Теорема: (о продолжении непр. л.ф.) X — лок. выпукл.

$M \leqslant X$, f — непр. л.ф. на M

$\Rightarrow \exists \Lambda \in X^* : \Lambda = f$ на M

Д-во:

(b) Пусть $\mathscr{Q}$ — разделяющее семейство полунорм на X, замкнутое относительно взятия максимума. Показать, что линейный функционал Λ на X непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такая полунорма $p \in \mathscr{Q}$ и такая постоянная $M < \infty$, что $|\Lambda x| \leqslant Mp(x)$ для всех $x \in X$.

$\Rightarrow$ f мажор. неч. полунормой $\Rightarrow$ все д-но

Д-во (обычное) б.о.о. $f \not\equiv 0$ на M

рассм. $M_0 = \{ x \in M \mid f(x) = 0 \}$ $\quad M_0 \subsetneq M$

$\Rightarrow \exists x_0 \in M : f(x_0) = 1$

$\overline{M_0}$ в M ? т.к. f — непр $\Rightarrow f \equiv 0$ на $\overline{M_0}$ в M

$\Rightarrow x_0 \notin \overline{M_0}$ в M

Но топология в M — индуцир. с $X \Rightarrow x_0 \notin \overline{M_0}$ в X

$\Rightarrow$ по пред. т. $\exists \Lambda \in X^*$: $\Lambda x_0 = 1$, $\Lambda x = 0$ $\forall x \in M_0$

рассм. $x \in M$ $\Rightarrow$ $y = x - f(x) \cdot x_0$ $f(y) = f(x) - f(x) \cdot \underbrace{f(x_0)}_{=1} = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow$ $x - f(x) x_0 \in M_0$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\Lambda (x - f(x) x_0)}_{=0} = \Lambda x - f(x) \underbrace{\Lambda x_0}_{=1} = \Lambda x - f(x)$

$\Rightarrow \Lambda = f$ на M ■

<u>Следствие</u>: X — лок. вып. B — уравн. выпукл. замк. $B \subset X$

$x_0 \notin B$, $x_0 \in X$ $\Rightarrow$ $\exists \Lambda \in X^*$: 1) $|\Lambda x| \leq 1$ $\forall x \in B$

2) $\Lambda x_0 > 1$

<u>Опр</u>: τ_1, τ_2 — топол. на X $\tau_1 \subset \tau_2$ τ_1 — слабее τ_2, τ_2 — сильнее τ_1, если

$\forall A \subset X$ A — откр в τ_1 $\Rightarrow$ A — откр в τ_2

<u>Зам</u>: $id_{2 \to 1} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ $id_{1 \to 2} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$

$id_{2 \to 1}$ — непр, $id_{1 \to 2}$ — откр.

Зам: (1) τ_1 — хаусд., τ_2 — комп., $\tau_1 \subset \tau_2$ $\Rightarrow$ $\tau_1 = \tau_2$

расм. F — τ_2- замк. $F \subset X$ — комп. в τ_2, замк. в τ_2 $\Big| \Rightarrow$ F — τ_2— комп.

$$F \subset \bigcup U^1_\alpha, \quad U^1_\alpha \in \tau_1 \Rightarrow U^2_\alpha \in \tau_2 \Rightarrow \exists\, U^2_{\alpha_1}, \ldots, U^2_{\alpha_n} : F \subset \bigcup_{j=1}^{n} U^2_{\alpha_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{U}^1_{\alpha_j}$$

$\Rightarrow$ F — комп в τ_1 $\Rightarrow$ F — замк в τ_1

τ_1 - хаусд.

$F - \tau_2 -$замк. $\Rightarrow$ $F - \tau_1-$замк. $\Rightarrow$ $X \setminus F \in \tau_2 \Rightarrow X \setminus F \in \tau_1 \Rightarrow \tau_2 \subset \tau_1$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\tau_1 = \tau_2}}$

(2) $\pi : X \to X/_N$ τ_N — фактор-топология — слабейшая, в которой π — непр.

(3) X — мн-во $\mathcal{F} = \{ f : X \to Y_f \mid Y_f - \text{т.п.} \}$

Хотим постр. τ на X : $\forall f \in \mathcal{F}$ — непр в τ

τ — всевозм. объед., конеч. пересеч. $f^{-1}(V)$, V - откр в Y_f

τ — топология на X $\quad$ τ — подходит.

τ — слабейшая на X среди всех, для которых $\forall f \in \mathcal{F}$ f — непр.

τ' : все $\mathcal{F}$ — непр. $\quad$ $f^{-1}(V)$ — откр в τ', но $f^{-1}(V)$ — откр в τ

<u>Опр</u>: такая τ — индуц. сем-во $\mathcal{F}$ топология на X

4) рассм. $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — сем-во т.п. $\quad X = \bigtimes_{\alpha \in J} X_\alpha$

$\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — проекция $\quad \mathcal{F} = \{\pi_\alpha \mid \alpha \in J\}$

Топ. дек. произв — индуц. $\mathcal{F}$ топология на X

т.е. — слабейшая, в которой π_α — непр.

5) Т.о. в т. Тихонова хаусдорфовость отбросить нельзя

6) X — мн-во $\quad \mathcal{F} = \{f : X \to Y_f \mid Y_f$ — хаусд. т.п.$\}$

Если $\mathcal{F}$ — разд. точки $\Rightarrow$ $\tau_{\mathcal{F}}$ — (индуц. $\mathcal{F}$ топол.) — хаусд. на X

<u>д-во</u>: $x \neq y \in X$ $\Rightarrow$ $\exists f \in \mathcal{F}$: $f(x) \neq f(y)$ в Y_f

$\Rightarrow$ U — окр $f(x)$, V — окр $f(y)$: $U \cap V = \varnothing$

$\Rightarrow \underset{x\in}{f^{-1}(u)} \cap \underset{\psi_y}{f^{-1}(v)} = \varnothing$, $f^{-1}(u), f^{-1}(v) \in \tau_F \Rightarrow (X, \tau_F)$ – хаусд.

<u>Теорема</u>: X – комп. т.п. $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ – непр, разд. точки X

$\Rightarrow X$ – метризуемо

<u>д-во</u>: (X, τ) – комп. $\forall n$ $f_n(x)$ – комп.

$\Rightarrow$ б.о.о. $\forall n$ $|f_n| \leq 1$

рассм. $d(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}$ – метрика?

нер-во Δ ✓, симметр. ✓

<u>невырожд.</u> ✓: $x \neq y \Rightarrow \exists n : f_n(x) \neq f_n(y) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \neq 0$

$\Rightarrow d(x,y) \neq 0$

<u>кор-ть</u> ✓: $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2 \Rightarrow d(x,y) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

<u>рассм.</u> τ_d – топол., порожд. d

(!) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непр. отн-но тополог. $\tau \times \tau$

Опр: $f_n: X \to \mathbb{R}$ $\quad f_n \rightrightarrows f$ на X, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ понятно равн. сх-ть ряда $\left(S_n \rightrightarrows S \right)$

<u>пр. Вейерштрасса</u>: НСНМ $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_n$, $\sum a_n$ — сход., f_n — непр

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ — равн. сход.

Т.о. $d(x, y)$ — равн. сход. $\Rightarrow$ $\underbrace{d: X \times X \to \mathbb{R} \text{ — непр.}}$

В частности $d_x(y) = d(x, y)$ $\quad d_x(\cdot): X \to \mathbb{R}$ — непр $\forall x \in X$

$\Rightarrow B_r(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) = d_x(y) < r \}$ — откр в τ

$\Rightarrow \tau_d \subset \tau$

τ_d — метр. топ. $\Rightarrow \tau_d$ — хаусдорфова

τ_d — хаусд., τ — комп., $\tau_d \subset \tau \underset{\text{по } (1)}{\Rightarrow} \tau_d = \tau$

■

лемма: X – в. п. $\quad \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ – лин. ф. , Λ – лин. ф.

$$N = \{ x \in X \mid \Lambda_1 x = \Lambda_2 x = \dots = \Lambda_n x = 0 \}$$

$\Rightarrow$ С.У.Р.: $\quad$ 1) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Lambda_i$

2) $\exists \gamma < \infty$: $\quad \forall x \in X \quad |\Lambda x| \leq \gamma \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\Lambda_i x|$

3) $\Lambda x = 0 \quad \forall x \in N$

д-во: 1) $\Rightarrow$ 2): $\quad |\Lambda x| \leq \sum |\lambda_j| \cdot |\Lambda_j x| \underset{\text{КБШ}}{\leq} \sqrt{\sum |\lambda_j|^2} \cdot \sqrt{\sum |\Lambda_j x_j|^2} \leq$

$$\leq \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum |\lambda_j|^2}}_{\shortparallel \, \gamma} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |\Lambda_j x|$$

2) $\Rightarrow$ 3): $\quad x \in N \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |\Lambda_j x| = 0 \Rightarrow \Lambda x = 0$

3) $\Rightarrow$ 1): рассм $\pi : X \to \mathbb{C}^n \qquad \pi(x) = (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x)$

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x - y \in N \underset{3)}{\Rightarrow} \Lambda(x-y) = 0 \Rightarrow \Lambda x = \Lambda y$$

$\Rightarrow \quad \Lambda = f \circ \pi \qquad f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

f – л. ф.

$\Rightarrow \quad f(u_1, \ldots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$

$\Rightarrow \quad \Lambda x = f(\pi(x)) = f(\Lambda_1 x, \ldots, \Lambda_n x) = \lambda_1 \cdot \Lambda_1 x + \ldots + \lambda_n \Lambda_n x \quad \blacksquare$

<u>Теорема</u>: X – в. п. $\quad X'$ – в. п. л. ф. на X, разд. точки в X

$\Rightarrow$ индуц. топол. τ' на X $\qquad$ 1) (X, τ') – лок. выпукл.

(слаб. топол. на X, отн-но которой все X' – непр.) $\qquad$ 2) $X^* = X'$

<u>Т. (Хана–Банаха)</u>:

$M \leq X \qquad f \in M^* \qquad |f(x)| \leq p(x) \quad \Rightarrow \exists\, \Lambda \in X^*: \quad \Lambda = f$ на M

$|\Lambda x| \leq p(x)$