Оглавление

0 Вступление

Во всем конспекте F обозначает поле скаляров, все векторные пространства будем смотреть только над ним. В качестве F мы берем только $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$ с естественными топологиями на них.

Определение. Топологическое пространство X являющееся векторным пространством называется топологическим векторным пространством (ТВП), если

1. Топология удовлетворяет T_1 (синглетоны замкнуты)
2. Сложение и умножение на скаляр непрерывны

Замечание.

1. Сдвиг на любой вектор $u \mapsto u + v$ и растяжение на любой скаляр $\alpha \neq 0 : u \mapsto \alpha u$ являются гомеоморфизмами.
2. Топология для такого X всегда инвариантна относительно сдвигов.
3. Следовательно, полностью определяется локальной базой.

Это основное определение, помимо него напомним еще определений:

Определение. Пусть X – векторное пространство и $A \subseteq X$

1. Если $0 \in A$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha A + \beta A \subseteq A$, то A называется **подпространством** X; обозначается $A \leqslant X$.
2. Если $\forall t \in (0, 1)$ выполняется $tA + (1 - t)A \subseteq A$, то A называется **выпуклым**.
3. Если $\forall \alpha \in F : |\alpha| \leqslant 1$ выполняется $\alpha A \subseteq A$, то A называется **уравновешенным**.

Замечание. Подпространства являются выпуклыми уравновешенными множествами.

Определение (Типы пространств). Пусть X – ТВП, говорим, что X

(A) **локально выпукло**, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.

(B) **локально ограничено**, если существует ограниченная окрестность нуля.

(C) **локально компактно**, если существует предкомпактная окрестность нуля.

(D) **метризуемо**, если его топология метризуема.

(F) является **F-пространством**, если топология индуцируется **полной инвариантной** метрикой.

(G) является **пространством Фреше**, если оно локально-выпуклое F-пространство

(E) **нормируемо**, если существует норма, индуцирующая топологию X

(F) обладает свойством **Гейне-Бореля**, если

$$(\text{ограниченное} \wedge \text{замкнутое} \Rightarrow \text{компактное})$$

Небольшой обзор результатов касающихся затронутых выше понятий

Теорема 0.1 (Воспоминания о будущем).

1. Локально ограничено $\Rightarrow$ обладает счетной локальной базой.
2. Метризуемо $\Leftrightarrow$ обладает счетной локальной базой.
3. Нормируемо $\Leftrightarrow$ (локально выпукло $\wedge$ локально ограничено)
4. Конечномерно $\Leftrightarrow$ локально компактно
5. Обладает свйоством Гейне-Бореля $\Rightarrow$ конечномерно

0.1 Про ограниченные множества

Существует два различных определения ограниченных множеств, в которых легко запутаться, если речь идет о метризуемых ТВП:

(X, d) – **метрическое пространство**	X – **ТВП**
$E \subset X$ называется ограниченным, если $\exists M > 0 :$ $$\forall x, y \in E \;\; d(x, y) < M$$	$E \subset X$ называется ограниченным, если $$\forall U \text{ – окр.}0 \; \exists t_0 > 0 : \; \forall t > t_0$$ $$E \subseteq tU$$

Лемма 0.2. Если X нормируемое пространство и $d(x, y) = ||x - y||$, то эти понятия совпадают. В ином случае они могут отличаться во всех нетривиальных случаях.

Доказательство очевидное, приведем пример, почему эти понятия различаются в иных случаях. Если d – любая метрика на X, то $d' = \frac{d}{1+d}$ – тоже метрика, причем эквивалентная изначальной. Однако относительно нее всё пространство (и все подмножества) будут ограничены.

0.2 В Рудине такого не было!

Категория ТВП – **TVect**.

1. $\mathrm{Ob}(\mathbf{TVect})$ – топологические векторные пространства
2. $X \to Y$ это непрерывные линейные отображения.

Дисклеймер: не все стрелки в этом конспекте это морфизмы в категории.

Заметим, что **TVect** – конкретная категория, поэтому определен обычный забывающий функтор $F_S : \mathbf{TVect} \to \mathbf{Set}$. Также определим $F_V : \mathbf{TVect} \to \mathbf{Vect}$ – забывающий топологию функтор.

Если $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{TVect})$, то $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначает множество стрелок в **Vect** между $F_V(X)$ и $F_V(Y)$. Множетво стрелок в **TVect** мы обозначаем как $\mathbf{c}\mathrm{Hom}(X, Y)$.

Во всем конспекте буквы X, Y, Z обозначают элементы $\mathrm{Ob}(\mathbf{TVect})$.

1 О полноте

Определение. Говорят, что $A \subset X$ имеет I категорию, если $A = \cup_n E_n$, где каждое из E_n нигде не плотно. A имеет вторую II категорию в ином случае.

Теорема 1.1 (Бэра о полноте). В полных метрических пространствах и локально компактных хаусдорфовых пространствах

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\text{открытое, всюду плотное}) \quad \textbf{– всюду плотно}$$

1.1 Теорема Банаха-Штейнгауза

Сначала, введем определение

Определение. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(X, Y)$. Оно называется равностепенно непрерывным, если

$$\text{для любой } W \text{ – окр. 0 в Y существует } V \text{ – окр. 0 в X: } \Gamma(V) \subseteq W$$

Как мы увидим ниже, равностепенно-непрерывные семейства переводят ограниченные множества в ограниченные. Теорема Банаха-Штейнгауза же скажет, что если точек, орбиты которых под действием Γ ограниченны *много*, то Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(X, Y)$ – равностепенно непрерывно, а $E \subseteq X$ ограниченно. Тогда $\Gamma(E)$ суть ограниченное множество в Y.

Доказательство. Рассмотрим W – окрестность 0 в Y, выберем V – окрестность 0 в X из определения. E – ограниченно $\Rightarrow$ имеем $E \subseteq tV$ для больших t. Для них же:

$$\Gamma(E) \subseteq \Gamma(tV) = t\Gamma(V) \subseteq tW$$

■

Теорема 1.3 (Банаха-Штейнгауза). Пусть $\Gamma \subseteq \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$. Предположим, что множество $B = \{x \in X \ : \ \Gamma(x) - \text{ограниченно}\}$ имеет вторую категорию в X.

Тогда $B = X$ и Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Пусть W – уравновешенная окрестность 0 в Y, будем искать такую V в X, что $\Gamma(V) \subseteq W$. Для этого найдем такую U – уравновешенная окрестность 0 в Y, что $\overline{U} + \overline{U} \subseteq W$, положим

$$E = \cap_{\Lambda\in\Gamma}\Lambda^{-1}\left(\overline{U}\right).$$

$$x \in B \Rightarrow \Gamma(x) \in nU \text{ для больших } n \Rightarrow \frac{1}{n}x \in E \text{ для таких же } n$$

Тогда заметим, что $B \subseteq \cup_n nE$. Значит, какой-то из nE – множество второй категории. Заметив, что $x \mapsto nx$ это гомеоморфизм X получаем:

$$\left.\begin{array}{l} E - \text{множество второй категории} \\ E - \text{замкнуто так как все } \Lambda \in \Gamma \text{ непрерывны} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{в } E \text{ есть внутренняя точка } x_0$$

Значит, в множестве $x_0 - E$ содержится окрестность нуля V, причем:

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subseteq \overline{U} - \overline{U} \subseteq W$$

Тогда Γ переводит ограниченные множества в ограниченные, а тогда $\Gamma(x)$ – ограниченное для всякого $x \ \Rightarrow B = X$. ■

1.2 Полезные частные случаи

Теорема 1.4. Пусть X – F-пространство и $\Gamma \subseteq \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$ и $\forall x \in X \ \Gamma(x)$ ограниченно в Y. Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. По теореме Бэра, F-пространства являются множествами второй категории в себе. ■

Теорема 1.5. Пусть X – банахово, Y – нормируемо, причем $\sup_{\Lambda\in\Gamma} ||\Lambda x|| < \infty$. Тогда существует такой $M > 0$, что

$$||\Lambda x|| \leqslant M||x|| \quad \forall x \in X \ \forall \Lambda \in \Gamma$$

Доказательство. Применим предыдущую теорему к метрикам, порожденным нормами. В них ограниченность эквивалентна метрической. ■

Теорема 1.6. Пусть $\Lambda_n \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,Y)$. Определим

$$C = \{x \in X \ : \ \Lambda_n x - \text{последовательность Коши}\}; \quad L = \{x \in X \ : \ \Lambda_n x \to \Lambda x\}.$$

Тогда

1. Если C второй категории в X, то $C = X$

2. Если L второй категории в X и Y – F-пространство, то $L = X$ и Λ – непрерывно.

Доказательство.

1. Все последовательности Коши ограниченны $\Rightarrow$ по Б-Ш $\{\Lambda_n\}$ равностепенно непрерывна. Заметим, что $C \leqslant X$. Также, C – всюду плотное. $\big($Пусть не так $\Rightarrow$ тогда $X = \overline{C} \oplus Y$, то есть $\overline{C}$ – собственное подпространство. $\Rightarrow$ в нем нет внутренних точек $\Rightarrow$ оно I категории$\big)$.
   Возьмем $x \in X$, будем показывать, что $\Lambda_n x$ – последовательность Коши в Y, зафиксируем W – окрестность 0 в Y. По равностепенной непрерывности найдем симметричную V – окрестность 0 в X – такую, что ВСЕ $\Lambda_n(V) \subseteq W$. Так как C всюду плотно, найдем $y \in C \cap (x + V)$. Тогда НСНМ

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - y) + (\Lambda_n - \Lambda_m)y + \Lambda_m(y - x) \in W + W + W$$

2. Y – F-пространство $\Rightarrow L = C$ из предыдущего пункта $\Rightarrow L = X$. Возьмем такие же, как и в прошлом пункте W, V. Для них $\Lambda_n(V) \subseteq W$ при ВСЕХ n. Тогда $\Lambda(V) \subseteq \overline{W}$, что эквивалентно непрерывности Λ.

■

Теорема 1.7. $K \subseteq X$ – выпуклый компакт, $\Gamma \subseteq \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X, Y)$, причем $\Gamma(x)$ – ограниченно при всех $x \in K$. Тогда $\Gamma(K)$ – ограниченное.

1.3 Теорема об открытом отображении

Пусть $f : S \to T$ – отображение (S, T – топологические, f не обязательно непрерывна) и $p \in S$. Говорят, что f открыта в p, если для любой V – окрестности p образ $f(V)$ содержит окрестность $f(p)$.

Теорема 1.8. Пусть X – F-пространство, $\Lambda \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X, Y)$, причем $\Lambda(X)$ второй категории. Тогда

$$\text{(i) } \Lambda(X) = Y \Leftarrow \text{(ii) } \Lambda \text{ – открыто} \qquad \text{(iii) } Y \text{ – } F\text{-пространство}$$

Доказательство. Стрелка «$\Leftarrow$» объясняется тем, что $\Lambda(X)$ – подпространство в Y.

Теперь пусть V – окрестность 0 в X, мы хотим проверить, что $\Lambda(V)$ содержит окрестность 0 в Y. Заведем метрику гарантированную тем, что X это F-пространство d.

Определим

$$V_n = \left\{x \mid d(x, 0) < \frac{r}{2^n}\right\}$$

где r такой маленький, что $V_0 \subset V$. Мы будем показывать, что

$$W \underset{(A)}{\subseteq} \overline{\Lambda(V_1)} \underset{(B)}{\subseteq} \Lambda(V)$$

для некоторой окрестности нуля W в Y.

(A): Знаем, что
$$\overline{\Lambda(V_1)} \supseteq \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \supseteq \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}$$
так как $V_2 - V_2 \subseteq V_1$. Поэтому мы будем показывать, что $\operatorname{Int}\overline{\Lambda(V_2)}$ непусто. Действительно

$$\Lambda(X) = \cup_k k\Lambda(V_2) \;\Rightarrow\; \exists k:\; k\Lambda(V_2) - \text{II-категории} \Rightarrow\; \Lambda(V_2) - \text{II-категории} \;\Rightarrow\; \operatorname{Int}\overline{\Lambda(V_2)} \neq \varnothing$$

(B): Зафиксируем $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$. Индуктивно построим последовательность $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$ следующим образом. По тем же причинам, что и в пункте (A), внутри $\overline{\Lambda(V_n)}$ содержится окрестность нуля $\forall n$. Следовательно,

$$\left(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}\right) \cap \Lambda(V_n) \neq \varnothing,$$

а значит мы можем найти такую $x_n \in V_n$, что $\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$. Вот и определим $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$.

$$d(x_n, 0) < 2^{-n} r \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} x_k - \text{посл-ть Коши} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in V_0 \subseteq V$$

Также,
$$\Lambda\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1} \to y_1$$
Тут мы воспользовались непрерывностью Λ говоря, что $y_{m+1} \to 0$ при $m \to \infty$. Получили то, что $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V_0) \subseteq \Lambda(V)$

Теперь докажем (iii). Пусть $N = \ker \Lambda$. Мы знаем, что X/N – это F-пространство. Остаётся найти ТВП-изоморфизм $X/N \to Y$. Изоморфизм f векторных пространств строится из первой теоремы о гомоморфизме (☺).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Lambda"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Проверим, что он – гомеоморфизм.

1. Если V – открыто в Y, то $f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V))$ – открыто, поскольку Λ непрерывно, π – открыто.

2. Если E – открыто в X/N, то $f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$ – открыто, поскольку π непрерывно и Λ – открыто.

■

Следствия из нее

1. (a) Если X, Y – F-пространства и $\Lambda \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X, Y) \quad \Rightarrow \quad \Lambda$ – открыто
   (b) Если к тому же Λ – биекция, то $\quad \Rightarrow \quad \Lambda^{-1}$ непрерывно.
2. Если X, Y – Банаховы и $\Lambda \in \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X, Y)$ – биекция, то $\exists c, C > 0$: для всех $x \in X$
$$c||x|| \leqslant ||\Lambda x|| \leqslant C||x||$$
3. Если $\tau_1 \subseteq \tau_2$ – две векторые топологии на векторном пр-ве X и оба (X, τ_1), (X, τ_2) – F-пространства, то $\tau_1 = \tau_2$.

1.4 Теорема о замкнутом графике

Под графиком отображения $f : X \to Y$ имеется ввиду множество $\{(x, f(x))\}_{x \in X} \subseteq X \times Y$. Для непрерывных отображений в хаусдорфовы пространства график всегда замкнут, мы будем пытаться выяснить про какие-то факты, похожие на это. Для начала обоснуем факт про замкнутость графика непрерывной функции:

Замечание. Пусть $f : X \to Y$ непрерывна и Y – Хаусдорфово. Тогда график f замкнут.

Доказательство. Рассмотрим (x_0, y_0) из дополнения графика в $X \times Y$, тогда отделим по хаусдофовости в Y точки $y_0, f(x_0)$ окрестностями U, V соответственно. По непрерывности найдем W – окрестность x_0 в X такую, что $f(W) \subseteq V$. А значит, $W \times U$ – искомая окрестность (x_0, y_0), содержащаяся в дополнении графика. ■

Теорема 1.9 (О замкнутом графике). Пусть X, Y – F-пространства, $\Lambda \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и его график замкнут. Тогда Λ непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим $X \times Y$ как F-пространство. График Λ – обозначим его G – замкнутое подпространство в $X \times Y$ (поскольку лямбда линейна). А значит, G само по себе F-пространство Определим
$$\pi_1 : G \to X \ (x, \Lambda x) \mapsto x$$
$$\pi_2 : X \times Y \to Y \ (x, y) \mapsto y$$
Тогда π_1 непрерывная линейная биекция $G \to X$, причем G и X – F-пространства. Тогда по теореме об открытом отображении π_1^{-1} непрерывно. А значит,
$$\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \text{ непрерывна}$$
■

Замечание. Пусть для всяких $x_n \to x, \Lambda x_n \to y$ выполняется $y = \Lambda x$. Тогда график Λ замкнут.

1.5 Билинейные отображения

Пусть X, Y, Z – ТВП и $B : X \times Y \to Z$.

Можем определить $B_x : Y \to Z$, $B^y : X \to Z$ для фиксированных x, y – функции на срезах $X \times Y$. Если они непрерывны, то B называется **раздельно непрерывным**; если B_x, B^y линейны, то B называется **билинейным**. В некоторых случаях из раздельной непрерывности следует обычная непрерывность:

Теорема 1.10. Если X – F-пространство и B – раздельно непрерывное билинейное. Тогда B секвенциально непрерывно. В частности, если Y метризуемо, то B непрерывно.

Доказательство. Выберем $x_n \to x_0$ в X и $y_n \to y_0$ в Y Возьмем U, W окрестности 0 в Z такие, что $U + U \subseteq W$, положим $b_n(x) = B(x, y_n)$.

1. Так как эти последовательности сходятся, множества $\{b_n(x)\}$ ограничены в Z.
2. Тогда $b_n(x)$ – непрерывные линейные отображения из F-пространства X в Z.
3. Значит, по **??**[следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза], семейство $\{b_n\}$ равномерно непрерывно.

А значит найдется V – окрестность 0 в X такая, что $\forall n\ b_n(V) \subset U$. Тогда начиная с некоторого места:

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \in U + U \subseteq W$$

Если Y метризуемо, то $X \times Y$ метризуемо, а значит секвенциальная непрерывность эквивалентна обычной ■

2 Выпуклость

Обозначим $X^* := \mathbf{c}\mathrm{Hom}(X,)$, на этом множестве очевидно есть структура векторного пространства. Для следующей теоремы не нужна никакая топология.

Теорема 2.1. [Хана-Банаха] Пусть X – $\mathbb{R}$-векторное пространство, $M \leqslant X$. И даны:

1. $p : X \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условиям
$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(tx) = tp(x) \qquad \forall x, y \in X, \forall t > 0$$
2. $f \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R})$ – функционал такой, что $f \leqslant p$ на M.

Тогда существует $\Lambda \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ такой, что

$$\Lambda|_M = f, \qquad -p(-x) \leqslant \Lambda x \leqslant p(x),\ \forall x \in X$$

Доказательство. Пусть $M \neq X$, возьмем $x_1 \in X \backslash M$, положим $M_1 = M + \operatorname{span}(x_1)$. Научимся продолжать f до f_1 на M_1.

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - x_1) + p(x_1 - y)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) - p(x - x_1) \leqslant p(y + x_1) - f(y) \quad \forall x, y \in M$$

Тогда положим

$$\alpha := \sup_{x \in M} f(x) - p(x - x_1),$$

Определим $f(x + tx_1) = f(x) + t\alpha$ – функционал на M_1, причем $f_1 \leqslant p$ в силу неравенств $f(x) - \alpha \leqslant p(x - x_1)$ и $f(y) + \alpha \leqslant p(y + x_1)$..

Теперь будем аксиомой выбора продолжать всё это дело до X. А именно, мы воспользуемся теоремой Хаусдорфа. Определим

$$\mathcal{P} = \left\{(M', f') : M \leqslant M' \leqslant X,\ f' \text{ – функционал на } M' \text{: } f'|_M = f,\ f' \leqslant p\right\}$$

На $\mathcal{P}$ задан частичный порядок:

$$(M', f') \preccurlyeq (M'', f'') \ \Leftrightarrow\ (M' \leqslant M'') \ \wedge\ f''|_{M'} = f'$$

По теореме Хаусдорфа в $\mathcal{P}$ существует максимальное линейно-упорядоченное множество Ω. Положим

$$\Phi = \left\{M' \ : \ \exists f' \text{ – функционал на } M' \text{ такой, что} (M', f') \in \Omega\right\}$$

Тогда Φ линейно упорядочено относительно $\subseteq$, а значит

$$\tilde{M} = \cup\{M' \ : \ M' \in \Phi\} \textbf{ – подпространство в } X$$

Понятным образом продолжим f до Λ – функционала на $\tilde{M}$, подчиненного p. Также видно, что $\tilde{M}$ не может быть собственным подпространством X. Из линейности следует нужное неравенство. ■

Теорема 2.2 (Хана-Банаха x2). Пусть $M \leqslant X$, p – полунорма на X, f – функционал на M такой, что

$$|f| \leqslant p \quad \text{на } M$$

Тогда f можно продолжить до Λ – функционала на X такого, что

$$|\Lambda| \leqslant p \quad \text{на } X$$

Доказательство. Если X – это $\mathbb{R}$-пространство, то эта теорема следует из предыдущей. Если же это $\mathbb{C}$-пространство, положим $u = \operatorname{Re} f$.

$$\text{По (2.1) } u \text{ продолжается до } U \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}) \text{ подчиненного } p \text{ всюду.}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Если } \Lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C}) \text{ – такой, что } \operatorname{Re}\Lambda = U\text{, то } \Lambda|_M = f$$

$\blacksquare$