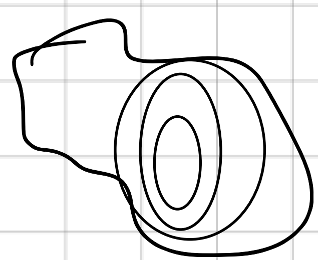
① $C(\Omega)$ $\quad \Omega$ — откр в $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$ $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ $\quad K_n$ — компакт

$\operatorname{int}(K_n) \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$

Сем-во полунорм: $\quad p_n(f) = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in K_n \,\}$



$V_n = \{ f \in C(\Omega) \mid p_n(f) < \frac{1}{n} \}$ — лок. выпуклая база

$p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n \le \ldots$

$\{p_n\}$ - раздел. сем-во полунорм $\Rightarrow$

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$ — метрика совместима с топологией $C(\Omega)$

Расм $\{f_m\}$ — посл. Коши по d

$d(f_n, f_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad p_n(f_i - f_j) \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall n$ $\quad f_m$ — равн. сх. по K_n, причем $\quad f_m \rightrightarrows f$ на K_n

$\left(d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)| \right) \quad \Rightarrow \quad f \in C(\Omega)$

$$p_n(f_j - f) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad d(f_j, f) \to 0$$

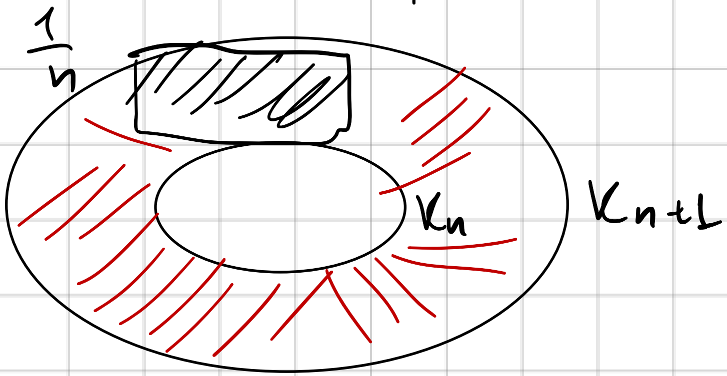
$$f_m \to f \text{ в } d \iff \forall n \quad f_m \rightrightarrows f \text{ на } K_n$$

$\Rightarrow$ $C(\Omega)$ – пространство Фреше

$E \subset C(\Omega)$ – огр. $\iff \exists \{M_n\} : \quad p_n(f) \le M_n \quad \forall f \in E$

$\iff \forall f \in E \quad \forall x \in K_n \quad |f(x)| \le M_n$

$$V_n = \{ f \in C(\Omega) \mid p_n(f) < \tfrac{1}{n} \}$$



есть такие $f \in V_n$, что $p_{n+1}(f)$ – сколь угодно большое

V_n – огранич. $\quad \{f_m\} : \quad p_{n+m}(f_m) > M_{n+m} + 1$

$\Rightarrow$ все V_n – неогранич. $\Rightarrow$ $C(\Omega)$ – ненормируемо.

<u>Напоминание</u>: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

f – диф-ема в $(\cdot)$ z_0, если $\exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

f – диф-ма в $(\cdot)$ z_0

$\Updownarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

условия Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

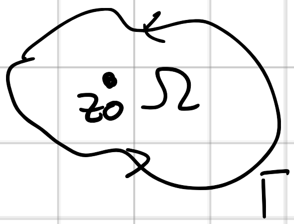
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$f(z) = u + iv$

<u>Опр</u>: f – голоморфна в z_0, если f – диф-ема в z_0

$H(\Omega)$ – голоморф. в Ω

$[f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)]$ $\Rightarrow$ $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ – беск. диф-ма



<u>т. Коши</u>: $\partial\Omega = \Gamma$ — кусочно-гладкая кривая

f — голом. в (·) z_0

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

<u>Сл-е</u>: f — голоморфна в (·) z_0

$\Rightarrow$ в окр-ти $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $\quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$$

---

f — голоморфна $\quad f = u + iv \quad$ u — гармон. ф-ция

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0$$

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

φ — гранич. знач.

$$P_y(x-t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{y^2+(x-t)^2}$$

$P_y(x-t)$ — ядро Пуассона

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi(e^{it})\,dt$$

Гарнетт, „Ограниченные аналитические ф-ции"

---

② $H(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{C}$ $H(\Omega)$ – пр-во голом. в Ω ф-ций

$H(\Omega) \leq C(\Omega)$

факт: $f_n \rightrightarrows f$ на K, $f_n \in H(\Omega)$ $\Rightarrow$ $f \in H(\Omega)$ | $\Rightarrow$ $H(\Omega)$ – замкнуто в $C(\Omega)$

$f_n \to f$ в $C(\Omega)$ $\Leftrightarrow$ $\forall n$ $f_n \rightrightarrows f$ на K_n

$\Rightarrow$ $H(\Omega)$ – пр-во Фреше

(!) $H(\Omega)$ обладает св-вом. Гейне – Бореля ✓

($H(\Omega)$ – норм. $\Rightarrow$ $H(\Omega)$ – лок. ограничен. $\not\Rightarrow$ $H(\Omega)$ – конечномер. ?!!)

Теорема: (Арцела – Асколи) $F \in C(K)$ K - комп. $K \subset \mathbb{R}^d$

1) F - равн. огранич, т.е. $\forall f \in F$ $\forall x \in K$ $|f(x)| < K$

2) F - равностеп. непр. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall f \in F$ $\forall x, y \in K$

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ F - предкомпактно

---

3) $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}_K$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс

$\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $\sum \alpha_i = |\alpha|$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \circ \dots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = D^{(1,1)} \qquad \frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial y} = D^{(2,1,0)}$$

Опр: $f \in C^\infty(\Omega)$, если $\forall \alpha$ $D^\alpha f \in C(\Omega)$

Опр: $\mathrm{supp}(f) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ - носитель ф-ции

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \mathrm{supp}(f) \subset K\}$$

$\Omega = \bigcup_i K_i \qquad int(K_i) \subset int(K_{i+1})$

сем-во: $\quad p_N(f) = \max\{ |D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N,\ |\alpha| \le N \}$

разделяющее

$d(f,g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}$ – совместима с топологией

$f_m \to f \iff \forall \alpha\ \forall N \ D^\alpha f_m \rightrightarrows D^\alpha f$ на K_N

$C^\infty(\Omega)$ – простр. Фреше, обладает св-вом Г-Б, не нормируемо

$\mathcal{D}_K$ – замкнуто в $C^\infty(\Omega) \qquad K \subset \Omega$

Упр: 13–23