Sebastian Łągiewski nr.indeksu 226173

Struktury Danych i Złożoność Obliczeniowa

Zadanie projektowe nr 3

Implementacja i analiza efektywności algorytmów optymalnych o pseudowielomianowej złożoności obliczeniowej dla wybranych problemów kombinatorycznych

1. Wstęp

Dyskretny problem plecakowy

a. Algorytm zachłanny

W algorytmie tym rozpatrujemy dwa warianty, według których przedmioty sortowane są w kolejce priorytetowej: ich wartość oraz wartość przypadającą na jednostkę rozmiaru. Po umieszczeniu przedmiotów w kolejce pobieramy elementy i dodajemy do podzbioru, który będzie rozwiązaniem dopóki plecak nie będzie maksymalnie zapełniony.

Na złożoność czasową algorytmu największy wpływ ma sortowanie elementów, czyli ich dodawanie do kolejki priorytetowej oraz zdejmowanie elementów z kolejki. Obie operacje mają złożoność O(logN) – każdą z nich wykonujemy N razy. Złożoność pesymistyczna algorytmu wynosi więc O(N*logN), gdzie N to ilość przedmiotów.

b. Przegląd zupełny

Rozpatrujemy tutaj wszystkie możliwe podzbiory przedmiotów i dla każdego z nich sprawdzamy czy jest on rozwiązaniem najlepszym. Wszystkich możliwych pozdbiorów zbioru N-elementowego jest 2^N - jest to ilość iteracji głównej pętli algorytmu. W środku niej znajdują się trzy pętle - jedna odpowiedzialna jest za oznaczanie, które przedmioty w danym obiegu pętli będą brane pod uwagę; druga oblicza sumę wartości oraz wag przedmiotów wchodzących w skład danego podzbioru; trzecia przepisuje numery przedmiotów z podzbioru jeśli jest on rozwiązaniem do tej pory najlepszym. Ich wykonanie w najgorszym przypadku powtórzy się N razy, lecz druga pętla będzie miała największy wpływ na czasy wykonania się algorytmu

Złożoność czasowa wynosi więc $O(N*2^N)$.

Asymetryczny problem komiwojażera

a. Algorytm zachłanny

W algorytmie tym obieramy miasto startowe (w tym przypadku 0), a następnie przemieszczamy się do miasta najbliżej oddalonego. Postępujemy tak dopóki wszystkie miasta nie zostaną odwiedzone. Na końcu powracamy do miasta startowego.

Złozoność obliczeniowa algorytmu wynosi w przybliżeniu $O(N^2)$ – odwiedzamy N miast, dla każdego badamy wychodące z niego drogi w poszukiwaniu najkrótszej .

b. Przegląd zupełny

Badamy permutacje kolejności odwiedzania kolejnych miast, następnie wybieramy tę, dla której trasa była najkrótsza.

Główna pętla algorytmu wykonuje się (N-1)! razy (nie ma znaczenia od którego wierzchołka zaczniemy przegląd). W głównej pętli znajduje się pętla użyta do sumowania drogi danej permutacji – wykonuje się ona N razy.

Złożoność obliczeniowa tego algorytmu wynosi więc O(N!).

2. Plan eksperymentu

- Pomiar czasu wykonywany był za pomocą QueryPerformanceTimer.
- Do reprezentacji odległości między miastami użyto macierzy sąsiedztwa
- Każdy z algorytmów wykonywany był 100 razy, wyniki uśredniono.

Dyskretny problem plecakowy

Wagi przedmiotów generowane są w taki sposób, by ich łączna waga była większa niż pojemność plecaka. Minimalna waga przedmiotu to:

1 + rozmiar_plecaka/ilość_przedmiotów

Górny zakres wagi przedmiotu to:

rozmiar_plecaka - rozmiar_plecaka/(2* ilość_przedmiotów)

Ilości przedmiotów zostały dobrane tak by czasy wykonia się algorytmów były łatwe w prezentacji.

Dla przeglądu zupełnego liczba przedmiotów to: *20, 22, 24, 26, 28*; zaś dla algorytmu zachłannego: *200 000, 400 000, 600 000, 800 000, 1 000 000.*

Asymetryczny problem komiwojażera

Mapa miast została zaimplementowana jako macierz sąsiedztw – graf pełny, skierowany, bez pętli.

Odległości między miastami losowane są z zakresu <1 ,2*ilość_miast).

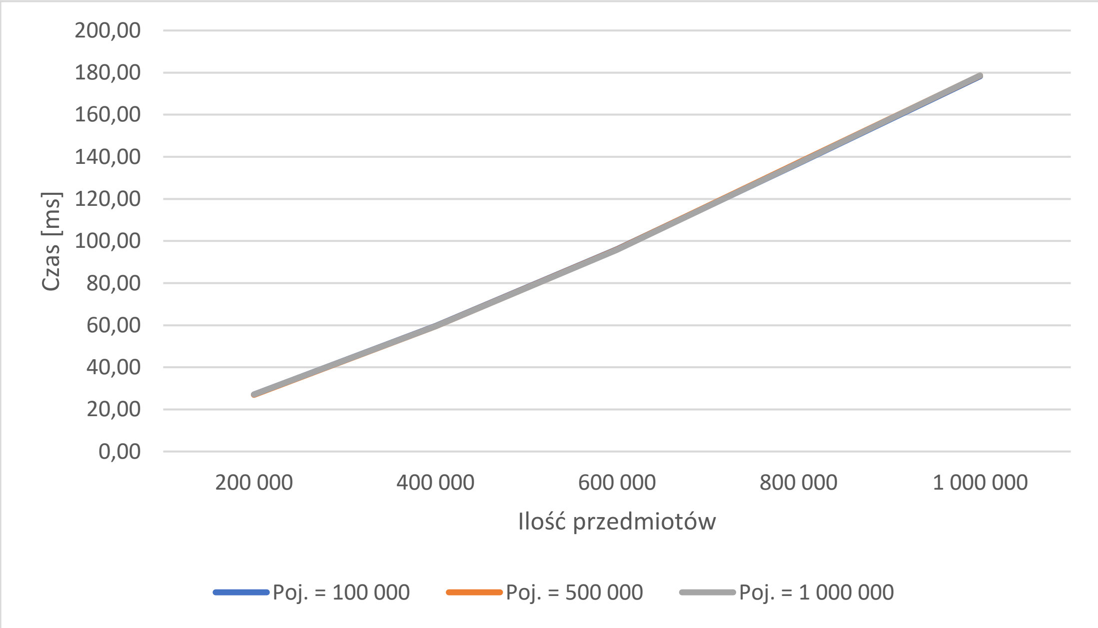
Dla przeglądu zupełnego liczba miast to: *10, 11, 12, 13, 14, 15; zaś dla algorytmu zachłannego: 10 000, 15 000, 20 000, 25 000, 30 000.*

3. Wyniki

- ## Dyskretny problem plecakowy

a. Algorytm zachłanny

i. Sortowanie według wartości przedmiotów

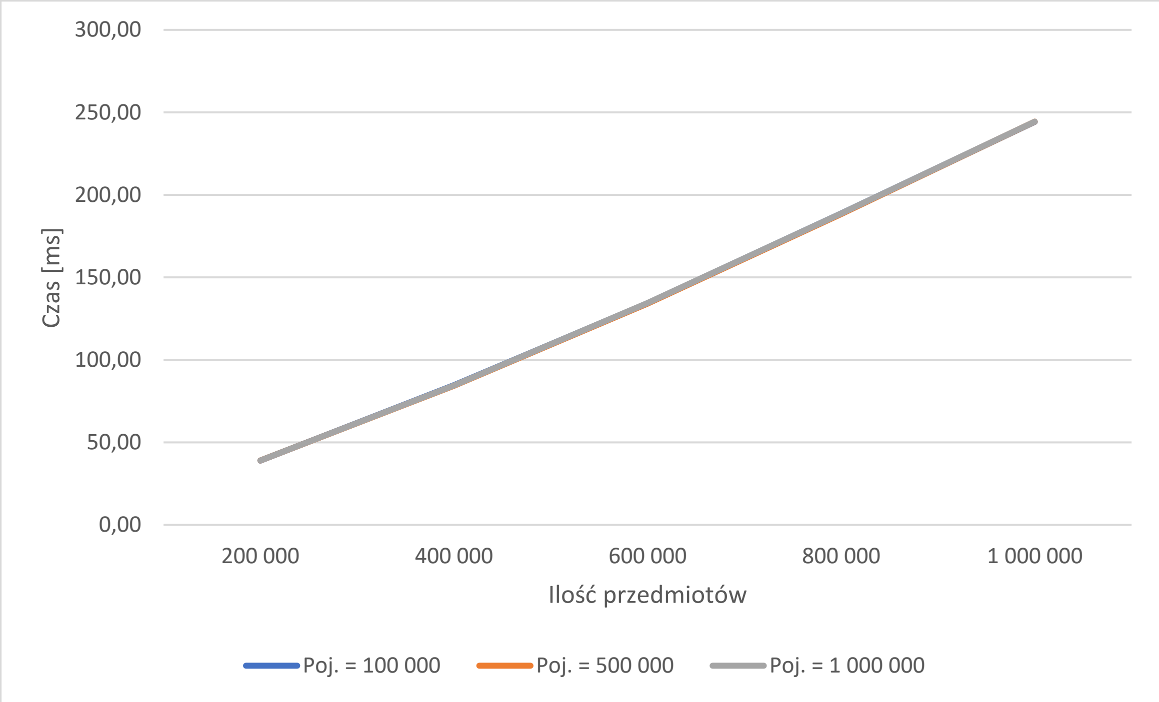


Wykres 1. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka przy sortowaniu według wartości przedmiotów.

	Pojemność plecaka		
	100 000	500 000	1 000 000
Il. przedmiotów	Czas [ms]		
200 000	27,06	26,91	27,12
400 000	59,60	59,44	59,45
600 000	96,04	96,00	95,86
800 000	136,81	137,34	136,89
1 000 000	178,26	178,56	178,64

Tabela 1. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka przy sortowaniu według wartości przedmiotów.

ii. Sortowanie według v/s

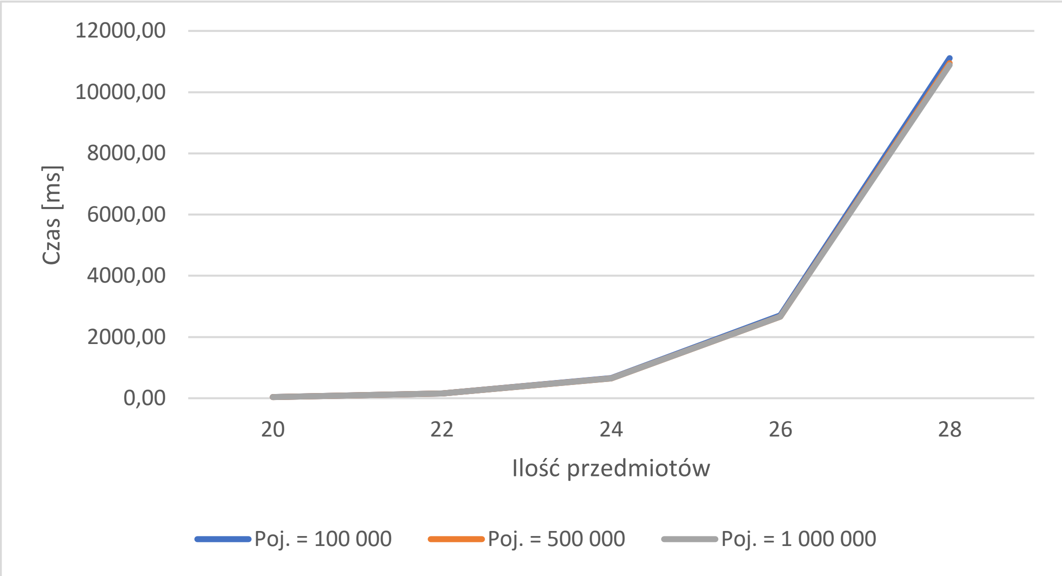


Wykres 2. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka przy sortowaniu według stosunku wartości przedmiotu do jego rozmiaru.

	Pojemność plecaka		
	100 000	500 000	1 000 000
Il. przedmiotów	Czas [ms]		
200 000	38,95	39,02	39,02
400 000	84,70	84,29	84,57
600 000	134,33	134,15	134,44
800 000	188,84	188,33	188,73
1 000 000	244,28	244,39	244,40

Tabela 2. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka przy sortowaniu według stosunku wartości przedmiotu do jego rozmiaru.

b. Przegląd zupełny



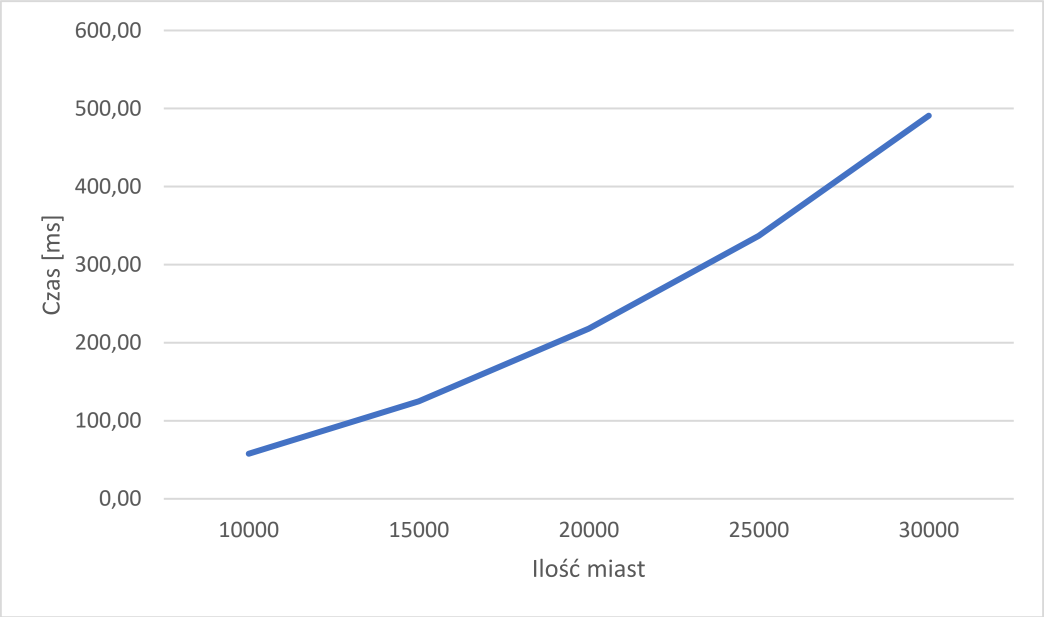
Wykres 3. Zależność czasu wykonania się algorytmu przeglądu zupełnego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka.

	Pojemność plecaka		
	100 000	500 000	1 000 000
Il. przedmiotów	Czas [ms]		
20	38,58	37,51	37,38
22	159,52	158,50	156,39
24	660,11	651,39	651,49
26	2709,52	2670,45	2664,19
28	11110,10	10945,20	10886,10

Tabela 3. Zależność czasu wykonania się przeglądu zupełnego od ilości badanych przedmiotów oraz pojemności plecaka.

- ## Asymetryczny problem komiwojażera

a. Algorytm zachłanny

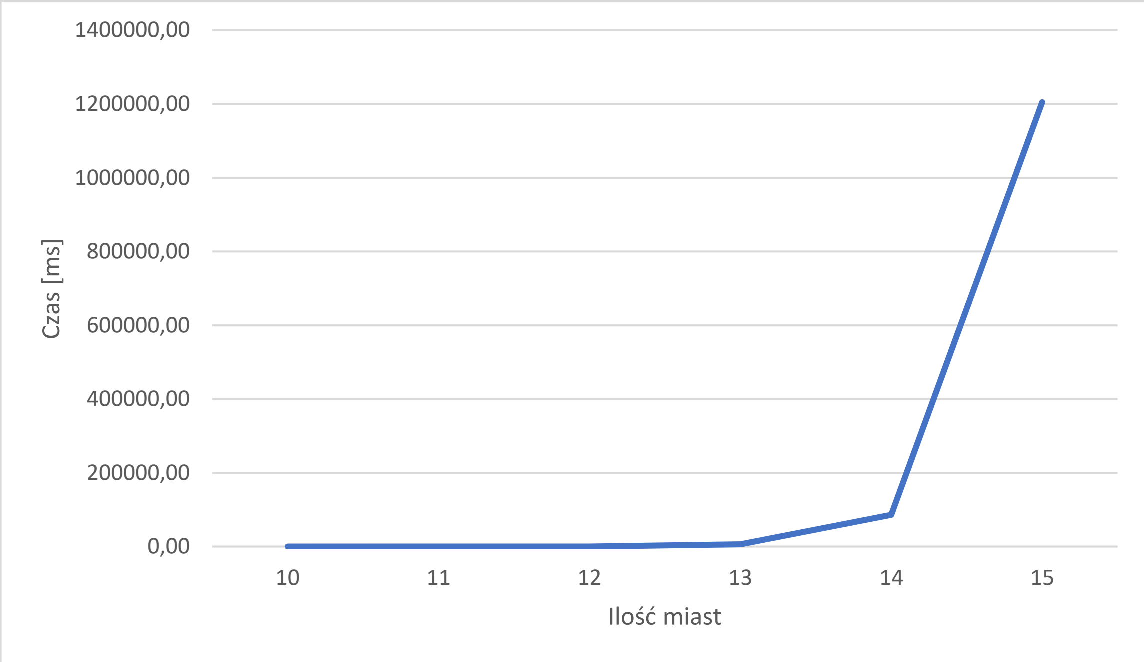


Wykres 4. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych miast.

Il. miast	Czas [ms]
10000	57,76
15000	124,90
20000	218,06
25000	336,84
30000	490,83

Tabela 4. Zależność czasu wykonania się algorytmu zachłannego od ilości badanych miast.

b. Przegląd zupełny



Wykres 5. Zależność czasu wykonania przeglądu zupełnego od ilości badanych miast.

Il. miast	Czas [ms]
10	3,87
11	40,38
12	477,06
13	6087,48
14	85653,10
15	1204870,00

Tabela 5. Zależność czasu wykonania przeglądu zupełnego od ilości badanych miast.

4. Wnioski

Wyniki otrzymane w trakcie badania poszczególnych algorytmów zgadzają się z teoretycznymi założeniami przedstawionymi na początku sprawozdania.

Dla problemu plecakowego i algorytmu zachłannego czasy wykonania dla sortowania według stosunku wartości do rozmiaru są dłuższe, niż dla sortowania według wartości. Ma to związek z operacją obliczania tegoż współczynnika – jest to dzielenie dwóch liczb. Mimo to, kosztem nieco słabszej wydajności zyskujemy znacznie bardziej optymalne wyniki.
Przegląd zupełny gwarantuje nam, iż znalezione rozwiązanie będzie tym optymalnym, jednak ze względu na swoją charakterystykę, użycie tego algorytmu jest niewykonalne dla większej ilości przedmiotów. Wyznaczenie rozwiązania dla 34 przedmiotów zajmuje około 12 minut, co świadczy o niskiej wydajności tegoż algorytmu. Rozmiary plecaka mają znikomy wpływ na czasy wykonania algorytmów. Jest to związane z powiązaniem wag przedmiotów z rozmiarem plecaka. Wagi są wprost proporcjonalne do jego rozmiaru by zapewnić warunek sumarycznej wagi przedmiotów większej niż rozmiar plecaka.

Dla problemu komiwojażera algorytm zachłanny zapewnia znacznie krótszy czas wykonania niż przegląd zupełny, jednak nie gwarantuje on rozwiązania optymalnego – często wynik jest znacznie gorszy niż dla przeglądu zupełnego. Jego wydajność dyskwalifikuje go, gdy ilość miast jest większa niż ok. 15. Dla 20 miast algorytm powinien wykonać się w około 25 945 dni (71 lat), więc mimo zastosowania komputerów o wysokiej wydajności, czas w jakim otrzymamy wynik może być dłuższy niż czas żywotności podzespołów komputera.