РАЗНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

для Ф-АНа

СПРАВКА

X – векторное пр-во над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется **нормой**, если

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (невырожденность)
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность)
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

① Нер-во Йенсена

Пусть f – выпукла на $A \subseteq \mathbb{R}$ – промежутке и $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ – такие числа, что: 1) $t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$ 2) $t_1 + \dots + t_n = 1$ $\Rightarrow$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in A \qquad \boxed{f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)}$$

Док-во Индукция по n:

$(n=2)$ – определение выпуклой функции

$$(n \to n+1) \quad f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) = f\left(t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1} + (t_n + t_{n+1})\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right)\right)$$

Индукционное предположение

$$\leq t_1 f(x_1) + \dots + t_{n-1} f(x_{n-1}) + (t_n + t_{n+1}) f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right) \overset{n=2}{\leq} t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

$\blacksquare$

② Нер-во Юнга.

Пусть $a, b \geq 0$, $p, q \geq 1$ – такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}}$$

Док-во Применим $f(x) = -\log x$ к правой части:

$$-\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \overset{\text{Нер-во Йенсена}}{\leq} -\frac{1}{p}\log(a^p) - \frac{1}{q}\log(b^q) = -\log a - \log b = -\log ab$$

$\blacksquare$

③ Нер-во Гёльдера

Пусть $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{C}$, $p, q \in [1, +\infty)$ – такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Док-во $A = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad B = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Надо док-ть, что $\sum_i \frac{|x_i y_i|}{AB} \le 1$. Оценим поэлементно нер-м Юнга:

$$\frac{|x_i y_i|}{AB} = (|x_i|/A)(|y_i|/B) \le \frac{(|x_i|/A)^p}{p} + \frac{(|y_i|/B)^q}{q}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{AB} \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \blacksquare$$

4 Нер-во Минковского

Пусть $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{C}$, $p \in [1, +\infty)$. Тогда

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Док-во Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \le \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \overset{\text{Два Гёльдера}}{\le}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{\underset{p}{\underset{\|}{q(p-1)}}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{\underset{p}{\underset{\|}{q(p-1)}}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1 - \frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \blacksquare$$

Важное следствие Пусть $p \ge 1$. На $\mathbb{C}^d$ можно ввести L_1^p норму:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Невырожденность, однородность — очевидны.

Нер-во треугольника = Нер-во Минковского

Также, задаём L_1^∞ норму: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Лёгким мановением руки совершаем предельные переходы:

Определим $\ell^p := \left\{(x_n) \in \mathbb{C} : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty\right\}$ $\quad \ell^\infty := \left\{(x_n) \in \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$

с определёнными на них нормами:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$