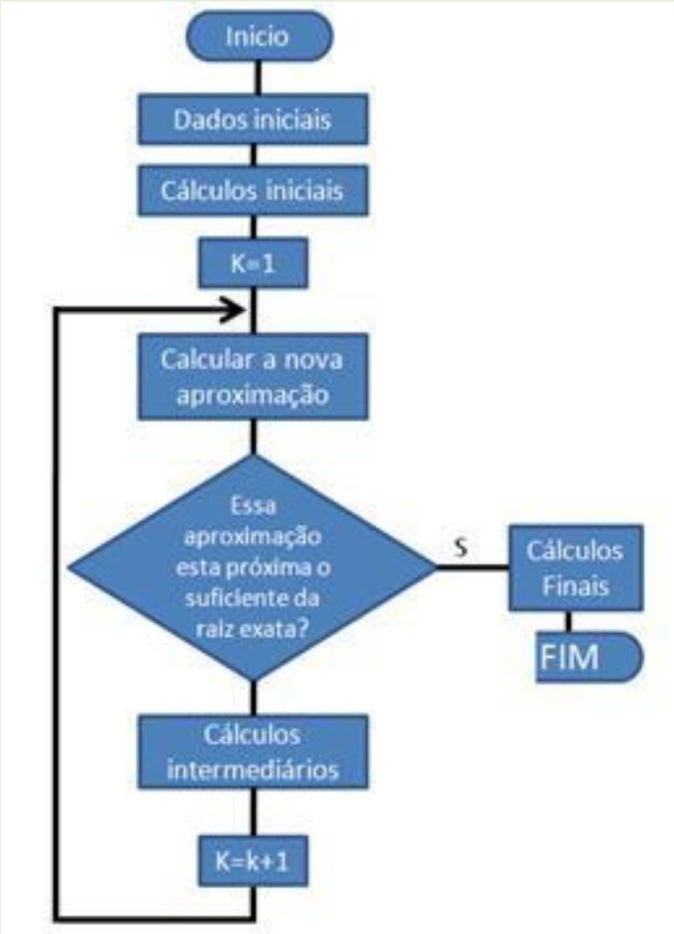
MÉTODOS NUMÉRICOS

ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

E

MÉTODOS ITERATIVOS PARA O CÁLCULO DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES



MODELOS MATEMÁTICOS

Ao longo dos tempos, a compreensão da natureza e seus fenômenos é mais do que uma questão de curiosidade. É uma questão de sobrevivência e evolução da espécie humana. Compreender a natureza, e principalmente descrevê-la, levou o homem a desenvolver ***modelos físicos e matemáticos*** para conseguir analisar e prever acontecimentos naturais.

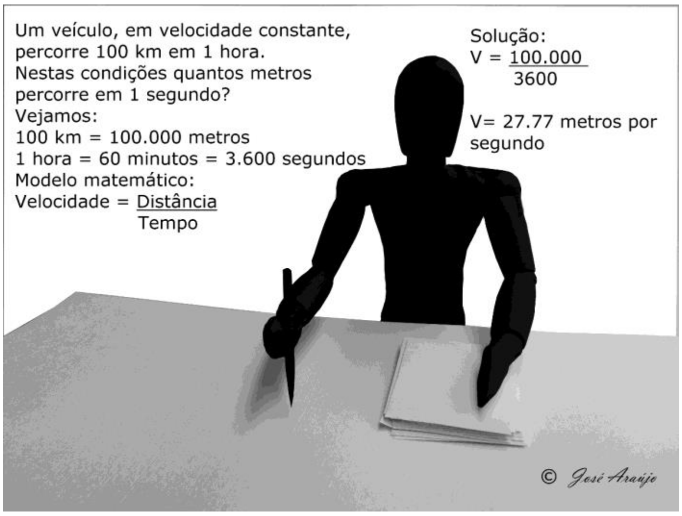


Imagem: A lógica das coisas (de José Araújo)

Grande parte dos problemas matemáticos surge da necessidade de solucionar problemas da natureza, sendo que é possível descrever muitos fenômenos naturais por meio de modelos matemáticos (HUMES et. al, 1984)[1]. De acordo com OHSE (2005, p. 1)[2]:

> *Desde que o homem começou a observar os fenômenos naturais e verificar que os mesmos seguiam princípios constantes, ele observou que estes fenômenos podiam ser colocados por meio de "fórmulas". Este princípio levou a utilização da matemática como uma ferramenta para auxiliar estas observações. Este é o princípio da matemática como um modelo, ou seja, modelar matematicamente o mundo em que vivemos e suas leis naturais.*

Para solucionar os problemas que foram surgindo ao longo dos tempos, **modelos matemáticos** foram gerados e construídos com a finalidade de capturar o comportamento real desses modelos físicos. Esses modelos matemáticos são baseados nas variáveis que compõem e influenciam todo o sistema. Conseguir detectar essas variáveis não é uma tarefa fácil.

- **Modelos matemáticos** representam os fenômenos da natureza por meio de equações, ou seja, um modelo matemático é uma representação conceitual, uma idealização da situação real em forma de equações matemáticas. Para formular tais equações que descrevem um fenômeno, é necessário o uso de parâmetros desconhecidos que deverão ser medidos na natureza ou em modelos físicos.

  Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real[3].

  Exemplo do modelo matemático para a velocidade de uma pessoa durante o salto de bungee jumping.

---

[1] HUMES, Ana F. P. C. L. et. al. Noções de Cálculo Numérico. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984.
[2] OHSE, Marcos L.A matemática como modelo (ferramenta). Pedagobrasil, Revista Eletrônica de Educação, v. 1, n. 1, p. 1-2, 2005.
[3] BIEMBENGUT, Maria S. e HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2000.

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}.\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}.t\right)$$

- v = velocidade
- t = tempo do salto
- m = massa
- c_d = coeficiente de arrasto
- g = aceleração da gravidade

Modelos matemáticos são utilizados em muitos campos da atividade humana, como Matemática, Ciência de Dados, Inteligência Artificial, Economia, Física, Química, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia, Computação, etc.

- **Modelos físicos** ou **modelos reduzidos em escalas** são apenas uma aproximação, muitas vezes bem afastado da realidade e servem de referência para a calibração dos modelos matemáticos. É uma versão simplificada e, portanto, limitada de um sistema físico que seria muito complicado se fosse analisado com detalhes completos.

  São ferramentas usadas em diversos ramos da engenharia mecânica, civil, naval, nuclear e outras áreas, cujo objetivo é construir um protótipo, como por exemplo, um avião ou um carro para estudos aerodinâmicos, um navio, uma plataforma de petróleo, bombas e turbinas hidráulicas, uma usina hidrelétrica, barragens, maquetes em geral, como as maquetes da construção de prédios sujeitos a ventos e terremotos, modelos hidrodinâmicos de escoamentos em dutos, como turbinas e bombas, canais, etc.

Figura 1 – Estudo aerodinâmico de um carro em um túnel de vento.

Figura 2 – Estudo aerodinâmico de uma avião em um túnel de vento (Fonte: HBM Company)

Figura 3 – Maquete da plataforma de petróleo P-74 da Petrobrás (Fonte: Bustamante Maquetes)

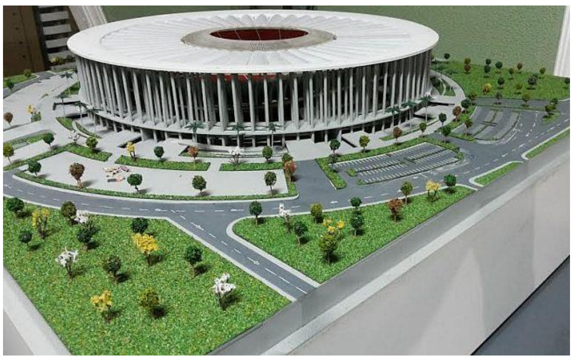


Figura 4 – Maquete do Estádio Mané Garrincha (Fonte: Maquetes Mundial**)**

Normalmente este tipo de modelagem física é utilizado para complementar os cálculos dos modelos matemáticos durante um projeto muito grande e complexo. Assim no modelo físico podemos estudar, em escala, reduzida ou aumentada, diversos fenômenos físicos.

Portanto, modelos matemáticos são mecanismos para representar uma versão simplificada de um problema real, de um problema físico. É uma tentativa de compreensão dos processos físicos, químicos e biológicos traduzidos em termos matemáticos, objetivando prever ou predizer cenários onde estão envolvidas variáveis desconhecidas, como, por exemplo, a variação da carga hidráulica ou distribuição de concentrações de espécies químicas em um sistema aquífero no tempo e no espaço (BEDIENT et al., 1994)[4], variação de temperaturas, análise de estruturas, entre outras. Permite entender o um modelo físico de uma forma simples, de modo que o modelo possa ser tão preciso quanto o mundo real.

Pode-se dizer que, quanto melhor a caracterização do problema real através de um modelo físico-matemático, melhor é a qualidade da solução encontrada. Entenda como qualidade da solução encontrada, a **proximidade com a solução real**. A **Figura 5** resume esse processo de construção e resolução de um modelo matemático.

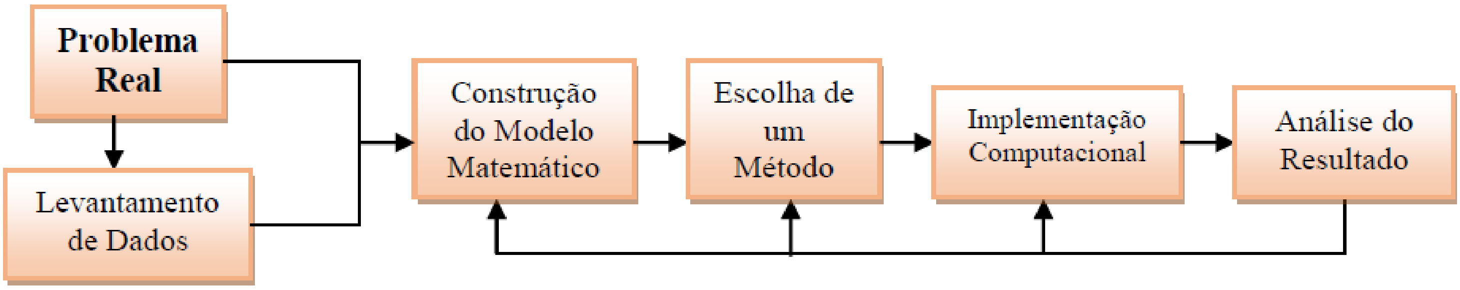


Figura 5: Sequência da solução de um problema.

MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DE MODELOS MAEMÁTICOS

Com o problema real em mãos e com base no conhecimento que temos do mesmo, constrói-se o **modelo matemático** que melhor traduz o problema. O passo seguinte é resolvê-lo, obtendo as conclusões e interpretações dos dados obtidos. Os métodos utilizados na resolução dos modelos matemáticos, baseiam-se em uma de duas categorias: métodos analíticos e métodos numéricos.

Entretanto, apenas parte do problema possui as chamadas **soluções analíticas (ou "exatas").** Por exemplo, de forma analítica podemos encontrar as raízes exatas de uma equação do 2º grau usando a fórmula de Bhaskara. Mas, como sabemos, muitos problemas reais não tem uma forma analítica específica para obter uma solução exata.

Por exemplo, a função abaixo pode ser usada para calcular o nível de concentração de oxigénio **C** num rio, em função da distância ***x***, medida a partir do local de descarga de poluentes. Observe que não temos uma forma analítica para calcular as raízes da função abaixo.

$$C(x) = 10 - 20\left(e^{-0,2x} - e^{-2,75x}\right)$$

[4] BEDIENT, P. B.; RIFAI, H. S.; NEWELL, C. J. 1994. Ground Water Contamination: Transport and Remediation. Prentice-Hall, PTR, New Jersey

Por exemplo, se a concentração é C(x) = 5 unidades de medida de concentração de oxigênio, qual é a distância *x* para esta concentração dada?

$$C(x) = 10 - 20\left(e^{-0,2x} - e^{-2,75x}\right) = 5$$
$$10 - 20\left(e^{-0,2x} - e^{-2,75x}\right) - 5 = 0$$
$$5 - 20\left(e^{-0,2x} - e^{-2,75x}\right) = 0$$

A partir daqui, não conseguimos, através de um método analítico, resolver esta equação, que se resume em encontrar as raízes. Temos que buscar um método numérico.

Outros exemplos onde não se consegue resolver por métodos analíticos.

1. Não existe uma forma analítica para resolver a equação $x^3 - 3sen(x) + \ln(x) = 0$. Neste caso, temos que escolher um método numérico que calcule as raízes dessa equação.

2. A integral $\int e^{x^2} dx$ não tem primitiva em forma simples e portanto é necessário um método numérico para resolver esta integral.

3. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - x^2 sen^2 t)^{1/2}}$$

   As integrais elípticas originalmente surgiram em conexão com o problema do comprimento do arco de uma elipse e foram inicialmente estudadas por Giulio Carlo Fagnano dei Toschi e Leonhard Euler. Hoje, é amplamente utilizada na Física.

   Em geral, integrais elípticas não podem ser expressas em termos de funções elementares (exceto em alguns casos), o que impossibilita a resolução por métodos tradicionais de integração do Cálculo I. Neste caso é necessário recorrer aos métodos numéricos.

4. “Grande parte das técnicas utilizadas em Ciência de Dados são para manipulação e análise de matrizes, estudadas em Álgebra Linear. Esse é o caso dos algoritmos de Aprendizado de Máquina (AM). Esses algoritmos utilizam conceitos de Álgebra Linear para encontrar funções, também chamadas de modelos, tanto para descrever padrões presentes nos dados, como para predizer uma classe ou valor numérico que deve ser associado a um vetor de valores. Algoritmos de AM aprendem buscando a função mais se aproxima da função verdadeira (e desconhecida) que gera os dados. Nessa busca, alguns algoritmos utilizam conceitos de Análise, ou Cálculo Diferencial e Integral.”

   Fonte: A Matemática da Inteligência Artificial, por André Carlos Ponce de Leon Ferreira de Carvalho e O Globo.

Sempre que possível, é preferível a utilização dos métodos analíticos na resolução dos modelos matemáticos, pois eles têm a vantagem de fornecer informações gerais em vez de particularizadas, além de uma maior informação quanto à natureza e à dependência das funções envolvidas no modelo.

No entanto, na prática, a maioria dos problemas é resolvido através do uso de **métodos numéricos aproximados,** pois a resolução de modelos matemáticos obtidos na modelagem de problemas reais de diversas áreas é muitas vezes complexas e envolve fenômenos não-lineares, podendo tornar impossível a resolução pelo método analítico, com a integral elíptica acima.

Os métodos numéricos aproximados, apesar de não retornar soluções exatas, tais aproximações podem ser controladas conforme a necessidade (geralmente se utiliza uma margem de erro para esse controle), de tal forma que o resultado final termina por ser tão bom ou, pelo menos, tão eficaz quanto à solução exata.

Assim, o objetivo do **Cálculo Numérico** é apresentar um conjunto de **ferramentas** ou **métodos** usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma **aproximada**. Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma **solução exata obtida analiticamente**, portanto precisam ser **resolvidos numericamente**, ou até tem solução analítica, mas as vezes é tão difícil resolver, que é melhor resolver por métodos numéricos.

Portanto, vamos estudar esquemas numéricos (algoritmos numéricos) eficientes para resolução de problemas que podem ser representados por um modelo matemático. Dizemos que um esquema é eficiente quando este apresenta soluções dentro de uma precisão desejada com ***custo computacional*** (tempo de execução + memória) baixo.

RAÍZES OU ZEROS DAS EQUAÇÕES

INTRODUÇÃO

Na seção anterior, mais precisamente no exemplo que apresenta uma equação onde é possível calcular a concentração C de oxigênio à uma distância x de uma fonte poluidora, podemos constatar que resolver este problema é nada mais nada menos do que calcular raízes da equação C(x) = 0. Assim, esta disciplina destina um capítulo para apresentar formas ou métodos numéricos de cálculo de raízes de forma aproximada. O simples cálculo de raízes resolve diversos problemas reais.

Vamos ver alguns conceitos antes de irmos para os métodos numéricos de cálculo de raízes.

RÁIZES DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E TRANSCENDENTES

Uma equação transcendente é uma equação que não possui uma solução exata expressa através de funções conhecidas, sendo necessário recorrer ao Cálculo Numérico para obter uma solução.

Uma **equação transcendente** é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares. De modo geral, uma equação transcendente não possui uma solução exata expressa através de funções conhecidas, sendo necessário recorrer ao cálculo numérico para obter uma solução.

As equações transcendentes mais comuns que aparecem são:

- equações trigonométricas em que a incógnita aparece tanto como argumento de uma função trigonométrica quanto independente.

  Exemplo: a Equação de Kepler: ***x - a sin(x) = b***.

- equações exponenciais em que a incógnita e sua exponencial são somadas. Ex: na modelagem de um circuito elétrico com um diodo e uma resistência.
- equações logarítmicas com combinações do logaritmo e da incógnita.

Uma equação transcendente pode ter infinitas soluções.

Algumas equações que dependem de uma variável, podem ser resolvidas para obter um ou mais valores que sejam a solução a equação. Por exemplo, a equação:

$x^2 + 4x + 3 = 0$ tem duas soluções, $x = -1$ e $x = -3$.

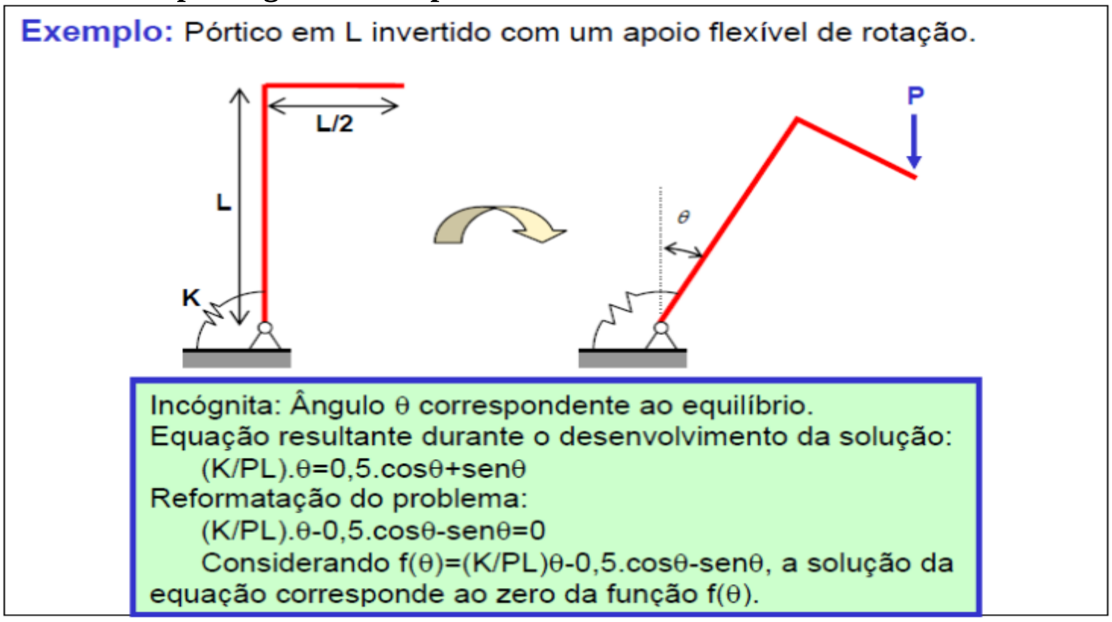
Já a equação $e^x = 3$ tem uma única solução $x = \ln(3) = 1.0986\ldots$

Nas equações **transcendentes,** fica difícil determinar se existem soluções e se existem, quantas são. Por exemplo, a equação $x + 1 = \text{tg}(x)$ é uma equação transcendente. As suas soluções só podem ser calculadas de forma aproximada, usando métodos numéricos.

Para facilitar a procura das soluções de uma equação transcendente, é conveniente reescrevê-la igualando a zero, na forma f(x) = 0. Por exemplo, a equação $x + 1 = \text{tg}(x)$ pode ser escrita como $x + 1 - \text{tg}(x) = 0$. Assim, o problema de encontrar as soluções consiste então em encontrar as **raízes** da função, ou seja, os pontos onde o gráfico de corta o eixo das abcissas.

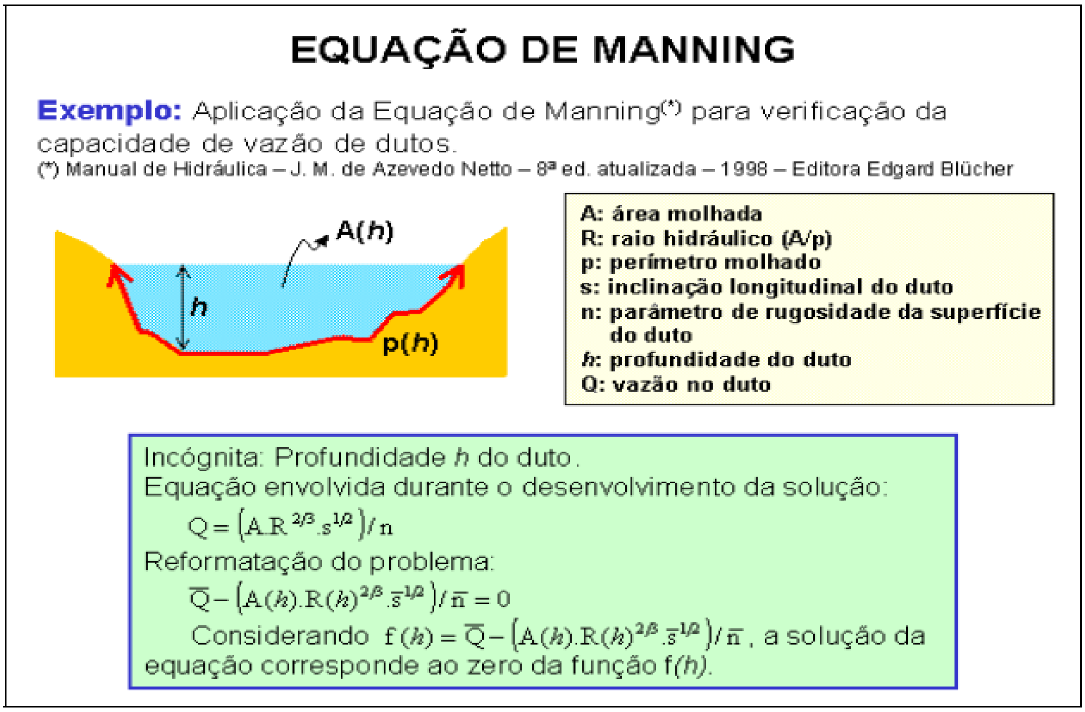
Abaixo temos alguns exemplos de equações transcendentes, comuns na engenharia, e que são resolvidas apenas através do cálculo numérico. Elas são exemplos de aplicações de cálculo de raízes.

1. **Equilíbrio de Corpos Rígidos com Apoio Deformável**



2. **Equação de Manning**

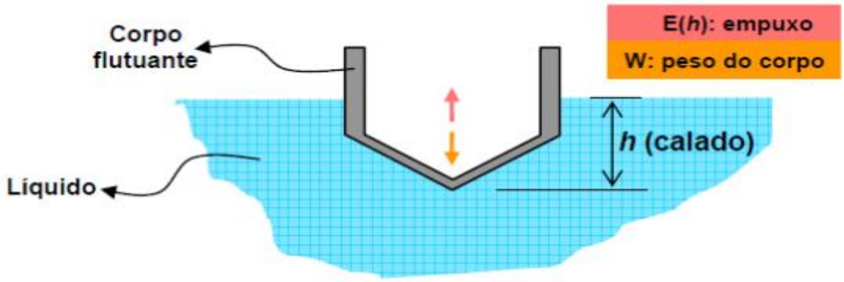
A **fórmula de Manning** é uma expressão utilizada para o cálculo da velocidade da água em canais abertos e tubulações.



O escoamento em galerias, canais e sarjetas devem ser calculados pela fórmula de Manning, onde se calcula a velocidade e uma vez que já temos o comprimento obteremos o tempo de escoamento da água de chuva também chamado tempo de trânsito (Travel Time). A fórmula mais conhecida para dimensionamento de condutos livres usada no Brasil e nos Estados Unidos e demais países de língua inglesa, é a fórmula experimental do engenheiro irlandês R. Manning (1816-1897) elaborada em 1891.

3. Equilíbrio de Corpos Flutuantes

Exemplo: Aplicação do Princípio de Arquimedes para a determinação do calado de embarcações.



Incógnita: Profundidade h correspondente ao equilíbrio.
Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\gamma_{Sólido}.V_{Sólido} = \gamma_{Líquido}.V_{Líquido\ deslocado}(h)$$

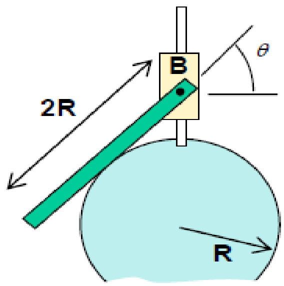
Reformatação do problema:

$$\gamma_{Sólido}.V_{Sólido} - \gamma_{Líquido}.V_{Líquido\ deslocado}(h) = 0$$

Considerando $f(h) = \gamma_{Sólido}.V_{Sólido} - \gamma_{Líquido}.V_{Líquido\ deslocado}(h)$, a solução da equação corresponde ao zero da função $f(h)$.

4. Equilíbrio de Mecanismos

Exemplo:
Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática
F. P. Beer & E. R. Johnston, Jr.
5ª Edição Revisada – 1994
MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda
Problema 4.60 (Página 254) – Uma haste delgada de comprimento 2R e peso P está presa a um cursor em B e apoiada em um cilindro de raio R. Sabendo que o cursor pode se deslocar livremente ao longo de sua guia vertical, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio. Despreze o atrito.



Incógnita: Ângulo θ correspondente ao equilíbrio.
Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\cos^3\theta = \operatorname{sen}\theta$$

Reformatação do problema:

$$\cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$$

Considerando $f(\theta) = \cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta$, a solução da equação corresponde ao zero da função $f(\theta)$.

2. ZEROS OU RAÍZES REAIS DE EQUAÇÕES

Definição 1 - Dada uma função *f(x)*, dizemos que α é raiz, ou zero de *f* se e somente $f(\alpha)=0$.

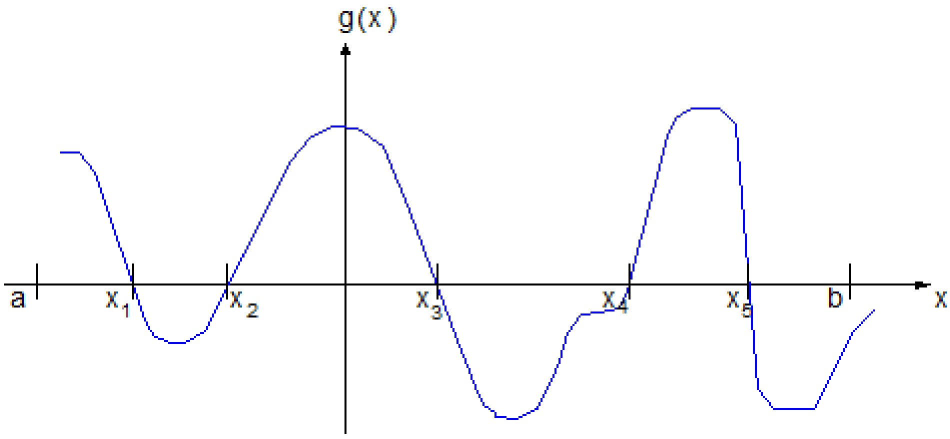


Figura 1 - Interpretação gráfica do zero de uma função.

Graficamente, os zeros de uma função *f(x)* correspondem aos valores de *x* em que a função intercepta o eixo horizontal do gráfico, como mostrado na Figura 1. A função *g(x)* da Figura 1 tem 5 raízes no intervalo $[a,b]$: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

MÉTODOS PARA ENCONTRAR RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO

Pode-se dizer que são dois os métodos para se achar a(s) raiz(es) de uma equação:

1- **MÉTODO DIRETO -** Quando fornece solução em apenas um único passo. Esta raiz é exata, a menos de erros de arredondamento.

Nos métodos diretos, as raízes de uma função podem ser encontradas analiticamente, ou seja, resolvendo a equação $f(x)=0$ de maneira exata, como mostrado nos exemplos a seguir.

1) $f(x) = x - 3$

$x = 3$ é raíz de $f(x)$ pois, $f(3) = 3 - 3 = 0$

Para uma equação do segundo grau, a solução direta pode ser obtida através da fórmula de **Bhaskara**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2) $h(x) = x^2 - 5x + 6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 25 - 24 = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \;\; ou \;\; x_2 = 2$$

Logo, $x = 2$ e $x = 3$ são raízes de $h(x)$,pois

$h(3) = 15 - 15 = 0$ $\qquad$ $h(2) = 10 - 10 = 0$

Porém, nem sempre é possível encontrar analiticamente a raiz de uma função, como nos casos a seguir.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ $\qquad$ (2) $g(x) = sen(x) + e^x$ $\qquad$ (3) $h(x) = x + \ln(x)$

Neste caso, temos que recorrer aos métodos indiretos ou iterativos.

2. MÉTODO ITERATIVO OU INDIRETO - É um processo de cálculo infinito, recursivo[5], em que o valor obtido a cada passo depende de valores obtidos em passos anteriores. Este tipo de método, na maioria das vezes, não obtém solução exata para as raízes, mas sim uma solução aproximada dentro de uma faixa de erro considerada aceitável. É importante salientar, que normalmente, os métodos iterativos são mais precisos quando executados em um computador que permite agilizar os cálculos matemáticos, obtendo assim uma melhor precisão.

Tais métodos envolvem as seguintes fases:

- **FASE I -** Localização ou isolamento das raízes que consistes em obter um intervalo que contenha pelo menos uma raiz da função *f(x);*

- **FASE II –** Refinamento que consiste em escolhidas as aproximações iniciais no intervalo encontrado na Fase I, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão prefixada.

FASE I - ISOLAMENTO DE RAÍZES

Para determinar o número e a localização aproximada de raízes de uma função, devemos obter um intervalo numérico [*a*, b] que contém pelo menos uma raiz da função *f(x)*. Para encontrar o intervalo, podemos utilizar o método gráfico. A análise gráfica da função *f*(x) ou da equação *f*(x) = 0 é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz.

Para analisar graficamente uma função ou equação é suficiente utilizar um dos seguintes processos:

i. esboçar o gráfico da função *f* (x) e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo ox;

ii. a partir da equação *f* (x) = 0, obter a equação equivalente g(x) = h(x), esboçar os gráficos das funções g(x) e h(x) no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow g(\alpha)=h(\alpha)$

Por exemplo, encontrar o intervalo que contém a raiz da função

$$f(x)=e^x-3x^2$$

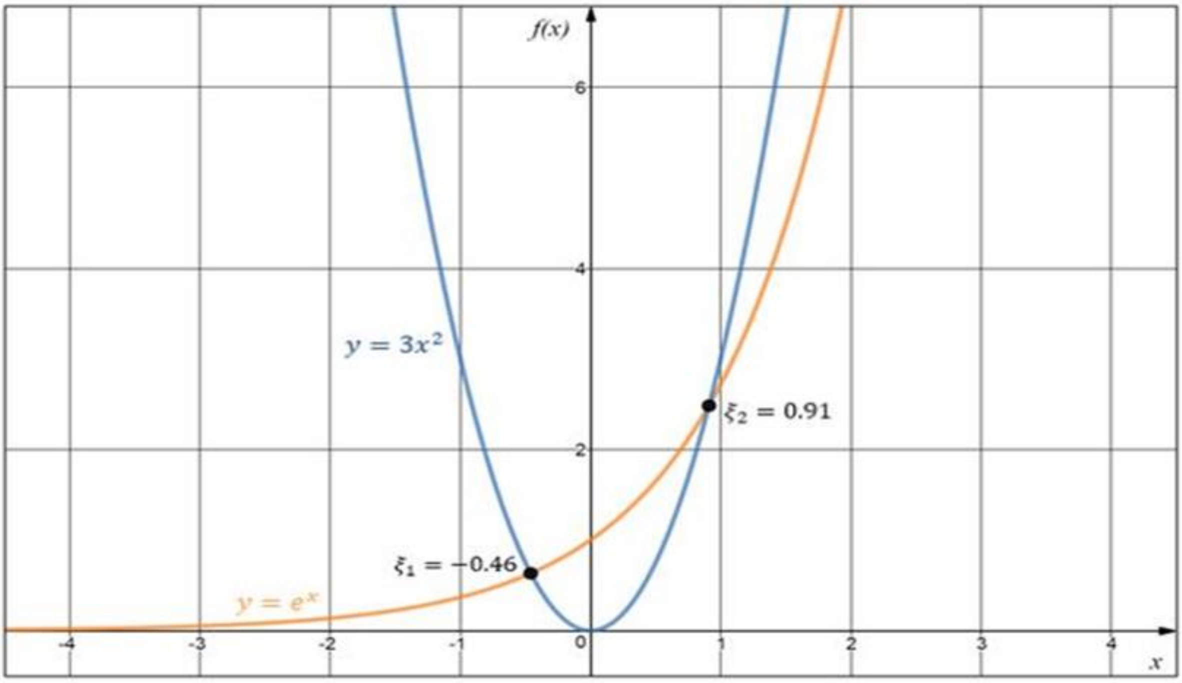
Primeiro igualamos a zero e separamos em duas funções.

$$f(x)=e^x-3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad e^x=3x^2$$

Neste caso, calcular as raízes de *f*(x) é o mesmo que calcular os valores de x onde a função e^x é igual a função $3x^2$.

Agora, esboçamos os gráficos das funções e^x e $3x^2$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam.

[5] Em termos gerais, um processo recursivo pode ser considerado como um processo de repetição de uma rotina. Portanto, de maneira bem simplista, pode ser definida como uma rotina (procedimento ou função) que chama a si mesma, de forma direta ou indireta.



Podemos observar no gráfico acima que os gráficos das funções e^x e $3x^2$ se interceptam em dois pontos, indicando que a função $f(x) = e^x - 3x^2$ possui duas raízes. Uma raiz está no intervalo [-1, 0] e a outra no intervalo [0, 1].

O teorema abaixo garante a existência ou não em um intervalo [*a*, b].

TEOREMA DE BOLZANO - Seja uma função *f*(*x*) contínua em um intervalo [*a*, b], tal que,

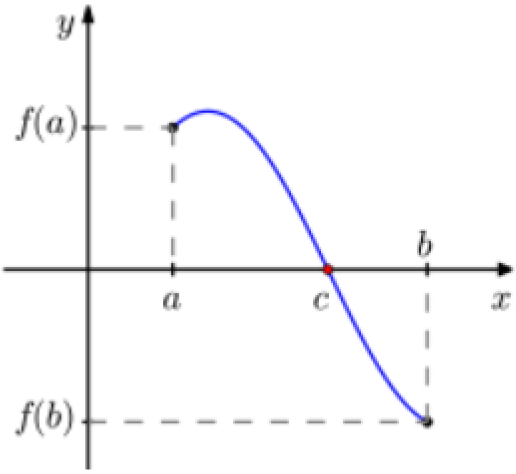
$$\boxed{f(a) \times f(b) < 0}$$

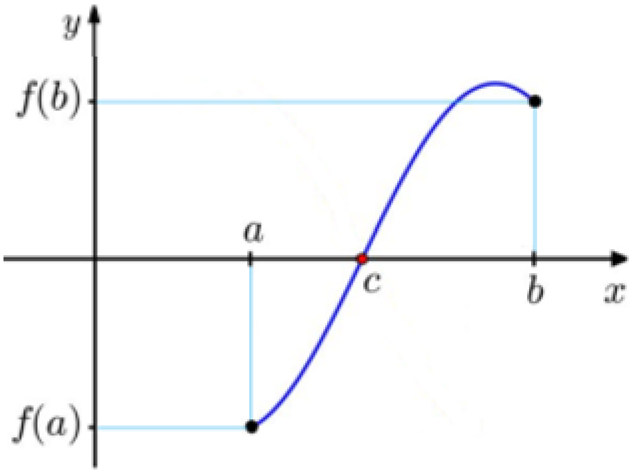
Então a função f(x) possui pelo menos uma raiz no intervalo [*a*, b].

Se $f(a) \cdot f(b) > 0$ pode ou não existe raízes reais em $[a, b]$. Neste caso não podemos garantir a existência de uma raiz em $[a, b]$.

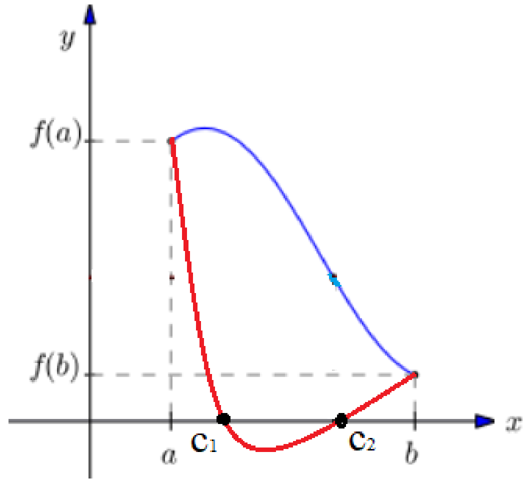
Podemos verificar este teorema graficamente:

- $f(a) \times f(b) < 0$





- $f(a) \times f(b) > 0$



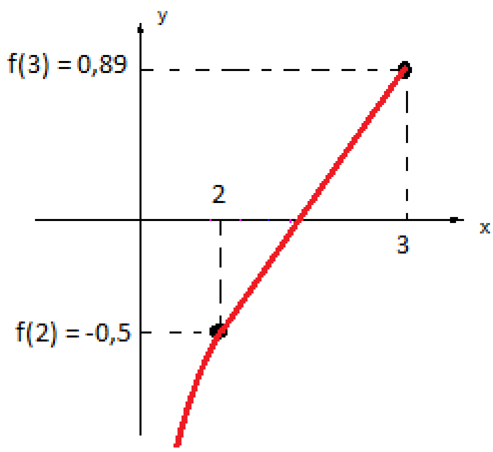
Mais precisamente, quando multiplicamos dois números reais, a única possibilidade de se obter um resultado negativo é um número ser negativo e o outro positivo. Graficamente, ***f(a)*** tem que estar no semi eixo positivo de y e ***f(b)*** no semi-eixo negativo do eixo y (ou vice versa). Neste caso, para interligar os pontos referentes a *f(a)* e *f(b)* e traçar o gráfico de *f*, necessariamente o gráfico cortará o eixo *x*, local onde se encontram as raízes de *f*.

Exemplo - Seja a função ***f(x)*= x + *ln(x)* – 3,2**. Podemos calcular o valor de *f(x)* para valores arbitrários de *x*, como mostrado na tabela abaixo:

X	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	*-2.20*	*-0,5*	*0.89*	*2.18*

Observe que $f(2) \times f(3) < 0$. Pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma raiz no intervalo (2, 3).

O Teorema de Bolzano pode ser observado apenas com a mudança de sinal de f(x), para $x \in (a, b)$ Observe que houve uma mudança de sinal negativo de *f(x)* de –0,5 para o sinal positivo de 0,89. Quando acontece uma mudança de sinal do positivo para o negativo ou vice-versa, o **Teorema de Bolzano**, garante a existência de pelo menos uma raiz real no intervalo (a, b), neste exemplo, no intervalo (2, 3).



Exemplo: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	*-5*	*-4*	*-3*	*2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	*-77*	*-25*	*3*	*13*	*11*	*3*	*-5*	*-7*	*3*	*31*

Observe que houve uma mudança de sinal negativo de f(x) = - 25 para f(x) = 3, de f(x) = 3 para f(x) = -5 e de f(x) = - 7 para f(x) = 3.

Pelo **Teorema de Bolzano** $\alpha_1 \in [-4, -3]$, $\alpha_2 \in [0, 1]$ e $\alpha_3 \in [2, 3]$

OBSERVAÇÕES

1- Como $f(x)$ é um polinômio de grau 3, cada intervalo contém uma única raiz de $f(x)$.
2- O que realmente interessa no cálculo de f(x) (segunda linha da tabela) é o sinal do resultado e não necessariamente o valor numérico, pois desejamos verificar o Teorema de Bolzano, ou seja, descobrir o sinal do resultado de *f(a)* x *f(b)* . Assim, a tabela acima poderia ficar da seguinte forma:

x	*-5*	*-4*	*-3*	*2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+

UNICIDADE DA RAIZ

Para saber se a raiz é única no intervalo I, analisamos o sinal de $f'(x)$:

- se $f'(x) > 0, \forall\ x \in (a,b)$, então $f(x)$ possui uma única raiz. (f é crescente).
- se $f'(x) < 0, \forall\ x \in (a,b)$, então $f(x)$ possui uma única raiz. (f é decrescente).

FASE II - CÁLCULO DA RAIZ APROXIMADA OU REFINAMENTO

Identificado o intervalo que contém a raiz (FASE I), é possível chegar a uma aproximação para a raiz $\bar{x}$ através de processos iterativos (sequência de instruções executadas passo a passo onde o passo seguinte sempre depende do passo anterior).

MÉTODOS ITERATIVOS OU INDIRETOS

São processos que se caracterizam pela repetição de uma determinada operação. A ideia nesse tipo de processo é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou iteração um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. E, a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Alguns aspectos comuns a qualquer processo iterativo, são:

- **Estimativa inicial**: a fim de se iniciar um processo iterativo, é preciso que se tenha uma estimativa inicial do resultado do problema.

- **Convergência**: a cada passo ou iteração, o resultado deve está mais próximo daquele esperado, ou seja, é preciso que o método **convirja** para o resultado real.

- **Critério de Parada:** O critério adotado para **parar** as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada. Ele indica que encontramos uma raiz aproximada, dentro da margem de erro desejada.

Estudaremos 3 métodos iterativos na obtenção de raízes aproximadas:

1- **Método da Bisseção**
2- **Método de Newton-Raphson**
3- **Método da secante**

Observação – Existem outros métodos iterativos para o cálculo de raízes aproximadas, mas que não serão abordados aqui, ficando como informação para estudos futuros.

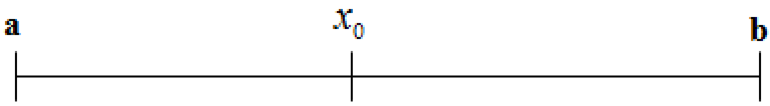
4- Método da Falsa posição
5- Método do ponto Fixo

1- MÉTODO DA BISSEÇÃO

Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo que contém a raiz [*a*, *b*] tal que $f(a)\times f(b)<0$ e α uma raiz de *f*(*x*) isolada neste intervalo. O método da bisseção divide o intervalo [*a*, b] em k vezes sempre no ponto médio, até que sua amplitude atinja a precisão requerida (critério de parada), ou seja, $(b_k - a_k)<\varepsilon$ (épsilon). Ou seja, o ***método da bisseção*** consiste em construir uma sequência de intervalos com amplitude sucessivamente menor dentro dos quais existe a raiz procurada, até à precisão requerida.

Por exemplo, dividindo o intervalo [a, b] no **ponto médio**, obtém-se x_0, havendo dois subintervalos (a, x_0) e (x_0, b), onde

$$x_0 = \frac{a+b}{2}\,.$$



Após dividir o intervalo no ponto médio, verificamos se a raiz está no intervalo (a, x_0) ou no intervalo (x_0,b), utilizando o **Teorema de Bolzano.**

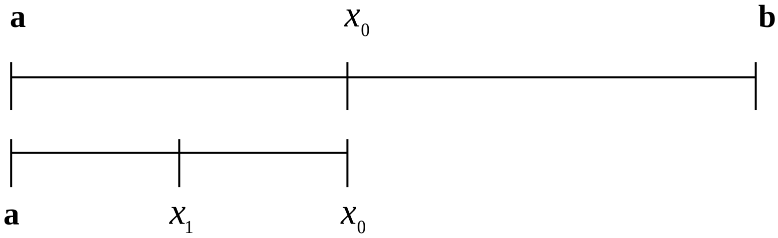
- Se a função *f(x)* mudar de sinal entre *a* e x_0, a raiz está em (a, x_0) . Caso contrário, a raiz está em (x_0, b). Ou seja, se $\bar{x}$ é a raiz aproximada, então:

QUADRO 1 - Critério de escolha do intervalo

$f(a)\times f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in (a, x_0)$	Se $f(a)\times f(x_0) < 0$, então a raiz $\bar{x}$ que procuramos está no **primeiro intervalo** (a, x_0).
$f(a)\times f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in (x_0, b)$	Se $f(a)\times f(x_0) > 0$, $\bar{x}$ está no **segundo intervalo** (x_0, b).

OBSERVAÇÃO - O Teorema de Bolzano está sendo verificado pelos pontos ***a*** e x_0, mas poderia ser com os pontos ***b*** e x_0. O resultado será o mesmo.

Após definido qual intervalo estará $\bar{x}$, pegamos tal intervalo e dividimos novamente no ponto médio. Suponhamos que $\bar{x}$ esteja em (a, x_0). O ponto médio do intervalo (a, x_0) é $x_1 = \dfrac{a+x_0}{2}$.



Obtemos novamente dois intervalos: subintervalos (a , x_1) e (x_1, x_0). Usamos o critério de escolha do intervalo (Quadro 1) para saber qual o próximo intervalo a ser dividido.

O processo se repete no intervalo que contém a raiz $\bar{x}$, até que se obtenha uma aproximação para a raiz com precisão ε, ou seja, $(b_k - a_k)<\varepsilon$. Chegado em tal precisão, a estimativa da raiz $\bar{x}$ será o **PONTO MÉDIO** do último intervalo, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

O método da bisseção **converge sempre que a função *f*(x) for contínua no intervalo [a, b] e f(a).f(b) < 0**. Entretanto, a convergência do método é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que |b – a| é muito maior que ε e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

ESTIMATIVA DO NÚMERO DE ITERAÇÕES

Dada a precisão ε e um intervalo inicial [a, b], o número de iterações k é dado por

$$k \geq \frac{\log\left(\left|b_o - a_o\right|\right) - \log\ \varepsilon}{\log(2)}$$

Tal expressão fornece o número de iterações necessárias para que o critério de parada seja satisfeito. Sempre aproximar para o inteiro k mais próximo acima. Por exemplo, se K > 3,56, então aproximamos para k = 4 iterações.

Exemplo - A raiz do polinômio $f(x) = 2^x - 7$ encontra-se no intervalo [2, 3]. Pelo Método da Bisseção, encontre uma aproximação para a raiz, com erro menor que 0,15, ou seja, $\varepsilon \leq 0{,}15$

K	a	b	Xk	f(a)	f(Xk)	f(a).f(Xk)	|b - a| < ε	PARADA
0	2,0000	3,0000	2,5000	-3,0000	-1,3431	4,0294	1,0000	CONTINUA
1	2,5000	3,0000	2,7500	-1,3431	-0,2728	0,3664	0,5000	CONTINUA
2	2,7500	3,0000	2,8750	-0,2728	0,3360	-0,0917	0,2500	CONTINUA
3	2,7500	2,8750	**2,8125**	-0,2728	0,0250	-0,0068	0,1250	**PARAR**

Logo, a raiz aproximada é $\bar{x}$ = **2,8125**

Exemplo – Uma das raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 9x + 3$ encontra-se no intervalo [0, 1]. Pelo Método da Bisseção, encontre uma aproximação para a raiz, com erro menor que 0,0014, ou seja, $\varepsilon \leq 0{,}0014$

K	**a**	**b**	**Xk**	**f(a)**	**f(Xk)**	**f(a).f(Xk)**	**|b - a| < E**	**PARADA**
0	0	1	0,5	3	-1,375	-4,125	1	CONTINUA
1	0	0,5	0,25	3	0,765625	2,296875	0,5	CONTINUA
2	0,25	0,5	0,375	0,765625	0,322265625	-0,24673462	0,25	CONTINUA
3	0,25	0,375	0,3125	0,765625	0,218017578	0,166919708	0,125	CONTINUA
4	0,3125	0,375	0,34375	0,218018	0,053131104	-0,01158351	0,0625	CONTINUA
5	0,3125	0,34375	0,328125	0,218018	0,082202911	0,01792168	0,03125	CONTINUA
6	0,328125	0,34375	0,3359375	0,082203	0,014474392	0,001189837	0,015625	CONTINUA
7	0,335938	0,34375	0,33984375	0,014474	0,019343913	-0,00027999	0,0078125	CONTINUA
8	0,335938	0,339844	0,337890625	0,014474	0,002438627	-3,5298E-05	0,00390625	CONTINUA
9	0,335938	0,337891	0,336914063	0,014474	0,006016918	8,70912E-05	0,001953125	CONTINUA
10	0,336914	0,337891	0,337402344	0,006017	0,001788904	1,07637E-05	0,000976563	**PARAR**

Logo, a raiz aproximada é $\bar{x}$ = **0,337402344.**

EXERCÍCIOS

1- Utilize o teorema de Bolzano e verifique em quais intervalos as respectivas funções possuem raízes.

(a) $f(x) = x^2 - 5sen(x)$

i. [-2, -1]
ii. [1, 3]
iii. [4, 5]

(b) $f(x) = x^2 - 16 + sen(x)$

i. [-1, 0]
ii. [1, 2]
iii. [3, 5]

(c) $f(x) = 2x^3 - 5$

i. [-2, -1]
ii. [0, 3]
iii. [4, 5]

2- Utilize o Método da Bissecção para estimar o zero das funções abaixo com os intervalos e erros indicados. Antes de calcular, verifique o número de iterações são necessárias para se chegar até a resposta deseja.

Observação – Utilize sempre 4 ou mais casas decimais.

(a) $f(x) = e^x + x$ no intervalo [-1; 1], com precisão $\varepsilon = 0,26$.
(b) $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ no intervalo I = [-1, 1] com precisão $\varepsilon = 0,15$.
(c) $f(x) = x^2 - 3$ no intervalo [1; 2] com precisão $\varepsilon = 0,1$.
(d) $f(x) = x^3 - 7$ no intervalo I=[1,5; 2,5] com precisão $\varepsilon = 0,15$.
(e) $f(x) = x^2 + \ln(x)$ no intervalo I=[0,5; 1] com precisão $\varepsilon = 0,035$.

RESPOSTAS

(a) -0,625
(b) -0,5625
(c) 1,71875
(d) 1,9375
(e) 0,640625