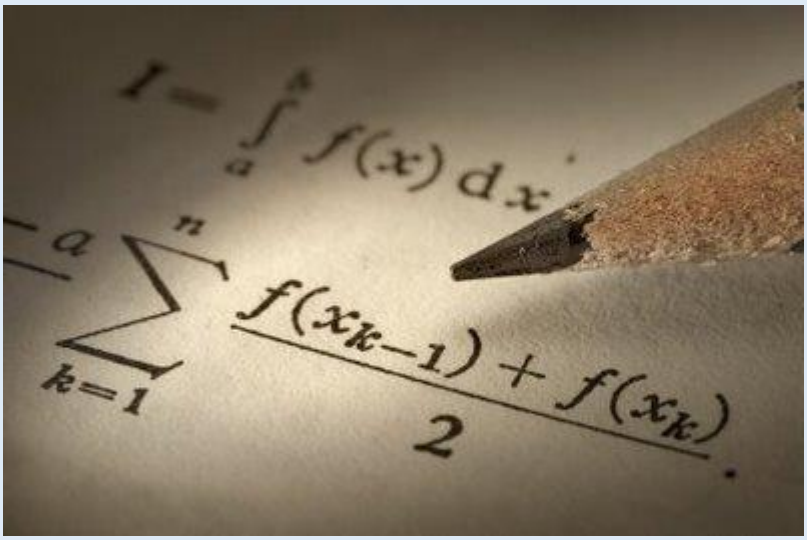
MÉTODOS NUMÉRICOS

ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON
2. MÉTODO DA SECANTE



RAÍZES DAS EQUAÇÕES

Além do método da bisseção, apresentamos mais dois métodos para obter raízes aproximadas de equações:

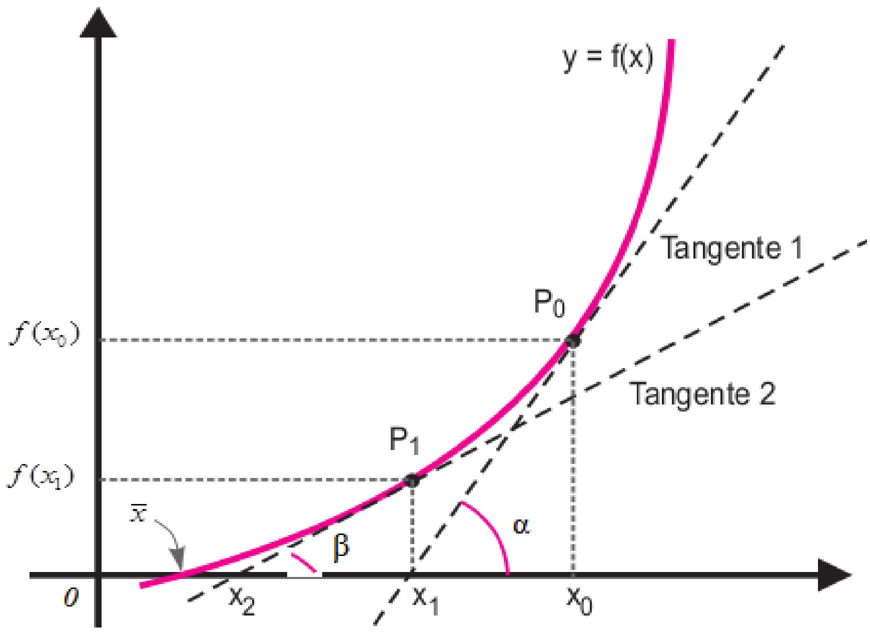
1. **Método de Newton Raphson**
2. **Método da secante**

Do ponto de vista da velocidade da convergência, estes dois métodos se mostram mais eficientes do que o método da bisseção. O número de iterações para se chegar à uma raiz aproximada é bem menor do que no método da bisseção.

Além disso, o método da bisseção caracteriza-se por definir, em cada iteração, um intervalo que contém a raiz e construir, para a iteração seguinte, outro intervalo encaixado neste e que continue a conter a raiz. Os intervalos, como aparecem encaixados uns nos outros, têm amplitudes sucessivamente menores. Já nos dois métodos a serem apresentados, não é necessário definir um intervalo que contenha a raiz. O processo iterativo pode ser iniciado com uma única aproximação à raiz, ou mesmo duas. A convergência destes métodos depende dos valores iniciais atribuídos na primeira iteração, isto é, para garantir a convergência é bom que se tome uma estimativa inicial "suficientemente próximo" da raiz.

1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (M-N-R)

O método de Newton-Raphson, desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson, tem o objetivo de estimar as raízes de uma função. O primeiro para encontrar uma sequência (x_n) de aproximação é escolher uma aproximação inicial x_0. Após isso, calcula-se a equação da reta tangente (por meio da derivada) da função nesse ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz. Repetindo-se o processo, cria-se um método iterativo para encontrarmos a raiz da função



Vamos encontrar a sequência (x_n) de aproximação. Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a, b] e seja $\bar{x}$ uma raiz de f(x), onde $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$. Se a aproximação inicial da raiz for x_0, pode-se estender uma reta tangente a partir do ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. O ponto onde essa tangente cruza o eixo x normalmente representa uma estimativa melhorada da raiz. A ideia do método é aproximar o gráfico da função $f(x)$ por meio de linhas tangentes, como ilustrado na figura abaixo, até as linhas tangentes atingirem uma aproximação desejada através do ponto que corta o eixo x (pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots$).

Assim, considere uma reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_0=(x_0, f(x_0))$. Observe que esta reta corta o eixo x em x_1. Considerando $\overline{x}$ uma raiz exata (que não conhecemos), podemos tomar x_1 como uma primeira raiz estimada, partindo de x_0.

Assim, sendo x_1 uma aproximação de $\overline{x}$, podemos traçar uma nova reta tangente no ponto P_1 que tem x_1 como abscissa e obter novamente uma interseção entre a reta tangente e o eixo x em x_2, aproximando um pouco mais da raiz exata $\overline{x}$. Esse processo continua, até que o critério de parada diga que estamos tão próximos da raiz exata quanto desejamos.

Logo, observe que o método de Newton-Raphson cria uma sequência de aproximações (x_n) formada pelos pontos $x_0, x_1, x_2, x_{3,\ldots,} x_n$ través de retas tangentes ao gráfico da função $f(x)$. Resta saber como determinar os valores de $x_0, x_1, x_2, x_{3,\ldots,} x_n$. É o que será mostrado agora.

Considere a reta Tangente 1 no ponto $P_0=(x_0, f(x_0))$. Observe o triângulo retângulo $P_0 x_0\ x_1$ com um ângulo α (alfa) em x_1. Pelas relações trigonométricas, temos que:

$$tg(\alpha)=\frac{C.Oposto}{C.Adjacente}=\frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \qquad \textbf{(I)}$$

Mas por definição de derivadas (coeficiente angular da reta tangente ao ponto P), temos que:

$$tg(\alpha)=f'(x_0) \qquad \textbf{(II)}$$

De (I) e (II), temos:

$$\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}=f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Se $|f(x_1)|<\varepsilon\,(\text{erro})$, então x_1 é a raiz desejada. Caso contrário, calcula-se x_2, que é obtido com o mesmo raciocínio, mas agora com a reta Tangente 2 em $P_1(x_1, f(x_1))$.

$$tg(\beta)=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(III)}$$

Por derivadas, temos:

$$tg(\beta)=f'(x_1) \qquad \textbf{(IV)}$$

De (III) e (IV), temos:

$$\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}=f'(x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_1-x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se $|f(x_2)|<\varepsilon\,(\text{erro})$, então x_2 é a raiz desejada. Caso contrário, calcula-se x_3, e assim por diante até obter a precisão desejada.

Assim, escolhido um valor inicial x_0, a sequência (x_n) será determinada por

$$\boxed{x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

onde x_n será a aproximação da raiz $\bar{x}$.

TEOREMA 1 - Seja $f(x)$, $f'(x)$ ($f'(x) \neq 0$) e $f''(x)$ funções contínuas no intervalo [*a*, b] e $\bar{x}$ a única raiz de $f(x)$ neste intervalo. Então, existe um intervalo I contendo a raiz $\bar{x}$, tal que se $x_0 \in I$, a sequência (x_n) gerada pela fórmula recursiva convergirá para a raiz $\bar{x}$.

Critério de Parada (CP) – No M-N-R, escolhe-se $x_n = \bar{x}$ como raiz aproximada de $\bar{x}$ se:

1. $|x_n - x_{n-1}| = < \varepsilon$ ou

2. $|f(x)| < \varepsilon$ (vamos usar este)

Exemplo – Considere $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Encontrar a raiz aproximada, com valor inicial $x_0 = 0{,}5$ e com um erro de $\varepsilon \leq 0{,}0001 = 1 \times 10^{-4}$, onde $\alpha \in (0,1)$.

-Solução-

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert < \varepsilon$
0	0,5	-1,375	-8,25	0,33333	1,375 > ε
1	0,33333	0,037037	-8,66667	0,3376068	0,037037 > ε
2	0,3376068	0,00001834053			0,00001834053 < ε

Passo 1: Derivar *f*(*x*)

→ $f'(x) = 3x^2 - 9$

Passo 2: Calcular as possíveis raízes

$x_0 = 0{,}5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}33333$$

- Critério de parada (CP): (para verificar se $x_1 = 0{,}33333$ é a raiz procurada).

$$|f(x_1)| = |f(0{,}33333)| = (0{,}33333)^3 - 9(0{,}33333) + 3 = 0{,}037037 > 0{,}0001 \text{ (continua)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}33333 - \frac{f(0{,}33333)}{f'(0{,}33333)} = 0{,}3376068$$

- Critério de parada (CP): (para verificar se $x_2 = 0{,}3376068$ é a raiz procurada).

$$|f(x_2)| = |f(0{,}3376068)| = 0{,}00001834053 < 0{,}0001 \text{ (para)}$$

Logo, a raiz procurada é $x_2 = 0{,}3376068$.

OBSERVAÇÕES

1- Para encontrar os intervalos que contém as raízes, utiliza-se o Teorema de Bolzano.

No exemplo anterior, $f(0) \cdot f(1) = 3 \cdot (-5) = -15 < 0$

2- O Método de Newton-Raphson tem convergência quadrática, ou seja, a quantidade de dígitos significativos duplica à medida que os valores da sequência se aproximam da solução de f(x) = 0. Porém este necessita da avaliação da função e sua derivada em cada ponto x_n. Pode ocorrer de termos uma raiz isolada num intervalo [*a*, *b*] e o método acabe convergindo para uma outra raiz que não pertence a [*a*, *b*]. Isto ocorre porque temos que tomar $x_0 \in [a,b]$.Na escolha do valor inicial x_0 podemos escolher o ponto médio do intervalo, pois isto aumenta as chances de tomar x_0 dentro do intervalo [*a*, b].

Vantagens

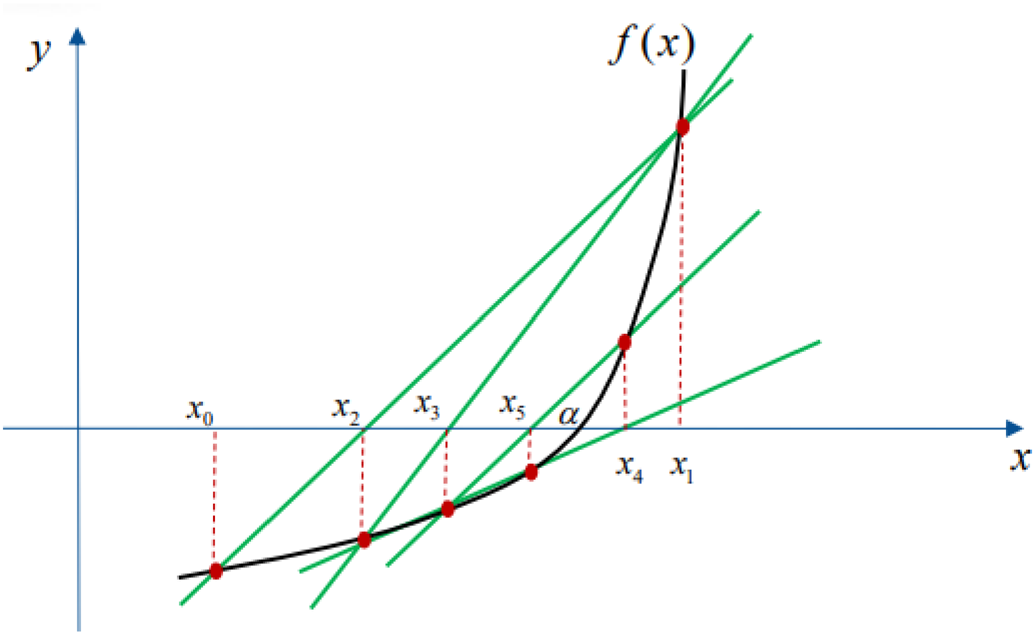
- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho elevado.

Desvantagens

- Necessidade da obtenção de *f' (x)*, o que pode ser impossível em determinados casos;
- O cálculo do valor numérico de *f' (x)* a cada iteração;
- Difícil implementação computacional.

2. MÉTODO DA SECANTE

O método da secante é um método recursivo, utilizado para encontrar a solução para uma equação, semelhante ao método de Newton-Raphson. A diferença está no fato de que o método de Newton utiliza-se de retas tangentes, enquanto o método da secante utiliza-se de retas secantes (retas que cortam o gráfico de *f*(x) em dois pontos).



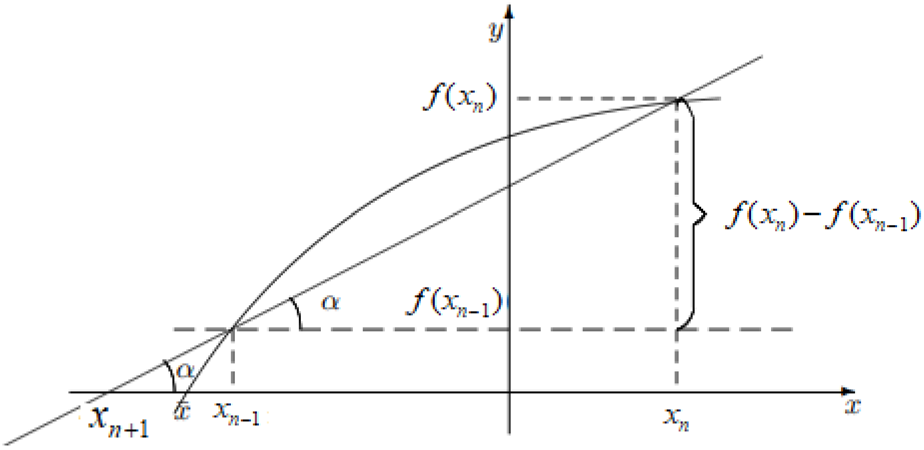
O método consiste em seguir a reta secante até sua interseção com o eixo dos *x* e usar o ponto encontrado $x_2, x_{3,...,} x_n$ (ver gráfico) como uma aproximação para a raiz α. Isto é semelhante ao método de Newton, mas requer o conhecimento de duas estimativas iniciais $(x_0 \ e \ x_1)$ para a raiz. Observe pelo gráfico que, para obter a primeira reta secante, precisa-se conhecer $(x_0 \ e \ x_1)$.

A grande vantagem do método da secante em relação ao método de Newton-Raphson é que não requer que a função *f*(x) seja diferenciável, ou seja, e o algoritmo não precisa calcular a derivada $f'(x)$, o que diminui o tempo computacional e manual. Isso é um facilitador visto que às vezes as derivadas só podem ser estimadas numericamente.

Assim, considerando esta desvantagem de ter que calcular a derivada $f'(x)$ a cada estimativa da raiz, no método de Newton-Raphson, uma forma de se contornar este problema é substituir a derivada $f'(x)$ na fórmula de iteração de Newton pelo quociente da diferença

$$\boxed{f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \qquad \text{(I)}$$

onde x_n e x_{n-1} são duas aproximações para a raiz.



Note que $f'(x_n)$ é o limite da relação (I) acima para $x_{n-1} \to x_n$.

Assim, substituindo a fórmula (I) na fórmula de Newton-Raphson, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} . (x_n - x_{n-1})$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left[f(x_n) - f(x_{n-1})\right] - f(x_n)\left[x_n - x_{n-1}\right]}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n . f(x_n) - x_n . f(x_{n-1}) - f(x_n) . x_n + f(x_n) . x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Eliminando termos semelhantes com sinais opostos, tem-se:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1} . f(x_n) - x_n . f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Como dito anteriormente, são necessárias duas aproximações x_0 e x_1 para a raiz, para implementar o método da secante.

Critério de Parada (CP) – No método da secante, escolhe-se $x_n = \bar{x}$ como raiz aproximada de $\bar{x}$ se:

1. $|x_n - x_{n-1}| \; = < \; \varepsilon$ ou

2. $|f(x)| < \varepsilon$ (vamos usar este)

Exemplo - Use o método da secante para encontrar uma aproximação da raiz da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$, com aproximações iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ com erro $\varepsilon \leq 0{,}0005 = 5 \times 10^{-4}$, onde $\alpha \in (0,1)$.

→ $x_0 = 0$

→ $x_1 = 1$

→ $x_2 = \dfrac{x_0 . f(x_1) - x_1 . f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \quad = \dfrac{0 . f(1) - 1 . f(0)}{f(1) - f(0)} \quad = \dfrac{-3}{-5-3} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$

- **C.P →** $|f(x_2)| = |f(0{,}375)| = (0{,}375)^3 - 9(0{,}375) + 3 = |-0{,}32226| = 0{,}32226 > \varepsilon$ (continua)

→ $x_3 = \dfrac{x_1 . f(x_2) - x_2 . f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \quad = \dfrac{1 . f(0{,}375) - 0{,}375 . f(1)}{f(0{,}375) - f(1)} \quad = \dfrac{-0{,}3223 - 0{,}375.(-5)}{-0{,}3223 - (-5)} = \dfrac{1{,}5527}{4{,}6777} = 0{,}3319$

- **C.P →** $|f(x_3)| = |f(0{,}3319)| = 0{,}0495 > \varepsilon$ (continua)

→ $x_4 \quad = \dfrac{x_2 . f(x_3) - x_3 . f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \quad = \dfrac{0{,}375 . f(0{,}3319) - 0{,}3319 . f(0{,}375)}{f(0{,}3319) - f(0{,}375)}$

$$= \frac{0{,}375 . 0{,}0495 - 0{,}3319.(-0{,}3223)}{0{,}0495 - (-0{,}3223)} = \frac{0{,}125534}{0{,}3718} = 0{,}33764 \qquad \Rightarrow x_4 = 0{,}33764$$

- **C.P →** $|f(x_4)| = |f(0{,}33764)| = 2{,}688 \times 10^{-4} < \varepsilon \Rightarrow$ PARAR

Logo, a raiz aproximada é $x_4 = \bar{x} = 0{,}33764$

RESUMO SOBRE OS MÉTODOS ITERATIVOS

Os métodos iterativos estão associados aos conceitos de iteração (ou aproximação sucessiva) e de aproximação local. Em sentido lato, *iteração significa a repetição sucessiva de um processo*. A aproximação local consiste em aproximar uma função por outra que seja de manuseio mais simples. Por exemplo, aproximar uma função não linear por uma função linear num determinado intervalo do domínio das funções.

Um método iterativo caracteriza-se por envolver os seguintes elementos:

- aproximação inicial, que consiste numa primeira aproximação para a solução do problema numérico, e
- teste de paragem, que é o instrumento por meio do qual o procedimento iterativo é finalizado.

Um método iterativo é definido por uma equação iterativa, com a qual se constrói aproximações à solução do problema. A implementação da equação iterativa obriga ao conhecimento de uma aproximação inicial e à definição de um conjunto de condições que garantam que a aproximação calculada, numa certa iteração, se encontra suficientemente próxima da solução. Quando estas condições forem verificadas, pode-se parar o processo. Desta forma, antes de se iniciar o processo iterativo, deve-se ter resposta para as seguintes questões:

1. Interessa saber se o método iterativo converge ou não para a solução procurada. Desta forma, devem ser analisadas as condições necessárias e/ou suficientes de convergência do método.

2. Tendo a garantia da convergência do método, deve-se saber qual a razão de convergência:
   - seja $\{x_k\}$ uma sucessão convergente para a raiz α (alfa). Se existirem constantes positivas P e C tais que,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^P} = C$$

   então diz-se que a sucessão $\{x_k\}$ é convergente para α (alfa) de ordem P com uma constante de convergência assimptótica igual a C:

   (a) Se P = 1, temos uma convergência linear/1ª ordem (C < 1): os dígitos ganhos por iteração são constantes.
   (b) Se P > 1, temos uma convergência super-linear: os dígitos ganhos por iteração aumentam.
   (c) Se P = 2, temos convergência quadrática/2ª ordem: significa que a quantidade de dígitos significativos (dígitos ganhos) duplica à medida que os valores da sequência se aproximam da solução de $f(x) = 0$

Quanto maior for a ordem de convergência de um método iterativo menor será, em princípio, o número de iterações necessárias para atingir uma dada precisão. No entanto a rapidez depende também do esforço computacional requerido em cada iteração.

A implementação de um método iterativo exige a realização de um número "infinito" de operações para se chegar à solução. No entanto, face aos recursos limitados disponíveis, o processo iterativo tem de ser terminado após um número finito de operações. Esta paragem tem de ser feita com a ajuda de condições que, sendo verificadas, dão melhor garantia de que se está perto da solução. O valor obtido na última iteração é a melhor aproximação calculada. Estas condições definem o que é designado por critério de paragem de um processo iterativo.

NECESSIDADE DE SE USAR MÉTODOS NUMÉRICOS

A partir da distinção apresentada entre métodos analíticos e métodos numéricos, facilmente pode-se ser levado a concluir que é suficiente usar métodos analíticos na resolução de modelos matemáticos. Por outras palavras, que não há necessidade de usar métodos numéricos, pois eles conduzem somente a soluções aproximadas. Tal conclusão é enganadora. Precisamos de usar métodos numéricos pelas seguintes razões:

- Porque existem situações em que é preferível um método numérico ao método analítico, ainda que este exista; por exemplo, quando a solução para um problema envolve vários cálculos, os quais podem ser muito demorados.
- Porque a maioria dos problemas reais são, em geral, complexos e envolvem fenómenos não lineares, pelo que é comum os conhecimentos de matemática não serem suficientes para a descoberta de uma solução para um problema real.

- Porque quando os dados do problema requerem um tratamento que inclua, por exemplo, diferenciação ou integração, terá de ser feito através de um método numérico.

Uma vez que, em geral, o modelo matemático é demasiado complexo para ser tratado analiticamente, deve-se construir

1. modelos aproximados ou
2. obter soluções aproximadas.

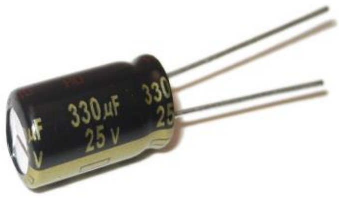
No primeiro caso, implica alterar e simplificar o modelo por forma a torná-lo tratável, e assim obter uma solução exata de um sistema ou modelo aproximado. No entanto, tal solução é "suspeita" pelo fato de ocorrerem simplificações do modelo, pelo que terão que fazer várias experiências para ver se as simplificações são compatíveis com os dados experimentais. No segundo caso, implica usar métodos numéricos e assim produzir soluções aproximadas para o sistema real. No entanto, tais soluções são apenas aproximações, mas que podem ser melhoradas à custa de esforço computacional.

EXERCÍCIOS

1. **UTILIZE 4 OU MAIS CASAS DECIMAIS**
2. **NAS QUESTÕES QUE ENVONVEM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, A CALCULADORA DEVE ESTAR EM RADIANOS.**

1- Quando um capacitor carregado é ligado com uma resistência R, um processo de descarga do capacitor ocorre. Durante este processo, uma variável no tempo é estabelecida no circuito. Sua variação com o tempo se dá de forma decrescente e exponencial, de acordo com a expressão:

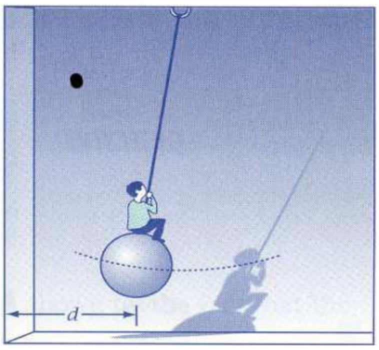
$$I(t)=\frac{Q_0}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}$$



onde I é a corrente, Q_0 é a carga inicial do capacitor, C sua capacitância, R a resistência e t_0 tempo.
Determine, através do método de Newton-Raphson, com precisão $\varepsilon \leq 0,0001$ uma aproximação para o valor de t, quando I = 0.83A, Q_0 = 7C, R = 3 $ohms$ e C = 2 $Farad$. Considere como tempo inicial t_0 =0,5.

Resposta: t = 2,0428809

2- A figura representa um pêndulo suspenso num teto de uma sala. O pêndulo balança de acordo com a seguinte expressão $$d(t)=80+90\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right),\ t\geq 0$$



em que d (cm) representa a distância até à parede de referência e depende do número de segundos t desde que o pêndulo foi posto em movimento. Calcule o instante de tempo t para o qual o pêndulo toca na parede da sala.

Utilize o método de Newton, use para aproximação inicial t_0 = 4 e considere $\varepsilon \leq 0,001$ ou no máximo 4 iterações.
Resposta: 3,45454857

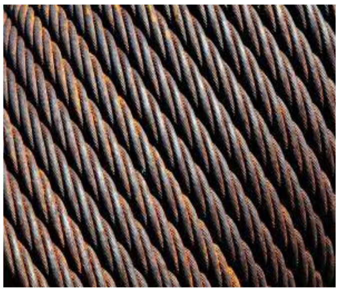
3- Em engenharia ambiental, a seguinte equação pode ser usada para calcular o nível de concentração de oxigénio c num rio, em função da distância x, medida a partir do local de descarga de poluentes:

$$C(x) = 10 - 20(e^{-0,2x} - e^{-0,75x})$$

Calcule, usando um método de Newton_Raphson, a distância para a qual o nível de oxigénio X desce para o valor C = 5. Utilize para aproximação inicial o valor $x_0 = 1$ e considere $\varepsilon \leq 0,1$ ou no máximo 3 iterações. Utilize nos cálculos 4 casas decimais ou mais.

Resposta: 0,5964142

4- A pressão máxima, P, em Kg/mm² que um cabo metálico suporta é dada por $P(x) = 25x^2 + \ln(x)$



em que x é o diâmetro em mm. Determine o valor do diâmetro necessário para suportar uma pressão de 1.5 Kg/mm² utilizando o método de Newton-Raphson, com uma aproximação inicial x_0 = 1 mm, com erro inferior a $\varepsilon \leq 0,1$. Use 4 casas decimais ou mais.

Resposta: 0,3254588931

5- Uma pessoa tomou um empréstimo de **A** reais, que acrescenta os juros no total antes de computar o pagamento mensal. Assim, se a taxa mensal de juros, em porcentagem, é **q** e o empréstimo é pelo prazo de **n** meses, a quantia total que o tomador concorda em pagar é:

$$C = A + A.n.\frac{q}{100}$$

Isto é dividido por **n** para dar o total de cada pagamento **P**, ou seja,

$$P = \frac{C}{n} = A\left(\frac{1}{n} + \frac{q}{100}\right)$$

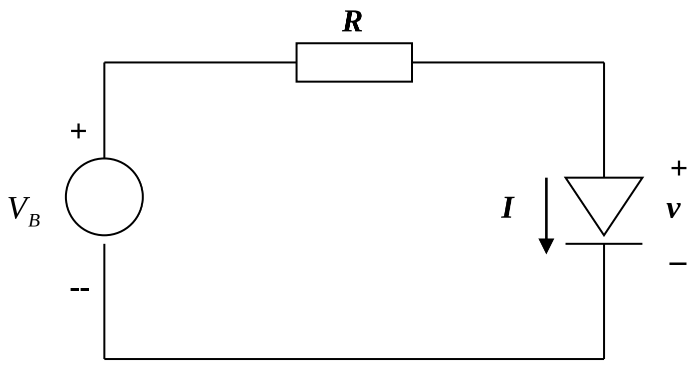
Isto é perfeitamente legal e muito usado em lojas de departamento. (É chamado o empréstimo com acréscimo). Mas a verdadeira taxa de juros que o tomador está pagando é alguma coisa além de **q%**, porque ele não conserva o total do empréstimo por todos os **n** meses: Ele está pagando-o de volta com o decorrer do tempo. A verdadeira taxa de juros pode ser encontrada pela determinação de uma raiz ***x*** da equação:

$$F(x) = (Ax - P)(1 + x)^n + P = 0$$

Isto fornece a taxa de juros por período de pagamento, que pode ser convertida em taxa anual multiplicando-se a mesma por 12. Seja A = R$ 1000, n = 2 anos e q = 60% a.a. Determine a verdadeira taxa de juros, utilizando o método de Newton-Raphson. Utilize como ponto inicial de taxa de juros $x_0 = 0,5$ e margem de erro menor que 0,1.

Resposta: 0,73455 (73,34% a.a)

6- Um problema frequente encontrado em projeto de circuitos eletrônicos é a determinação do ponto de operação DC relativo às variáveis de tensão (*v*) e corrente (*i*) de elementos não-lineares de circuitos, como diodos e transistores. A determinação do ponto de operação envolve a solução de uma equação não-linear e pode ser resolvido utilizando algoritmos iterativos para o cálculo de raízes. Considere o circuito abaixo:



$$V_B = 2{,}0\,Volts, \quad R = 50\Omega.$$

As características de operação do diodo em condições normais de operação são determinadas pela equação:

$$i = I_s\left(e^{\frac{qv}{kT}} - 1\right)$$

Assume-se, devido à temperatura de funcionamento do diodo que: $q/kT = 40$. Aplicando-se a lei de Kirchoff para a tensão, obtém-se:

$$V_B = iR + v$$

Utilizando os valores de $V_B = 2{,}0\,Volts, \quad R = 50\Omega$, chega-se a:

$$2{,}0 = I_s(e^{40v} - 1)50 + v$$

Aplicando o Método de Newton-Raphson, encontre os valores de *v* e *i*, considerando os dados acima e $I_s = 10^{-9}$. Considere uma aproximação inicial de tensão $v_0 = 0{,}5$ volt e margem de erro abaixo de 0,7.

Resposta: 0,440115

7- Pelo método de **Newton-Raphson** calcule uma aproximação a um zero sabendo que

(a) $f(x) = x^2 - 7$ com $x_0 = 2$ e erro $\varepsilon \leq 0{,}001$ **Resposta: 2,6457520**

(b) $f(x) = x^5 - 6$ com $x_0 = 1{,}3$ e erro $\varepsilon < 0{,}01$ **Resposta: 1,4309709058**

8- Use o método da secante para obter a raiz aproximada da equação do exercício 4. Utilizar as aproximações $x_1 = 0{,}1 \; e \; x_0 = 0{,}5$. Utilize uma margem de erro $\varepsilon \leq 0{,}001$.

Resposta: 0,324132

9- Use o método da secante para obter a raiz aproximada da equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$. Utilizar as aproximações $x_0 = 1 \; e \; x_1 = 2$. Utilize uma margem de erro $\varepsilon \leq 0{,}001$.

Resposta: 1,430456