

Оглавление

0	Вступление	1
0.1	Про ограниченные множества	2
0.2	Пространства $C^\infty(\Omega)$, \mathcal{D}_K	3
1	О полноте	3
1.1	Теорема Банаха-Штейнгауза	3
1.2	Полезные частные случаи	4
1.3	Теорема об открытом отображении	5
1.4	Теорема о замкнутом графике	5
1.5	Билинейные отображения	6

0 Вступление

Во всем конспекте F обозначает поле скаляров, все векторные пространства будем смотреть только над ним. В качестве F мы берем только \mathbb{R} , либо \mathbb{C} с естественными топологиями на них.

Определение. Топологическое пространство X являющееся векторным пространством называется топологическим векторным пространством (ТВП), если

1. Топология удовлетворяет T_1 (синглетоны замкнуты)
2. Сложение и умножение на скаляр непрерывны

Замечание.

1. Сдвиг на любой вектор $u \mapsto u + v$ и растяжение на любой скаляр $\alpha \neq 0 : u \mapsto \alpha u$ являются гомеоморфизмами.
2. Топология для такого X всегда инвариантна относительно сдвигов.
3. Следовательно, полностью определяется локальной базой.

Это основное определение, помимо него напомним еще определений:

Определение. Пусть X – векторное пространство и $A \subseteq X$

1. Если $0 \in A$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha A + \beta A \subseteq A$, то A называется **подпространством** X ; обозначается $A \leq X$.
2. Если $\forall t \in (0, 1)$ выполняется $tA + (1 - t)A \subseteq A$, то A называется **выпуклым**.
3. Если $\forall \alpha \in F : |\alpha| \leq 1$ выполняется $\alpha A \subseteq A$, то A называется **уравновешенным**.

Замечание. Подпространства являются выпуклыми уравновешенными множествами.

Определение (Типы пространств). Пусть X – ТВП, говорим, что X

- (А) **локально выпукло**, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.
- (В) **локально ограничено**, если существует ограниченная окрестность нуля.
- (С) **локально компактно**, если существует предкомпактная окрестность нуля.
- (D) **метризуемо**, если его топология метризуема.
- (F) является **F-пространством**, если топология индуцируется **полной инвариантной** метрикой.

(G) является **пространством Фреше**, если оно локально-выпуклое F -пространство

(E) **нормируемо**, если существует норма, индуцирующая топологию X

(F) обладает свойством **Гейне-Бореля**, если

(ограниченное \wedge замкнутое \Rightarrow компактное)

Небольшой обзор результатов касающихся затронутых выше понятий

Теорема 0.1 (Воспоминания о будущем).

1. Локально ограничено \Rightarrow обладает счетной локальной базой.
2. Метризуемо \Leftrightarrow обладает счетной локальной базой.
3. Нормируемо \Leftrightarrow (локально выпукло \wedge локально ограничено)
4. Конечномерно \Leftrightarrow локально компактно
5. Обладает свойством Гейне-Бореля \Rightarrow конечномерно

0.1 Про ограниченные множества

Существует два различных определения ограниченных множеств, в которых легко запутаться, если речь идет о метризуемых ТВП:

(X, d) – **метрическое пространство**

$E \subset X$ называется ограниченным, если $\exists M > 0$:

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) < M$$

X – **ТВП**

$E \subset X$ называется ограниченным, если

$$\forall U - \text{окр.} 0 \quad \exists t_0 > 0 : \forall t > t_0$$

$$E \subseteq tU$$

Лемма 0.2. Если X нормируемое пространство и $d(x, y) = \|x - y\|$, то эти понятия совпадают. В ином случае они могут отличаться во всех нетривиальных случаях.

Доказательство. Почему они отличаются в других случаях: достаточно взять новую инвариантную метрику, индуцирующую ту же самую топологию $d' = d/(1 + d)$. В ней всё X будет ограниченным.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство и $d(x, y) = \|x - y\|$. За B_R будем обозначать шар радиуса R в нуле. Понятно, что достаточно показать, что B_1 – топологически ограничен (Если E метрически ограничено $\Rightarrow E \subseteq B_R = RB_1$). Так как топология X индуцируется метрикой, базой в точке выступают шары, а значит какой-то $B_\epsilon = \epsilon B_1$ содержится в U .

Пусть теперь E топологически ограничено, предположим, что оно не метрически ограничено. То есть, существует $\{x_n\} \subset E$ такая, что $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. Тогда в качестве окрестности нуля попробуем взять B_1 , понятно, что $\sup_{x \in B_1} \|x\| = 1$, а значит, не найдется t_0 подходящего под условия. ■

0.2 Пространства $C^\infty(\Omega)$, \mathcal{D}_K

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество. С мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ свяжем дифференциальный оператор

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Порядком α назовем число $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и доопределим $D^\alpha f = f$, если $|\alpha| = 0$. Пусть $K \subseteq \Omega$ – компакт. Определим множество

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \subseteq K\}$$

Представим $\Omega = \cup K_i$, где K_i – компакты и $K_i \subset \text{Int } K_{i+1}$

1 О полноте

Под $\text{Hom}(X, Y)$ обозначается множество всех линейных отображений $X \rightarrow Y$, под $\mathbf{c}\text{Hom}(X, Y)$ множество тех из них, которые непрерывны в топологиях X, Y .

Теорема 1.1 (Бэра о полноте). В полных метрических пространствах и локально компактных хаусдорфовых пространствах

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{открытое, всюду плотное}) \quad - \quad \text{всюду плотно}$$

1.1 Теорема Банаха-Штейнгауза

Сначала, введем определение

Определение. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Hom}(X, Y)$. Оно называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\text{для любой } W \text{ – окр. } 0 \text{ в } Y \text{ существует } V \text{ – окр. } 0 \text{ в } X: \Gamma(V) \subseteq W$$

Как мы увидим ниже, равностепенно-непрерывные семейства переводят ограниченные множества в ограниченные. Теорема Банаха-Штейнгауза же скажет, что если точек, орбиты которых под действием Γ ограничены *много*, то Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Hom}(X, Y)$ – равностепенно непрерывно, а $E \subseteq X$ ограничено. Тогда $\Gamma(E)$ суть ограниченное множество в Y .

Доказательство. Рассмотрим W – окрестность 0 в Y , выберем V – окрестность 0 в X из определения. E – ограничено \Rightarrow имеем $E \subseteq tV$ для больших t . Для них же:

$$\Gamma(E) \subseteq \Gamma(tV) = t\Gamma(V) \subseteq tW$$

■

Теорема 1.3 (Банаха-Штейнгауза). Пусть $\Gamma \subseteq \mathbf{cNom}(X, Y)$. Предположим, что множество $B = \{x \in X : \Gamma(x) \text{ — ограниченно}\}$ имеет вторую категорию в X .

Тогда $B = X$ и Γ равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть W — уравновешенная окрестность 0 в Y , будем искать такую V в X , что $\Gamma(V) \subseteq W$. Для этого найдем такую U — уравновешенная окрестность 0 в Y , что $\overline{U} + \overline{U} \subseteq W$, положим

$$E = \cap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

$$x \in B \Rightarrow \Gamma(x) \in nU \text{ для больших } n \Rightarrow \frac{1}{n}x \in E \text{ для таких же } n$$

Тогда заметим, что $B \subseteq \cup_n nE$. Значит, какой-то из nE — множество второй категории. Заметив, что $x \mapsto nx$ это гомеоморфизм X получаем:

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ — множество второй категории} \\ E \text{ — замкнуто так как все } \Lambda \in \Gamma \text{ непрерывны} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{в } E \text{ есть внутренняя точка } x_0$$

Значит, в множестве $x_0 - E$ содержится окрестность нуля V , причем:

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subseteq \overline{U} - \overline{U} \subseteq W$$

Тогда Γ переводит ограниченные множества в ограниченные, а тогда $\Gamma(x)$ — ограниченное для всякого $x \Rightarrow B = X$. ■

1.2 Полезные частные случаи

Теорема 1.4. Пусть X — F -пространство и $\Gamma \subseteq \mathbf{cNom}(X, Y)$ и $\forall x \in X \Gamma(x)$ ограничено в Y . Тогда Γ равномерно непрерывно.

Доказательство. По теореме Бэра, F -пространства являются множествами второй категории в себе. ■

Теорема 1.5. Пусть X — банахово, Y — нормируемо, причем $\sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\| < \infty$. Тогда существует такой $M > 0$, что

$$\|\Lambda x\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \Lambda \in \Gamma$$

Доказательство. Применим предыдущую теорему к метрикам, порожденным нормами. В них ограниченность эквивалентна метрической. ■

Теорема 1.6. Пусть $\Lambda_n \in \mathbf{cNom}(X, Y)$. Определим

$$C = \{x \in X : \Lambda_n x \text{ — последовательность Коши}\}; \quad L = \{x \in X : \Lambda_n x \rightarrow \Lambda x\}$$

. Тогда

1. Если C второй категории в X , то $C = X$

2. Если L второй категории в X и Y – F -пространство, то $L = X$ и Λ – непрерывно.

Доказательство.

1. Все последовательности Коши ограничены \Rightarrow по Б-III $\{\Lambda_n\}$ равностепенно непрерывна. Заметим, что $C \leq X$. Также, C – всюду плотное. (Пусть не так \Rightarrow тогда $X = \overline{C} \oplus Y$, то есть \overline{C} – собственное подпространство. \Rightarrow в нем нет внутренних точек \Rightarrow оно I категории).

Возьмем $x \in X$, будем показывать, что $\Lambda_n x$ – последовательность Коши в Y , зафиксируем W – окрестность 0 в Y . По равностепенной непрерывности найдем симметричную V – окрестность 0 в X – такую, что ВСЕ $\Lambda_n(V) \subseteq W$. Так как C всюду плотно, найдем $y \in C \cap (x + V)$. Тогда НСНМ

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - y) + (\Lambda_n - \Lambda_m)y + \Lambda_m(y - x) \in W + W + W$$

■

1.3 Теорема об открытом отображении

Пусть $f : S \rightarrow T$ – отображение (S, T – топологические, f не обязательно непрерывна) и $p \in S$. Говорят, что f открыта в p , если для любой V – окрестности p образ $f(V)$ содержит окрестность $f(p)$.

Теорема 1.7. Пусть X – F -пространство, $\Lambda \in \mathbf{cHom}(X, Y)$, причем $\Lambda(X)$ второй категории. Тогда

$\Lambda(X) = Y$, Λ открыто, Y – F -пространство

Доказательство. Заметим, что из второго следует первое, поскольку Λ это подпространство. Докажем второе. Пусть V – окрестность 0 в X , мы хотим проверить, что $\Lambda(V)$ содержит окрестность 0 в Y . Заведем полную инвариантную метрику d на X . Определим

$$V_n = \left\{ x \mid d(x, 0) < \frac{r}{2^n} \right\}$$

где r такой маленький, что $V_0 \subset V$

■

1.4 Теорема о замкнутом графике

Под графиком отображения $f : X \rightarrow Y$ имеется ввиду множество $\{(x, f(x))\}_{x \in X} \subseteq X \times Y$. Для непрерывных отображений в хаусдорфовы пространства график всегда замкнут, мы будем пытаться выяснить про какие-то факты, похожие на это. Для начала обоснуем факт про замкнутость графика непрерывной функции:

Замечание. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывна и Y – Хаусдорфово. Тогда график f замкнут.

Доказательство. Рассмотрим (x_0, y_0) из дополнения графика в $X \times Y$, тогда отделим по хаусдорфовости в Y точки $y_0, f(x_0)$ окрестностями U, V соответственно. По непрерывности найдем W – окрестность x_0 в X такую, что $f(W) \subseteq V$. А значит, $W \times U$ – искомая окрестность (x_0, y_0) , содержащаяся в дополнении графика. ■

Теорема 1.8 (О замкнутом графике). Пусть X, Y – F -пространства, $\Lambda \in \text{Hom}(X, Y)$ и его график замкнут. Тогда Λ непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим $X \times Y$ как F -пространство. График Λ – обозначим его G – замкнутое подпространство в $X \times Y$ (поскольку Λ линейна). А значит, G само по себе F -пространство. Определим

$$\pi_1 : G \rightarrow X \quad (x, \Lambda x) \mapsto x$$

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y \quad (x, y) \mapsto y$$

Тогда π_1 непрерывная линейная биекция $G \rightarrow X$, причем G и X – F -пространства. Тогда по теореме об открытом отображении π_1^{-1} непрерывно. А значит,

$$\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \text{ непрерывна}$$

■

Замечание. Пусть для всяких $x_n \rightarrow x, \Lambda x_n \rightarrow y$ выполняется $y = \Lambda x$. Тогда график Λ замкнут.

1.5 Билинейные отображения

Пусть X, Y, Z – ТВП и $B : X \times Y \rightarrow Z$.

Можем определить $B_x : Y \rightarrow Z, B^y : X \rightarrow Z$ для фиксированных x, y – функции на срезах $X \times Y$. Если они непрерывны, то B называется **раздельно непрерывным**; если B_x, B^y линейны, то B называется **билинейным**. В некоторых случаях из раздельной непрерывности следует обычная непрерывность:

Теорема 1.9. Если X – F -пространство и B – раздельно непрерывное билинейное. Тогда B секвенциально непрерывно. В частности, если Y метризуемо, то B непрерывно.

Доказательство. Выберем $x_n \rightarrow x_0$ в X и $y_n \rightarrow y_0$ в Y . Возьмем U, W окрестности 0 в Z такие, что $U + U \subseteq W$, положим $b_n(x) = B(x, y_n)$.

1. Так как эти последовательности сходятся, множества $\{b_n(x)\}$ ограничены в Z .
2. Тогда $b_n(x)$ – непрерывные линейные отображения из F -пространства X в Z .
3. Значит, по ??[следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза], семейство $\{b_n\}$ равномерно непрерывно.

А значит найдется V – окрестность 0 в X такая, что $\forall n \quad b_n(V) \subset U$. Тогда начиная с некоторого места:

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \in U + U \subseteq W$$

Если Y метризуемо, то $X \times Y$ метризуемо, а значит секвенциальная непрерывность эквивалентна обычной

■