Оглавление

-1.1 Самый важный случай

Рассмотрим конечномерное пространство $\mathbb{C}^d$ и зафиксируем $p \in [1, +\infty)$. Можем определить две нормы:

$$||x||_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ||x||_\infty = \max_i |x_i|$$

0 Вступление

Во всем конспекте F обозначает поле скаляров, все векторные пространства будем смотреть только над ним. В качестве F мы берем только $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$ с естественными топологиями на них.

Определение. Топологическое пространство X являющееся векторным пространством называется топологическим векторным пространством (ТВП), если

1. Топология удовлетворяет T_1 (синглетоны замкнуты)

2. Сложение и умножение на скаляр непрерывны

Замечание.

1. Сдвиг на любой вектор $u \mapsto u + v$ и растяжение на любой скаляр $\alpha \neq 0 :\ u \mapsto \alpha u$ являются гомеоморфизмами.

2. Топология для такого X всегда инвариантна относительно сдвигов.

3. Следовательно, полностью определяется локальной базой.

Это основное определение, помимо него напомним еще определений:

Определение. Пусть X – векторное пространство и $A \subseteq X$

1. Если $0 \in A$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha A + \beta A \subseteq A$, то A называется **подпространством** X; обозначается $A \leqslant X$.

2. Если $\forall t \in (0, 1)$ выполняется $tA + (1 - t)A \subseteq A$, то A называется **выпуклым**.

3. Если $\forall \alpha \in F :\ |\alpha| \leqslant 1$ выполняется $\alpha A \subseteq A$, то A называется **уравновешенным**.

Замечание. Подпространства являются выпуклыми уравновешенными множествами.

Определение (Типы пространств). Пусть X – ТВП, говорим, что X

(A) **локально выпукло**, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.

(B) **локально ограничено**, если существует ограниченная окрестность нуля.

(C) **локально компактно**, если существует предкомпактная окрестность нуля.

(D) **метризуемо**, если его топология метризуема.

(F) является **F-пространством**, если топология индуцируется **полной инвариантной** метрикой.

(G) является **пространством Фреше**, если оно локально-выпуклое F-пространство

(E) **нормируемо**, если существует норма, индуцирующая топологию X

(F) обладает свойством **Гейне-Бореля**, если

$$(\text{ограниченное} \wedge \text{замкнутое} \Rightarrow \text{компактное})$$

Небольшой обзор результатов касающихся затронутых выше понятий

Теорема 0.1 (Воспоминания о будущем).

1. Локально ограничено $\Rightarrow$ обладает счетной локальной базой.
2. Метризуемо $\Leftrightarrow$ обладает счетной локальной базой.
3. Нормируемо $\Leftrightarrow$ (локально выпукло $\wedge$ локально ограничено)
4. Конечномерно $\Leftrightarrow$ локально компактно
5. Обладает свйоством Гейне-Бореля $\Rightarrow$ конечномерно

0.1 Про ограниченные множества

Существует два различных определения ограниченных множеств, в которых легко запутаться, если речь идет о метризуемых ТВП:

(X, d) – **метрическое пространство**

$E \subset X$ называется ограниченным, если $\exists M > 0$:

$$\forall x, y \in E \;\; d(x, y) < M$$

X – **ТВП**

$E \subset X$ называется ограниченным, если

$$\forall U - \text{окр.}0 \; \exists t_0 > 0 : \;\forall t > t_0$$

$$E \subseteq tU$$

Лемма 0.2. Если X нормируемое пространство и $d(x, y) = ||x - y||$, то эти понятия совпадают. В ином случае они могут отличаться во всех нетривиальных случаях.

Доказательство. Почему они отличаются в других случаях: достаточно взять новую инвариантную метрику, индуцирующую ту же самую топологию $d' = d/(1+d)$. В ней всё X будет ограниченным.

Пусть $(X, ||\cdot||)$ – нормированное пространство и $d(x,y) = ||x-y||$. За B_R будем обозначать шар радиуса R в нуле. Понятно, что достаточно показать, что B_1 – топологически ограничен (Если E метрически ограниченно $\Rightarrow E \subseteq B_R = RB_1$). Так как топология X индуцируется метрикой, базой в точке выступают шары, а значит какой-то $B_\epsilon = \epsilon B_1$ содержится в U.

Пусть теперь E топологически ограничено, предположим, что оно не метрически ограничено. То есть, существует $\{x_n\} \subset E$ такая, что $||x_n|| \to +\infty$. Тогда в качестве окрестности нуля попробуем взять B_1, понятно, что $\sup_{x \in tB_1} ||x|| = t$, а значит, не найдется t_0 подходящего под условия. ■

0.2 Про полунормы

0.3 Пространства $C^\infty(\Omega), \mathcal{D}_K$

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество. С мультиииндексом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ свяжем дифференциальный оператор

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Порядком α назовем число $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и доопределим $D^\alpha f = f$, если $|\alpha| = 0$. Пусть $K \subseteq \Omega$ – компакт. Определим множество

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} f \subseteq K\}$$

Представим $\Omega = \cup K_i$, где K_i – компакты и $K_i \subset \operatorname{Int} K_{i+1}$

1 О полноте

Под $\operatorname{Hom}(X,Y)$ обозначается множество всех линенйных отображений $X \to Y$, под $\mathbf{c}\operatorname{Hom}(X,Y)$ множество тех из них, которые непрерывны в тополгиях X, Y.

Теорема 1.1 (Бэра о полноте). В полных метрических пространствах и локально компактных хаусдорфовых пространствах

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{открытое, всюду плотное}) \quad \text{всюду плотно}$$

1.1 Теорема Банаха-Штейнгауза

Сначала, введем определение

Определение. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(X,Y)$. Оно называется равностепенно непрерывным, если

$$\text{для любой } W \text{ – окр. 0 в Y существует } V \text{ – окр. 0 в X: } \Gamma(V) \subseteq W$$

Как мы увидим ниже, равностепенно-непрерывные семейства переводят ограниченные множества в ограниченные. Теорема Банаха-Штейнгауза же скажет, что если точек, орбиты которых под действием Γ ограниченны *много*, то Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(X,Y)$ – равностепенно непрерывно, а $E \subseteq X$ ограниченно. Тогда $\Gamma(E)$ суть ограниченное множество в Y.

Доказательство. Рассмотрим W – окрестность 0 в Y, выберем V – окрестность 0 в X из определения. E – ограниченно $\Rightarrow$ имеем $E \subseteq tV$ для больших t. Для них же:

$$\Gamma(E) \subseteq \Gamma(tV) = t\Gamma(V) \subseteq tW$$

■

Теорема 1.3 (Банаха-Штейнгауза). Пусть $\Gamma \subseteq \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$. Предположим, что множество $B = \{x \in X \ : \ \Gamma(x) - \text{ограниченно}\}$ имеет вторую категорию в X.

Тогда $B = X$ и Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Пусть W – уравновешенная окрестность 0 в Y, будем искать такую V в X, что $\Gamma(V) \subseteq W$. Для этого найдем такую U – уравновешенная окрестность 0 в Y, что $\overline{U} + \overline{U} \subseteq W$, положим

$$E = \cap_{\Lambda\in\Gamma}\Lambda^{-1}\big(\overline{U}\big).$$

$$x \in B \Rightarrow \Gamma(x) \in nU \text{ для больших } n \Rightarrow \frac{1}{n}x \in E \text{ для таких же } n$$

Тогда заметим, что $B \subseteq \cup_n nE$. Значит, какой-то из nE – множество второй категории. Заметив, что $x \mapsto nx$ это гомеоморфизм X получаем:

$$\left.\begin{array}{l} E - \text{множество второй категории} \\ E - \text{замкнуто так как все } \Lambda \in \Gamma \text{ непрерывны} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{в } E \text{ есть внутренняя точка } x_0$$

Значит, в множестве $x_0 - E$ содержится окрестность нуля V, причем:

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subseteq \overline{U} - \overline{U} \subseteq W$$

■

1.2 Полезные частные случаи

Теорема 1.4. Пусть X – F-пространство и $\Gamma \subseteq \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$ и $\forall x \in X$ $\Gamma(x)$ ограниченно в Y. Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. По теореме Бэра, F-пространства являются множествами второй категории в себе. ■

Теорема 1.5. Пусть X – банахово, Y – нормируемо, причем $\sup_{\Lambda\in\Gamma}||\Lambda x|| < \infty$. Тогда существует такой $M > 0$, что

$$||\Lambda x|| \leqslant M||x|| \quad \forall x \in X \ \forall \Lambda \in \Gamma$$

Доказательство. Применим предыдущую теорему к метрикам, порожденным нормами. В них ограниченность эквивалентна метрической. ■

Теорема 1.6. Пусть $\Lambda_n \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$. Определим $C = \{x \in X \ : \ \Lambda_n x$ – последовательность Коши$\}$, $L = \{x \in X \ : \ \Lambda_n x \to \Lambda x\}$. Тогда

1. Если C второй категории в X, то $C = X$
2. Если L второй категории в X и Y – F-пространство, то $L = X$ и Λ – непрерывно.

Доказательство. 1. По Б-Ш Λ_n – равностепенно непрерывна и

■

1.3 Теорема об открытом отображении

Пусть $f : S \to T$ – отображение (S, T – топологические, f не обязательно непрерывна) и $p \in S$. Говорят, что f открыта в p, если для любой V – окрестности p образ $f(V)$ содержит окрестность $f(p)$.

Теорема 1.7. Пусть X – F-пространство, $\Lambda \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$, причем $\Lambda(X)$ второй категории. Тогда
$\Lambda(X) = Y$, $\quad \Lambda$ открыто, $\quad Y$ - F-пространство

Доказательство. Заметим, что из второго следует первое, поскольку Λ это подпространство. Докажем второе. Пусть V – окрестность 0 в X, мы хотим проверить, что $\Lambda(V)$ содержит окрестность 0 в Y. Заведем полную инвариантную метрику d на X. Определим

$$V_n = \left\{x \mid d(x,0) < \frac{r}{2^n}\right\}$$

где r такой маленький, что $V_0 \subset V$ ■

1.4 Теорема о замкнутом графике

Под графиком отображения $f : X \to Y$ имеется ввиду множество $\{(x, f(x))\}_{x\in X} \subseteq X \times Y$. Для непрерывных отображений в хаусдорфовы пространства график всегда замкнут, мы будем пытаться выяснить про какие-то факты, похожие на это. Для начала обоснуем факт про замкнутость графика непрерывной функции:

Замечание. Пусть $f : X \to Y$ непрерывна и Y – Хаусдорфово. Тогда график f замкнут.

Доказательство. Рассмотрим (x_0, y_0) из дополнения графика в $X \times Y$, тогда отделим по хаусдофовости в Y точки $y_0, f(x_0)$ окрестностями U, V соответственно. По непрерывности найдем W – окрестность x_0 в X такую, что $f(W) \subseteq V$. А значит, $W \times U$ – искомая окрестность (x_0, y_0), содержащаяся в дополнении графика. ■

Теорема 1.8 (О замкнутом графике). Пусть X, Y – F-пространства, $\Lambda \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и его график замкнут. Тогда Λ непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим $X \times Y$ как F-пространство. График Λ – обозначим его G – замкнутое подпространство в $X \times Y$ (поскольку лямбда линейна). А значит, G само по себе F-пространство Определим

$$\pi_1 : G \to X \ (x, \Lambda x) \mapsto x$$

$$\pi_2 : X \times Y \to Y \ (x, y) \mapsto y$$

Тогда π_1 непрерывная линейная биекция $G \to X$, причем G и X – F-пространства. Тогда по теореме об открытом отображении π_1^{-1} непрерывно. А значит,

$$\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \text{ непрерывна}$$

■

Замечание. Пусть для всяких $x_n \to x, \Lambda x_n \to y$ выполняется $y = \Lambda x$. Тогда график Λ замкнут.

1.5 Билинейные отображения

Пусть X, Y, Z – ТВП и $B : X \times Y \to Z$.

Можем определить $B_x : Y \to Z$, $B^y : X \to Z$ для фиксированных x, y – функции на срезах $X \times Y$. Если они непрерывны, то B называется **раздельно непрерывным**; если B_x, B^y линейны, то B называется **билинейным**. В некоторых случаях из раздельной непрерывности следует обычная непрерывность:

Теорема 1.9. Если X – F-пространство и B – раздельно непрерывное билинейное. Тогда B секвенциально непрерывно. В частности, если Y метризуемо, то B непрерывно.

Доказательство. Выберем $x_n \to x_0$ в X и $y_n \to y_0$ в Y Возьмем U, W окрестности 0 в Z такие, что $U + U \subseteq W$, положим $b_n(x) = B(x, y_n)$.

1. Так как эти последовательности сходятся, множества $\{b_n(x)\}$ ограничены в Z.

2. Тогда $b_n(x)$ – непрерывные линейные отображения из F-пространства X в Z.

3. Значит, по **??**[следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза], семейство $\{b_n\}$ равномерно непрерывно.

А значит найдется V – окрестность 0 в X такая, что $\forall n\ b_n(V) \subset U$. Тогда начиная с некоторого места:

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \in U + U \subseteq W$$

Если Y метризуемо, то $X \times Y$ метризуемо, а значит секвенциальная непрерывность эквивалентна обычной $\blacksquare$