<u>Теорема</u>: X – F-пр-во, Y – т.в.п. $\{\Lambda_n\}$, $\Lambda_n : X \to Y$, Λ_n – лин. непр.

Если $\forall x \in X \quad \exists\, \Lambda x = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n x \Rightarrow \Lambda$ – непр.

(т.е. поточечн. предел непр, лин — непр, лин.)

<u>д-во</u>: т.к. $\forall x \in X \quad \exists\, \Lambda x = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n x \Rightarrow \forall x \in X$ $\Gamma(x) = \{\Lambda_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ огранич.

$\Rightarrow$ по т-ме $\{\Lambda_n\}$ – равност. непр.

W-окр 0 в $Y \Rightarrow \exists\, V$-окр 0 в X: $\forall n \quad \Lambda_n(V) \subset W$

$\Rightarrow \Lambda(V) \subset \overline{W}$

$\forall\, W$-окр 0 в Y $\exists\, U$-окр 0 в Y: $\overline{U} \subset W$

$\Rightarrow \exists\, V$-окр 0 в X: $\Lambda(V) \subset \overline{U} \subset W$ $\Bigg\rbrace \Rightarrow \Lambda$-непр.

Λ – линейно (очев.)

$\blacksquare$

(вариант т. Б-Ш)

Теорема: X, Y — т.в.п. $K \subset X$ K — компакт, выпукл. в X

Γ — сем-во непр. лин. отобр $\Lambda: X \to Y$:

$\forall x \in K$ $\Gamma(x) = \{ \Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma \}$ — огранич в Y

$\Rightarrow \exists B \subset Y$ — огранич : $\forall \Lambda \in \Gamma$ $\Lambda(K) \subset B$

(поточеч. огр-ть на компакте $\Rightarrow$ равн. огр. на компакте)

Д-во: $B = \bigcup\limits_{x \in K} \Gamma(x)$ берем U, W — уравн. окр 0 : $\overline{U} + \overline{U} \subset W$

рассм $E = \bigcap\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U})$

$\underbrace{\text{если } x \in K}$ $\Rightarrow$ $\exists n :$ $\Gamma(x) \subset nU$, т.к. $\Gamma(x)$ — огр. мн-во

$\Gamma(x) \subset nU \Rightarrow \underbrace{x \in nE}$

$\Rightarrow$ $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (K \cap nE)$

по т. Бэра $\exists n :$ $\operatorname{int}(K \cap nE) \neq \varnothing$

$\Rightarrow \quad \exists x_0 \in K \cap nE, \quad V$ - окр 0 ! $\quad K \cap (x_0 + V) \subset K \cap nE \subset nE$

покроем K мн-вами $\{(x_0 + rV)\}_{r>0}$ — откр. покр. (вложены)

K - комп. $\Rightarrow \exists \underbrace{r > 1}$! $\quad K \subset x_0 + rV$

рассм $x \in K$ $\qquad z = \left(1 - \frac{1}{r}\right) x_0 + \frac{1}{r} \cdot x \quad , \quad \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 1$

K - выпукло $\Rightarrow z \in K$

рассм. $\quad z - x_0 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) x_0 + \frac{1}{r} x - x_0 = \frac{1}{r} \cdot (x - x_0) \in V$

$x \in K, \quad K \subset x_0 + rV \Rightarrow x - x_0 \in rV$

$\Rightarrow z \in (x_0 + V) \subset nE$

Т.о. $\forall x \in K \quad z = \left(1 - \frac{1}{r}\right) x_0 + \frac{1}{r} \cdot x \in nE$, но $\lambda(nE) \subset n\overline{\mathcal{U}}$

$\lambda x = \lambda \underbrace{rz}_{\subset\, rn\overline{\mathcal{U}}} - \lambda \underbrace{(r-1) x_0}_{\subset\, -(r-1)n\overline{\mathcal{U}}} \Rightarrow \lambda x \in rn\overline{\mathcal{U}} - (r-1)n\overline{\mathcal{U}} \subset rn\overline{\mathcal{U}} + rn\overline{\mathcal{U}} =$

$= rn(\overline{\mathcal{U}} + \overline{\mathcal{U}}) \subset rnW$

$\forall x \in K \quad T(x) \subset rnW \; \Big| \Rightarrow B \subset \underbrace{\boxed{rn}}_{1} W$

Т.о. $\forall W$ — уравн. окр 0 в Y $\exists s = r_n$: $\forall t > s$ $B \subset tW$

$\Rightarrow$ B — огр. в Y

но постр. B, $\Lambda(X) \subset B$ ■

<u>Опр</u>: $f: X \to Y$ — откр. $\forall U$ — откр в X $f(U)$ — откр в Y

<u>Опр</u>: $f: X \to Y$ — откр в $x \in X$, если $\forall U$ — окр. x $\exists V$ — окр $f(x)$:

$f(U) \supset V$

<u>Зам</u>: X, Y — т.в.п. $f: X \to Y$ — откр $\Leftrightarrow$ f — откр в 0

<u>Зам</u>: $f: X \to Y$ — биекция, непр f — гомеоморф. $\Leftrightarrow$ f — откр.

<u>Теорема</u>: (об откр. отобр.) X — F-пр-во, Y — т.в.п.

$\Lambda: X \to Y$ — линейное непр., причем $\Lambda(X)$ — II категор в Y

$\Rightarrow$ 1) $\Lambda(X) = Y$, $\boxed{2)}$ Λ — откр, 3) Y — F-пр-во

<u>д-во</u>: если 1) верно $\Rightarrow$ $\ker\Lambda = \{0\}$ $\Rightarrow$ Λ — гомеом $\Rightarrow$ Λ — откр,

Y — F — пр-во

Если 2) верно $\Rightarrow$ Λ – гомеоморф $\Rightarrow$ 1), 3) верно

2) $\Leftrightarrow$ Λ – откр в 0 фикс. V – окр 0 в X

(!) $\Lambda(V) \supset \mathcal{U}$
$\mathcal{U}$ – окр 0 в Y

X – F-пр-во $\Rightarrow$ $\exists\ d$ – инв. метр, совм. с топологией

расм $V_n = \{x \mid d(x,0) < \frac{r}{2^n}\}$, где $r>0$: $V_0 \subset V$

$V_n - V_n \subset V_{n-1}$ $\Rightarrow$ $\Lambda(V_n) - \Lambda(V_n) \subset \Lambda(V_{n-1})$

$\Rightarrow$ $\overline{\Lambda(V_n)} - \overline{\Lambda(V_n)} \subset \overline{\Lambda(V_n) - \Lambda(V_n)} \subset \overline{\Lambda(V_{n-1})}$

С другой стороны, $\underbrace{\Lambda(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\,\Lambda(V_2)}$

Хотим получить! $\boxed{W \subset \overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V)}$, W – окр 0 в Y

$\overline{\Lambda(V_1)} \supset \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}$ (!) $\operatorname{int}\left(\overline{\Lambda(V_2)}\right) \neq \varnothing$

$\Lambda(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\,\Lambda(V_2)$, но $\Lambda(X)$ – мн-во II категории в Y

$\Rightarrow \exists n : \operatorname{int}(\overline{n\lambda(V_2)}) \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{int}(\overline{\lambda(V_2)}) \neq \emptyset$

$\left[\begin{array}{l} \bigcup n\lambda(V_2) - \text{II кат.} \Rightarrow \exists n : n\lambda(V_2) - \text{II категор.} \\ \qquad x \to nx - \text{гомеоморф.} \end{array} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(V_2) - \text{II катег.} \Rightarrow \operatorname{int}(\overline{\lambda(V_2)}) \neq \emptyset \Big]$

Синее Вилоч!: строим. посл-ть $\{y_n\}$

$y_1 \in \overline{\lambda(V_1)}$ пусть выбрана $y_n \in \overline{\lambda(V_n)}$

аналогично, $\boxed{\forall n \quad \overline{\lambda(V_n)} \supset W_n, \quad W_n - \text{окр } 0 \text{ в } Y}$

т.е. есть W-окр 0 в Y : $W \subset \overline{\lambda(V_{n+1})}$

$\Rightarrow \underbrace{(y_n - \overline{\lambda V_{n+1}})}_{\cup \atop y_n - W} \cap \lambda(V_n) \neq \emptyset$

$\overline{\lambda V_{n+1}} - \overline{\lambda V_{n+1}} \subset \overline{\lambda V_n}$

y_n - внутр (.) $\lambda V_n \Rightarrow y_n - W \subset \lambda V_n$

$\Rightarrow \quad \exists x_n \in V_n \quad : \quad \Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$

Берем $\quad y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$

<u>Т.о.</u> $\quad y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}, \quad y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n, \quad x_n \in V_n$

$d(x_n, 0) < \frac{r}{2^n} \quad \Rightarrow \quad S_n = x_1 + \ldots + x_n$ — посл. Коши

$$\underset{m>n}{d(S_n, S_m)} < r \cdot \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j} \longrightarrow 0$$

$\Uparrow$ по кр. Коши для числ. рядов

X — полное $\Rightarrow S_n$ — сход. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ — сход. в X

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda x_n$ — сход. по непр. $\Lambda \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n+1}) =$

$= y_1 - \cancel{y_2} + \cancel{y_2} - \cancel{y_3} + \ldots = y_1 - \lim_{n\to\infty} y_n$

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda x_n = \Lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \Lambda x$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = \Lambda x \quad , \quad x \in V}$

$d(x, 0)$ $\qquad d(s_n, 0) < \sum\limits_{j=1}^{n} d(x_j, 0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r}{2^j} < r$

$\Rightarrow \quad d(x, 0) < r \quad \Rightarrow \quad x \in V_0 \subset V$

Т.О. $\quad \forall y \in \overline{\Lambda V_1} \quad \exists x \in V \ : \quad y = \Lambda x \quad \Rightarrow \quad \overline{\Lambda V_1} \subset \Lambda V$

Т.О. $\forall$ V-окр 0 в X проводим конструкцию:
$\exists W$-окр 0 в Y : $\quad W \subset \overline{\Lambda V_1} \subset \Lambda V$

$\Rightarrow \Lambda$ - откр в 0

$\Rightarrow \Lambda$ - откр ∎

Зам: $\quad \Lambda : X \to Y$ - лин., непр

$\underbrace{f : X/N \to Y}$

f - изоморфизм

$\underbrace{f(x+N) = \Lambda x}$

$f(\pi(x)) = \Lambda x$

U-откр в Y $\Rightarrow$ $f^{-1}(U) = \pi(\Lambda^{-1}(U))$ - откр.

Т.О. $f: X/N \to Y$, $f(x+N) = \lambda x$ — непр. .