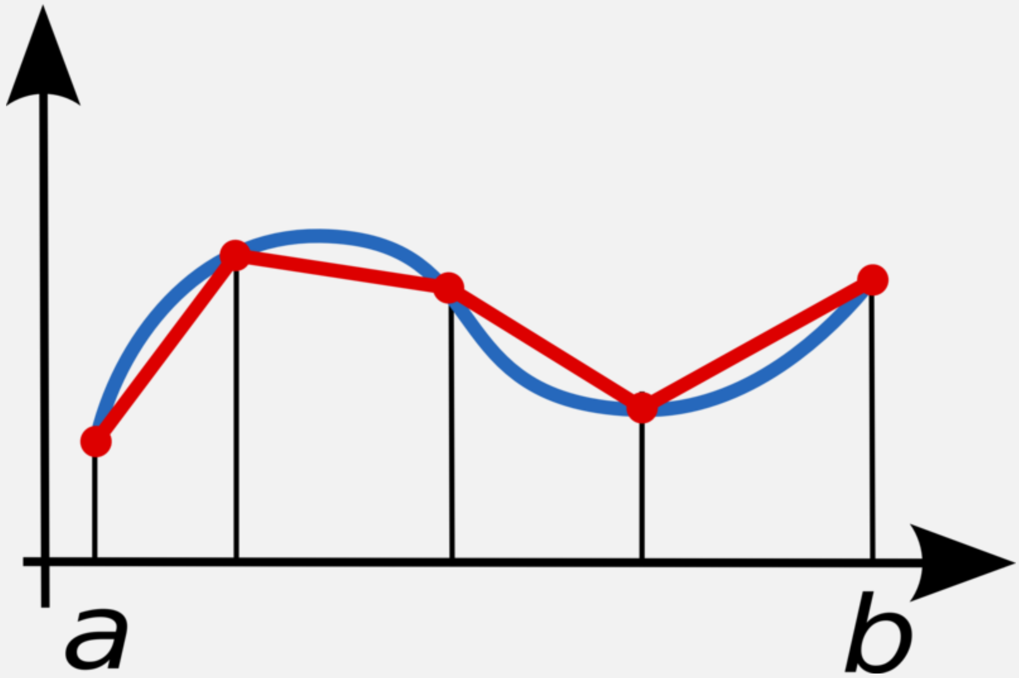
MÉTODOS NUMÉRICOS

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

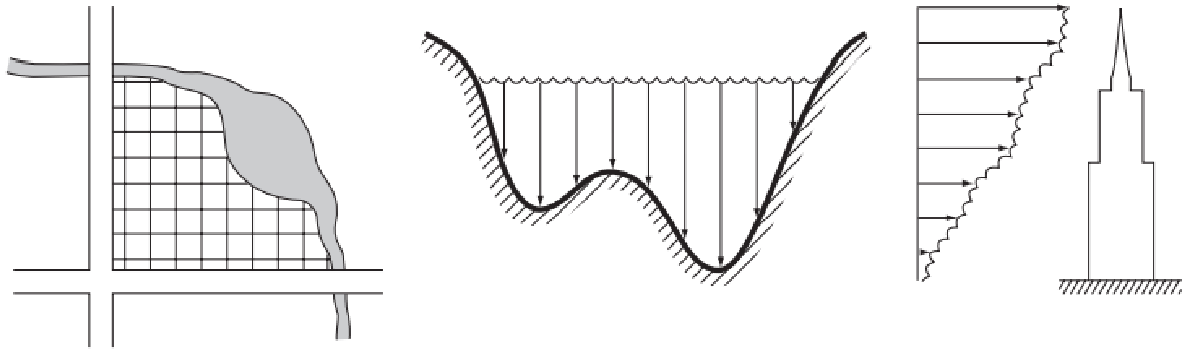


INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

INTRODUÇÃO

A integração possui diversas aplicações científicas e de engenharias, e por isso, a disciplina de cálculo integral se coloca como necessária já no início de diversos cursos superiores. Muitas aplicações se relacionam diretamente com a ideia de integral com área sob a curva. As figuras abaixo descrevem alguns casos nos quais a integração é utilizada para calcular áreas em aplicações de engenharia.

(a) Um inspetor pode precisar saber a área de um campo limitado por um riacho sinuoso e duas estradas.
(b) Um engenheiro de recursos hidráulicos pode precisar saber a área da seção transversal de um rio.
(c) Um engenheiro de estruturas poderia precisar determinar a força média decorrente de um vento não-uniforme soprando contra o lado de um arranha-céu



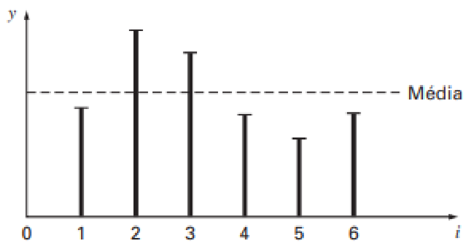
(a) (b) (c)

Fonte: Métodos numéricos para engenharia, Chapra, Steven C.

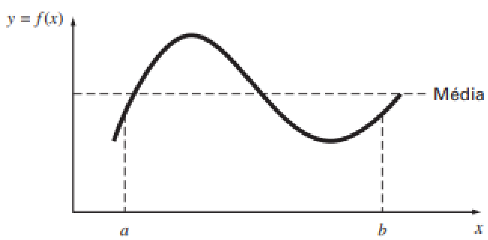
Outra aplicação comum da integral se relaciona com a analogia entre integração e soma. Por exemplo, uma aplicação comum é determinar a média de uma função contínua.

$$\text{Média} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad \textbf{(I)}$$

em que yi são medidas individuais. A determinação da média de ***pontos discretos*** é ilustrada na Figura abaixo.



Em contraste, suponha que y seja uma função no contínuo de uma variável independente *x*, como descrito na Figura abaixo.

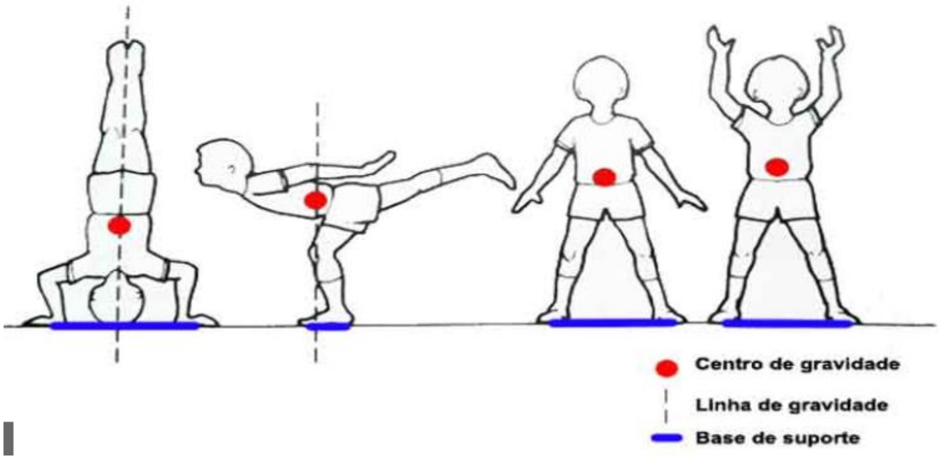


Nesse caso, existe um número infinito de valores entre a e b. Do mesmo modo que a Equação (I) pode ser aplicada para determinar a média de leituras discretas, você poderia também estar interessado em calcular a média de uma função no contínuo y = f(x) no intervalo de a até b. A integração é usada para esse propósito, como especificado pela fórmula.

$$\text{Média} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad \textbf{(II)}$$

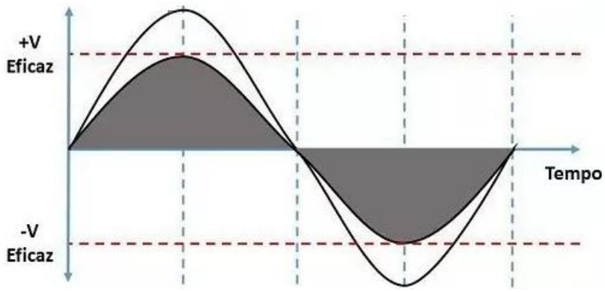
Essa fórmula tem centenas de aplicações em engenharia. Por exemplo, é usada para

1. calcular o centro de gravidade de objetos irregulares na mecânica.



Fonte: REDU – Conteúdos escolares

2. Para determinar a corrente eficaz na engenharia elétrica. Quando um equipamento é ligado nem toda corrente e tensão são absorvidos. Este que é absorvido pelos equipamentos é chamado de tensão ou corrente eficaz.



3. As integrais também são usadas pelos engenheiros para calcular a quantidade total de uma dada variável física, como quantidade de movimento de um corpo, quantidade de Força, de aceleração, de velocidade, de massa, área, volume, etc.

   Por exemplo, a massa total de um composto químico em um reator é dada pelo produto da concentração do composto químico pelo volume do reator:

   Massa = concentração × volume

   em que a concentração tem unidades de massa por volume.

   Entretanto, suponha que a concentração varie de uma posição para outra dentro do reator. Nesse caso, é necessário somar o produto das concentrações locais c_i pelos elementos de volumes correspondentes ΔV_i.

$$\text{Massa} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \Delta V_i$$

em que n é o número de volumes discretos. Para o caso contínuo, em que c(x, y, z) é uma função conhecida e x, y e z são as variáveis independentes que indicam a posição em coordenadas cartesianas, a integração pode ser usada para o mesmo propósito:

$$\text{Massa} = \iiint c(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ou

$$\text{Massa} = \iiint_V c(V)\, dV$$

que é conhecida como uma integral de volume. Observe a forte analogia entre a soma e a integração.

4. A taxa total de transferência de energia através de um plano no qual o fluxo (em calorias por centímetro quadrado) é uma função da posição é dada por

$$\text{Transferência de calor} = \iint_A \text{fluxo}\, dA$$

que é conhecida como uma integral de área, em que A é a área.

Analogamente, para o caso unidimensional, a massa total de uma haste de densidade variável com área da seção transversal constante é dada por

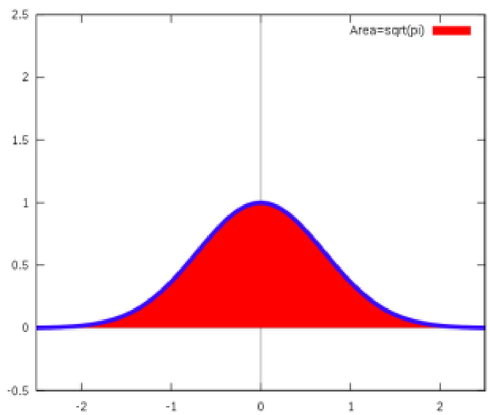
$$m = A \int_0^L \rho(x)\, dx$$

em que m é a massa total (kg), L é o comprimento da haste (em metros), ρ(x) é a densidade conhecida (kg/m³) como função do comprimento x (em metros) e A é a área da seção transversal da haste (m²).

5. Integrais aparecem com frequência em cálculo de probabilidades. A probabilidade de um evento é a área abaixo de uma curva. Considere a distribuição Gaussiana com função densidade probabilidade dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

Gráfico da função



Podemos traçar o gráfico da função gaussiana acima, mas não existe fórmula para a primitiva.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Aqui estudaremos problemas envolvendo métodos que calculam aproximações numéricas a integrais:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

No início de qualquer curso de graduação em ciências exatas, estuda-se cálculo diferencial e integral. A derivada representa a taxa de variação de uma variável dependente com relação a uma independente. A ideia é usar diferenças para quantificar um processo instantâneo. A integração é o oposto. O objetivo pressupõe a soma de informações instantâneas para fornecer um resultado total ao longo de um intervalo, obtendo-se a área ou o volume de figuras geométricas. A obtenção de derivadas e integrandos por métodos analíticos em problemas complexos usualmente pressupõe grande esforço, quando possível.

Estes métodos numéricos são utilizados quando $f(x)$ é impossível ou difícil de integrar analiticamente, ou ainda quando a função integranda é conhecida através de uma tabela de valores. Baseiam-se na aproximação da função $f(x)$ por outra função cujo integral é mais fácil de calcular, como por exemplo polinómios interpoladores de $f(x)$.

Do ponto de vista analítico existem diversas regras, que podem ser utilizadas na prática (Regras estudadas no Cálculo I) para resolver uma integral. Contudo, embora tenhamos resultados básicos e importantes para as técnicas de integração analítica, como o ***Teorema Fundamental do Cálculo Integral***, nem sempre podemos resolver todos os casos. Por exemplo, a integral elíptica completa definida por:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - x^2 sen^2 t)^{1/2}}$$

amplamente utilizada na Física. Em geral, integrais elípticas não podem ser expressas em termos de funções elementares (exceto em alguns casos), o que impossibilita a resolução por métodos tradicionais de integração do Cálculo I. Neste caso é necessário recorrer aos métodos numéricos.

Outra integral em que se conhece sua forma analítica, mas o cálculo da primitiva pode ser trabalhoso e nem sempre simples é a integral

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

que resulta em uma função que não pode se expressa em termos de combinações finitas de outras funções algébricas, logarítmicas ou exponenciais. Essa integral tem grandes aplicações na probabilidade. Ela é uma função densidade de probabilidade

Quando não conseguimos calcular a integral por métodos analíticos, mecânicos ou gráficos, então podemos recorrer ao método numérico. Em algumas situações, só podemos usar o método numérico. Por exemplo, se não possuirmos a expressão analítica de f, não podemos, em hipótese nenhuma, usar outro método que não o numérico. A integração numérica pode trazer ótimos resultados quando outros métodos falham.

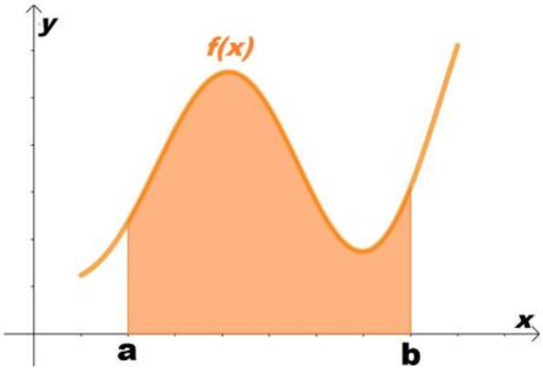
TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

No Cálculo Diferencial e Integral estuda-se o conceito de integral definida e como calculá-la por meio de processos analíticos. Os resultados obtidos correspondem a áreas ou volumes de figuras geométricas, dependendo do tipo de integral. Ela também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.

Teorema Fundamental do Cálculo – Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo [a, b] e sua primitiva (ou antiderivada) F(x) conhecida. A integral definida de *f(x)* pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) \text{ , onde } F'(x) = f(x) \text{ .}$$

Graficamente a interpretação da integral é a área aproximada compreendida entre ***a*** e ***b***, o **eixo Ox** e sob o gráfico da função *f(x)*.



Na integração numérica, o fundamento consiste em substituir a função *f(x)* por um polinômio que se aproxime razoavelmente de *f*(x) no intervalo [*a*, b] e assim, integra-se o polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a ***n***, ao invés de integrar *f*(x), ou seja:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx$$

As vantagens de se integrar um polinômio que aproxima y = *f*(x) ao invés de *f*(x) são principalmente duas:

1. *f*(x) pode ser uma função de difícil integração ou de integração praticamente impossível, enquanto que um polinômio é sempre de integração imediata;

2. As vezes a função é dada simplesmente através de uma tabela-conjunto de pares ordenados obtidos como resultados de experiências. Aí não se conhece a expressão analítica da função em termos do argumento x.

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Os métodos de integração numérica estão classificados em duas categorias: métodos (ou fórmulas) de Newton-Cotes e método da Quadratura Gaussiana (ou de Gauss).

As fórmulas que serão deduzidas aqui têm expressão do tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

onde os coeficientes A_i são determinados de acordo com o grau do polinômio aproximador.

1. **FÓRMULAS OU MÉTODOS DE NEWTON-COTES**

As fórmulas são conhecidas como fórmulas de Newton-Cotes, em homenagem a Isaac Newton e Roger Cotes (1682-1716), e dependem, obviamente, do grau do polinómio escolhido.

Nas fórmulas de Newton-Cotes, a ideia de que um polinômio P(x) se aproxime de *f*(*x*) razoavelmente, é que este polinômio interpole *f*(*x*) em pontos do intervalo [*a*, *b*] igualmente espaçados. Ou seja, as fórmulas de Newton-Cotes particionam o intervalo de integração [a, b] em vários subintervalos de mesmo tamanho e, para cada subintervalo, sua área é calculada, somando todas as áreas. Por exemplo, consideremos a partição do intervalo $[a, b]$ em 4 subintervalos:

$$[a = x_0; x_1],[x_1; x_2],[x_2; x_3] \; e \; [x_3; x_4 = b]$$

onde o comprimento (ou amplitude) **h** de cada subintervalo é sempre o mesmo, ou seja,

$$h = x_1 - x_0 \; = \; x_2 - x_1 \; = \; x_3 - x_2 \; = \; x_4 - x_3$$

Para ***n*** subintervalos, temos

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Os métodos de Newton-Cotes são:

- **Regra dos trapézios simples e repetida (ou composta)**
- **Regra de Simpson simples e repetida**, que se dividem nas seguintes regras:

  - 1/3 de Simpson simples
  - 1/3 de Simpson repetida
  - 3/8 de Simpson simples
  - 3/8 de Simpson repetida

2. **MÉTODO DA QUADRATURA GAUSSIANA**, que ao contrário dos métodos de Newton-Cotes, utiliza subintervalos de [a, b], mas com amplitudes distintas.

Vamos iniciar com os métodos de Newton-Cotes

1- REGRA DO TRAPÉZIO SIMPLES (polinômios de grau 1)

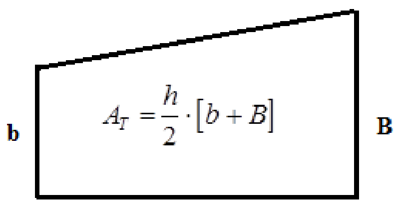
Como o próprio nome já diz, esta regra aproxima a área da região compreendida entre o eixo Ox, as retas x = a e x = b e a curva definida por *f*(x), pela área do trapézio. Ou seja

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \acute{A}rea \;\; do \;\; trap\acute{e}zio$$

Nesta regra, a função a ser integrada será aproximada por um polinômio interpolador é de ordem 1. Portanto, necessita-se de dois pontos para a interpolação, ou seja $[x_0, x_1] = [a, b]$. Tem-se a expressão:

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)dx$$

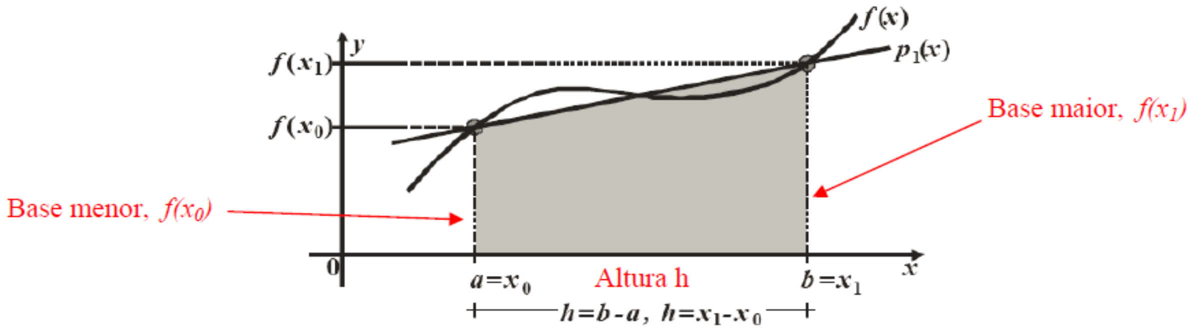
onde $P_1(x)$ será um polinômio de grau, que representa a área do trapézio. Logo, $P_1(x)$ terá que escrito em termos da função *f*(x). De fato, sabemos que a área do trapézio é dada por



Onde

- B é a base maior,
- b é a base menor e
- h a altura do trapézio.

Considere agora a área da região compreendida entre o eixo Ox, as retas x = a e x = b e a curva definida por f(x). Traçando uma reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ obtemos um trapézio (região pintada).



Fonte: Faculdade FEAU -mProf. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)

Fazendo a

- base menor $b = f(x_0)$, que corresponde ao comprimento que vai da origem até $f(x_0)$,

- a base maior $B = f(x_1)$, que corresponde ao comprimento que vai da origem até $f(x_1)$ e

- a altura $h = b - a = x_1 - x_0$

a área do trapézio será dada por

$$A_T = \frac{h}{2} \cdot [b + B] = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)]$$

Assim, a área aproximada compreendida entre a e b, o eixo Ox e sob o gráfico da função *f*(x) é

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx \cong \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)]}$$

ESTIMATIVA DE ERRO

Como área compreendida entre a curva de f(x), o eixo Ox e a retas x = a e x = b é uma área aproximada da área do trapézio, existe uma margem de erro. A estimativa do erro é dada por

$$\boxed{|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \cdot \max|f''(x)|, \ onde \quad x \in [x_0, x_1]}$$

Onde $f''(x)$ é a segunda derivada de *f*(x).

EXEMPLO 1 - Calcular a integral $\int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$.

(a) Por meio do cálculo integral (Regras analíticas do cálculo I).
(b) Pela Regra do Trapézio.
(c) Estimar o erro de truncamento cometido.

-Solução-

(a) Regras analíticas do cálculo I

$$\int_{3}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_{3}^{3.6} = \ln 3,6 - \ln 3 = 0,18232$$

(b) Regra do Trapézio

$x_0 = 3$, $x_1 = 3{,}6$ **e** $h = x_1 - x_0 = 0{,}6$

$$\int_{3}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = \frac{0,6}{2}\left[\frac{1}{3,0} + \frac{1}{3,6}\right] = 0{,}18333$$

(c) O erro cometido é dado pela expressão:

$$|E_T| \le \frac{h^3}{12} \cdot \max\left|f''(x)\right| \quad x \in [x_0, x_1].$$

Calculando a segunda derivada de f(x), temos:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \textbf{e} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Calculando o máximo da segunda derivada nos extremos do intervalo, temos:

Para $x \in [3; 3,6]$ o valor $\max\left|f''(x)\right| = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$, que ocorre em 3. Portanto,

$$|E_T| \le \frac{0,6^3}{12} \cdot \frac{2}{27} = 0,00133$$

Como o valor da integral é conhecido (letra (a)), pode-se calcular o erro absoluto:

Erro absoluto = 0,18333 - 1,18233 = 0,001, valor muito próximo do calculado acima.

EXEMPLO 2 - Integre a equação: $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, no intervalo [0, 0,8].

(a) Por meio do cálculo integral.
(b) Usando a Regra do Trapézio.
(c) Erro cometido.

-Solução-

(a)

$$\int_{0}^{0,8} \left(0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5\right) dx =$$

$$= \left[0{,}2x + 25\frac{x^2}{2} - 200\frac{x^3}{3} + 675\frac{x^4}{4} - 900\frac{x^5}{5} + 400\frac{x^6}{6}\right]_0^{0,8} = 1{,}64053334$$

(b) $x_0 = 0$ **,** $x_1 = 0{,}8$ **e** $h = x_1 - x_0 = 0{,}8$

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}.[f(x_0) + f(x_1)]$$

$$I \approx \frac{0{,}8}{2}[f(0) + f(0{,}8)] = \frac{0{,}8}{2}[0{,}2 + 0{,}232] = 0{,}1728$$

(c) O erro cometido é dado pela expressão:

$$|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \cdot \max|f''(x)| \quad x \in [x_0, x_1].$$

Calculando a segunda derivada de f(x), temos:

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

Calculando o máximo da segunda derivada no intervalo, temos:

Para $x \in [0; 0{,}8]$, o valor $\max|f''(x)|$, que ocorre em 0.

$$|f''(0)| = |-400| = 400|$$

Portanto,

$|E_T| \leq \frac{0{,}8^3}{12}.400 = 17{,}06$, que é um erro muito grande.

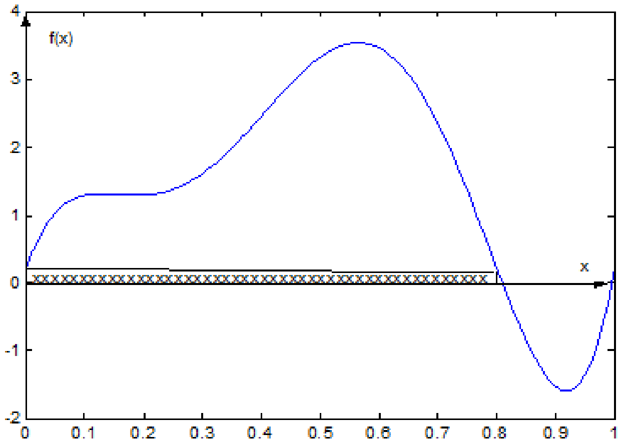
2- REGRA DOS TRAPÉZIOS REPETIDA (OU COMPOSTA)

No Exemplo 2 anterior, em porcentagem o erro relativo é de aproximadamente 850%. De fato,

$$Erro\ Relativo = \frac{Erro\ \ Absoluto}{Valor\ \ Aproximado} = \frac{|Valor\ \ Exato - Valor\ \ Aproximado|}{Valor\ \ Aproximado} \times 100$$

$$Erro\ Relativo = \frac{|1{,}64053334 - 0{,}1728|}{0{,}1728} \times 100 = 850\%$$

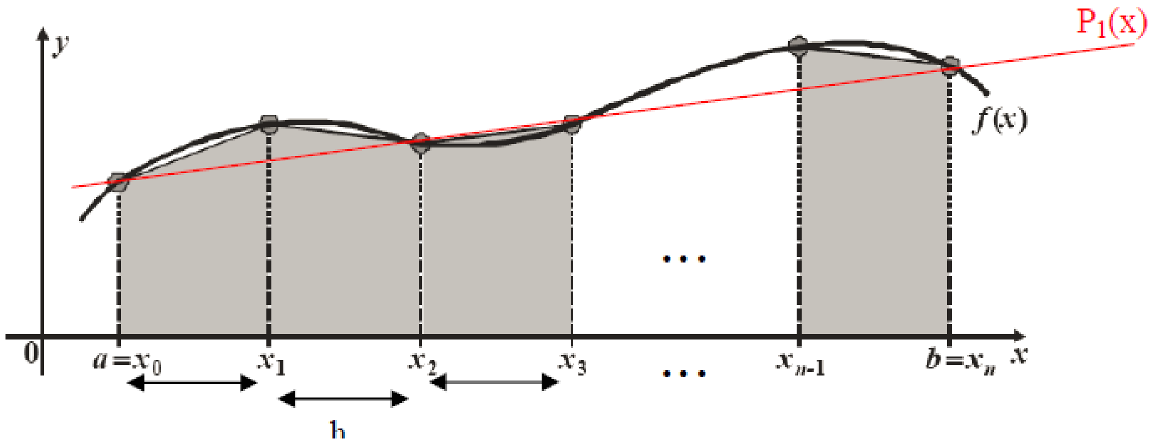
Pela observação do gráfico da função abaixo, vê-se que é muito pobre a estimativa da integral pela utilização da Regra do Trapézio Simples.



Assim, podemos observar que nem sempre a regra do trapézio simples nos dá uma boa precisão da integração. Como vimos, em alguns casos o erro é muito alto, ou seja, a aproximação é muito ruim.

Uma forma de contornar essa falha e diminuir a margem de erro é dividir o trapézio simples em diversos trapézios menores (trapézios repetidos) e aplicar a regra dos trapézios simples para cada novo trapézio. No fim, basta somar a área de todos os trapézios para obter a área total.

Na regra dos trapézios repetidas, para melhorar o resultado, o intervalo [a, b] de integração é subdividido em **n** subintervalos de amplitude **h** e aplica-se a **Regra do Trapézio Simples** em cada subintervalo, como pode ser visto na figura abaixo:



Aplicando-se a Regra do Trapézio a cada subintervalo, tem-se para a aproximação da integral:

$$A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+.........+\frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Colocando **h/2** em evidência e somando os termos remanescentes, temos:

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right)+f(x_n)\right]}$$

Onde

- $h=\dfrac{b-a}{n}$
- n é o número de subintervalos.

ESTIMATIVA DE ERRO

O erro resultante é a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra do Trapézio em cada subintervalo. Assim, o erro cometido pode ser aproximado por:

$$\boxed{E_T \leq \left|\frac{(b-a).\text{h}^2}{12}\right| \max|f''(x)| \quad , \; x \in [a,b]}$$

EXEMPLO 1 - Considere a integral $A = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx$

(a) Calcule o valor da integral, utilizando a regra do trapézio repetida, composta por 6 subintervalos.
(b) Calcule o erro.

-Solução-

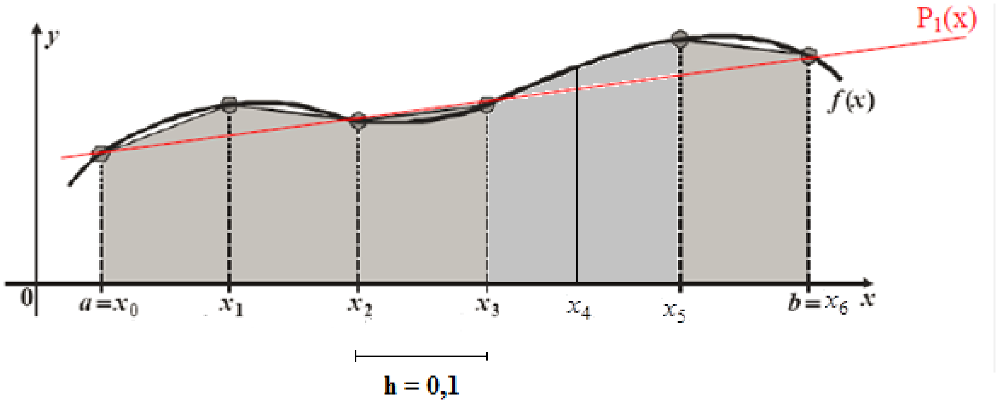
(a) A fórmula para 6 trapézios será:

$$A = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx \cong \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) \right) + f(x_6) \right]$$

1º PASSO – Calcular a amplitude **h** dos 6 subintervalos, temos:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3,6-3}{6} = \frac{0,6}{6} = 0,1$$

Logo, cada um dos 6 trapézios tem amplitude (ou altura) h = 0,1.



2º PASSO – Subdividir o intervalo [3; 3.6] em subintervalos de altura 0,1 e depois calcular o valor da função para cada x_i, $i = 0,1,.....,6$.

	x_i	$f(x_i) = 1/x_i$
x_0	3	0,333333
x_1	3,1	0,322581
x_2	3,2	0,3125
x_3	3,3	0,30303
x_4	3,4	0,294118
x_5	3,5	0,285714
x_6	3,6	0,277778

3º PASSO – Substituir os dados

$$A = \int_3^{3,6} \frac{1}{x} dx \cong \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) \right) + f(x_6) \right]$$

$$A = \int_{3}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx \cong \frac{0,1}{2}\cdot\left[0,333333 + 2\cdot\left(0,322581 + 0,3125 + 0,30303 + 0,294118 + 0,285714\right) + 0,277778\right]$$

$A \approx 0,182350$

(b) Estimativa de erro

$$E_T \le \left|\frac{(b-a).\mathrm{h}^2}{12}\right| \max\left|f''(x)\right| \quad , \quad x \in [a,b]$$

Calculando a segunda derivada, temos:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Calculando o máximo da segunda derivada nos extremos do intervalo, temos:

Para $x \in [3;\,3,6]$ o valor $\max\left|f''(x)\right| = \dfrac{2}{3^3} = \dfrac{2}{27}$, que ocorre em 3. Portanto,

$$E_T \le \left|\frac{(3,6-3).(0,1)^2}{12}\right| \frac{2}{27} = 0,00003704$$

Observe que este mesmo exercício foi resolvido para a regra dos trapézios simples na página 5 e a margem de erro foi de 0,00133, uma margem bem acima da margem de erro para os trapézios repetidos.

EXEMPLO 2 - Integre a equação: $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, no intervalo [0, 0,8].

(a) Usando a Regra do Trapézio composta por 8 subintervalos
(b) Erro cometido.

-Solução-

(a) $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0,8-0-a}{8} = 0,1$

	x_i	$f(x_i)$
x_0	0	0,2
x_1	0,1	1,289
x_2	0,2	1,288
x_3	0,3	1,607
x_4	0,4	2,456
x_5	0,5	3,325
x_6	0,6	3,464
x_7	0,7	2,363
x_8	0,8	0,232

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)\right)+f(x_8)\right]$$

$$I \cong \frac{0,1}{2}\left[0,2+2(1,289+1,288+1,607+2,456+3,325+3,464+2,363)+0,232\right]$$

$$I \cong \frac{0,1}{2}\left[32,016\right]$$

$$I \cong 1,6008$$

(d) O erro cometido é dado pela expressão:

$$E_T \leq \left|\frac{(b-a).\mathrm{h}^2}{12}\right| \max\left|f''(x)\right| \quad , \quad x \in [a,b]$$

Pelo Exemplo 2, página 6, sabemos que, para $x \in [0;0,8]$, o valor $\max\left|f''(x)\right|$ ocorre em 0 e é igual a 400.

$$|f''(0)| = |-400| = 400$$

Portanto,

$$|E_T| \leq \frac{(0,8-0).(0,1)^2}{12}.400 = 0,267$$

Comparando este resultado com o Exemplo 2 na página 6, podemos observar que a margem de erro caiu bastante quando dividimos o intervalo de integração em 8 subintervalos, caindo de 17,06 para 0,267, mostrando que a regra do trapézio repetida é mais eficiente do que a regra do trapézio simples.

Também podemos ver a diminuição da margem de erro em porcentagem:

$$Erro\,\mathrm{Re}\,lativo = \frac{|Valor\ \ Exato - Valor\ Aproximado|}{Valor\ \ Aproximado} \times 100$$

$$Erro\,\mathrm{Re}\,lativo = \frac{|1,64053334 - 1,6008|}{1,6008} \times 100 = 2,48\%$$

Se quisermos melhorar ainda mais o resultado, basta dividir em mais intervalos, ou seja, aumentar o valor de n.

NUMERO DE SUBINTERVALOS

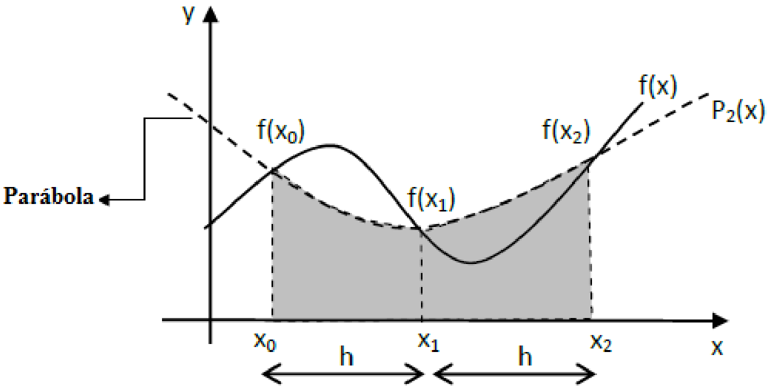
Se quisermos saber quantas subdivisões são necessárias para atingir certa precisão dada, ou seja, certo valor de erro, fazemos o seguinte cálculo:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12.|E_T|}.\max|f''(x)|}$$

3- REGRA $\frac{1}{3}$ DE SIMPSON SIMPLES OU PRIMEIRA REGRA DE SIMPSON

Também conhecida como **Regra da Parábola.** Na regra do trapézio (simples e composta) observa-se que, quando a altura **h** de cada trapézio não era suficientemente pequena, o valor da integral encontrado não era muito preciso. No método de Simpson, para melhorar a precisão, são usadas partes de parábolas em cada subintervalo **h**, para aproximar a curva a ser integrada.

Essa foi a ideia do matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761). Ele observou que uma melhor aproximação para a integral definida é obtida ligando os pontos por **segmentos de parábolas** e não por **retas**, como se faz nos trapézios.



Na regra 1/3 de Simpson, a função a ser integrada será aproximada por um polinômio interpolador de grau 2. Portanto, necessita-se de três pontos para a interpolação, ou seja, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, onde $x_0 = a$ e $x_2 = b$.

Para obter os 3 pontos, sabendo que 2 já temos, que são os extremos do intervalo [a, b], nos falta apenas mais um ponto. Neste caso, basta dividir o intervalo por 2 e obter a amplitude h.

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Aproximando f(x) por um polinômio interpolador P2(x), então:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x$$

A Forma de Lagrange do Polinômio interpolador é dada por

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x = & f(x_0)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x + \\
& f(x_1)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x + \\
& f(x_2)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}$$

Sabe-se que $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$

Cada integral da soma é então determinada trocando

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + zh; \quad z \in [0;2] \\
\mathrm{d}x &= h\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{(x_0+zh-x_0-h)(x_0+zh-x_0-2h)}{(-h)(-2h)}h\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \frac{(zh-h)(zh-2h)}{2h}\mathrm{d}z \\
&= \frac{h^2}{2h}\int_0^2 (z-1)(z-2)\mathrm{d}z \\
&= \frac{h}{2}\int_0^2 (z^2-3z+2)\mathrm{d}z \\
&= \frac{h}{2}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{3z^2}{2}+2z\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{h}{2}\left(\frac{(2)^3}{3}-\frac{3(2)^2}{2}+2(2)\right) \\
&= \frac{h}{6}(8-18+12) = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{(x_0+zh-x_0)(x_0+zh-x_0-2h)}{(h)(-h)}h\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \frac{(zh)(zh-2h)}{-h}\mathrm{d}z \\
&= \frac{h^2}{-h}\int_0^2 z(z-2)\mathrm{d}z \\
&= -h\left(\frac{z^3}{3}-\frac{2z^2}{2}\right)\Big|_0^2 \\
&= -h\left(\frac{(2)^3}{3}-(2)^2\right) \\
&= \frac{-h}{3}(8-12) \\
&= \frac{4h}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{(x_0+zh-x_0)(x_0+zh-x_0-h)}{(2h)(h)}h\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \frac{(zh)(zh-h)}{2h}\mathrm{d}z \\
&= \frac{h^2}{2h}\int_0^2 z(z-1)\mathrm{d}z \\
&= \frac{h}{2}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{h}{2}\left(\frac{(2)^3}{3}-\frac{(2)^2}{2}\right) \\
&= \frac{h}{12}(16-12) \\
&= \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x =&f(x_0)\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x+\\ &f(x_1)\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x+\\ &f(x_2)\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\end{aligned}$$

Obtém-se então

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\mathrm{d}x &= f(x_0)\frac{h}{3}+f(x_1)\frac{4h}{3}+f(x_2)\frac{h}{3}\\ &=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]\end{aligned}$$

Logo, a expressão para o método 1/3 de Simpson é dada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx \cong \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)]}$$

Onde

- $h=\frac{b-a}{2}$

ESTIMATIVA DE ERRO

A estimativa de erro do método de Simpson é dada por:

$$\boxed{|E_T|\leq\left|\frac{h^5}{90}\right|.\acute{m}\acute{a}x\left|f^{(IV)}(x)\right|,\ onde\ \ x\in[x_0,x_2]}$$

OBSERVAÇÃO: $f^{(IV)}(x)$ é a quarta derivada da função f(x).

Exemplo 1 – Considere a integral $A=\int_3^{3,6}\frac{dx}{x}$.

(a) Calcular o valor da integral, utilizando a Primeira Regra de Simpson.
(b) A estimativa de erro.

-Solução-

(a) Como a Regra de Simpson depende de 3 pontos, vamos dividir o intervalo [3; 3.6] por 2.

$$h=\frac{b-a}{2}=\frac{3,6-3}{2}=\frac{0,6}{2}=0,3$$

Logo, temos 3 pontos: (3; *f*(3)), (3.3; *f*(3.3) e (3.6; *f*(3.6)). Calculando o valor de *f* para cada:

	x_i	$f(x_i) = 1/x_i$
x_0	3	0,333333
x_1	3,3	0,303030
x_2	3,6	0,277778

Substituindo na expressão, temos:

$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] = \frac{0,3}{3}\left[0,333333 + 4 \cdot 0,303030 + 0,277778\right]$$

$$A \approx 0,182323$$

(b) Estimativa de erro

O erro é dado por:

$$|E_T| \leq \frac{h^5}{90} \cdot \max\left|f^{(IV)}(x)\right| \quad x \in [x_0, x_1],$$

1. Calculando a quarta derivada, temos:

   Como visto, $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow$ e $f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}$

2. Para $x \in [3, 3.6]$, o valor $\max\left|f^{(IV)}(x)\right| = \frac{24}{3^5} = \frac{24}{243}$, portanto:

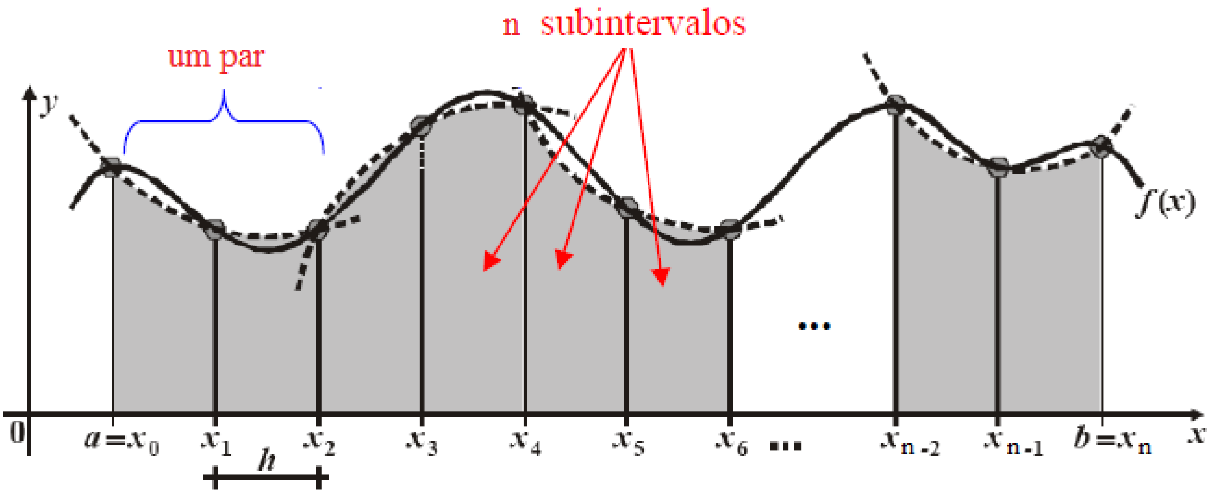
$$|E_T| \leq \frac{0,3^5}{90} \cdot \frac{24}{243} = 0,2666 \times 10^{-5}$$

4- REGRA $\frac{1}{3}$ DE SIMPSON REPETIDA OU FÓRMULA COMPOSTA

Para melhorar o resultado, pode-se subdividir o intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$ de integração em ***n*** subintervalos de amplitude ***h*** e aplicar a **Regra de Simpson Simples** em cada subintervalo.

Uma condição necessária para utilizar a ***Regra de Simpson Simples*** é a necessidade de haver **três pontos** para que se forme um par de intervalo. Seguindo esse mesmo raciocínio,

- **1 par** de intervalo → n = 2 intervalos = 2.1
- **2 pares** → n = 4 intervalos = 2.2
- **3 pares** → n = 6 intervalos = 2.3
- ⋮
- **m pares** de intervalos → n = 2m intervalos.



Assim, podemos concluir que, para utilizar a **Regra Repetida de Simpson**, precisamos de um **número par** de subintervalos. Caso tivéssemos um número ímpar, no fim poderia sobrar um intervalo. Por exemplo, se tivéssemos 5 intervalos (de x_0 *até* x_5), como precisamos de 3 pontos para cada par, então teríamos

3. 1 par de intervalo de x_0 *até* x_2,
4. 2 pares de x_2 *até* x_4
5. e sobraria o intervalo $[x_5 . x_6]$ com apenas 2 pontos. Mas precisamos de 3 pontos.

Assim, aplicando a regra em cada par de intervalos e somando, temos:

$$A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+\frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]+.....+\frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Colocando h/3 em evidência, temos:

$$A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+....+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Observe que $f(x_0)$ e $f(x_n)$ são os únicos termos que não estão multiplicados por 2 ou por 4. Quantos aos outros, os de índices pares (n = 2, 4 , 6, ...) estão multiplicados por 2, e os de índices impares (n = 1, 3, 5, ...) estão multiplicados por 4. Juntando esses termos, temos:

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+....+f(x_{n-1}\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)+.....+f(x_{n-2})\right]+f(x_n)]}$$

Onde

- $h=\dfrac{b-a}{n}$
- n é o número de subintervalos.

ESTIMATIVA DE ERRO

O Erro de truncamento resultante da integração pela Regra de Simpson Repetida é dado por:

$$\boxed{|E_T| \leq \left|\frac{(b-a).h^4}{180}\right| \cdot \max\left|f^{(IV)}(x)\right| \quad ,onde \quad x \in [a,b]}$$

EXERCÍCIOS

1- Calcular pela Regra dos Trapézios Repetidas as integrais abaixo.

(a) $\int_1^2 \ln(1+x).dx$, utilizando 5 intervalos. **Resposta:** 0,9090

(b) $\int_2^8 5x^3 + \frac{1}{x}.dx$, utilizando 6 intervalos. **Resposta:** 5176,40

(c) $\int_{-3}^8 (sen(x)+x).dx$ utilizando 5 intervalos. **Resposta:** 27,027

2- Seja $\int_0^1 e^x \; dx$.

(a) Calcule uma aproximação para a integral acima usando 10 subintervalos pela Regra dos Trapézios Repetida.

(b) Qual a margem de erro.

(c) Qual o número (n) mínimo de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 0,001.

Resposta: (a) 1.719713 (c) $m \geq 16$

3- Calcule as integrais a seguir pela

3.1 - Regra dos Trapézios Repetida usando quatro e seis divisões de $[a,b]$, e

3.2 - pela de Simpson Simples,

3.3 - Compare os resultados.

(a) $\int_1^2 e^x \; dx$ **(b)** $\int_1^4 \sqrt{x} \; dx$

Resposta: Trapézio com 4 pontos **(a)** 4,6950759
Trapézio com 6 pontos **(a)** 4,6815792

Trapézio com 4 pontos **(b)** 4,6550925
Trapézio com 6 pontos **(b)** 4,6614884

Simpson **(a)** 0,470192 **(b)** 4,666460

04- Calcule o valor aproximado de $\int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} \; dx$ com três casas decimais de precisão usando

(a) Simpson Simples. **(b)** Trapézios simples.
(c) Estime o erro **(d)** Estime o erro

Resposta: (a) 0,470192 **(b)** 0,799999

05- Determinar h, a distância entre x_i e x_{i+1}, para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos(x) \; dx$ com erro inferior a 0,001 pela **Regra dos Trapézios Repetida**.

Resposta: $n \geq 15$

6- Seja,

$$I = \int_1^3 x^3 \ln(x)dx$$

(a) Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra dos Trapézios Simples**. Estime o erro cometido.
Resposta: 29,662531

(b) Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra dos Trapézios Repetida**, com 4 intervalos. Estime o erro cometido.
Resposta: 18,030965

(c) Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra de Simpson Simples**.
Resposta: 17,281069

(d) Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra de Simpson Repetida,** com 6 intervalos.

Resposta: 17,2479

7- Seja $\int_0^1 e^{x^2}\ dx$. Determine em quantos subintervalos devemos dividir [0, 1] para determinar uma aproximação para I com erro inferior a 0,01.

Resposta: $n \geq 12$

8- Considere a integral I = $\int_1^2 \sqrt{1+x^5}\,dx$. Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra dos Trapézios Repetida**, com 6 intervalos.

Resposta: 3,1591

9- Considere a integral I = $\int_0^1 \cos(x^2)dx$. Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra dos Trapézios Repetida**, com 4 intervalos.

Resposta: (a) 0,896

10 - Considere as integrais abaixo. Calcule uma aproximação para ***I*** usando a **Regra de Simpson Repetida**. Trabalhar com 3 ou mais casas decimais.

(a) I = $\int_0^2 (\mathrm{sen}(x^2)+1)dx$, com 4 intervalos. **Resposta:** 2,838 (calculadora em radianos)

(b) I = $\int_1^3 \sqrt{3+x+x^2}\,dx$, com 8 intervalos. **Resposta:** 2,604

(c) I = $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, com 4 intervalos. **Resposta:** 0,7468

11- Calcular o valor de π, dado pela integral $4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$, considerando n = 4, pela **Regra de Simpson Repetida.**

12- O PROCON tem recebido reclamações com relação ao peso dos pacotes de açúcar de 5kg. Com a finalidade de verificar a validade das reclamações, foi coletada uma amostra de 100 pacotes. Com isto, chegou-se à conclusão de que para determinar a probabilidade de um pacote de açúcar pesar menos do que 5kg deve ser avaliada a expressão a seguir.

$$P = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

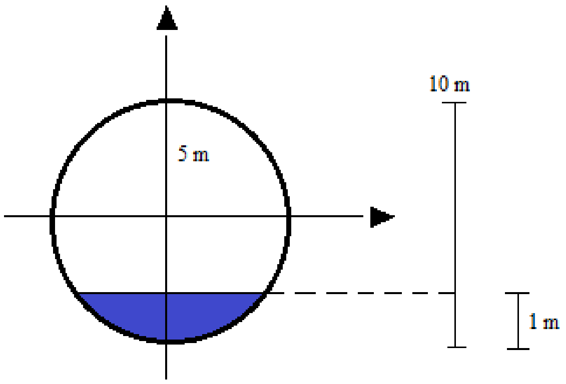
Estime essa probabilidade utilizando a Regra de Simpson repetida dividindo o intervalo de integração em 4 partes e faça os cálculos com 4 casas decimais.

Sugestão: resolva apenas a integral acima. O resultado, multiplique por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e depois some 0,5.

Resposta: 0,9640

13 - Um tanque esférico de raio R = 5 m está cheio com água. A água será drenada através de um orifício de raio r = 0,1 m situado no fundo do tanque. A variação do nível, **h**, da água com o tempo, **t**, em segundos, é dada pela relação:

$dt = \frac{R^2 - h^2}{r^2\sqrt{2g(h+R)}}dh$, onde g = 9,81 m/s2 é a aceleração devida à gravidade.



Utilize a Regra de Simpson Repetida, para estimar o tempo **t** para que o nível da água chegue a 1m do fundo. Divida o intervalo de integração em 9 partes e faça os cálculos com duas casas decimais.

Dica – No gráfico, o intervalo de integração tem que ser observado de cima (a = ponto inicial do intervalo) para baixo (b = ponto final do intervalo), já que a água vai descer. Caso contrário vai chegar numa raiz quadrada de número negativo.

Resposta: t = 541,33s

14 - Uma fábrica despeja rejeitos em um rio. Os poluentes são levados pela correnteza e 3 horas depois apresentam a distribuição mostrada na tabela abaixo. As medidas, em metros, são tomadas a intervalos de 5 metros. Utilize estas informações e a regra de trapézio para estimar a área da região contaminada.

D	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
P	0	5	7	8	8	5	6	4	3	0

Resposta: 230 m²