède de la « partie émergée », seule visible dans la vie sociale ordinaire, d'un « iceberg praxéologique » qui s'est fondu dans le paysage social, mais qu'il a fallu souvent des siècles pour construire. Ainsi en va-t-il à propos de l'heure, ou de la longitude, ou même de l'âge de la personne interrogée. Le jeu des questions-réponses *au sens faible* se joue ainsi à la *surface de la société et de ses institutions* : il en occulte les ressorts profonds, dont il semble – faussement – pouvoir faire l'économie.

Les choses changent quand la personne questionnée *ne sait pas répondre* – lorsqu'elle ne connaît pas la longitude du lieu, ou ignore si le nombre $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ est irrationnel ou pas, etc.

Dès lors, *une question se pose*. Qu'elle consiste à déterminer la longitude ou la nature, rationnelle ou non, du nombre $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, la tâche à accomplir pour répondre à la question posée n'est plus « immédiate ». Si l'on dispose d'une praxéologie relative au type de tâches considéré, on pourra la mettre en œuvre, et d'une manière éventuellement *routinière* (ce qui ne signifie pas « algorithmique »).

Ainsi un bon élève de la nouvelle Terminale S pourra-t-il peut-être écrire sans autre façon : $n^3+11n = n^3 - n + 12n = n(n^2-1)+12n = (n+1)n(n-1)+12n = 6C_{n+1}^3+12n = 6(C_{n+1}^3+2n)...$

Mais les choses changent plus encore lorsque la personne interrogée ne dispose d'aucune technique pour accomplir la tâche demandée, qui apparaît alors *problématique* pour elle. La question posée se mue dès lors en une question *au sens fort* : non plus « Quelle est la longitude ? » mais « *Comment déterminer la longitude ?* », non plus « Ce nombre est-il irrationnel ? » mais « *Comment déterminer si ce nombre est irrationnel ?* ». On passe ainsi de la demande d'accomplir une tâche *t* au besoin d'élaborer une technique, et, plus complètement, toute une praxéologie relative aux tâches du type de *t* – type qu'il faut en même temps construire comme objet institutionnel. À question au sens fort, réponse au sens fort : la réponse n'est plus maintenant une simple information à donner, *c'est toute une organisation praxéologique à construire*.

En nombre de cas, une personne ou un collectif confronté à une difficulté du type précédent – élaborer une praxéologie relative à un type de tâches problématique – répond en ignorant, voire en *niant* cette problématique, par exemple *en n'accomplissant pas* la tâche en question – en « faisant autrement ».

Un exemple – où la problématique est de nature *mathématique*. Trois vacanciers doivent se partager la somme de 860 F qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs, et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 1900 F, 2100 F, 2200 F. Ils se demandent comment ils doivent se partager la somme restante de façon que chacun d'eux ait contribué également aux frais collectifs. Puis ils décident, dans un flou généreux et opportun (« Mais non ! Toi tu as payé la pizza l'autre jour, et ça on l'a pas compté... », etc.), que telle répartition, déterminée « à l'intuition », est *grosso modo* acceptable, et s'en tiennent là.

Dans le cas contraire, la *personne x*, ou, plus généralement, le *collectif X*, va se mettre à *étudier la question posée* (« Comment déterminer la longitude ? », « Comment déterminer si ce nombre est irrationnel ? »), qu'on peut noter génériquement τ_T , où *T* est le type de tâches considéré (éventuellement réduit à un unique spécimen, *t*). Se constitue ainsi ce qu'on nommera ici un système *d'étude* ou système *didactique*, noté $\Sigma = S(X;\tau_T)$ (avec, éventuellement, $X = \{x\}$). En certains cas, le collectif *X* sera *aidé*, voire *dirigé*, dans son effort d'étude, par un *aide à l'étude* ou un *directeur d'étude*, *y* : on notera alors le système didactique $\Sigma = S(X;y;\tau_T)$ (ou $S(X;Y;\tau_T)$ s'il y a un collectif *Y* d'aides à l'étude). Dans tous les cas, on entre alors dans une dimension spécifique du réel social : la dimension *de l'étude* ou *du didactique*, au sens fort de ces termes.

1.2. L'étude, les institutions, la *skholê*. – La formation même éphémère d'un système didactique si rudimentaire soit-il interrompt le flux normal de l'activité institutionnelle ordinaire. L'activité d'étude apparaît en conséquence comme une source permanente de trouble possible pour la vie de l'institution, dont elle peut à tout instant faire dévier le cours des activités normales en entraînant certains de ses acteurs vers des voies étrangères à sa « raison sociale » – que l'on songe, par exemple, à la formation continue des enseignants ! Il y a là un fait fondamental dont il faut examiner rapidement les manifestations.

Une première conséquence a été mentionnée rapidement plus haut – *le refoulement de la problématicité*, et donc le refoulement du didactique que cette problématicité pourrait engendrer. Une deuxième conséquence tient à un phénomène voisin, sur lequel il convient d'insister : celui de la *dénégation du didactique*. Les situations de la vie quotidienne au sein d'une institution sont tissées d'interactions didactiques, mais labiles, évanescentes, qui se glissent presque sans bruit dans le flux de l'activité ordinaire – et auxquelles on fait implicitement référence lorsqu'on parle d'*apprentissage sur le tas*, ou, selon la formule de John Dewey, de *learning by doing*, d'apprentissage par la pratique « nue ». Mais ce didactique-là se trouve en général non reconnu par l'institution, parce que, pour se défendre contre un envahissement toujours menaçant, celle-ci a défini une frontière qui sépare, parmi toutes les formes d'activité dont elle peut être le lieu, celles – généralement peu nombreuses et fortement stéréotypées – qu'on accepte d'y regarder comme didactiques, et celles – majoritaires et fort variées – qui sont réputées *non didactiques*, et dont la didacticité potentielle se trouve donc, par là, *niée*.

Nulla situation n'est *intrinsèquement* didactique ou non didactique. Par suite, en niant la didacticité *potentielle* d'une situation donnée, en l'imposant à ses sujets comme irréfragablement *non didactique*, l'institution barre la possibilité de son fonctionnement *adidactique* (Brousseau 1996), et ferme ainsi certaines voies d'apprentissage *a priori* possibles pour les sujets de l'institution. Chaque fois que de tels apprentissages apparaissent comme objectivement appelés par le bon fonctionnement de l'institution, c'est-à-dire comme répondant à des besoins cognitifs institutionnellement engendrés, on peut dire que l'institution nie les *besoins didactiques* de ses sujets, besoins dont ces derniers devront donc éventuellement prendre en charge la satisfaction, mais alors à titre personnel, et non plus comme sujets de l'institution.

L'adjectif *didactique*, associé ici au substantif *étude* (et au verbe *étudier*), est, en français, un emprunt au grec *didaktikos* « propre à instruire », « relatif à l'enseignement », de *didaktos*, adjectif verbal de *didaskhein*, « enseigner, faire savoir ». En français courant, il s'applique à *ce qui vise à instruire*. L'idée du didactique, l'idée d'étude, c'est-à-dire, fondamentalement, l'idée de faire quelque chose afin d'apprendre quelque chose (« savoir ») ou d'apprendre à *faire* quelque chose (« savoir-faire »), paraît en fait consubstantielle aux sociétés humaines. Comment, pourtant, limiter les effets perturbants du didactique sur la vie des institutions ? Une réponse a pris dans nos sociétés modernes une importance extrême, au point qu'elle tend à absorber dans son ombre portée toute autre manière de gérer les apprentissages : il s'agit de l'école, ou plus précisément de la *skholê* des anciens Grecs – cet *otium Graecum*, ce « loisir grec » que stigmatisaient Caton et les vieux Romains, et que l'on peut définir comme *du temps prélevé sur le temps du labeur, ou plutôt de la vie ordinaire, pour être consacré à l'étude*.

La formule est générique, universelle, et peut *a priori* s'appliquer à toute institution : à côté d'elle, mais distincte d'elle, toute institution peut créer sa propre *école*, où l'on pourra se livrer à l'étude de toute question posée par la vie de l'institution, dans le cadre de systèmes didactiques institutionnalisés, $\Sigma_k = S(\{x_i\}; \{y_j\}; P_k)$, où les x_i seront des *élèves*, les y_j des *professeurs*, et P_k un *programme d'étude* précisant les questions à étudier. Ce processus historique de « scolarisation » des institutions est aujourd'hui fort avancé : rien ou presque qui lui échappe, en droit comme en fait – et c'est d'ailleurs lui qui nous réunit ici, ces jours-ci ! De l'absence de *skholê*, en passant par la *skholê* intégrée au flux de la vie, on arrive ainsi à la *skholê* omniprésente, conçue et vécue comme séparée de l'activité dont elle a pourtant

pour mission de questionner, en les étudiant, les praxéologies.

On notera pourtant que, quel que soit l'habitat institutionnel offert au didactique – depuis l'intégration vécue au quotidien dans l'institution, jusqu'à la scolarisation en une institution scolaire associée –, des contraintes s'imposent qui, d'un même mouvement, vont permettre, voire imposer, certains types de *praxéologies didactiques*, et en interdire d'autres, tandis que, même dans le cadre de la *skholê*, même dans le cadre de l'École de la République (à laquelle on restreindra désormais l'emploi de l'adjectif *scolaire*), certaines pratiques didactiques, « niées », resteront viables, et vivantes, sans toutefois être assumées comme telles. Chaque institution, chaque institution didactique notamment, définit ainsi, en acte, au moins négativement, sa propre notion d'étude. De là que cette notion ne puisse être définie de manière intrinsèque, universelle, absolue, au-delà de cette « définition » minimaliste selon laquelle il y a étude lorsqu'il y a *soin, application, attention* à l'endroit de quelque réalité *problématique* – la réalité « étudiée ».

1.3. Étudier une œuvre. – Étudier une question du type τ_T , où T est un certain type de tâches, cela conduit – comme il en va en principe dans le monde savant – à *créer* une réponse, c'est-à-dire à élaborer une organisation praxéologique $O = [T/\tau/\theta/\Theta]$ inédite. Mais, dans le monde ordinaire de la *skholê*, étudier une question, c'est, presque toujours, *recréer*, pour soi et ses compagnons d'étude, une réponse O déjà produite en quelque autre institution. Étudier, c'est donc étudier une *réponse* (au sens fort) tenue pour valable. C'est étudier une *œuvre* existant ailleurs dans la société, pour la reconstruire, la *transposer* dans l'institution qui sert d'habitat à l'étude. Le passage de l'étude d'une question à l'étude d'une réponse – d'une œuvre – ne va pas sans quelques modifications dans la notion même d'étude.

Au départ, ainsi qu'on l'a suggéré, l'œuvre O est étudiée – c'est-à-dire reconstruite, transposée – *en tant que réponse* à la question τ_T que l'on se pose. Si, par exemple, on se pose la question de la représentation plane de l'espace à trois dimensions, on étudiera la *perspective* ; si l'on se pose la question du cryptage et du décryptage de messages, on étudiera la *cryptographie* ; etc. On travaille alors sur des œuvres prenant la forme d'organisations praxéologiques *ponctuelles*, i.e. constituées autour d'un unique type de tâches, regardé comme *générateur* de l'œuvre étudiée.

Deux exemples de techniques

1. Comment, par exemple, démontrer que $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ est irrationnel ? Une technique simple, dont on laissera le lecteur préciser la technologie et la théorie, consiste à former une expression rationnelle de α égale à un nombre connu pour être irrationnel. Ici on a : $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 66-24\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$. On conclut alors par un petit raisonnement : si α était rationnel, il en serait de même de $\frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$, ce qui n'est pas.

2. Comment déterminer le maximum (ou le minimum) d'une fonction sur un intervalle ? Il s'agit d'un très grand et très ancien problème, étudié autrefois, au lycée, sous le nom de *questions de maximum et de minimum*. La technique élémentaire utilisée en l'absence de calcul infinitésimal se fondait sur le résultat technologique suivant : si x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels ≥ 0 dont la somme est constante, égale à a , alors le produit $x_1 x_2 \dots x_n$ est maximal lorsque $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a/n$. Ainsi l'aire d'un rectangle de périmètre $2p$, qui s'écrit xy , avec $x+y = p$, est-elle maximale lorsque $x = y = p/2$, c'est-à-dire lorsque rectangle est un carré. De même, l'aire d'un enclos rectangulaire formé à l'aide d'une palissade de longueur ℓ et dont l'un des côtés est un mur, qui s'écrit xy avec $2x+y = \ell$, est maximale en même temps que l'expression $2xy$, laquelle atteint son maximum lorsque $2x = y = \ell/2$, soit pour $x = \ell/4$ et $y = \ell/2$.

L'agrégation d'œuvres « ponctuelles » en une organisation *locale* (la division des entiers, par exemple) à l'enseigne d'une commune *technologie* θ , voire leur intégration au sein d'une organisation *régionale* (l'arithmétique, par exemple) commandée par une même *théorie* Θ , tend à refouler à la périphérie, sous le nom d'*applications*, les types de tâches qui sont en principe générateurs de l'œuvre, au motif qu'il s'agit d'une œuvre *ouverte*, à la technologie potentiellement productrice de techniques inédites, et qu'on ne saurait donc enfermer dans quelques « applications » définies *a priori*. Le rapport entre question et réponse tend ainsi à s'inverser. La réponse est première, la question suit. Dans l'organisation OM_{div} (leçon 1, § 3.3), ainsi, on peut faire figurer *ou non* un développement relatif aux *quotients approchés* (v. ci-après). Selon le cas, alors, OM_{div} apparaîtra *ou non* comme répondant (au sens fort) à la question « Comment déterminer le quotient approché par défaut à 10^{-n} près d'un entier a par un entier b ? ».

Quotients approchés

1. *Théorème & définition.* Étant donné deux entiers relatifs a et b , $b > 0$, il existe un unique entier relatif q tel que : $b \frac{q}{10^n} \leq a < b \frac{q+1}{10^n}$. Le décimal $q_n = q \cdot 10^{-n}$ est le quotient approché à 10^{-n} près par défaut de la division de a par b .

Démonstration. La double inégalité $b \frac{q}{10^n} \leq a < b \frac{q+1}{10^n}$ équivaut à $bq \leq a \cdot 10^n < b(q+1)$, ce qui montre que l'entier q est le quotient de la division euclidienne de $a \cdot 10^n$ par b . D'où l'existence et l'unicité de q .

2. *Remarque.* Le quotient q de la division euclidienne de a par b , qu'on appelle aussi quotient *entier* de a par b , est obtenu pour $n = 0$: on dit que q ($= q_0$) est le quotient de a par b à *une unité* ($= 10^0$) *près par défaut*. Le quotient entier est ainsi, en général, un quotient *approché* : il n'est un quotient *exact* que si a est divisible par b .

3. *Corollaire.* Pour calculer le quotient q_n approché à 10^{-n} par défaut de la division de a par b , on calcule le quotient entier q de $a \cdot 10^n$ par b et on prend $q_n = q \cdot 10^{-n}$.

4. *Exemple.* Soit à calculer le quotient q_2 à 10^{-2} ($= 0,01$) près par défaut de 743 par 56. On cherche le quotient entier q de 74300 par 56, soit $q = 1326$. On a donc $q_2 = 13,26$.

5. ...

Un pas de plus, et l'on aboutit à une déconnexion franche du « cœur » théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses « applications », qui, de génétiquement nécessaires, deviennent dès lors institutionnellement *contingentes*. L'étude de l'œuvre tend ainsi à créer une organisation de savoir qui semble ne plus exister que pour elle-même – les technologies ne débouchant qu'aléatoirement sur des techniques effectives, par exemple –, selon la logique de tous les fétichismes culturels. Dans le même temps, les *raisons d'être* de l'œuvre tendent à se perdre, en droit, sinon en fait. On navigue dès lors entre esthétique et arbitraire culturel.

Pourquoi par exemple cette « œuvrette » mathématique, encore étudiée aujourd'hui au Secondaire (en Seconde notamment), autour de la notion d'*expression numérique contenant un radical*, et qui permet de récrire une expression telle $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ sous la forme $-(1+\sqrt{2})$? Soit, dans un repère orthonormal, les points

$A(4 ; 2)$, $B(3\sqrt{2} ; \sqrt{2})$, $C(1+2\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2})$. Pour vérifier si ces points sont alignés, on peut calculer les pentes des droites (AB) et (AC), soit $p_{(AB)} = \frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ et $p_{(AC)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ afin de voir si ces pentes sont ou non égales.

Au vu des expressions obtenues, la question n'est pas facile à trancher. Il convient donc de les récrire sous une forme *canonique*, où toute expression du type considéré ait une écriture *et une seule* – ce qui permettra de *comparer* deux expressions données d'un simple coup d'œil. En l'espèce on obtient $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3} = -$

$1-\sqrt{2}$: les deux pentes sont égales, et les points A, B, C sont donc alignés. On notera que, si l'on avait calculé la pente de (BC), on aurait obtenu une expression encore différente : $p_{(BC)} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$. La raison d'être ainsi identifiée est générique : étant donné un système d'objets mathématiques, il est très utile de se doter,

chaque fois que la chose est possible, d'un système d'écriture canonique de ces objets, et cela afin de pouvoir comparer sans ambiguïté deux tels objets. C'est ainsi que deux vecteurs seront rapportés à une même base, où ils ont une écriture unique, deux points du plan à un même repère, etc. Cette exigence prévaut dès les premiers apprentissages mathématiques. Les expressions $3 \times 7 + 5 \times 2$ et $7 \times 8 - 5 \times 5$ sont égales, mais la chose ne devient évidente que si on les écrit séparément sous forme canonique, c'est-à-dire si l'on « effectue les calculs » : $3 \times 7 + 5 \times 2 = 31$, $7 \times 8 - 5 \times 5 = 31$. C'est pour la même raison encore que l'on apprendra longuement à développer et à ordonner les expressions algébriques, ou à simplifier les fractions : pour les identifier à coup sûr. Ainsi les fractions $\frac{168}{252}$ et $\frac{252}{378}$ représentent-elles un même nombre dont l'écriture canonique est $\frac{2}{3}$. Mais la chose n'est pas *a priori* évidente, et seul un travail de « simplification », c'est-à-dire de *réécriture canonique*, permet de ne pas passer à côté de la vérité.

2. Organisations didactiques

2.1. Généricité et spécificité. – Les praxéologies didactiques ou *organisations didactiques* sont des réponses (au sens fort) aux questions du type « Comment étudier la question $q = \tau_T$? », ou « Comment étudier l'œuvre O ? » – réponses qu'on notera ici, génériquement, ∂q et ∂O , en sorte qu'on aura par exemple : $\partial D_\theta = \partial O_{M_\theta}$. Cela précisé, la question se pose de savoir quels types de tâches relèvent d'une praxéologie *didactique* ; ou, pour le dire autrement, quels « gestes » peuvent être regardés comme *didactiques*.

La question « Comment étudier \heartsuit ? » dépend à l'évidence de l'enjeu *didactique* \heartsuit . Une réponse à cette question, c'est-à-dire une organisation didactique $\partial \heartsuit$, en dépendra également : à partir d'un certain niveau d'organisation de l'étude, on n'étudie plus la question q de la *perspective* comme on étudierait la question q' de la *cryptographie*, par exemple ! Mais elle n'en dépendra pas au point qu'il n'y ait *rien* de commun entre une organisation didactique ∂q et une organisation didactique $\partial q'$. En fait, et ainsi qu'on l'a noté (leçon 2, 1.2.3), dans une institution donnée, seuls certains types de praxéologies didactiques, satisfaisant certaines contraintes, sont écologiquement viables : en conséquence, toutes les praxéologies $\partial \heartsuit$ se conformeront à ces contraintes, quel que soit \heartsuit , sans qu'on puisse affirmer *a priori* que ces contraintes ne pèsent pas, écologiquement, sur les niveaux plus spécifiques d'organisation de l'étude.

La distinction entre ce qui serait spécifique de l'enjeu didactique, \heartsuit , et ce qui ne le serait pas, apparaît ainsi, dans la perspective précédente, comme *relative*. L'opposition générique-spécifique a, si l'on peut dire, une structure *fractale*, en ce qu'elle se retrouve aux différents niveaux d'analyse du didactique. Ainsi, quel qu'en soit l'objet, il y a une *spécificité* de l'activité *didactique* parmi l'ensemble des activités humaines, spécificité qui, précisément, fonde le *genre* didactique, par delà ses différentes *espèces*, celles, notamment, que déterminent *les grands types d'œuvres* – mathématiques, physiques, littéraires, plastiques, etc. L'étude *scolaire* des mathématiques, ainsi, n'est pas un isolat institutionnel : elle se relie, à un certain niveau de généralité, à l'ensemble du didactique existant dans la société, et, en tout premier lieu, à l'ensemble du didactique scolaire. À plusieurs égards, bien entendu, elle possède des traits *spécifiques*, qui la distinguent de l'étude scolaire d'autres disciplines. Mais cette opposition reste relative : qu'est-ce qui, au vrai, est mathématique ? La frontière est indécise et, en tout cas, historiquement évolutive. Par ailleurs, à un moment donné, *les mathématiques*, c'est-à-dire les différentes *organisations* mathématiques, sont elles-mêmes diverses, et, par exemple, on n'étudiera pas l'algèbre tout à fait comme on étudie la géométrie. On parlera donc de l'étude de l'algèbre, de celle de la géométrie, ou de la statistique, etc. En cette descente vers des objets d'étude *toujours plus spécifiés*, l'opposition du générique et du spécifique *se trouve chaque fois reconduite*, sans annuler pour autant les

oppositions de même forme repérées aux niveaux supérieurs. Il y aura ainsi une spécificité de l'étude de tel domaine mathématique, qui se laissera elle-même décliner en niveaux plus fins de spécification, et cela jusqu'au niveau « moléculaire » des organisations mathématiques ponctuelles constituées autour d'un unique type de tâches.

Par organisation didactique, on entendra donc *a priori* l'ensemble des types de tâches, des techniques, des technologies, etc., *appelés par l'étude concrète en une institution concrète*. L'approche classique en didactique des mathématiques a en général ignoré les aspects les plus *génériques* de l'organisation de l'étude au sein d'un type donné de systèmes didactiques. (Telle est par exemple l'attitude classiquement adoptée, s'agissant des systèmes didactiques scolaires, à propos de la question de l'évaluation, du *travail hors classe*, de son évaluation, etc.) Par contraste, la *problématique écologique*, qui est l'un des principaux moteurs de la TAD, conduit à examiner des questions pouvant se situer en un point *quelconque* de l'axe généralité-spécificité, parce que les problèmes *spécifiques* de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels *de moindre spécificité*. En conséquence, l'approche anthropologique fait droit à des aspects de l'organisation de l'étude généralement regardés comme relevant de choix « pédagogiques » ou « politiques » extérieurs au champ de questionnement de la didactique des mathématiques.

Une organisation didactique ∂O comporte donc de multiples niveaux de spécification, dont aucun ne saurait être négligé et dont tous relèvent, à certains égards au moins, de la didactique. À un premier niveau, ainsi, on situera les conditions et contraintes propres à un *système d'enseignement* et à ses *établissements*, qui s'appliquent peu ou prou à toutes les matières qui y sont étudiées : pour le système scolaire français, on situera là, notamment, l'existence de cursus d'études strictement définis, celle de programmes nationaux, la distribution des élèves d'un niveau d'études donné (6^e, 5^e, 4^e, etc.) entre plusieurs communautés d'étude quasi autonomes – les *classes* du niveau considéré –, l'importance accordée aux professeurs par rapport aux autres aides à l'étude possibles, l'existence de systèmes et dispositifs didactiques auxiliaires (études encadrées, modules, etc.). À un deuxième niveau, on situera les déterminants *spécifiques de telle matière* figurant dans tel cursus d'études : on placera là, par exemple, les formes didactiques qui font sens *a priori* pour l'ensemble de la matière étudiée – comme il en va s'agissant de l'expérimentation ou de la démonstration, dans leurs aspects généraux, en mathématiques. Semblablement, les niveaux suivants de spécification concerneront les aspects propres à chacun des niveaux d'organisation de la matière étudiée – global, régional, local, ponctuel.

2.2. Le topos de l'élève et l'autre scène. – Dans le cadre des systèmes didactiques *scolaires* $\Sigma = S(X; y; P)$, auxquels on se limitera désormais, les types de tâches intégrés dans une praxéologie *mathématique* sont, traditionnellement, accomplis par un individu seul. L'élève $x \in X$ doit apprendre à factoriser, *seul*, sans l'aide d'autrui, certains types d'expressions algébriques ; à calculer, *par ses propres moyens*, la somme des fractions $\frac{4}{7} + \frac{8}{21}$, etc. En revanche, il n'a pas à apprendre seul : officiellement il reçoit pour cela, au moins, l'aide du professeur y .

Les tâches didactiques, en effet, sont, dans un certain nombre de contextes, *coopératives*, en ce sens qu'elles doivent être accomplies *de concert* par *plusieurs* personnes x_1, \dots, x_n , les *acteurs* de la tâche. On dira que chacun des acteurs x_i doit en ce cas effectuer certains *gestes*, dont l'ensemble constitue alors son *rôle* dans l'accomplissement de la tâche coopérative t , ces gestes étant à la fois différenciés (selon les acteurs) et coordonnés entre eux par la technique τ mise en œuvre collectivement. Certains de ces gestes seront regardés comme des tâches à part entière, t' , dans l'accomplissement desquelles x_i agira (momentanément) *en autonomie relative* par rapport aux autres acteurs de la tâche. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble

du rôle de x_i lorsque t est accomplie selon τ , est nommé alors le *topos* de x_i dans t .

Le grec *topos* (qui correspond au latin *locus*) signifie « lieu » : le *topos* de x_i , c'est le « lieu de x_i », sa « place », l'endroit où, psychologiquement, x_i éprouve la sensation de jouer, dans l'accomplissement de t , « un rôle bien à lui ». Dans le cas d'une classe, on parlera ainsi du *topos* de l'élève et du *topos* du professeur. Ainsi, lorsqu'une classe de mathématiques « fait un exercice », ce qui est une tâche éminemment coopérative, la sous-tâche consistant à fournir l'énoncé de l'exercice revient, généralement, au professeur : elle appartient à son *topos*. La tâche consistant à produire – par exemple par écrit – une solution de l'exercice relève, elle, du *topos* de l'élève, tandis que la tâche consistant, ensuite, à fournir un corrigé ressortit, à nouveau, au *topos* du professeur. Si, au cours de la résolution de l'exercice, un élève pose une question au professeur, il effectue ainsi ce qui est vu ordinairement comme un simple geste, appelant un geste homologue de la part du professeur – geste qui peut consister, quelquefois, à... refuser de répondre.

L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour « donner une place aux élèves », c'est-à-dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un *topos* approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer ». Ainsi, dans ce qu'on peut appeler l'enseignement-spectacle, que certaines modes pédagogiques ont pu pousser en avant au cours des décennies écoulées, les élèves sont sollicités fréquemment, mais n'interviennent en général que comme des figurants sans véritable rôle. Dans la plupart des cas, pourtant, une tâche didactique a pour acteurs et le professeur, et les élèves : lorsque le professeur s'engage dans une tâche où il opère en autonomie relative, cette tâche apparaît généralement comme une sous-tâche au sein d'une tâche plus vaste, où il coopère avec l'élève. L'étude du système des tâches et gestes du professeur, et plus généralement de tout autre aide à l'étude (parents, etc.), ne saurait donc être menée de manière isolée : derrière l'activité du professeur, on doit sans cesse apercevoir l'activité de l'élève.

Un point essentiel à cet égard consiste à examiner, en toute organisation didactique scolaire, la *qualité* et la *quantité* du travail autonome exigé des élèves x_i (pour assurer un bon rendement en termes d'apprentissage) et qui est *invisible* (officiellement) du professeur y . (Il existe aussi, bien entendu, tout un travail exigé de y et invisible de x , qui compte autant dans la viabilité d'une organisation didactique...) Il arrive que ce travail invisible, accompli par l'élève sur une *autre scène*, que le professeur peut en principe ignorer, tende à occuper l'essentiel de l'espace de l'étude, comme dans l'exemple ci-après.

L'étude et la classe : le cours H, un cas extrême

... à cinq ans, je fus inscrit au cours H. Cet établissement devait sa réputation à un dispositif très particulier, comportant plusieurs éléments. J'ignore si, dans l'esprit de ses créateurs – peut-être vaudrait-il mieux dire : de ses ingénieurs – les divers éléments du dispositif étaient délibérément combinés. Pour moi, ils le furent et le sont restés.

1. Nous n'étions convoqués qu'une fois par semaine, le matin pour un cours de deux heures.

2. À la fin du cours nous était remis un bref document ronéoté, appelé la « feuille », prescrivant avec une impeccable précision les devoirs, exercices, leçons, lectures que nous devions faire à la maison pendant l'intervalle, guidés, surveillés, instruits par nos répétitrices privées ou, pour les moins fortunés, par nos mères.

3. Mères et répétitrices assistaient au cours, séparées des élèves par une mince barrière. Elles n'étaient pas autorisées à intervenir mais se manifestaient parfois bruyamment par des soupirs, des exclamations, plaintives ou indignées, devant nos défaillances, nos étourderies [...].

4. Une même institutrice – pour nous, M^{lle} Haussoye – nous régentaient de la onzième à la septième incluse.

5. Pendant le cours, rien ne nous était enseigné (c'est pourquoi j'hésite à l'appeler cours). Ce que nous apprenions, nous l'apprenions à la maison, à condition de suivre à la lettre les prescriptions de la « feuille ». La séance hebdomadaire était en réalité un examen et même une sorte de concours. Nous étions en effet classés à l'issue de chaque séance [...]. Nous nous séparions après la proclamation des résultats pour ne nous retrouver que la semaine suivante. Nos amis se recrutaient ailleurs. Là, nous n'avions que des concurrents.

En règle générale, pourtant, l'espace de l'étude a tendu depuis trois décennies à se restreindre – en principe – à la scène officielle de la classe. C'est pourtant par le travail *caché*, invisible, qui répond aux besoins d'étude engendrés par le travail de la classe mais non assumés par l'organisation didactique officielle, que se créent ou se renforcent, silencieusement, les inégalités de réussite entre élèves. On s'en souviendra au moment d'évaluer une organisation didactique (leçon 3).

Le problème du *topos* de l'élève comporte un aspect en quelque sorte inverse du précédent. L'élève peut être son propre directeur d'étude, *et l'est nécessairement en certaines choses*. Il ne saurait en revanche s'enseigner lui-même, d'entrée de jeu, ce que précisément il doit encore « apprendre » : entre l'élève et l'enseignant, la coupure est d'abord franche. La conséquence de cet état de fait ne saurait être surestimée : si l'apparition du professeur-directeur d'étude peut appauvrir la culture *didactique* de l'élève-étudiant, le mésusage de la fonction *enseignante* conduit plus radicalement à invalider *l'apprentissage mathématique lui-même*.

De là une situation dont Guy Brousseau a souligné avec force le caractère éminemment problématique : le contrat didactique « met le professeur devant une véritable injonction paradoxale. Tout ce qu'il fait pour faire produire, par l'élève, les comportements qu'il attend tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir (premier paradoxe didactique). Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et, donc, il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre implique pour lui de refuser le contrat mais aussi d'accepter la prise en charge. L'apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses *ruptures* ».

L'élève doit accepter le professeur comme directeur d'étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu'il lui apporte comme enseignant – et cela, en principe, à propos de *chacun* des moments de l'étude, évaluation et institutionnalisation comprises. Le « drame didactique » que le mot de *topos* résume se noue ainsi autour du jeu du maître : toujours subtilement présent, fût-ce *in absentia*, celui-ci doit savoir se faire absent même *in praesentia*, pour laisser l'élève libre de conquérir une indépendance que la figure tutélaire du professeur rend tout à la fois possible et incertaine.

2.3. Les moments didactiques. – Comme toute organisation praxéologique, une organisation didactique s'articule en types de tâches (généralement coopératives), en techniques, en technologies, en théories. Mais comment décrire une telle organisation ? Quels en sont par exemple les principaux types de tâches ? On ne saurait s'attendre à ce que la (re)construction, au cours d'un processus d'étude, d'une organisation mathématique donnée soit elle-même organisée d'une manière unique. Mais on s'aperçoit pourtant que, quel que soit le cheminement de l'étude, certains *types de situations* sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. De tels types de situations seront appelés ici *moments de l'étude* ou *moments didactiques* parce qu'on peut dire que, quel que soit le cheminement suivi, *il arrive forcément un moment* où tel ou tel « geste d'étude » devra être accompli : où, par exemple, l'élève devra « fixer » les éléments élaborés (moment de l'institutionnalisation) ; où il devra se demander « ce que vaut » ce qui s'est construit jusque-là (moment de l'évaluation) ; etc.

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des

moments didactiques se réalise *au bon moment*, ou, plus exactement, *aux bons moments* : car un moment de l'étude se réalise généralement *en plusieurs fois*, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que l'ordre mis, ci-après, sur les différents moments didactiques est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité *fonctionnelle* de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique.

Le *premier moment* de l'étude est celui *de la première rencontre* avec l'organisation *O* enjeu de l'étude. Une telle rencontre peut avoir lieu de plusieurs manières, mais un mode de rencontre – ou de « re-rencontre » – inévitable, sauf à rester à la surface de l'œuvre *O*, est celui qui consiste à rencontrer *O* à travers l'un au moins des types de tâches T_i constitutifs de *O*. Cette « première rencontre » avec le type de tâches T_i peut elle-même avoir lieu *en plusieurs fois*, en fonction notamment des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit : on peut *redécouvrir* un type de tâches comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.

1. Qu'est-ce qui est rencontré dans une première rencontre avec une organisation mathématique *O* ? La question de l'identité de l'*objet* ainsi rencontré pour la première fois mérite examen. S'il existe en effet des premières rencontres *annoncées* – « Demain nous commencerons le cosinus d'un angle aigu », indique par exemple le professeur –, il existe aussi, à l'autre extrême, des premières rencontres vraies, qui, pourtant, passent presque entièrement *inaperçues* parce que, dans l'institution où elles se produisent, l'objet rencontré est en quelque sorte de deuxième, voire de troisième rang, et qu'il n'est rencontré que parce qu'il vit en étroite association avec l'objet véritable de la rencontre. Cette remarque conduit donc à distinguer le point de vue de l'*organisateur* de l'étude – qu'il s'agisse de l'élève, du professeur, ou de l'ingénieur didacticien – et le point de vue de l'*observateur*. Pour le premier, seuls *certaines* objets appellent une mise en scène introductive, tandis que les autres sont censés s'introduire sans façon, comme silencieusement, dans l'organisation mathématique qui se construit. Pour le second, c'est à propos de *chacun* des objets qui s'introduisent dans l'organisation mathématique en construction que peut être posée la question de la première rencontre, et cela par exemple dans une perspective de réorganisation curriculaire, en vue notamment de donner un meilleur relief à un objet culturellement et didactiquement second, que l'on souhaite « promouvoir ».

2. Cela noté, que sont les *formes possibles* de la première rencontre ? Lorsqu'elle est expressément organisée, il semble que celle-ci ne puisse guère procéder que de *deux* grandes formes, dont les multiples combinaisons, dans leurs variantes développées ou, au contraire, dégradées, épuiserait alors l'espace des possibles. D'un côté, la première rencontre peut s'inscrire dans une problématique *culturelle-mimétique*. En ce cas, par le truchement d'un récit ayant valeur de compte rendu d'enquête sur le monde, l'objet rencontré apparaît d'abord comme existant *par ailleurs*, en certaines pratiques sociales. Ce sous-moment « culturel », où l'objet n'existe encore qu'*en effigie*, de sorte que l'étudiant n'a avec lui que des rapports *fictifs*, est suivi d'un sous-moment « mimétique » où, par la manipulation *effective* de l'objet, l'étudiant est censé *imiter* le praticien – en « jouant », par exemple, au mathématicien, au géographe, au critique littéraire, etc.

3. Dans sa version la plus exigeante, la rencontre culturelle-mimétique conduit en principe à rechercher et à expliciter – sur le mode discursif – les *raisons d'être* de l'objet ainsi rencontré, c'est-à-dire les motifs pour lesquels cet objet a été construit, ou pour lesquels, du moins, il persiste dans la culture. Mais les « raisons des choses » n'affleurent pas toujours nettement dans la culture. De là que la rencontre culturelle-mimétique puisse se dégrader en une parodie de la pratique, qui occulte les *raisons* de la pratique.

4. Par réaction, et à l'opposé, on peut vouloir écarter toute référence à un réel préexistant qu'il s'agirait de reproduire en l'imitant, au profit de la création d'un réel *sui generis*, identifié à un système de situations dites *fondamentales* (qu'on peut nommer aussi *ombilicales*), dont l'élève, seul ou en équipe, est l'acteur principal, sinon unique, et qui, devant ses yeux, font naître l'objet comme ce qui permet de fabriquer une *réponse* à une ou des *questions* déterminées. La rencontre *en situation* conduit ainsi à proposer, *de facto* et peut-être même *de jure*, une « définition » de l'objet rencontré qui ne se veut pas simple copie des définitions déposées dans la culture, mais qui, en bien des cas, apparaît *a priori* comme un véritable *ajout à la culture* – ajout dont il convient alors de montrer la compatibilité avec les définitions connues, pour autant du moins que cette « définition en situation » ne s'est pas *déjà* intégrée au patrimoine culturel.

5. Comme il en va avec la rencontre culturelle-mimétique, la rencontre en situation inclut ainsi un sous-moment *culturel* – dont l'effet Jourdain est l'une des formes les plus spectaculaires. Il s'en faut en effet que toute situation de première rencontre effective soit une situation « ombilicale ». En bien des cas, la définition de l'objet par un système de situations fondamentales se trouve subrepticement écartée au profit d'une mise en scène de l'objet dans des « activités » qui, en dépit de quelques traits culturels conservés, n'ont qu'une

relation assez relâchée avec ses raisons d'être les plus essentielles. D'une manière plus générale, il existe dans les pratiques didactiques courantes une large gamme de formes hybrides de premières rencontres, où une référence culturelle incomplètement assumée s'allie à des degrés variables avec une introduction « en situation » plus ou moins adéquate – aux plans épistémologique et cognitif.

6. On notera enfin que si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude –, elle joue cependant un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré.

Le *deuxième moment* est celui de l'*exploration* du type de tâches T_i et de l'*élaboration d'une technique* τ_i relative à ce type de tâches. On notera que, contre une certaine vision héroïque de l'activité mathématique, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles, c'est bien l'*élaboration de techniques* qui est au cœur de l'activité mathématique. Au fantasme moderne de l'élève-héros triomphant sans coup férir de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépasseable de l'élève-artisan laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment ses techniques mathématiques. En réalité, l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème *particulier*, spécimen du type étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un *moyen* pour qu'une telle technique de résolution se constitue. Ainsi se noue une dialectique fondamentale : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type.

Le *troisième moment* de l'étude est celui de la *constitution de l'environnement technologico-théorique* $[\Theta/\Theta]$ relatif à τ_i . D'une manière générale, ce moment est en interrelation étroite avec *chacun* des autres moments. Ainsi, dès la première rencontre avec un type de tâches, il y a généralement mise en relation avec un environnement technologico-théorique antérieurement élaboré, ou avec des germes d'un environnement à créer qui se précisera dans une relation dialectique avec l'émergence de la technique. Pour des raisons d'économie didactique globale, toutefois, les stratégies de direction d'étude traditionnelles font en général de ce troisième moment la *première étape* de l'étude, étape qui est alors commune à l'étude de *plusieurs* types de problèmes T_i – tous ceux, parmi les types de problèmes à étudier, qui apparaissent comptables du même environnement technologico-théorique $[\Theta/\Theta]$. L'étude de ces types de problèmes apparaît alors, classiquement, comme une suite d'*applications* du bloc technologico-théorique ainsi mis en place.

Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise que l'on en a : ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement.

La technique mise en œuvre plus haut pour déterminer le maximum d'une fonction algébrique élémentaire n'a été travaillée que sur *deux* spécimens. Un travail plus poussé est nécessaire, ne serait-ce que pour explorer la *portée* de cette technique – ne réussirait-elle pas que sur ces deux spécimens, précisément ? Considérons ainsi le problème suivant : *déterminer le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un cercle de rayon r* . Si x est la mesure de l'un des côtés du rectangle, l'autre côté a pour mesure $y = \sqrt{(2r)^2 - x^2}$, et l'aire du rectangle s'écrit xy . Cette aire est maximale en même temps que l'expression $(xy)^2$, et donc que $x^2(4r^2 - x^2)$, expression qui atteint son maximum lorsque $x^2 = 4r^2 - x^2 = 2r^2$, i.e. pour $x = y = r\sqrt{2}$. On peut

étendre la portée de cette technique jusqu'à résoudre, par exemple, le problème suivant (v. leçon 3) : *dans un rectangle de carton de 50 cm par 80 cm, on veut construire une boîte sans couvercle en retranchant, à chaque coin de la plaque de carton, un carré de côté x cm ; déterminer x pour que la boîte obtenue ait une capacité maximale.*

Le *cinquième moment* est celui de l'*institutionnalisation*, qui a pour objet de préciser ce qu'est « exactement » l'organisation mathématique élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir ».

① Les autres moments de l'étude, en effet, ne livrent encore qu'une organisation mathématique *en chantier*, où l'ouvrage fait, voulu pour durer, se mêle nécessairement aux « reliefs » d'une construction élaborée par essais, retouches, arrêts et reprises. Or ce qui mérite de durer, ce qui vaut d'être pérennisé ne s'impose nullement de soi-même, à coup sûr. Tel exemple, dont l'examen a bien servi le projet de construction en révélant des perspectives *a priori* insoupçonnées, tel état de telle technique, que l'on aura mis longtemps à dépasser, tel théorème, en lui-même insuffisant mais qui fut le premier résultat *démontré*, seront-ils intégrés à l'organisation mathématique définitive, ou bien les écartera-t-on ? Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord celui où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le « mathématiquement nécessaire », qui sera conservé, et le « mathématiquement contingent », qui, bientôt, sera oublié. En ce sous-moment d'*officialisation*, une praxéologie mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse.

② Il s'en faut pourtant que cette entrée dans la culture détermine complètement l'avenir institutionnel de la praxéologie ainsi officialisée. Dans un second sous-moment, celui de l'institutionnalisation *stricto sensu*, les objets et rapports *officiels*, ingrédients déclarés de l'organisation en construction, vont être activés à des degrés divers, et, par là, vont « travailler ». Quelques rares objets, officialisés en bonne et due forme, n'auront, il est vrai, pas de vie ultérieure. (Ainsi, au début du Livre I des *Éléments*, Euclide introduit-il la notion de *rhomboïde*, qui ne sera plus utilisée dans la suite de l'ouvrage...) Mais telle n'est pas la loi générale : le « frottement institutionnel » provoque ordinairement l'évolution des rapports officiels vers des formes stables non dégénérées, les rapports *institutionnels*, qui, bien que se constituant solidairement avec les rapports *personnels* des acteurs de l'étude, sembleront bientôt s'en émanciper au point de paraître les gouverner.

③ C'est normalement la phase d'institutionnalisation qui *relance l'étude* en contribuant à mettre en évidence tel ou tel type de problèmes qui, bien que relevant de l'organisation mathématique locale $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta]$, n'a pas encore été étudié ou ne l'a été qu'insuffisamment. D'une manière plus générale, l'étude « complète » de O peut être décrite ainsi. Soit T_1, \dots, T_n la suite des types de problèmes associés à la technologie θ , supposés étudiés *dans cet ordre*. Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, une organisation *ponctuelle* $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$ (constituée autour du type de problèmes T_i) se construit et vient s'intégrer à l'organisation *locale* déjà partiellement élaborée, $[T_j/\tau_j/\theta_j^{(j)}/\Theta_j^{(j)}]_{1 \leq j \leq i-1}$, pour produire l'organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta_i^{(i)}/\Theta_i^{(i)}]_{1 \leq j \leq i}$. Lorsque $i = n$, on doit avoir $[T_j/\tau_j/\theta_j^{(j)}/\Theta_j^{(j)}]_{1 \leq j \leq n} = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta]_{1 \leq i \leq n}$, soit l'organisation mathématique locale « visée ». Celle-ci, à son tour, devra s'intégrer dans l'organisation *globale* construite jusque-là. Le processus d'étude va ainsi chaque fois « rouvrir » l'organisation mathématique existante, pour la modifier en l'enrichissant, en la simplifiant, etc.

Le *sixième moment* est celui de l'*évaluation*, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. En pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que *vaut* ce qui a été appris, ce moment de véridiction qui, malgré les souvenirs d'enfance, n'est nullement une invention de l'École, participe en fait de la « respiration » même de toute activité humaine (v. leçon 3).

L'opération d'évaluation doit être entendue aussi en un sens plus large : derrière l'évaluation toute classique

des rapports *personnels*, c'est-à-dire derrière l'évaluation « des personnes », se profile l'évaluation de la *norme elle-même* – le rapport institutionnel qui sert d'étalon. Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve alors l'interrogation *sur la technique elle-même* – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi ? Cette évaluation – à laquelle les usages scolaires font, il est vrai, une fort petite part – est ici formatrice, non d'une personne, mais d'une praxéologie : à ce titre, elle participe de l'institutionnalisation. Réformatrice, elle relancera l'étude, suscitera la reprise de tel ou tel moment, et peut-être de l'ensemble du parcours didactique.

2.4. Une remarque technique. – Le modèle des moments de l'étude a, pour le professeur, deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des processus didactiques. Ensuite, il permet de poser clairement le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude. Comment par exemple réaliser concrètement la première rencontre avec telle organisation mathématique ? Avec tel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ? Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Autant de questions qui se posent au professeur et auxquelles on répondra provisoirement par une formule générique : *en créant des situations didactiques adéquates*. Cette exigence, que l'on ne fera ici que repérer, est en fait d'autant plus complexe que le professeur est tout à la fois le *metteur en scène* et l'*acteur* de situations didactiques dont, le plus souvent, il est en outre le *concepteur*.

Leçon 3. – Évaluer, développer : quelques remarques

1. Évaluer

1.1. Un schéma universel, un geste fondamental. – En nombre de situations, nous sommes amenés à opérer selon le schéma à quatre temps ($T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_4$) indiqué plus haut. Face à quelque obligation d'agir, en effet, nous commençons en général par *observer* et *analyser* (T_1 & T_2) la manière de faire de quelque autrui (« Et eux, qu'est-ce qu'ils font ? Comment ils font exactement ? »). Puis nous *évaluons* ce qu'observation et analyse auront ainsi révélé (« Qu'est-ce que ça vaut, tout ça, finalement ?... »), avant de *développer* notre propre « solution » en essayant d'améliorer, sur certains points jugés négativement, la « solution » observée. Ainsi en va-t-il, très banalement, de n'importe quel professeur chaque fois que, remettant son ouvrage sur le métier, il se décide à « observer » un ou plusieurs manuels (de manière plus ou moins systématique), à « analyser » (peut-être superficiellement) leur contenu, à « évaluer » (de façon parfois peu nuancée) ce contenu, enfin à « développer » (quelquefois hâtivement), sur cette base, son propre « produit » – « son cours ».

On notera que le schéma précédent s'applique tout aussi bien lorsque le professeur prend pour objet *o*, non quelque « modèle » à démarquer pour « préparer son cours », mais les « solutions » produites par ses élèves, solutions que, tour à tour, le professeur observera (en exigeant par exemple de chaque élève qu'il lui remette une « copie »), qu'il analysera (en corrigeant ces copies), qu'il évaluera (par la note attribuée et les annotations portées sur la copie), avant de développer sa propre solution (sous la forme d'un « corrigé » présenté aux élèves oralement et/ou par écrit). Un peu de réflexion montre encore que, dans la fabrication de sa « solution », chaque élève aura lui-même mis en œuvre le *même* schéma à quatre temps, observant (en classe et dans le manuel) certaines « manières de faire », les analysant mais aussi les *évaluant* (par exemple en rejetant tel élément – manière de dire, etc. – qu'il regardera comme un « truc de prof » inassumable par lui, en valorisant au contraire tel élément qu'il considérera – peut être à tort – comme emblématique de ce qu'attend le professeur, etc.),

avant et afin de « développer » sa propre solution. En fin de compte, on reconnaîtra ici au schéma proposé, dans le cadre de l'approche anthropologique, une valeur universelle : dans une forme plus ou moins développée, quiconque projette une action le retrouve spontanément.

Dans ce schéma d'action, l'étape de l'évaluation *constitue un geste fondamental*, qui appelle quelques remarques très générales. Soulignons tout d'abord que l'évaluation dont il est question ici ne doit pas être pensée à partir de la seule évaluation scolaire, telle que l'assume le professeur à l'endroit des productions d'élèves. C'est en fait le contraire qui est vrai : l'évaluation scolaire gagne à être saisie comme une spécification de la notion générique d'évaluation. Mais qu'en est-il alors d'une telle notion « générique » ? Estimer la *valeur* d'un objet *o*, lui attribuer une valeur (d'une manière ou d'une autre), bref, *évaluer* est une activité qui, *a priori*, peut porter sur *n'importe quel* objet, être le fait de *n'importe qui* – de *n'importe qui* a « de la jugeote » –, prendre place en quelque *institution* que ce soit – même s'il est vrai que toutes les combinaisons d'un objet *o*, d'une personne *x* et d'une institution *I* ne sont pas nécessairement « permises ». On notera surtout que la vie d'une institution semble fréquemment saturée d'actes d'évaluation, à ce point même que de telles pratiques, en partie « sauvages », sont parfois regardées comme une véritable gêne, dont l'importance doit être contrôlée.

Certains philosophes antiques – tel Pyrrhon (365-275 av. J.-C.), dont Montaigne se fera le disciple – ont ainsi fait du *refus de juger* le fondement de la vie heureuse : « ... les jugements que les hommes portent sur la valeur de telle ou telle chose ne sont fondés que sur des conventions. En fait, il est impossible de savoir si telle chose est, en soi, bonne ou mauvaise. Et le malheur des hommes en effet vient de ce qu'ils veulent obtenir ce qu'ils croient être un bien ou fuir ce qu'ils croient être un mal. » (Pierre Hadot, *Qu'est-ce que la philosophie antique ?*, Gallimard, 1995, p. 176.).

S'il n'est évidemment pas question d'adopter une problématique du refus de juger, il est cependant toujours nécessaire de réfléchir sur le bon usage de la *suspension de jugement* – l'*epoché* des Stoïciens. En particulier, l'analyse (et, avant cela même, l'observation) ne doit pas devenir, subrepticement, évaluation. Il est vrai sans doute que l'état de suspension de jugement constitue normalement le fond de toute vie institutionnelle, sur lequel s'élève alors le bruissement des jugements de valeur. Mais on doit répéter ici qu'il faut savoir allouer un temps – celui de l'observation et de l'analyse – à la suspension de jugement ; et un temps propre – celui de l'évaluation – à la nécessité quasi vitale de juger.

Devant cette nécessité, l'important est alors de se souvenir que l'activité d'évaluation est toujours, et nécessairement, *relative*. La valeur reconnue à un objet n'est en effet nullement intrinsèque, absolue, parce que l'attribution de valeur se réfère toujours, implicitement ou non, à un certain *usage social* de l'objet évalué : on évalue toujours *d'un certain point de vue*.

Comme l'indique un dictionnaire de psychologie en langue anglaise, la valeur est « The quality or property of a thing that makes it useful, desired or esteemed ». L'auteur ajoute alors : « Note the pragmatic aspect implied by this definition; the value of a thing is given by its role in a (social) transaction, the thing itself does not possess value. » (Arthur S. Reber, *The Penguin Dictionary of Psychology*, Penguin Books, 1985).

C'est dans cette perspective que l'on se situera ci-après à propos du problème plus spécifique de l'évaluation – dans une classe *I*, par un élève *x*, ou un professeur *y*, ou un observateur *z* – d'un objet *o* qui sera une *organisation mathématique* OM_θ ou une *organisation didactique* OD_θ associées à un certain thème d'étude mathématique θ . Pour simplifier et clarifier le propos, on se limitera toutefois à considérer le cas de l'évaluation *a priori*, par un professeur *y*, d'organisations mathématique et didactique OM_θ et OD_θ préalablement observées dans la littérature (manuels, etc.), et analysées par *y* en vue de développer des organisations selon son

cœur, OM_θ^y et OD_θ^y , à « mettre en place » dans une classe dont il a la responsabilité.

1.2. Évaluer des types de tâches. – On se réfère ici à une organisation soit *ponctuelle* (de la forme $[T/\tau/\theta/\Theta]$), soit *locale* (de la forme $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$). Dans tous les cas, que le thème d'étude imposé θ s'identifie à un certain type de tâches mathématiques T (organisation ponctuelle), ou qu'il renvoie au « noyau générateur » d'un bloc technologico-théorique (organisation locale), l'évaluation s'appuiera sur des critères explicites, à préciser et à justifier, dont l'analyse préalable devra permettre de dire dans quelle mesure ils sont satisfaits par l'organisation mathématique à évaluer. En fonction des considérations précédentes, et à titre d'exemples, on mentionnera ici la courte liste suivante, évidemment non exhaustive :

Critère d'identification. – Les types de tâches T_i sont-ils clairement *dégagés* et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus K_i effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?

Critère des raisons d'être. – Les *raisons d'être* des types de tâches T_i sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

Critère de pertinence. – Les types de tâches considérés fournissent-ils un *bon découpage* relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des « isolats » sans lien véritable – ou explicite – avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ?

Pour illustrer le troisième critère, considérons un *genre* de tâches – *vérifier un calcul* – dont la pertinence paraît génériquement évidente, mais dont la concrétisation sous la forme de *types de tâches déterminés* est en général mal prise en charge dans le curriculum secondaire français.

1. Un type de tâches que l'on peut considérer à cet égard est relatif au thème θ_1 des écritures fractionnaires : *vérifier le résultat d'un calcul de fractions* – telle par exemple l'égalité $\frac{7}{9} + \frac{4}{6} = \frac{13}{9}$. En l'espèce, une technique peut consister à vérifier, à l'aide d'une *calculette*, l'égalité du produit de chacun des deux membres de l'égalité obtenue par le produit des dénominateurs des fractions ; ainsi aura-t-on : $(9 \cdot 6) \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{6} \right) = 78$ & $(9 \cdot 6) \frac{13}{9} = 78$.

2. Un deuxième type de tâches consiste à *vérifier le résultat d'un calcul algébrique* – telle par exemple l'égalité $(x-3)(2x+1) = 2x^2-5x-3$. En l'espèce on peut, à la main ou par calcul mental, vérifier l'égalité obtenue pour deux valeurs simples de x (0, ± 1 , ± 2 , etc.) ; et/ou on peut, à l'aide d'une *calculette*, vérifier l'égalité pour $x = \pi$ ou $x = \sqrt{2}$, etc. On obtient ainsi par exemple : $(x-3)(2x+1)|_{x=0} = -3$ & $2x^2-5x-3|_{x=0} = -3$; $(x-3)(2x+1)|_{x=3} = 0$ & $2x^2-5x-3|_{x=3} = 18-15-3$; $(x-3)(2x+1)|_{x=\pi} = 1,031245534$ & $2x^2-5x-3|_{x=\pi} = 1,031245534$. Une autre technique consiste à choisir une valeur c pour x et à remplacer *certaines* occurrences de x par cette valeur, avant de résoudre l'équation ainsi obtenue pour vérifier qu'elle admet bien la solution $x = c$. Ainsi a-t-on, pour $x = 4$: $2x+1 = 29-5x \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4$; pour $x = 2$: $-(2x+1) = 5-5x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

3. Un troisième type de tâches consiste à *vérifier le résultat d'un calcul avec radical* – telle l'égalité $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = 18+8\sqrt{5}$. On peut ici remplacer le radical \sqrt{c} par x et résoudre l'équation ainsi obtenue pour vérifier qu'elle admet la solution $x = \sqrt{c}$. On a ainsi : $\frac{(3+x)^2}{3-x} = 18+8x \Leftrightarrow (3+x)^2 = (3-x)(18+8x) \Leftrightarrow x^2+6x+9 = -8x^2+6x+54 \Leftrightarrow 9x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}$.

1.3. Évaluer des techniques. – L'évaluation des techniques supposent de même des critères, dont quelques-uns seulement seront évoqués ici. Ainsi, les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées, ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur *portée* est-elle satisfaisante ? Leur *fiabilité* est-elle acceptable étant donné leurs conditions

d'emploi ? Sont-elles suffisamment intelligibles ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenables ? On donne ci-après, s'agissant de ces critères, quelques exemples illustratifs.

① Une technique proposée peut être *insuffisamment travaillée et mise au point*, de sorte que, non seulement sa portée soit indûment limitée, mais encore que son *intelligibilité* soit obscurcie. La technique d'optimisation élémentaire vue plus haut permet par exemple de résoudre le problème suivant : *Déterminer le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un cercle de rayon r .* En désignant par x et $y = \sqrt{(2r)^2 - x^2}$ les mesures des côtés du rectangle cherché, on a en effet : aire maximale $\Leftrightarrow xy$ maximale $\Leftrightarrow (xy)^2$ maximale $\Leftrightarrow x^2(4r^2 - x^2)$ maximale $\Leftrightarrow x^2 = 4r^2 - x^2 = 2r^2 \Leftrightarrow x = y = r\sqrt{2}$. Considérons alors le problème suivant : *Dans un rectangle de carton de 50 cm par 80 cm, on veut construire une boîte sans couvercle en retranchant, à chaque coin du carton, un carré de côté x cm ; déterminer x pour que la boîte obtenue ait une capacité maximale.* La technique déjà mise en œuvre conduit ici au constat suivant : $V = (50-2x)(80-2x)x$ maximal $\Leftrightarrow 4V = (50-2x)(80-2x)(4x)$ maximal $\Leftrightarrow 50-2x = 80-2x = 4x = 130/3$. L'égalité impossible $50-2x = 80-2x$ semble indiquer qu'il n'y a pas de solution. Où est donc la faille ?...

② Une technique peut être *insuffisamment fiable*. C'est ainsi que le calcul, traditionnel en France, non sur des *grandeurs* (comme 5 km, 32 cm², 18 m/s², 12 g/dm³, etc.), mais sur les seules *mesures* de ces grandeurs (5, 32, 18, 12, etc.), c'est-à-dire en excluant les unités des calculs pour ne les réintroduire qu'à la fin, constitue une technique peu fiable, si on la compare avec la technique, sans doute plus « lourde », consistant à calculer directement sur les grandeurs, c'est-à-dire avec les unités. Soit ainsi à calculer la masse linéique M , en g/cm, d'un barreau d'acier de section constante, de 4 dm de longueur, qui pèse 2,85 kg ; on a : $M = \frac{2,85 \text{ kg}}{4 \text{ dm}} = \frac{2,85 (10^3 \text{ g})}{4 (10 \text{ cm})} = \frac{285 \text{ g}}{4 \text{ cm}} = \frac{285}{4} \text{ g/cm} = 71,25 \text{ g/cm}$. De même, soit à déterminer la masse M , en grammes, de 9 cm³ de zinc, sachant que la masse volumique du zinc est de 7,29 kg/dm³ ; on a : $M = (7,29 \text{ kg/dm}^3)(9 \text{ cm}^3) = (7,29 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3})(9 \text{ cm}^3) = 7,29(10^3 \text{ g})(10 \text{ cm})^{-3}(9 \text{ cm}^3) = 7,29 \cdot 9 \text{ g} \approx 65,6 \text{ g}$.

③ Bien d'autres cas peuvent être cités pour illustrer le caractère défectueux de certaines techniques mises entre les mains des élèves, qui révèle surtout l'absence de techniques adéquates, parfois parfaitement disponibles « en théorie » (ou plutôt : « en technologie »), mais que la tradition d'enseignement ignore. En géométrie élémentaire, ainsi, les résultats (disponibles aujourd'hui en Seconde) exprimant le fait que le plan pointé est un espace vectoriel de dimension 2, ne sont pas employés pour fabriquer une technique à l'emploi beaucoup plus sûr, fondée sur la notion de repère du plan. À titre d'exemple considérons le problème suivant : *Soit un triangle ABC et soit I, J, K les milieux de [BC], [CA], [AB]. Est-il vrai que les segments [AI] et [JK] ont toujours le même milieu ?* Appelons M le milieu de [AI] et N le milieu de [JK], et exprimons \vec{AM} et \vec{AN} dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) . On a : $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AI} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right) = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$ & $\vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{AJ} + \frac{1}{2} \vec{AK} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{AC} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} \right) = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$: on a donc bien $M = N$. On notera encore qu'une variante (« barycentrique ») de cette technique est possible qui fait gagner en fiabilité tout en allégeant les calculs. On peut en effet écrire, d'un côté, $M = \frac{1}{2} (A+I) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{2}(B+C) \right) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{4} C$, de l'autre $N = \frac{1}{2} (J+K) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}(A+B) \right) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{4} C$. D'où $M = N$. On peut encore aller plus loin en écrivant (« vectoriellement ») : $4(M-N) = 2(A+I) - 2(J+K) = 2A + 2I - 2J - 2K = 2A + (B+C) - (C+A) - (A+B) = 0$: d'où...

④ Certaines des techniques précédentes ont plus d'avenir que d'autres, et satisfont davantage les besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui et, le cas échéant, pour demain. Semblablement, la technique de commençant consistant à « mettre des flèches » pour développer une expression comme $(x-3)(2x+1)$ n'a guère d'avenir, moins en tout cas que la technique qui consisterait à poser $y = 2x+1$ et à écrire : $(x-3)(2x+1) = (x-3)y = xy - 3y = x(2x+1) - 3(2x+1) = 2x^2 + x - (6x+3) = 2x^2 - 5x - 3$. Même si, en effet, il deviendra (en principe) rapidement inutile de recourir à l'une et l'autre technique dans le type de calcul envisagé ici, la seconde technique, en effet, est celle-là même qu'on emploiera chaque fois qu'un calcul deviendra localement trop complexe.

1.3. Évaluer des technologies. – Des remarques analogues aux précédentes peuvent être faites à propos du bloc technologico-théorique. Ainsi, étant donné un énoncé, le problème de sa justification est-il seulement *posé* ? Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme

allant de soi, évident, naturel, ou encore bien connu (“folklorique”) ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d’utilisation ? Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités ? Là encore on donnera quelques exemples.

① Un résultat effectivement utilisé peut n’avoir même pas fait l’objet d’une interrogation. Ainsi en va-t-il fréquemment s’agissant de l’unicité des écritures canoniques utilisées, par exemple quand on doit écrire sous la forme $u+v\sqrt{e}$ une expression du type $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ (où $a, b, c, d, u, v \in \mathbf{Q}$ et où $e \in \mathbf{N}$ est un entier non carré parfait). L’unicité est, ici comme en d’autres cas, pragmatiquement impliquée par le « postulat pédagogique » selon lequel existe *une* bonne réponse – ce qui seul justifie que le professeur rejette comme nécessairement erronée la réponse de l’élève ayant obtenu *une autre expression*. Dans le cas évoqué, la justification est en fait relativement peu coûteuse : si $u+v\sqrt{e} = s+t\sqrt{e}$ et si $v \neq t$, alors $\sqrt{e} = \frac{u-s}{t-v} \in \mathbf{Q}$, etc.

② La justification d’un « théorème en acte » dans la classe peut en outre mettre en jeu des éléments technologiques non seulement disponibles mais encore au cœur même des mathématiques étudiées. Ainsi en va-t-il pour ce « postulat implicite » selon lequel, quels que soient $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ et $e \in \mathbf{N}$ non carré parfait, il existe $x, y \in \mathbf{Q}$ tels que $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e}$. On a ici : $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e} \Leftrightarrow a+b\sqrt{e} = (c+d\sqrt{e})(x+y\sqrt{e}) \Leftrightarrow cx + dey = a \text{ \& } dx+cy = b$. Le système obtenu a pour déterminant $c^2-d^2e \neq 0$. Le système possède donc une solution (x,y) . Ici comme dans le cas précédent, la clé de la démonstration est le fait que $\sqrt{e} \notin \mathbf{Q}$ – auquel il faudra donc faire une (petite) place dans l’histoire de la classe...

③ Le résultat technologique évoqué dans ce qui précède – l’existence et l’unicité d’une certaine écriture canonique – n’a pas pour unique fonction de *justifier* des pratiques existantes. Il peut être exploité en vue de *produire* de nouvelles techniques. On peut ainsi envisager de déterminer l’écriture canonique d’une expression de la forme $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ par la technique mise en œuvre ci-après : $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = x+y\sqrt{5} \Leftrightarrow (3+\sqrt{5})^2 = (3-\sqrt{5})(x+y\sqrt{5}) \Leftrightarrow 14 + 6\sqrt{5} = (3x-5y) + (-x+3y)\sqrt{5} \Leftrightarrow 3x-5y = 14 \text{ \& } -x+3y = 6 \Leftrightarrow x = 18 \text{ \& } y = 8$.

Des questions analogues devront bien entendu être soulevées à propos des éléments *théoriques* de l’organisation mathématique examinée : y a-t-il des éléments théoriques explicites ? Implicites ? Que permettent-ils d’éclairer ? De justifier ? Etc.

1.4. Évaluer une organisation didactique ? – La question de l’évaluation d’une organisation didactique OD₀ constitue un point de convergence de l’ensemble des études en didactique des mathématiques, en même temps qu’elle est, de manière explicite ou implicite, l’un des moteurs les plus puissants du progrès des recherches didactiques. Un traitement même sommaire de cette question appellerait donc de longs développements, qui ne peuvent trouver place dans le cadre de ces leçons : une nouvelle suite de leçons serait ici nécessaire ! Faute de pouvoir proposer mieux, on laissera donc le lecteur s’inspirer des quelques développements consacrés plus haut à l’analyse d’une organisation didactique pour élaborer ses critères d’évaluation (existence d’un *topos* pour l’élève, prise en charge des différents moments de l’étude, etc.).

2. Développer

Plus encore sans doute que l’étape de l’évaluation, la question du *développement* doit être située dans un prolongement à venir du travail réalisé dans ces leçons. Sur ce sujet on se contentera donc d’énoncer deux principes « théoriques », susceptibles d’éclairer le travail technologico-technique ultérieur.

Le premier principe est celui de l'*hétérogénéité historique et institutionnelle* des « matériaux » constitutifs d'une praxéologie existante ou à construire. De ce point de vue, il n'existe pas par exemple d'organisation didactique qu'on pourrait dire *d'époque*, de part en part *datée*, ou, à l'autre extrême, entièrement *moderne* en chacun de ses composants. Les activités de développement doivent prendre en compte cette nécessité d'un « métissage historique » de toute production possible : toute « novation » est partiellement conservatrice, en ce qu'elle réutilise – de manière parfois inédite – des matériaux anciens, que l'on pourrait autrement juger « obsolètes ».

Comme le souligne Michel Serres, aucune création n'est véritablement de *telle* époque : « Considérez une voiture automobile d'un modèle récent : elle forme un agrégat disparate de solutions scientifiques et techniques d'âges différents ; on peut la dater pièce à pièce : tel organe fut inventé au début du siècle, l'autre il y a dix ans et le cycle de Carnot a presque deux cents ans. Sans compter que la roue remonte au néolithique. L'ensemble n'est contemporain que par le montage, le dessin, l'habillement, parfois seulement par la vanité de la publicité » (Michel Serres, *Éclaircissements* (entretiens avec Bruno Latour), François Bourin, Paris, 1992, p. 72).

Cette observation s'applique à l'évidence aux organisations mathématiques – tel résultat date de la fin du XVII^e siècle, tel autre n'apparaît publiquement qu'en 1821, tel autre encore n'a été démontré qu'en 1965, etc. Mais le panachage historique est plus évident encore s'agissant du didactique : la solution d'hier, fût-elle aujourd'hui oubliée, sera demain peut-être partiellement reprise, dans une combinaison nouvelle, novatrice. En conséquence, les activités de développement devront, en la matière, reposer sur une *enquête qualitativement large*, aussi bien *en diachronie* qu'*en synchronie*, enquête à laquelle le développement récent de moyens de communication et d'information puissants (Internet, etc.) peut donner aujourd'hui une nouvelle vigueur.

Le second principe que l'on énoncera ici introduit la notion de *proche développement* en se référant pour cela à la *problématique écologique*, constitutive de l'approche anthropologique en didactique. D'une manière générale, la problématique écologique – « Pourquoi ceci ? », « Pourquoi pas cela ? », etc. – conduit à questionner le réel observable pour se déprendre de l'évidence du fait établi, vécu comme naturel. L'illusion de « naturalité » de l'ordre institutionnel est, dans le registre de l'action, la racine de beaucoup de conservatismes et le fourrier de beaucoup d'impuissances : si les choses sont comme elles sont parce qu'elles se conforment à un ordre naturel, toute modification que l'on voudrait leur imprimer apparaît comme une subversion de cet ordre du monde, ce qui justifie aussi bien le conformisme du quotidien qui est le lot de la plupart que la religion de l'exceptionnel dont quelques-uns se font les grands prêtres.

Par contraste, le questionnement écologique permet de réinterroger l'ordre de choses existant : s'il est vrai que, généralement, le réel est comme il est parce que de fortes contraintes l'imposent, on peut toujours se proposer d'examiner les modifications qui, *pour un coût acceptable*, par exemple en laissant inchangé l'essentiel des conditions prévalentes, pourraient créer un *nouvel état stable*, tenu pour plus approprié. L'ensemble de ces états « proches » (et viables) de la réalité à développer constitue la *zone de proche développement* de cette réalité.

La problématique écologique apparaît ainsi comme le fondement d'un *art du possible*. La réalité observée peut être en fait instable, faiblement robuste, et ne perdurer que parce que des conditions rarement réalisées se trouvent localement satisfaites. À l'inverse, le « simplement possible » peut parfois advenir et persister, par un changement limité dans les conditions

prévalantes. À côté donc d'états écologiquement très improbables, il existe toute une zone où le virtuel peut s'actualiser et l'actuel devenir virtuel au gré de variations de faible ampleur. Des configurations seulement imaginées peuvent demain être une banalité du quotidien, tandis que d'autres, depuis toujours inscrites dans le paysage institutionnel familial, peuvent en un moment disparaître sans retour. De là un effacement de la frontière entre l'existant et le possible, et l'ouverture d'une zone assez large où l'on passe sans discontinuité marquée du virtuel au réel et inversement – zone « de proche développement » qui est en elle-même une invitation à travailler.