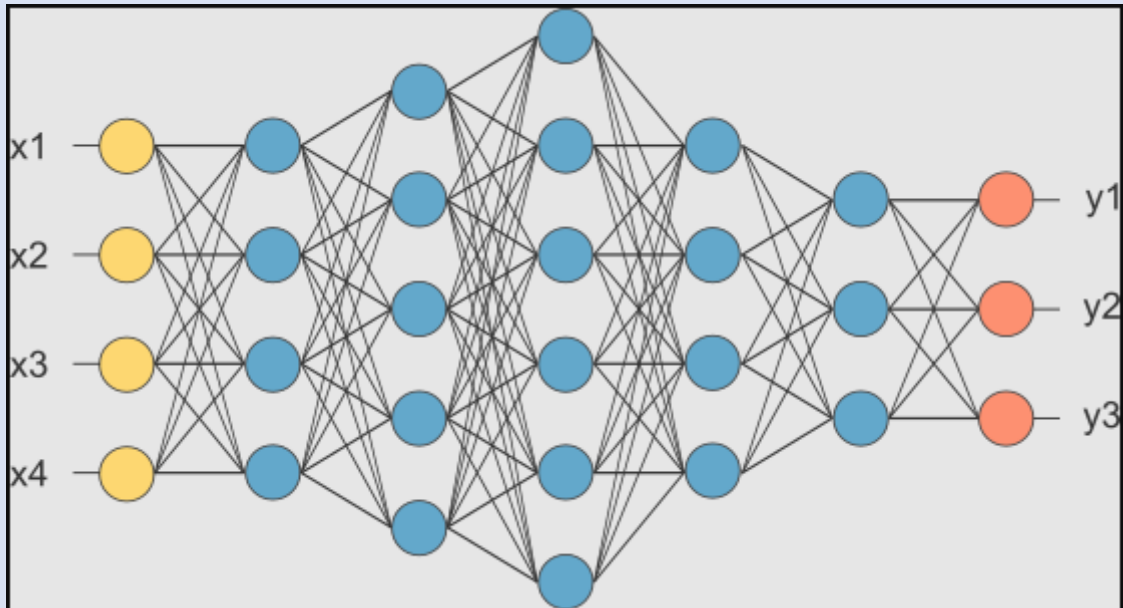


MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES



HISTÓRICO

Uma versão preliminar da eliminação de Gauss apareceu pela primeira vez no livro chinês “Nove Capítulos de Artes Matemáticas”, em torno de 200 a.C. Até então o poder do método não tinha sido reconhecido.

No ano de 1801 Carl Friedrich Gauss utilizou o método para calcular a órbita do asteroide Ceres com pouquíssimas informações (anotações do astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi quem batizou o asteroide com o nome ao observá-lo pela primeira vez). O trabalho de Gauss causou sensação quando Ceres reapareceu na constelação de virgem, local aproximado aos seus cálculos.

Mais tarde o método foi popularizado quando Willian Jordan (engenheiro alemão) em 1888 publicou no seu livro de geodésica intitulado “Handbuch der Vermessungskund”.

Embora as ideias tenham sido conhecidas antes, muitas vezes o crédito pela popularização da decomposição **LU** é atribuída ao lógico e matemático britânico Alan Turing (precursor do computador), pelo seu trabalho de 1948 nesse assunto.

Ao final dos anos 1970, a Fundação Nacional de Ciências e o Departamento de Energia dos EUA financiaram o desenvolvimento de rotinas de computacionais para inverter matrizes e resolver sistemas de equações lineares.

Aquela pesquisa levou a um conjunto de programas Fortran chamada LINPAC que são uma referência para muitos algoritmos computacionais de hoje. Inclusive o chamado MATLAB. As rotinas LIMPAC estão organizadas em torno de quatro fatorações de matrizes, uma das quais é a decomposição **LU**. **C.B. Moler, J.J. Dongarra, G.W. Stewart e J.R. Brunch**, os principais programadores do **LINPAC**, basearam muitas de suas ideias no trabalho de Jemes Boyle e Kenneth Dritz, do Laboratório Argonne (nos EUA).

Todo o histórico acima é creditado à Profa. Dra. Marli de Freitas Gomes Hernandez CESET-UNICAMP (ANTON, H. & BUSBY, R. Álgebra Linear Contemporânea. Editora Bookman. Porto Alegre. 2006)

APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

1- Projeto de Estrutura Metálica

O projeto de uma estrutura composta por vigas metálicas exige resolver um sistema de equações lineares; quanto mais complexa for esta estrutura, maior será o número de equações e de variáveis. A matriz dos coeficientes do sistema deve ser invertível para que a estrutura não colapse. Para uma mesma estrutura sujeita a forças externas variáveis, pode-se encontrar a matriz-coluna das forças que atuam sobre as vigas multiplicando-se a inversa da matriz que modela a estrutura metálica pela matriz-coluna das forças externas. Autor: Prof. Ricardo Takahashi, Departamento de Matemática.

2- Projeto dos Eixos Traseiros de um Automóvel

Obtenção da frequência natural do eixo traseiro de um automóvel através de métodos numéricos. Na indústria automobilística, hoje em dia, existe uma crescente necessidade de testes em componentes ainda na fase de projeto a fim de prever seu desempenho quando em condições de operação. Fenômenos vibratórios como a ressonância de componentes automotivos em relação às velocidades de rotação do motor e tipos de terreno devem ser levados em consideração, pois podem levar a estrutura a esforços e desgastes excessivos diminuindo sua vida útil ou aumentando o desconforto do usuário. O procedimento experimental utilizado pela indústria para testes sobre o comportamento vibracional envolve um alto custo no desenvolvimento do produto. Assim, é necessária a implantação de métodos numéricos simples e precisos de forma a prever as frequências naturais dos componentes e a faixa de sua atuação. Para tanto, o Método das Matrizes de Transferência oferece não só rapidez e precisão, como simplicidade e versatilidade.

3. Mudança de Coordenadas em Sistemas de Cores

O espaço espectral de cores é um espaço vetorial de dimensão 3 (correspondente às três cores primárias). Diferentes sistemas de coordenadas (conhecidos como sistemas de cores) são considerados neste espaço, de acordo com a aplicação ou o dispositivo de saída gráfica (monitor, impressora, etc.). É muitas vezes necessário passar de um sistema de coordenadas para outro, e isso é feito através de uma matriz de mudança de coordenadas. Por exemplo, a matriz de mudança de coordenadas do sistema RGB para o sistema XYZ é uma matriz 3x3 obtida quando se considera a cor branca como um ponto fixo da transformação.

4. Ajuste de Curvas pelo Método dos Quadrados Mínimos

Dado uma coleção de dados (pares de números) obtidos experimentalmente, busca-se uma curva que possa ser ajustada a eles de modo que a diferença entre a curva simuladora e os dados seja a menor possível. Dessa forma, previsões futuras com um grau razoável de precisão podem ser feitas com base na curva obtida. Um dos métodos mais utilizados para se fazer isso é o método dos quadrados mínimos. Ele se reduz à resolução de um sistema linear cujo número de variáveis é igual ao número dos dados.

5. Cálculo de Curto-Circuito Trifásico

Análise de circuitos elétricos sob condição de curto-circuito através de métodos matriciais. A mesma técnica se aplica à análise estrutural de uma ponte apoiada em vários pilares e sujeita a uma carga concentrada.

6. Projeto de Peças de Automóveis

Atualmente, o projeto de novas peças para automóveis é realizado através de simulações em computadores, dada a necessidade de produzir modelos novos com o menor custo e em menor tempo possíveis. O método dos elementos finitos é aplicado na modelagem das peças e no estudo das tensões produzidas sobre elas para avaliar a sua resistência (procura-se reduzir ao mínimo possível a possibilidade de que uma peça se quebre ou não funcione como deva, antes de se produzir o protótipo). Isso resulta em matrizes frequentemente com milhares ou milhões de variáveis e são necessários algoritmos muito poderosos para se lidar com estas matrizes e resolver os sistemas lineares resultantes.

7. Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos está presente em todos os projetos industriais auxiliados por computador, modelagens e simulações numéricas. Aqui ele é aplicado no estudo da elasticidade e das deformações e tensões em placas metálicas.

8. Sistema GPS

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é uma rede de 24 satélites originalmente desenvolvidos pelos militares dos EUA como uma ferramenta de navegação. Hoje, a tecnologia GPS é usada em uma ampla variedade de aplicações civis, tais como entrega de pacotes, agricultura, mineração, agrimensura, construção, serviços bancários, previsão do tempo e assistência em desastres. Um receptor GPS funciona usando leituras de satélite para calcular sua localização. Em três dimensões, o receptor usa sinais de pelo menos quatro satélites para “trilaterar” sua posição. Em um modelo matemático simplificado, um sistema de três equações lineares em quatro incógnitas (três dimensões e tempo) é usado para determinar as coordenadas do receptor em função do tempo.

9. Ruído Acústico

Pesquisadores na Itália estudando os níveis de ruído acústico no tráfego de veículos em um cruzamento movimentado de três vias usaram um sistema de equações lineares para modelar o fluxo tráfego no cruzamento. Para ajudar a formular o sistema de equações, os “operadores” se posicionaram em vários locais ao longo do cruzamento e contaram o número de veículos que passaram por eles. (Source: Acoustical Noise Analysis in Road Intersections: A Case Study, Guarnaccia, Claudio, Recent Advances in Acoustics & Music, Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Acoustics & Music: Theory & Applications).

10. Tripulação de Voo

Muitas aplicações de sistemas lineares na vida real envolvem um número enorme de equações e variáveis. Por exemplo, um problema de agendamento da tripulação de voo para a American Airlines exigia a manipulação de uma matriz com 837 linhas e mais de 12.750.000 colunas. Para resolver esta aplicação de programação linear, pesquisadores particionaram o problema em pequenas peças e resolveram em um computador. (Source: Very Large-Scale Linear Programming. A Case Study in Combining Interior Point and Simplex Methods, Bixby, Robert E., et al., Operations Research, 40, no. 5).

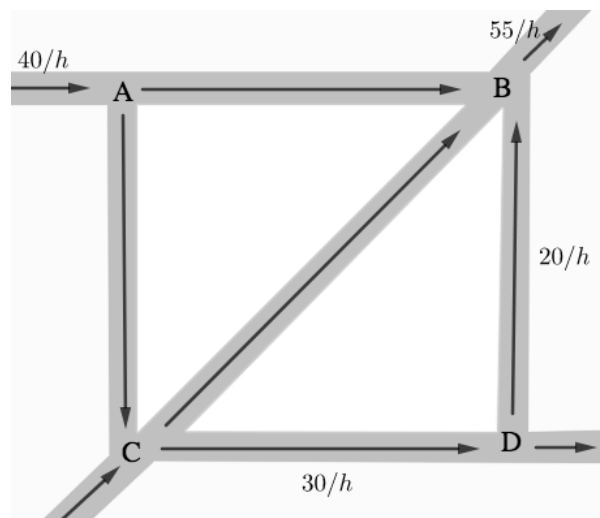
11. Mecanismos de Busca

Sistemas de recuperação de informações como mecanismos de busca na Internet fazem uso da teoria matricial e da álgebra linear para manter o controle da informação. Para ilustrar, considere um exemplo simplificado. Você pode representar as ocorrências de m palavras-chaves disponíveis em uma base de dados de n documentos por A , uma matriz $m \times n$ em que a entrada é 1 quando a palavra-chave ocorre no documento e 0 quando não ocorre no documento. Você poderia representar a busca com uma matriz coluna x $m \times 1$, com m entradas, na qual o elemento 1 representa a palavra-chave que você está procurando e 0 representa a palavra-chave que você não está procurando. Então a matriz produto de tamanho $n \times 1$, $A^T x$ representaria o número de palavras-chave em sua pesquisa que ocorre em cada um dos n documentos.

12. Tráfego de Veículos

Problema: Considere quatro cruzamentos A, B, C e D, da como na imagem, onde as setas indicam o sentido do tráfego. Do cruzamento A saem 40 carros por hora, do cruzamento B saem 55 carros por hora, do cruzamento C para D passam 30 carros por hora, e de D para B passam 20 carros por hora.

Qual a quantidade de carros que circulam no restante das ruas, considerando que nenhum carro fica parado.



Fontes:

1. <http://www.mat.ufmg.br/gaal/aplicacoes/aplicacoes.html>
2. Aplicações de sistemas lineares. (5m31s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qGLW6cFX6GA&t=164s>. Acesso em: 20 jan. 2020.
3. LARSON, Ron. **Elementos de álgebra linear**. 8 ed. São Paulo: Cengage, 2017.
4. POLONI, Hércules Luiz. **Sistemas lineares, aplicações e representação gráfica**. 2018. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/331871>. Acesso em: 28 jan. 2020.
5. Ime – Unicamp: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/sistemas-lineares-algumas-aplicacoes/> (em 18/05/2021).

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Esse tópico (sistemas de equações lineares) já foi estudado na disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, mas vamos rever alguns conceitos antes de apresentar os métodos numéricos de resolução de sistemas lineares, que é o objetivo nessa seção. Veremos novamente, apenas como revisão, o conceito de sistema linear e o método de eliminação de Gauss (ou escalonamento) como um método analítico de resolução de um sistema linear.

EQUAÇÃO LINEAR

Uma equação linear é qualquer equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Onde

- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são constantes reais
- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ variáveis ou incógnitas
- b = termo independente

SISTEMA LINEAR

Ao conjunto de m equações lineares com n incógnitas damos o nome de sistema de equações lineares. Sejam $A = A_{m \times n}$ matriz real, x e b vetores coluna. Um sistema de equações lineares ou sistema linear com n equações e n variáveis é uma equação do tipo $Ax = b$. Usando os valores de A , x e b , temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{I})$$

Um sistema linear pode também ser representado multiplicando-se a matriz A pelo vetor coluna x em (I):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\text{II})$$

A forma $Ax = b$ (I) e a sua equivalente dada por (II) são ditas formas vetoriais do sistema de equações. A matriz A é dita matriz dos coeficientes.

Exemplo 1 - Seja o sistema:
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Ele pode ser representado por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Resolver o sistema (II) significa determinar um vetor $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, que satisfaça todas as suas equações.

APLICAÇÕES EM REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

Redes Neurais Artificiais são técnicas inspiradas no funcionamento das Redes Neurais Biológicas do Corpo Humano para resolução de problemas computacionais associados à Inteligência Artificial. Redes Neurais possuem funções iterativas que permitem a elas serem “treinadas” para resolver determinados tipos de problemas. As primeiras funções de treinamento foram idealizadas por cientistas associados a biólogos.

Um modelo simplificado de rede neural pode ser observado na figura 1.

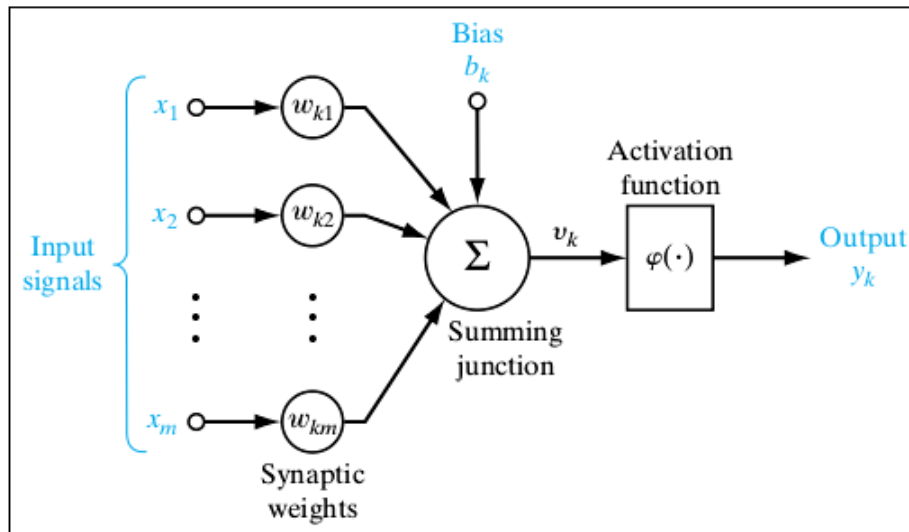


Figura 1: Modelo simplificado de Rede Neural Artificial.

O modelo acima pode ser representado na forma de um sistema linear.

$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{y}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nd} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Áreas onde se aplicam redes neurais baseadas em sistemas lineares para a modelagem:

1. Engenharia Civil

- Avaliação da Condição de Pavimentos;
- Gerenciamento da Construção;
- Previsão da Resistência Mecânica do Concreto.

2. Engenharia Elétrica

- Processamento de sinais;
- Previsão de carga elétrica;
- Diagnóstico de falhas.

3. Financeira

- Previsão da bolsa de valores;
- Previsão de falência de bancos.

4. Controle de Processos

- Modelagem / Identificação;
- Controle Adaptativo e Não-Linear;
- Otimização de Parâmetros.

5. Robótica

- Inteligência do Robô (tomada decisão).
- Planejamento da Trajetória;
- Controle Força / seguimento trajetória.

6. Meteorologia

- Previsão do Tempo.

7. Biomédica

- Análise de Batimentos Cardíacos;
- Diagnóstico Médico da Tuberculose;
- Detecção de Eventos Epiléticos.

8. Linguagem Natural

- Analisador Sintático;
- Compreensão de Texto;
- Corretor Gramatical.

9. Processamento de Voz e Fala

- Reconhecimento de Fala;
- Reconhecimento do Locutor (voz).

10. Agricultura

- Previsão de Produtividade da Lavoura;

11. Engenharia de Produção

- Otimização de Processos de Fabricação;
- Monitoramento de Processos.

Fonte: Redes Neurais Artificiais para Controle & Automação - Prof. Marcelo Ricardo Stemmer – UFSC.

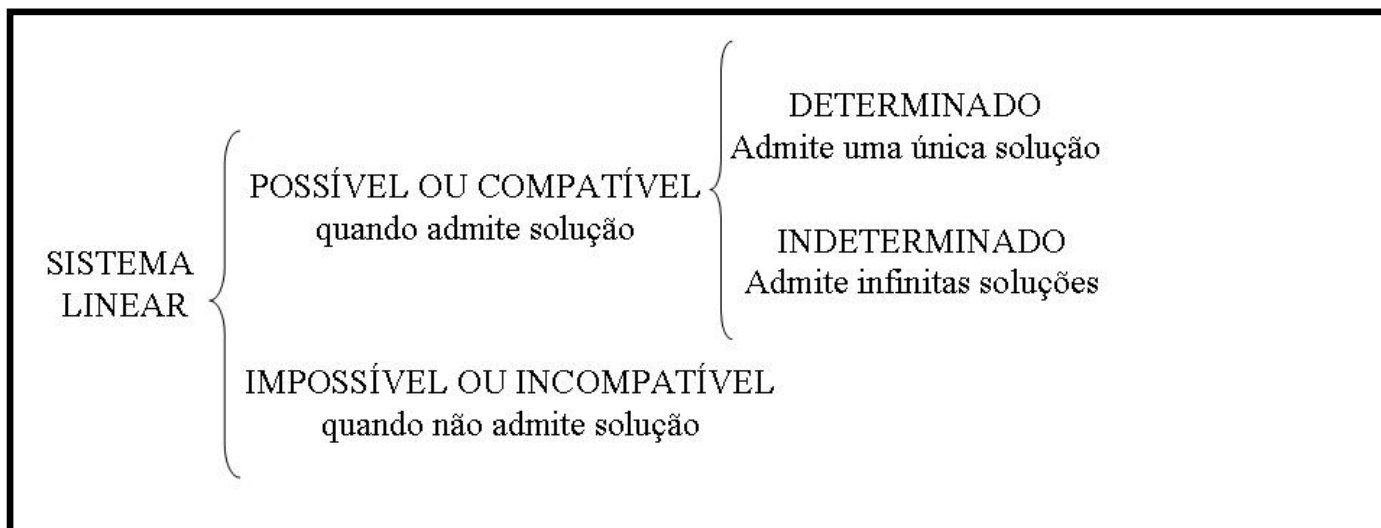
Portanto, podemos observar que as aplicações de redes neurais e, conseqüentemente, sistemas lineares (e também não-lineares) atendem à diversas áreas. Daí a importância de se estudar sistemas lineares e suas técnicas de resolução.

CLASSIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Como dito na página 5, resolver o sistema linear significa determinar um vetor $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, que satisfaça todas as suas equações. Ao resolver um sistema linear podemos obter as seguintes condições de solução:

- uma única solução,
- infinitas soluções ou
- nenhuma solução.

Portanto, um sistema de m equações lineares com n incógnitas pode ser classificado, quanto ao número de soluções. O quadro abaixo mostra todas as possibilidades quanto ao número de solução.



Uma forma de verificar se um sistema possui solução ou não, ou seja, **possível**, **impossível** ou **determinado**, é calcular o determinante da matriz do sistema.

Possível e Determinado (SPD)	$\Rightarrow \det A \neq 0$	\rightarrow tem solução única
Possível e Indeterminado (SPI)	$\Rightarrow \begin{cases} \det A = 0 \\ e \\ \det A_1 = \det A_2 = \dots = \det A_n = 0 \end{cases}$	\rightarrow tem infinitas soluções
Impossível (SI)	$\Rightarrow \begin{cases} \det A = 0 \\ e \\ \text{pelo menos um } \det A_i \neq 0 \end{cases}$	\rightarrow não tem solução
Observação:		
Se $\det A = 0$ então podemos ter um sistema $\begin{cases} SPI \Leftrightarrow \text{todos } \det A_{i,s} = 0 \\ ou \\ SI \Leftrightarrow \text{pelo menos um } \det A_i \neq 0 \end{cases}$		

Os métodos numéricos destinados a resolver sistemas lineares são divididos em dois grupos:

1. **MÉTODOS DIRETOS** - São métodos que determinam a solução exata (a menos de arredondamento), caso ela exista, de um sistema linear com um número finito de operações.

Portanto, métodos diretos fazem parte do Cálculo Analítico.

2. **MÉTODOS ITERATIVOS OU INDIRETOS** – São métodos que geram uma sequência de vetores $\{X^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $X^{(0)}$, que sob certas condições esta sequência converge para a solução aproximada X , caso ela exista.

Os métodos iterativos fazem parte do cálculo de aproximações (métodos numéricos), ou seja, métodos que fornecem uma solução aproximada através de métodos recursivos¹, como já estudado em cálculo aproximado de raízes.

Mas porque utilizar os métodos indiretos, se temos os métodos diretos que fornecem soluções exatas em passos finitos? Em alguns casos, o uso dos métodos diretos não é possível ou pelo menos não é tão bom quanto os métodos indiretos. Por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma *matriz esparsa*, que é uma matriz com muitos elementos iguais a zero.

Exemplos de matrizes esparsas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes esparsas aparecem em muitas áreas como:

- Teoria dos grafos e resolução numérica de equações diferenciais.
- O Google trabalha com matrizes gigantescas contendo informações dos links das páginas na internet. Essas matrizes geralmente são esparsas e algumas delas possuem aproximadamente 10 elementos não-nulos por linha ou coluna. A multiplicação dessas matrizes por um vetor requer aproximadamente $20n$ operações aritméticas, em que n denota a dimensão do vetor².
- A cúpula geodésica - Richard Buckminster (Bucky) Fuller desenvolveu estruturas chamadas cúpulas ou domos geodésicos. Os modelos matemáticos que aparecem nas geodésicas são equações diferenciais, onde a solução desse problema torna-se achar a solução de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem não lineares.

¹ Em termos gerais, um processo recursivo pode ser considerado como um processo de repetição de uma rotina.

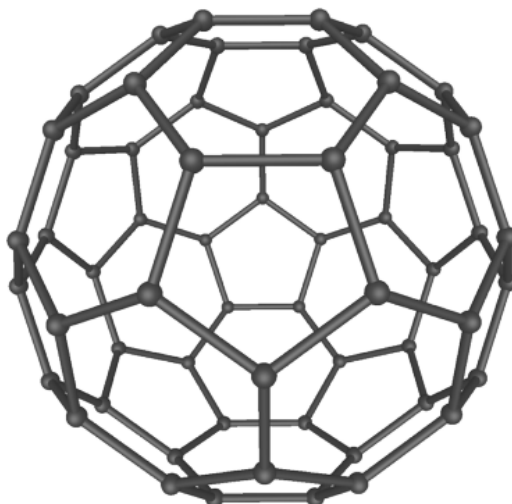
² Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula07.pdf>



("Biosphère Montréal" by Cédric THÉVENET.

https://en.wikipedia.org/wiki/Buckminster_Fuller#/media/File:Biosphère_Montréal.jpg)

A cúpula geodésica aparece também na molécula de carbono e na bola de futebol.



("C60a"uploaded by Bryn C at en.wikipedia.

<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula07.pdf>

Esta cúpula corresponde à uma forma de carbono pura com 60 átomos. Os pontos na cúpula geodésica estão distribuídos de modo que a distância de um ponto com seus três vizinhos é a mesma.

Para sistemas lineares que tem suas matrizes de coeficientes matrizes esparsas, os métodos diretos, como Eliminação de Gauss, por exemplo, não é o mais apropriado, pois eles não preservam essa esparsidade, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema. A maneira mais apropriada para esse tipo de sistema é utilizar os métodos iterativos.

Além disso, os métodos indiretos são mais econômicos no sentido que utilizam menos memória do computador. Além disso, possuem a vantagem de se auto corrigir se um erro é cometido. Podem também, sob certas condições, serem aplicados para resolver um conjunto de equações não lineares.

MÉTODOS DIRETOS

Estudaremos dois métodos diretos.

1. Método de Eliminação de Gauss ou escalonamento.
2. Fatoração LU.

1. MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS OU ESCALONAMENTO

Consiste em transformar o sistema linear original $Ax = b$ num sistema equivalente $Ux = c$, com a matriz dos coeficientes U triangular superior. Ao final do processo, obtemos o sistema equivalente.

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = b_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ u_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\text{III})$$

Supondo que $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ podemos determinar x_1, x_2, \dots, x_n do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_n = b_n / u_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n) / u_{nn} \\ x_1 = (b_1 - u_{1n}x_n - u_{1n-1}x_{n-1} - \dots - u_{12}x_2) / u_{11} \end{cases} \quad (\text{IV})$$

A ideia central do método consiste na eliminação sistemática as incógnitas abaixo da diagonal principal, transformando o sistema geral em um sistema do tipo triangular superior.

Suponha que a matriz $A_{n \times n} = (a_{ij})$ referente ao sistema dado por (II) tenha $\det(A) \neq 0$. Se considerarmos o pivô o elemento $a_{11} \neq 0$ (os **pivôs serão os elementos da diagonal principal, deste que sejam diferentes de zero**), podemos eliminar x_1 nas últimas $n - 1$ equações de (II) fazendo:

$$\text{pivô} = a_{11} \Rightarrow m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

Os m_{i1} $i=2, \dots, n$, são chamados **multiplicadores**, que multiplicados na linha do pivô e somado com o elementos a serem zerados, tal soma será nula.

OBS: Para encontrar os multiplicadores, **basta dividir o elemento a ser zerado pelo pivô e tomá-lo com o sinal “contrário”**.

As fórmulas que definem os novos coeficientes de cada linha são definidas por:

- 1- Para a nova linha 2 $\rightarrow L'_2 = L_2 \pm m_{21} \cdot L_1$
- 2- Para a nova linha 3 $\rightarrow L'_3 = L_3 \pm m_{31} \cdot L_1$
-
- n- Para a nova linha n $\rightarrow L'_n = L_n \pm m_{n1} \cdot L_1$

ou seja, em 1, a nova linha L'_2 será a soma (ou subtração) entre a linha que contém o elemento a ser zerado (L_2), e a linha que contém o pivô (L_1), sendo esta multiplicada pelo multiplicador m_{21} . De 2, 3n segue analogamente.

Nesta primeira etapa de aplicação dos cálculos acima, a matriz dos coeficientes fica na forma

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{V})$$

Observe que os elementos da primeira coluna que estão abaixo do pivô são todos nulos.

Efetua-se o mesmo processo para eliminar x_2 nas $n - 2$ equações de **(II)**. Agora queremos zerar todos os coeficientes da matriz $A^{(1)}$ que estão abaixo do coeficiente a_{22} . Neste caso, $a_{22} \neq 0$ será o novo pivô.

$$\text{pivô} = a_{22}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}, \quad m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}, \quad \dots, \quad m_{n2} = \frac{a_{n2}}{a_{22}}$$

- 1- Para a nova linha 3 $\rightarrow L'_3 = L_3 \pm m_{32} \cdot L_2$
- 2- Para a nova linha 4 $\rightarrow L'_4 = L_4 \pm m_{42} \cdot L_2$
-
- n- Para a nova linha n $\rightarrow L'_n = L_n \pm m_{n2} \cdot L_2$

Este processo é seguido até que todos os elementos abaixo da diagonal principal sejam zeros. No final do processo temos uma matriz triangular superior.

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{VI})$$

Depois de escalonado a matriz A dos coeficientes, voltamos ao sistema, mas com a **matriz equivalente (VI)** ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Construímos o sistema **(VI)** e resolvemos o sistema linear como em **(IV)** e encontramos as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

Exemplo 2 - Resolver o sistema linear.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

A primeira coisa a fazer é obter a matriz dos coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

Observe que a diagonal principal é composta pelos elementos 3, 1 e -2.

Etapa 1: eliminar x_1 das equações 2 e 3. Neste caso, os elementos que estão abaixo da diagonal principal, a começar pelos elementos $a_{21}=1$ e $a_{31}=4$ devem ser zerados.

$$pivô = a_{11} = 3 \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{3}, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{4}{3}$$

OBS: Para encontrar o multiplicador m, basta dividir o **elemento a ser zerado pelo pivô**. O número a ser multiplicado na linha do pivô terá o sinal inverso ao que foi encontrado.

$$1- \text{ nova linha 2 } \rightarrow L'_2 = L_2 \pm m_{21} \cdot L_1 = L_2 - \frac{1}{3} \cdot L_1$$

$$2- \text{ nova linha 3 } \rightarrow L'_3 = L_3 \pm m_{31} \cdot L_1 = L_3 - \frac{4}{3} \cdot L_1$$

Depois dos cálculos, obtemos a matriz

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & \vdots & 5/3 \end{pmatrix}$$

Etapa 2: eliminar x_2 das equação 3. Neste caso, o elemento $a_{32}=1/3$ deve ser zerado.

$$pivô = a_{22} = 1/3 \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$1- \text{ nova linha 3 } \rightarrow L'_3 = L_3 \pm m_{32} \cdot L_2 = L_3 - 1 \cdot L_2$$

Depois dos cálculos, obtemos a matriz

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, resolver o sistema $Ax = b$, dado pelo exercício é equivalente resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a partir da 3ª equação do sistema acima, temos:

$$-8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Substituindo $x_3 = 0$ na 2ª equação, obtemos $x_2 = 5$.

Substituindo $x_3 = 0$ e $x_2 = 5$ na 1ª equação, obtemos $x_1 = -3$. Logo, a solução do sistema original é o vetor

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO

Vimos que o algoritmo para o método de eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad i = k + 1, \dots, n$$

em cada etapa k do processo. Mas se o pivô for nulo ($a_{kk} = 0$), o que acontece, uma vez que não podemos dividir um número por zero?

Para contornar este problema deve-se adotar uma **estratégia de pivoteamento**, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna que contém o pivô. Esta estratégia consiste em:

- I- no início da etapa k da fase de eliminação, escolher para o pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes

$$a_{ik}^{(k-1)}, i = k, k + 1, \dots, n;$$

- II- trocar as linhas k e i se for necessário.

Por exemplo, se tivéssemos a matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

Nos exemplos acima, tomaríamos o pivô como sendo o elemento a_{11} , que neste caso é o número zero. Mas, quando calculamos os multiplicadores

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

estamos dividindo os coeficientes $a_{21} = 1$ e $a_{31} = 4$ por zero, o que não é possível (não se divide um número por zero).

O que temos que fazer então é uma estratégia de pivoteamento que consiste em trocar a linha L_1 pela linha L_2 ou L_3 . Pela estratégia de pivoteamento, trocamos a linha L_1 pela linha L_3 , pois esta tem o maior valor em módulo entre os elementos $a_{21} = 1$ e $a_{31} = 4$ que neste caso é o número 4. Então, a linha L_3 passa a ser a linha L_1 e a linha L_1 passa a ser a linha L_3 .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

Agora, faz-se o mesmo processo para se obter a matriz triangular superior, como visto anteriormente.

EXERCÍCIOS

1- Resolver os sistemas lineares pelo método de eliminação de Gauss.

$$\text{a-} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{b-} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{c-} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{d-} \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 17 \end{cases}$$

- Respostas

$$(1) \text{ a-} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b-} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c-} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d-} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 32 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 05 \end{pmatrix}$$

2. FATORAÇÃO LU

A decomposição LU é uma das técnicas mais usadas para resolver sistemas de equações algébricas.

Dado um sistema $A \cdot x = B$, podemos fatorar a matriz A no produto de duas matrizes L e U, sendo L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior.

$$A \underline{x} = \underline{b} \rightarrow A = LU$$

L = triangular inferior
U = triangular superior

A eliminação de Gauss pode ser usada para decompor uma matriz dos coeficientes [A], em duas matrizes [L] e [U]. [L] é uma matriz triangular inferior com sua diagonal principal formada por elementos iguais a 1.

- A matriz U é uma matriz **triangular superior**, resultante da matriz obtida quando se triangularizou a matriz A no método de Eliminação de Gauss.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Já a matriz L é uma matriz **triangular inferior** com sua diagonal principal formada por elementos iguais a 1. abaixo da diagonal, formado pelos multiplicadores m_{21} , m_{31} e m_{32} , utilizados para zerar os elementos a_{21} , a_{31} e a_{32} , respectivamente.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU$$

Observe que o vetor coluna $B = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ não foi envolvido na decomposição da matriz A em L e U .

CONSTRUÇÃO DO SISTEMA PARA A RESOLUÇÃO

A construção da solução do sistema $Ax = B$ inicia-se com a decomposição de A em L e U . Feito a decomposição, temos que:

$$Ax = B \rightarrow (LU).x = B \rightarrow L.(Ux) = B$$

Fazendo $Ux = y$, temos:

$$Ly = B$$

Portanto, temos dois sistemas a resolver:

1. $Ly = b$

2. $Ux = y$

Em (1) encontramos a matriz $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Encontrado y , substituímos em (2) e encontramos $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, que é a solução

do sistema original.

Exemplo 3 (mesmo da página 9) - Resolver o sistema linear.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

-Solução-

Podemos escrever o sistema na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A matriz U , obtida da Eliminação de Gauss do exemplo 2, página 9 é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

A matriz L é triangular inferior, formada pelos multiplicadores $m_{21} = \frac{1}{3}$, $m_{31} = \frac{4}{3}$ e $m_{32} = 1$, utilizados na resolução do Exemplo 1 na página 6.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos dois sistemas a resolver:

1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

$$1. \quad Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3 y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3 y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de cima para baixo, encontramos $y_1=1$, $y_2=5/3$ e $y_3=0$.

$$2. \quad Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3 x_2 + 2/3 x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima, encontramos $x_1=-3$, $x_2=5$ e $x_3=0$, a mesma solução do exemplo 1.

EXERCÍCIOS

1- Resolva por fatoração LU.

$$(a) - \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Respostas

$$a- \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c- \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODOS ITERATIVOS

Iremos estudar dois métodos iterativos, mas antes vamos definir o critério de parada utilizado nos dois métodos.

Considere o Sistema Linear $A\underline{x} = \underline{b}$ onde:

- A matriz de coeficientes $n \times n$
- \underline{x} vetor de variáveis $n \times 1$
- \underline{b} vetor independente (constantes) $n \times 1$

A ideia geral dos métodos iterativos consiste em converter o sistema de equações $A\underline{x} = \underline{b}$ em um processo iterativo $\underline{X} = C\underline{x} + D$, onde:

- C = matriz com dimensões $n \times n$
- D = vetor com dimensões $n \times 1$
- \underline{X} = função de iteração matricial (solução aproximada)

PROCESSO ITERATIVO

Partindo de uma vetor aproximação inicial $\underline{x}^{(o)}$, constrói-se uma sequência iterativa de vetores, calculando $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \underline{x}^{(3)}, \dots, \underline{x}^{(k+1)}$, onde:

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(1)} &= C\underline{x}^{(o)} + D \\ \underline{x}^{(2)} &= C\underline{x}^{(1)} + D \\ &\vdots \\ \underline{x}^{(k)} &= C\underline{x}^{(k-1)} + D\end{aligned}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = C\underline{x}^{(k)} + D \text{ (forma geral)}$$

CRITÉRIO DE PARADA

Como em todos os processos iterativos, necessitamos de um critério para a parada do processo. A parada é dada pelo Máximo desvio relativo:

$$d_R^{(k)} = \frac{\max_{i=1,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{i=1,n} |x_i^{(k)}|} < \varepsilon$$

Onde,

- $\max_{i=1,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ é o maior desvio absoluto, ou seja, a maior diferença absoluta entre $x_i^{(k)}$ (a resposta encontrada no passo k) e a solução $x_i^{(k-1)}$ do passo anterior.
- $\max_{i=1,n} |x_i^{(k)}|$ é o maior valor absoluto de $x_i^{(k)}$ (a resposta encontrada no passo k).

Logo, desta forma, dada uma precisão ε o vetor $\underline{x}^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada da solução exata, se $d_R^{(k)} < \varepsilon$.

MÉTODOS ITERATIVOS

Estudaremos dois métodos iterativos

1. MÉTODO DE GAUSS-JACOBI
2. MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

1. MÉTODO DE GAUSS-JACOBI

Dado uma aproximação inicial $\underline{x}^{(o)}$, o Método de Gauss-Jacobi consiste em obter uma sequência $\underline{x}^{(o)}$, $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$,, $\underline{x}^{(k)}$, por meio da relação recursiva:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + D$$

Considerare o sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

No Método de Gauss-Jacobi, é realizada uma **separação da diagonal principal**, e o processo iterativo é sequencial, componente por componente.

Supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, isola-se o vetor x mediante a separação pela diagonal da matriz de coeficientes.

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})\end{aligned}$$

Assim, tem-se o sistema iterativo $\overline{X} = Cx + D$, onde:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo - Resolver o sistema linear utilizando o Método Iterativo de Gauss-Jacobi, com $\underline{x}^o = [0,7 \quad -1,6 \quad 0,6]^T$ e tolerância $\varepsilon \leq 0,05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

-SOLUÇÃO-

Isolando x_1, x_2 e x_3 na diagonal, o processo iterativo é dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})$$

- Para $k = 0$ e substituindo $\underline{x}^o = [0,7 \quad -1,6 \quad 0,6]^T$, temos:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{10}(7 - 2(-1,6) - (0,6)) = 0,96 \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{5}(-8 - 0,7 - 0,6) = -1,86 \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{10}(6 - 2(0,7) - 3(-1,6)) = 0,94\end{aligned} \Rightarrow \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

➤ Critério de parada

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0,96 - 0,7| = 0,26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |-1,86 - (-1,6)| = 0,26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |0,94 - 0,6| = 0,34$$

$$d_R^{(1)} = \frac{\max |x^{(1)} - x^{(0)}|}{\max |x^{(1)}|} = \frac{0,34}{1,86} = 0,1828 > \varepsilon \Rightarrow \text{continua}$$

- Para $k = 1$ e substituindo $\underline{x}^{(1)} = [0,96 \quad -1,86 \quad 0,94]^T$, temos:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)})$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) \Rightarrow \underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)})$$

➤ Critério de parada

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |0,978 - 0,96| = 0,018$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |-1,98 - (-1,86)| = 0,12$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |0,966 - 0,94| = 0,026$$

$$d_R^{(2)} = \frac{\max |x^{(2)} - x^{(1)}|}{\max |x^{(2)}|} = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > \varepsilon \Rightarrow \text{continua}$$

- Para $k = 2$ e substituindo $\underline{x}^{(2)} = [0,978 \quad -1,98 \quad 0,966]^T$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)})$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) \Rightarrow \underline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)})$$

➤ Critério de parada

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |0,9994 - 0,978| = 0,0214$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1,9888 - (-1,98)| = 0,0088$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |0,9984 - 0,966| = 0,0324$$

$$d_R^{(3)} = \frac{\max |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}|}{\max |x_i^{(3)}|} = \frac{0,0324}{1,9888} = 0,0163 < \varepsilon \Rightarrow \text{PARAR}$$

Logo, a solução aproximada do sistema é

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}, \text{ com erro menor que } 0,05.$$

Observe que solução aproximada acima está bem próxima da solução exata $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (basta calcular por Eliminação de Gauss).

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS-JACOBI

• CRITÉRIO DAS LINHAS

TEOREMA - Seja o sistema linear $A\underline{x} = \underline{b}$ e seja:

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right)}{|a_{kk}|}$$

Se $\alpha = \max_{k=1,n} \alpha_k < 1$, então o método G-J gera uma sequência $\{\underline{x}^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial $\underline{x}^{(0)}$.

Observe que esta é uma condição suficiente, se for satisfeita o método converge, entretanto se não for satisfeita nada se pode afirmar.

Exemplo

Seja a matriz do exemplo dado anteriormente:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(2+1)}{10} = 0,3 < 1 \\ \alpha_2 &= \frac{(1+1)}{5} = 0,4 < 1 \\ \alpha_3 &= \frac{(2+3)}{10} = 0,2 < 1 \end{aligned}$$

Tem-se a convergência garantida para qualquer vetor inicial.

Exemplo – Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}$$

As condições de convergência do teorema não são satisfeitas, entretanto o Método de Gauss-Jacobi gera uma sequência convergente para a solução exata $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}^T$. Se as condições de suficiência não são satisfeitas, não significa que o método não possa convergir.

Exemplo

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(3+1)}{1} = 4 > 1 \\ \alpha_2 &= \frac{(5+2)}{2} = 3,5 > 1 \\ \alpha_3 &= \frac{(0+6)}{8} = 0,75 < 1 \end{aligned}$$

As condições do teorema não são satisfeitas. Uma solução possível é permutar as equações. Permutar a primeira equação com a segunda equação:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(2+2)}{5} = 0,8 < 1 \\ \alpha_2 &= \frac{(1+1)}{3} = 0,66 < 1 \\ \alpha_3 &= \frac{(0+6)}{8} = 0,75 < 1 \end{aligned}$$

As condições passam a ser satisfeitas e a convergência é garantida para qualquer vetor inicial $\underline{x}^{(0)}$. Este tipo de procedimento nem sempre é possível.

2. MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

No Método de Gauss-Seidel, também é realizada uma **separação da diagonal principal**, e o processo iterativo é sequencial, componente por componente.

Mas observe que neste método, ao contrário do **Método de Gauss – Jacobi**, para calcular $x_j^{(k+1)}$ na iteração $(k + 1)$, o método utiliza todos os valores $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ calculados anteriores a $x_j^{(k+1)}$ (por exemplo, para calcular $x_4^{(3)}$, utiliza-se os resultados de $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}$ e $x_3^{(3)}$).

Supondo $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$, isola-se o vetor \underline{x} mediante a separação pela diagonal da matriz de coeficientes.

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Observe que para calcular $x_2^{(k+1)}$, temos que saber o valor de $x_1^{(k+1)}$. Para calcular $x_3^{(k+1)}$, temos que saber o valor de $x_1^{(k+1)}$ e $x_2^{(k+1)}$, e assim por diante.

Exemplo- Resolver o sistema linear utilizando o Método Iterativo de Gauss-Seidel, com $\underline{x}^o = [0, 0, 0]^T$ e tolerância $\varepsilon \leq 0,05$.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Isolando x_1, x_2 e x_3 na diagonal, o processo iterativo é dado por:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5} (5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4} (6 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{6} (0 - 3x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

- Para $k = 0$ e substituindo $\underline{x}^o = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, temos:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{5} (5 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{5} (5 - 0 - 0) = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4} (6 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4} (6 - 3 \times 1 - 0) = 0,75 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{6} (0 - 3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{6} (0 - 3 \times 1 - 3 \times 0,75) = -0,875 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

Observe que, para calcular $x_2^{(1)}$ (segunda linha), tenho que ter o valor de $x_1^{(1)}$ (primeira linha) e para calcular $x_3^{(1)}$ (última linha), tenho que ter os valores de $x_1^{(1)}$ e $x_2^{(1)}$.

➤ **Critério de parada**

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |1,0 - 0| = 1,0$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |0,75 - 0,0| = 0,75$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |-0,875 - 0| = 0,875$$

$$d_R^{(1)} = \frac{\max |x^{(1)} - x^{(0)}|}{\max |x_i^{(1)}|} = \frac{1,0}{1,0} = 1,0 > \varepsilon \Rightarrow \text{continua}$$

• Para $k = 1$ e $\underline{x}^{(1)} = [1 \quad 0,75 \quad -0,875]^T$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(5 - 0,75 - (-0,875)) = 1,025$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(6 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(6 - 3 \times 1,025 - (-0,875)) = 0,95 \Rightarrow$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(0 - 3x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{6}(-3 \times 1,025 - 3 \times 0,95) = -0,9875$$

$$\underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$$

➤ **Critério de parada**

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |1,025 - 1| = 0,025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |0,95 - 0,75| = 0,20$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |-0,9875 - (-0,875)| = 0,1125$$

$$d_R^{(2)} = \frac{\max |x^{(2)} - x^{(1)}|}{\max |x_i^{(2)}|} = \frac{0,20}{1,025} = 0,1957 > \varepsilon \Rightarrow \text{continua}$$

• Para $k = 2$ e $\underline{x}^{(2)} = [1,0025 \quad 0,95 \quad -0,9875]^T$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)})$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(6 - 3x_1^{(3)} - x_3^{(2)})$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{6}(0 - 3x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)})$$

$$\Rightarrow \underline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$$

➤ **Critério de parada**

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |1,075 - 1,025| = 0,0175$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |0,9912 - 0,95| = 0,0412$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |-0,9993 - (-0,9875)| = 0,0118$$

$$d_R^{(3)} = \frac{\max |x^{(3)} - x^{(2)}|}{\max |x_i^{(3)}|} = \frac{0,0412}{1,0075} = 0,0408 < \varepsilon \Rightarrow \text{PARAR}$$

Logo, a solução aproximada do sistema é $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$, com erro menor que 0,05.

Observe que solução aproximada acima está bem próxima da solução exata $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (basta calcular por Eliminação de Gauss).

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Existem dois critérios de suficiência para a convergência do Método de Gauss-Seidel. O critério de linhas (apresentado no método de Gauss-Jacobi) e o critério de Sassenfeld.

• CRITÉRIO DE SASSENFELD

Considere o sistema linear $A\bar{x} = \bar{b}$, com A dimensão $n \times n$ e seja:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

e para $j = 2, 3, \dots, n$:

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

Define-se $\beta = \max_{j=1,n} \beta_j$. Se $\beta < 1$, então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para a solução do sistema, qualquer que seja o vetor inicial $x^{(0)}$. Além disso, quanto menor for o valor de β mais rápida é a convergência.

Exemplo - Verifique a convergência do sistema abaixo pelo critério de Sassenfeld.

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,1x_3 + 0,1x_4 = 0,2 \\ 0,2x_1 + x_2 - 0,2x_3 - 0,1x_4 = -2,6 \\ -0,1x_1 - 0,2x_2 + x_3 + 0,2x_4 = 1,0 \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + x_4 = -2,5 \end{cases}$$

• Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{[0,5+0,1+0,1]}{1} = 0,7 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{[0,2 \times 0,7 + 0,2 + 0,1]}{1} = 0,44 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{[0,1 \times 0,7 + 0,2 \times 0,44 + 0,2]}{1} = 0,358 < 1$$

$$\beta_4 = \frac{[0,1 \times 0,7 + 0,2 \times 0,44 + 0,2 \times 0,358]}{1} = 0,2736 < 1$$

Todos satisfazem.

Portanto, $\beta = \max_{j=1,n} \beta_j = 0,7 < 1$ e então temos a garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma sequência convergente.

Exemplo - Verificar as condições de convergência do Método de Gauss-Seidel no sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

- Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{1+3}{2} = 2 > 1 \text{ não satisfaz.}$$

Como a convergência do Método de Gauss-Seidel é fortemente dependente da posição das equações, pode-se trocar a posição das equações.

Tentativa 1- Troca-se a primeira equação pela terceira equação.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

- Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{0+3}{1} = 3 > 1 \text{ não satisfaz.}$$

Tentativa 2- Troca-se a primeira coluna pela terceira coluna na equação anterior.

$$\begin{cases} 3x_3 + 0x_2 + x_1 = 3 \\ x_3 - x_2 + 0x_1 = 1 \\ 3x_3 + x_2 + 2x_1 = 3 \end{cases}$$

- Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{1}{3} = 0.33 < 1 \text{ satisfaz.}$$

$$\beta_2 = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} = 0.33 < 1 \text{ satisfaz.}$$

$$\beta_3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{6} < 1 \text{ satisfaz.}$$

Com a última modificação, o sistema passa a ser convergente para qualquer vetor inicial. Modificações desse tipo são puramente acadêmicas e são difíceis de serem realizadas em sistemas reais. Principalmente pelas dimensões dos problemas, resultando num grande esforço computacional, e das incertezas quanto a sua eficiência.

EXERCÍCIOS

2- Resolver o sistema linear utilizando o Método Iterativo de Gauss-Jacobi.

$$(a) \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{com } \underline{x}^{(o)} = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ e } \varepsilon \leq 0,05.$$

$$(b) \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{com } \underline{x}^{(o)} = [0,5 \ 0,5 \ 0]^T \text{ e } \varepsilon \leq 0,2.$$

$$(c) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 11 \end{cases} \quad \text{com } \underline{x}^{(o)} = [1 \ 0 \ 1]^T \text{ e } \varepsilon \leq 0,1.$$

Respostas

$$(a) \bar{x} = \begin{bmatrix} 0,992 \\ -1,952 \\ 0,774 \end{bmatrix} \quad (b) \bar{x} = \begin{bmatrix} 1,0125 \\ 1,096875 \\ -0,9125 \end{bmatrix} \quad (c) \bar{x} = \begin{bmatrix} 1,03125 \\ 1,015625 \\ 1,015625 \end{bmatrix}$$

3- Verifique a convergência dos sistemas acima, utilizando o critério das linhas.

3- Resolva os sistemas pelo Método de Gauss-Seidel.

$$(a) \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases} \quad \varepsilon < 0,7 \quad e \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases} \quad \varepsilon < 0,1 \quad e \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases} \quad \varepsilon < 0,5 \quad e \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Respostas

$$(a) \bar{x} = \begin{bmatrix} 2,083333 \\ 0,529166 \\ 1,138888 \end{bmatrix} \quad (b) \bar{x} = \begin{bmatrix} 1,049699 \\ 2,238067 \\ 2,942446 \end{bmatrix} \quad (c) \bar{x} = \begin{bmatrix} 2,03061 \\ 2,98392 \\ 4,03 \end{bmatrix}$$

4- Verifique a convergência dos sistemas acima utilizando o critério de Sassenfeld.