Зам: $f: X \to \mathbb{C}$ — компл. лин. ф-ционал

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$, где $u: X \to \mathbb{R}$ — вещ. лин. ф-ционал

$$z = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Re}(iz)$$

Обратно: $u: X \to \mathbb{R}$ — вещ. л. ф. $f(x) = u(x) - iu(ix)$ — компл. лин. ф.

Т.В.: $f \in X^* \iff \exists\, u: X \to \mathbb{R}$ — непр. л. ф. !

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$

Теорема: (о продолж. ф-нала, подч. полуад. ф-лу) $M \neq X$

M — подпр-во X $\quad p: X \to \mathbb{R}$: 1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

2) $p(tx) = t\,p(x)$ $\quad t \geq 0$

$f: M \to \mathbb{R}$ — линейн, $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in M$

$\Rightarrow$ $\exists\, \Lambda: X \to \mathbb{R}$ — лин. ! $\quad \forall x \in M$ $\quad f(x) = \Lambda(x)$

и $\forall x \in X$ $\quad -p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x)$

д-во: $M \neq X$ $\quad x_1 \in X \setminus M$ $\quad M_1 = \{x + t x_1 \mid t \in \mathbb{R},\ x \in M\}$

M_1 — подпр-во X

рассм. $f(x)+f(y) \underbrace{=} f(x+y) \le p(x+y) = p(x-x_1+x_1+y) \underbrace{\le} p(x-x_1)+p(x_1+y)$

$$\Rightarrow \quad f(x)-p(x-x_1) \le p(y+x_1)-f(y) \qquad \forall x,y \in M$$

$$\alpha = \sup_{x\in M} f(x)-p(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x)-\alpha \le p(x-x_1) \\ f(y)+\alpha \le p(y+x_1) \end{array}\right] \ \forall x \in M$$

рассм. $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ $\qquad f_1(x+tx_1) = f(x)+t\alpha$

f_1 — л.ф. $\qquad f_1(x)=f(x) \quad \forall x \in M$

рассм. $f(x)-\alpha \le p(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad f(t^{-1}x)-\alpha \le p(t^{-1}x-x_1) \ \Big| * t$

$\underbrace{t>0}$ $\qquad x = t^{-1}x \qquad t f(t^{-1}x) - \alpha t \le t\, p(t^{-1}x-x_1)$

$$\Rightarrow \quad f(x)-\alpha t \le p(x-tx_1) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f_1(x-tx_1) \le p(x-tx_1)}$$

аналогично ! $\quad \underbrace{f_1(x+tx_1) \le p(x+tx_1)}$

Т.О. $\quad f_1 \le p$ на M_1

используем т. Хаусдорфова:

$\mathcal{P}$ — мн-во всех (M', f') :

1) M' — подпр-во X, $M' \supset M$
2) $f' : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ — л.ф.
3) $f' = f$ на M
4) $f' \leq p$ на M'

д-но, что $\mathcal{P} \neq \varnothing$

введем част. порядок: $(M', f') \leq (M'', f'')$, если:
1) $M' \subset M''$ 2) $f'' = f'$ на M'

по принц. макс. Хаусдорфа: $\exists\ \Omega$ — макс. лин. упор. в $\mathcal{P}$

рассм. Φ — все такие M', что $(M', f') \in \Omega$

$\Rightarrow \Phi$ — лин. упор. по отнош. включ.

$\Rightarrow \hat{M} = \bigcup\limits_{M' \in \Phi} M'$ — подпр-во X

определим. $\Lambda : \hat{M} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} x \in \hat{M} \arrow[r, Rightarrow] & x \in M' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \Lambda x = f'(x) \\ & (M', f') \in \Omega \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Кор-ть очевидна, линейность — тоже, $\Lambda \le p$ — тоже, $\Lambda = f$ на M

т.о. $\Lambda : \hat{M} \to \mathbb{R}$ — лин. ф. : $\Lambda \le p$ на $\hat{M}$, $\lambda = f$ на M

(!) $\hat{M} = X$ $\exists$ противное $\hat{M} \ne X$ повторим конструкцию M_1

?!! с максимал. Ω т.о. $\hat{M} = X$

$\forall x \in X$ $\lambda x \le px$ рассм. $-p(-x) \le -\lambda(-x) = \lambda x$ ■

$$\Downarrow$$

$$-\lambda x \ge -px$$

<u>Теорема</u>: (о прод. ф-ла, подчин. полунорме) Хана — Банаха

X — в.п. $M \le X$ p — полунорма на X

$f : M \to \mathbb{C}$ — лин. ф. : $\forall x \in M$ $|f(x)| \le p(x)$

$\Rightarrow$ $\exists \Lambda : X \to \mathbb{C}$ — л.ф : 1) $\Lambda x = f(x)$ $\forall x \in M$

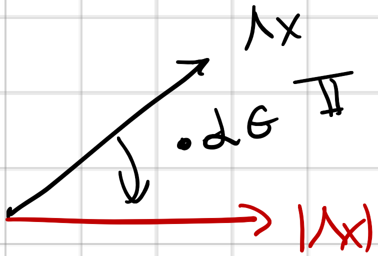
2) $|\Lambda x| \le p(x)$ $\forall x \in X$

Д-во в вещ. случае работает предыдущая теорема

рассм. $u = \operatorname{Re} f$ — л. ф. на M $\Big|$ ⇒ по пред. т-ме
$|u(x)| \le |f(x)| \le p(x)$ $\Big|$ $\exists\, U$ — продолж. на X

рассм. $\Lambda x = u(x) - i u(ix)$

легко заметить, что $\Lambda = f$ на M



берем $x \in X \Rightarrow \Lambda x \in \mathbb{C}$ $\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{T} : \quad \alpha \Lambda x = |\Lambda x|$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{|\Lambda x|} = \alpha \Lambda x = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\Lambda(\alpha x)} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\alpha x) = u(\alpha x) \le p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$$

$$\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$$

∎

<u>Следствие</u>: X — норм. пр-во $\Rightarrow$ $\forall x_0 \in X$ $\quad \exists\, \Lambda \in X^*$:

1) $\Lambda x_0 = \|x_0\|$

2) $\forall x \in X \quad |\Lambda x| \le \|x\|$

<u>д-во</u>: 1) $x_0 = 0$ $\quad$ берем $\Lambda \equiv 0$

2) $x_0 \neq 0$ $\quad$ рассм. $\quad p(x) = \|x\|$ $\quad M = \operatorname{span}\{x_0\}$

Опред. $f : M \to \mathbb{C}$ $f(\lambda x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|$

$\Rightarrow$ по т. о продол. $\exists\, \Lambda : X \to \mathbb{C}$: 1) $\Lambda x_0 = \|x_0\|$

2) $\forall x \in X$ $|\Lambda x| \leq p(x) = \|x\|$ ■

Теорема: X – т. в. п. $A \cap B = \varnothing$ $A, B \subset X$, $A, B \neq \varnothing$

1) A – откр. $\Rightarrow$ $\exists\, \Lambda \in X^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$: $\forall x \in A$, $y \in B$

$$\mathrm{Re}(\Lambda x) < \gamma \leq \mathrm{Re}(\Lambda y)$$

2) A – комп., B – замк. + X – лок. выпукл.

$\Rightarrow$ $\exists\, \Lambda \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(\Lambda x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}(\Lambda y)$

$\forall x \in A$, $y \in B$

Следствие: X – лок. выпукло $\Rightarrow$ X^* – разделяет точки

<u>д-во</u>: $x_1 \neq x_2$ $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$

<u>д-во</u>: $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\Lambda = \Lambda$ огранич. только вещ. случаем

1) А-стир. фиксир. $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ рассм. $x_0 = b_0 - a_0$, $C = A - B + x_0$

$\Rightarrow$ C – окр. 0, выпукла

рассм. $p = \mu_C$ – ф-нал Минковского для C

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p(x+y) \le p(x) + p(y) \\ p(tx) = t\,p(x) \quad t \geq 0 \end{array}\right]$$ т.е. работает 1-ая т-ма

$A \cap B = \emptyset$, $x_0 \notin C \Rightarrow p(x_0) \geq 1$

рассм: $M = \operatorname{span}\{x_0\}$ и $f: M \to \mathbb{R}$ $f(tx_0) = t$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{t \geq 0} \Rightarrow & f(tx_0) = t \le t \cdot p(x_0) = p(tx_0) \\ \underline{t < 0} \Rightarrow & f(tx_0) = t < 0 \le p(tx_0) \end{array}\right| \Rightarrow f(x) \le p(x) \quad \forall x \in M$$

$\Rightarrow$ по 1-й т. $\exists\, \Lambda: X \to \mathbb{R}$ – л. ф. :

1) $\Lambda x = f x \quad \forall x \in M$

2) $-p(-x) \le \Lambda x \le p(x) \quad \forall x \in X$

рассм. $\underline{\Lambda x,\ x \in C}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \Lambda x \le p(x) \le 1 & \forall x \in C \\ \Rightarrow \Lambda x \geq -1 & \forall x \in -C \end{array}\right| \Rightarrow |\Lambda x| \le 1$$

$\forall x \in \underset{\text{окр. } 0 \text{ в } X}{C \cap (-C)}$

т.о. λ — огранич. в нек. окр 0 $\Rightarrow$ $\lambda : X \to \mathbb{R}$ — непр. $\Rightarrow$ $\lambda \in X^*$

расс $a \in A$, $b \in B$ $\quad \lambda a - \lambda b + \cancel{1} = \lambda(\underbrace{a-b+x_0}_{\in C}) \le p(\underbrace{a-b+x_0}_{\in C}) < \cancel{1}$

т.к. C — откр.

$\Rightarrow \lambda a < \lambda b \quad \forall a \in A,\ b \in B$

$\Rightarrow \lambda(A)$ — левее $\lambda(B)$ $\Rightarrow$ по акс. Дедекинда $\quad \exists \gamma \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ b \in B$

$$\lambda a \cancel{\le} \gamma \le \lambda b$$

$<$

т.к. $\lambda(A)$ — откр в $\mathbb{R}$

2) A — комп., B — замк. $\Rightarrow$ $\exists V$ — вып. окр 0 :

$$(A+V) \cap (B+V) = \varnothing$$

$$\Downarrow$$

$$(A+V) \cap B = \varnothing$$

$\left.\begin{array}{l} A+V \text{ — откр} \\ B \end{array}\right\} \Rightarrow$ применим п. 1) $\quad \exists \lambda \in X^*$:

1) $\lambda(A+V)$ — левее $\lambda(B)$

2) $\lambda(A+V)$ — выпукло, откр.

$\Lambda(A) \subset \Lambda(A+B)$ — левее $\Lambda(B)$ и все на $\mathbb{R}$

комп. вып. откр замк.

Очевидно

■

Теорема: X — лок. выпукл. т.в.п. $M \leq X$ $x_0 \in X$, $x_0 \notin \overline{M}$

$\Rightarrow \exists \Lambda \in X^*$: 1) $\Lambda x_0 = 1$

2) $\forall x \in M$ $\Lambda x = 0$

Д-во: $A = \{x_0\}$ — комп.
$B = \overline{M}$ — замк. $\Big| \Rightarrow \exists \Lambda \in X^*$: $\Lambda x_0 \notin \Lambda(M)$

$\Rightarrow \Lambda(M)$ — подпр-во $\mathbb{R}$, но $\Lambda(M) \subsetneq \mathbb{R} \Rightarrow \Lambda(M) = \{0\}$

т.к. $\Lambda x_0 \notin \Lambda(M) \Rightarrow \Lambda x_0 \neq 0$

Зам: **Задача:** д-ть, что $x_0 \in \overline{M}$

Стандарт. решение: д-ть, что $\forall \Lambda \in X^*$: $[\Lambda x = 0 \ \forall x \in M \Rightarrow \Lambda x_0 = 0]$

например. f можно прибл. посл-тью мн-нов, т.е. $f \in \overline{\mathbb{R}[x]}$