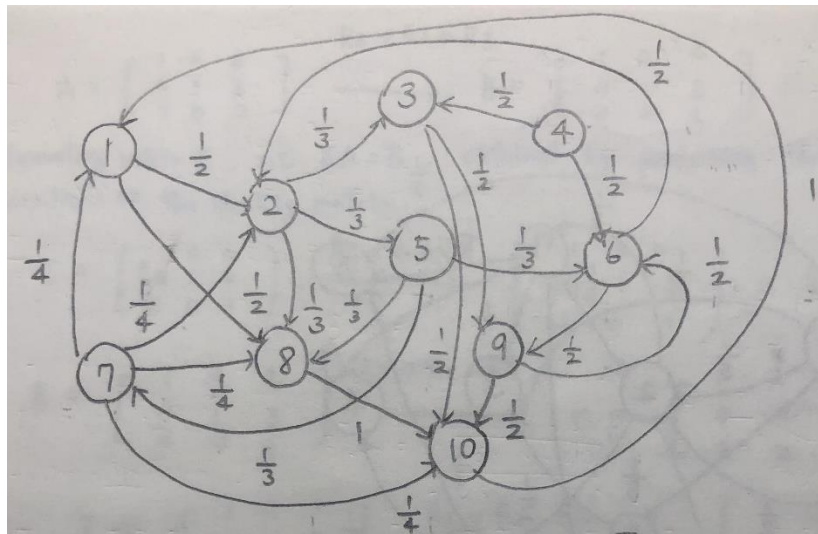


HW1 Report

(a). My graph

With 10 nodes and 21 links



(b). My matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(c).

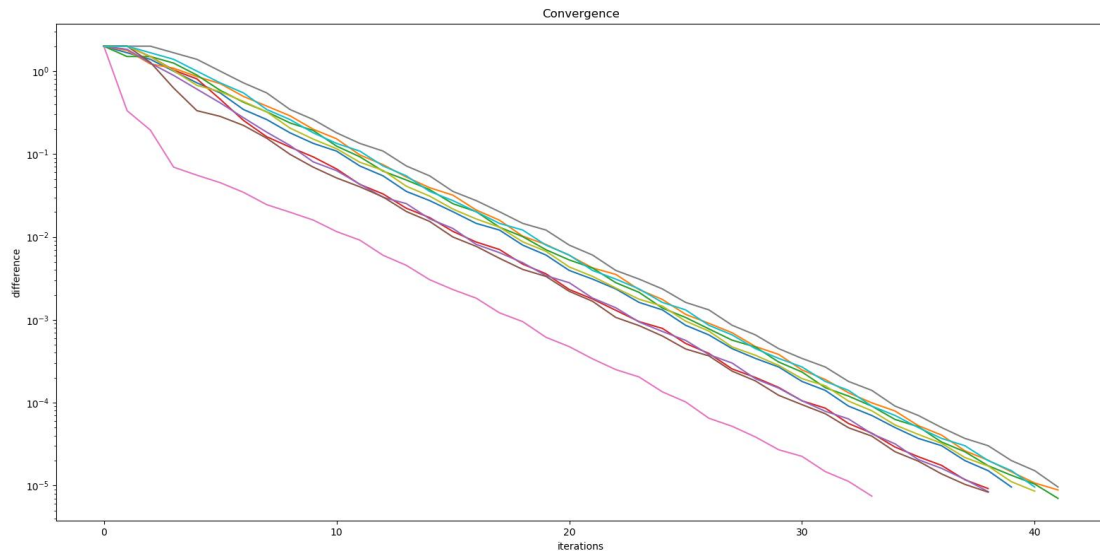
(1). 10 different initial vectors (named as v0~v9)

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2). their plots of convergence

首先，我將 10 個 initial vector $v_0 \sim v_9$ 的收斂圖 plot 出來，又因為如此只看圖無法了解真正收斂的正確數字方便比較，因此，我利用 `print()` 函數將 $v_0 \sim v_9$ 收斂的數字顯示出來，並顯示最後收斂時的 probability matrix，可發現十個 initial vector 不管收斂的 K 值為何，最後的 probability 皆相同。



```
v0: when k = 38, the difference will less than 1e-5
v1: when k = 40, the difference will less than 1e-5
v2: when k = 40, the difference will less than 1e-5
v3: when k = 37, the difference will less than 1e-5
v4: when k = 37, the difference will less than 1e-5
v5: when k = 37, the difference will less than 1e-5
v6: when k = 32, the difference will less than 1e-5
v7: when k = 40, the difference will less than 1e-5
v8: when k = 39, the difference will less than 1e-5
v9: when k = 39, the difference will less than 1e-5
```

收斂時的 probability matrix (十個 initial vector 皆相同)

```
v9:
0.2410581340962837
0.14304852767481094
0.04768226001093051
0.0
0.04768226001093051
0.03708582278325724
0.015893555791381124
0.188081034338855
0.04238364282533924
0.23708476246821117
```

```
v5:
0.2410615573858945
0.14304569253937788
0.047681517412940834
0.0
0.047681517412940834
0.037086393788401034
0.015894311391392933
0.18807854484852837
0.04238444358227267
0.2370860216382504
```

```
v7:
0.2410581340962837
0.14304852767481094
0.04768226001093051
0.0
0.04768226001093051
0.03708582278325724
0.015893555791381124
0.188081034338855
0.04238364282533924
0.23708476246821117
```

(3). a discussion about their differences

首先，我發現 10 個不同 initial vector 都會在接近 $k=40$ 次方附近發生收斂的情形，差別則在於從不同的 initial vector 不斷乘上 matrix A 後，會產生不同的 probability matrix(與此 initial vector 每次可到達哪一些 nodes 有關)，因此就會產生不同的收斂效果—有的 node 不斷走下去，如果很快地就只能到達特定某幾個或某一 node 時，就可以很快達成收斂(如 initial vector v6)；反之，如果需要 browse 更多次數才能將能到達的 node 減少，就會收斂較慢(如 initial vector v7)。但可以保證的是， $A^k v$ 在最慢 $k=40$ 以前，這個 difference 就會如同我們所計算般小於 10^{-5} ，達到收斂的效果。

另一方面，在 v0~v9 的收斂下，我將他們分別的 probability matrix print 出來，發現不管 k 值是否相同，這幾個 initial vector 收斂到的 probability matrix 皆相同(近似於)。

(d). methods to fix the last problem

首先，我將最後的 probability matrix 中各個 probabilities print 出來，以 v0 為例，他最後 probability 相加結果近似於 1(0.99999...94)，但並不符合 probability condition 相加為 1 的條件，因此，就需要作出一些調整。

```
0.2410581340962837
0.14304852767481094
0.04768226001093051
0.0
0.04768226001093051
0.03708582278325724
0.015893555791381124
0.188081034338855
0.04238364282533924
0.23708476246821117
sum of ten probabbilities:0.9999999999999994
```

首先，我們可以利用一個變數 sum 紀錄 probability matrix 相加後的結果，當相加完成後我們可以利用 $\text{abs}(1-\text{sum})$ 來計算 sum 與我們要求值 1 的 difference，因為這個誤差通常都會很小很小(以 v0 為例，此誤差大概只有 10^{-10} 左右)，因此我們可以：

1. 將這個誤差加到 probability matrix 的其中一個 probability 中，挑機率大的為佳(對其影響較小)
2. 或是有邏輯嚴謹一點，依據 10 個 probabilities 的比例原則，將 difference 依比例分配給每個 probability，重新調整其機率就可以將 sum 透過調整使其為 1。