

Оглавление

0	Вступление	1
0.1	Про ограниченные множества	2
0.2	В Рудине такого не было!	3
1	О полноте	3
1.1	Теорема Банаха-Штейнгауза	3
1.2	Полезные частные случаи	4
1.3	Теорема об открытом отображении	5
1.4	Теорема о замкнутом графике	7
1.5	Билинейные отображения	8

0 Вступление

Во всем конспекте F обозначает поле скаляров, все векторные пространства будем смотреть только над ним. В качестве F мы берем только \mathbb{R} , либо \mathbb{C} с естественными топологиями на них.

Определение. Топологическое пространство X являющееся векторным пространством называется топологическим векторным пространством (ТВП), если

1. Топология удовлетворяет T_1 (синглетоны замкнуты)
2. Сложение и умножение на скаляр непрерывны

Замечание.

1. Сдвиг на любой вектор $u \mapsto u + v$ и растяжение на любой скаляр $\alpha \neq 0 : u \mapsto \alpha u$ являются гомеоморфизмами.
2. Топология для такого X всегда инвариантна относительно сдвигов.
3. Следовательно, полностью определяется локальной базой.

Это основное определение, помимо него напомним еще определений:

Определение. Пусть X – векторное пространство и $A \subseteq X$

1. Если $0 \in A$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha A + \beta A \subseteq A$, то A называется **подпространством** X ; обозначается $A \leq X$.
2. Если $\forall t \in (0, 1)$ выполняется $tA + (1 - t)A \subseteq A$, то A называется **выпуклым**.
3. Если $\forall \alpha \in F : |\alpha| \leq 1$ выполняется $\alpha A \subseteq A$, то A называется **уравновешенным**.

Замечание. Подпространства являются выпуклыми уравновешенными множествами.

Определение (Типы пространств). Пусть X – ТВП, говорим, что X

- (А) **локально выпукло**, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.
- (В) **локально ограничено**, если существует ограниченная окрестность нуля.
- (С) **локально компактно**, если существует предкомпактная окрестность нуля.
- (D) **метризуемо**, если его топология метризуема.
- (F) является **F-пространством**, если топология индуцируется **полной инвариантной метрикой**.

(G) является **пространством Фреше**, если оно локально-выпуклое F -пространство

(E) **нормируемо**, если существует норма, индуцирующая топологию X

(F) обладает свойством **Гейне-Бореля**, если

(ограниченное \wedge замкнутое \Rightarrow компактное)

Небольшой обзор результатов касающихся затронутых выше понятий

Теорема 0.1 (Воспоминания о будущем).

1. Локально ограничено \Rightarrow обладает счетной локальной базой.
2. Метризуемо \Leftrightarrow обладает счетной локальной базой.
3. Нормируемо \Leftrightarrow (локально выпукло \wedge локально ограничено)
4. Конечномерно \Leftrightarrow локально компактно
5. Обладает свойством Гейне-Бореля \Rightarrow конечномерно

0.1 Про ограниченные множества

Существует два различных определения ограниченных множеств, в которых легко запутаться, если речь идет о метризуемых ТВП:

(X, d) – **метрическое пространство**

$E \subset X$ называется ограниченным, если $\exists M > 0$:

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) < M$$

X – **ТВП**

$E \subset X$ называется ограниченным, если

$$\forall U - \text{окр.} 0 \quad \exists t_0 > 0 : \forall t > t_0$$

$$E \subseteq tU$$

Лемма 0.2. Если X нормируемое пространство и $d(x, y) = \|x - y\|$, то эти понятия совпадают. В ином случае они могут отличаться во всех нетривиальных случаях.

Доказательство очевидное, приведем пример, почему эти понятия различаются в иных случаях. Если d – любая метрика на X , то $d' = \frac{d}{1+d}$ – тоже метрика, причем эквивалентная изначальной. Однако относительно нее всё пространство (и все подмножества) будут ограничены.

0.2 В Рудине такого не было!

Категория ТВП – **TVect**.

1. $\text{Ob}(\mathbf{TVect})$ – топологические векторные пространства
2. $X \rightarrow Y$ это непрерывные линейные отображения.

Дисклеймер: не все стрелки в этом конспекте это морфизмы в категории.

Заметим, что **TVect** – конкретная категория, поэтому определен обычный забывающий функтор $F_S : \mathbf{TVect} \rightarrow \mathbf{Set}$. Также определим $F_V : \mathbf{TVect} \rightarrow \mathbf{Vect}$ – забывающий топологию функтор.

Если $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{TVect})$, то $\text{Hom}(X, Y)$ обозначает множество стрелок в **Vect** между $F_V(X)$ и $F_V(Y)$. Множество стрелок в **TVect** мы обозначаем как $\mathbf{cHom}(X, Y)$.

Во всем конспекте буквы X, Y, Z обозначают элементы $\text{Ob}(\mathbf{TVect})$.

1 О полноте

Определение. Говорят, что $A \subset X$ имеет I категорию, если $A = \bigcup_n E_n$, где каждое из E_n нигде не плотно. A имеет вторую II категорию в ином случае.

Теорема 1.1 (Бэра о полноте). В полных метрических пространствах и локально компактных хаусдорфовых пространствах

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{открытое, всюду плотное}) \quad - \text{всюду плотно}$$

1.1 Теорема Банаха-Штейнгауза

Сначала, введем определение

Определение. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Hom}(X, Y)$. Оно называется равностепенно непрерывным, если

$$\text{для любой } W \text{ – окр. } 0 \text{ в } Y \text{ существует } V \text{ – окр. } 0 \text{ в } X: \Gamma(V) \subseteq W$$

Как мы увидим ниже, равностепенно-непрерывные семейства переводят ограниченные множества в ограниченные. Теорема Банаха-Штейнгауза же скажет, что если точек, орбиты которых под действием Γ ограничены *много*, то Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Hom}(X, Y)$ – равностепенно непрерывно, а $E \subseteq X$ ограничено. Тогда $\Gamma(E)$ суть ограниченное множество в Y .

Доказательство. Рассмотрим W – окрестность 0 в Y , выберем V – окрестность 0 в X из определения. E – ограничено \Rightarrow имеем $E \subseteq tV$ для больших t . Для них же:

$$\Gamma(E) \subseteq \Gamma(tV) = t\Gamma(V) \subseteq tW$$

■

Теорема 1.3 (Банаха-Штейнгауза). Пусть $\Gamma \subseteq \mathbf{cNom}(X, Y)$. Предположим, что множество $B = \{x \in X : \Gamma(x) \text{ — ограниченно}\}$ имеет вторую категорию в X .

Тогда $B = X$ и Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Пусть W — уравновешенная окрестность 0 в Y , будем искать такую V в X , что $\Gamma(V) \subseteq W$. Для этого найдем такую U — уравновешенная окрестность 0 в Y , что $\overline{U} + \overline{U} \subseteq W$, положим

$$E = \cap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

$$x \in B \Rightarrow \Gamma(x) \in nU \text{ для больших } n \Rightarrow \frac{1}{n}x \in E \text{ для таких же } n$$

Тогда заметим, что $B \subseteq \cup_n nE$. Значит, какой-то из nE — множество второй категории. Заметив, что $x \mapsto nx$ это гомеоморфизм X получаем:

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ — множество второй категории} \\ E \text{ — замкнуто так как все } \Lambda \in \Gamma \text{ непрерывны} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{в } E \text{ есть внутренняя точка } x_0$$

Значит, в множестве $x_0 - E$ содержится окрестность нуля V , причем:

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subseteq \overline{U} - \overline{U} \subseteq W$$

Тогда Γ переводит ограниченные множества в ограниченные, а тогда $\Gamma(x)$ — ограниченное для всякого $x \Rightarrow B = X$. ■

1.2 Полезные частные случаи

Теорема 1.4. Пусть X — F -пространство и $\Gamma \subseteq \mathbf{cNom}(X, Y)$ и $\forall x \in X \Gamma(x)$ ограничено в Y . Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. По теореме Бэра, F -пространства являются множествами второй категории в себе. ■

Теорема 1.5. Пусть X — банахово, Y — нормируемо, причем $\sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\| < \infty$. Тогда существует такой $M > 0$, что

$$\|\Lambda x\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \Lambda \in \Gamma$$

Доказательство. Применим предыдущую теорему к метрикам, порожденным нормами. В них ограниченность эквивалентна метрической. ■

Теорема 1.6. Пусть $\Lambda_n \in \mathbf{cNom}(X, Y)$. Определим

$$C = \{x \in X : \Lambda_n x \text{ — последовательность Коши}\}; \quad L = \{x \in X : \Lambda_n x \rightarrow \Lambda x\}.$$

Тогда

1. Если C второй категории в X , то $C = X$

2. Если L второй категории в X и Y – F -пространство, то $L = X$ и Λ – непрерывно.

Доказательство.

1. Все последовательности Коши ограничены \Rightarrow по Б-Ш $\{\Lambda_n\}$ равномерно непрерывна. Заметим, что $C \leq X$. Также, C – всюду плотное. (Пусть не так \Rightarrow тогда $X = \overline{C} \oplus Y$, то есть \overline{C} – собственное подпространство. \Rightarrow в нем нет внутренних точек \Rightarrow оно I категории).

Возьмем $x \in X$, будем показывать, что $\Lambda_n x$ – последовательность Коши в Y , зафиксируем W – окрестность 0 в Y . По равномерно непрерывности найдем симметричную V – окрестность 0 в X – такую, что ВСЕ $\Lambda_n(V) \subseteq W$. Так как C всюду плотно, найдем $y \in C \cap (x + V)$. Тогда НСНМ

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - y) + (\Lambda_n - \Lambda_m)y + \Lambda_m(y - x) \in W + W + W$$

2. Y – F -пространство $\Rightarrow L = C$ из предыдущего пункта $\Rightarrow L = X$. Возьмем такие же, как и в прошлом пункте W, V . Для них $\Lambda_n(V) \subseteq W$ при ВСЕХ n . Тогда $\Lambda(V) \subseteq \overline{W}$, что эквивалентно непрерывности Λ .

■

Теорема 1.7. $K \subseteq X$ – выпуклый компакт, $\Gamma \subseteq \mathbf{cHom}(X, Y)$, причем $\Gamma(x)$ – ограничено при всех $x \in K$. Тогда $\Gamma(K)$ – ограниченное.

1.3 Теорема об открытом отображении

Пусть $f : S \rightarrow T$ – отображение (S, T – топологические, f не обязательно непрерывна) и $p \in S$. Говорят, что f открыта в p , если для любой V – окрестности p образ $f(V)$ содержит окрестность $f(p)$.

Теорема 1.8. Пусть X – F -пространство, $\Lambda \in \mathbf{cHom}(X, Y)$, причем $\Lambda(X)$ второй категории. Тогда

$$(i) \Lambda(X) = Y \iff (ii) \Lambda \text{ – открыто} \quad (iii) Y \text{ – } F\text{-пространство}$$

Доказательство. Стрелка « \Leftarrow » объясняется тем, что $\Lambda(X)$ – подпространство в Y .

Теперь пусть V – окрестность 0 в X , мы хотим проверить, что $\Lambda(V)$ содержит окрестность 0 в Y . Заведем метрику гарантированную тем, что X это F -пространство d .

Определим

$$V_n = \left\{ x \mid d(x, 0) < \frac{r}{2^n} \right\}$$

где r такой маленький, что $V_0 \subset V$. Мы будем показывать, что

$$W \underset{(A)}{\subseteq} \overline{\Lambda(V_1)} \underset{(B)}{\subseteq} \Lambda(V)$$

для некоторой окрестности нуля W в Y .

(A): Знаем, что

$$\overline{\Lambda(V_1)} \supseteq \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \supseteq \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}$$

так как $V_2 - V_2 \subseteq V_1$. Поэтому мы будем показывать, что $\text{Int } \overline{\Lambda(V_2)}$ непусто. Действительно

$$\Lambda(X) = \cup_k k\Lambda(V_2) \Rightarrow \exists k : k\Lambda(V_2) - \Pi\text{-категории} \Rightarrow \Lambda(V_2) - \Pi\text{-категории} \Rightarrow \text{Int } \overline{\Lambda(V_2)} \neq \emptyset$$

(B): Зафиксируем $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$. Индуктивно построим последовательность $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$ следующим образом. По тем же причинам, что и в пункте (A), внутри $\overline{\Lambda(V_n)}$ содержится окрестность нуля $\forall n$. Следовательно,

$$(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}) \cap \Lambda(V_n) \neq \emptyset,$$

а значит мы можем найти такую $x_n \in V_n$, что $\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$. Вот и определим $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$.

$$d(x_n, 0) < 2^{-n}r \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k - \text{посл-ть Коши} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in V_0 \subseteq V$$

Также,

$$\Lambda \left(\sum_{n=1}^m x_n \right) = \sum_{n=1}^m \Lambda x_n = \sum_{n=1}^m (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1} \rightarrow y_1$$

Тут мы воспользовались непрерывностью Λ говоря, что $y_{m+1} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Получили то, что $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V_0) \subseteq \Lambda(V)$

Теперь докажем (iii). Пусть $N = \ker \Lambda$. Мы знаем, что X/N – это F -пространство. Остаётся найти ТВП-изоморфизм $X/N \rightarrow Y$. Изоморфизм f векторных пространств строится из первой теоремы о гомоморфизме (☺).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & Y \\ \pi \searrow & & \nearrow f \\ & X/N & \end{array}$$

Проверим, что он – гомеоморфизм.

1. Если V – открыто в Y , то $f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V))$ – открыто, поскольку Λ непрерывно, π – открыто.
2. Если E – открыто в X/N , то $f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$ – открыто, поскольку π непрерывно и Λ – открыто.

■

Следствия из нее

1. (а) Если X, Y – F -пространства и $\Lambda \in \mathbf{cHom}(X, Y) \Rightarrow \Lambda$ – открыто
 (б) Если к тому же Λ – биекция, то $\Rightarrow \Lambda^{-1}$ непрерывно.
2. Если X, Y – Банаховы и $\Lambda \in \mathbf{cHom}(X, Y)$ – биекция, то $\exists c, C > 0$: для всех $x \in X$

$$c\|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq C\|x\|$$
3. Если $\tau_1 \subseteq \tau_2$ – две векторные топологии на векторном пр-ве X и оба $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ – F -пространства, то $\tau_1 = \tau_2$.

1.4 Теорема о замкнутом графике

Под графиком отображения $f : X \rightarrow Y$ имеется ввиду множество $\{(x, f(x))\}_{x \in X} \subseteq X \times Y$. Для непрерывных отображений в хаусдорфовы пространства график всегда замкнут, мы будем пытаться выяснить про какие-то факты, похожие на это. Для начала обоснуем факт про замкнутость графика непрерывной функции:

Замечание. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывна и Y – Хаусдорфово. Тогда график f замкнут.

Доказательство. Рассмотрим (x_0, y_0) из дополнения графика в $X \times Y$, тогда отделим по хаусдорфовости в Y точки $y_0, f(x_0)$ окрестностями U, V соответственно. По непрерывности найдем W – окрестность x_0 в X такую, что $f(W) \subseteq V$. А значит, $W \times U$ – искомая окрестность (x_0, y_0) , содержащаяся в дополнении графика. ■

Теорема 1.9 (О замкнутом графике). Пусть X, Y – F -пространства, $\Lambda \in \mathbf{Hom}(X, Y)$ и его график замкнут. Тогда Λ непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим $X \times Y$ как F -пространство. График Λ – обозначим его G – замкнутое подпространство в $X \times Y$ (поскольку лямбда линейна). А значит, G само по себе F -пространство Определим

$$\pi_1 : G \rightarrow X \quad (x, \Lambda x) \mapsto x$$

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y \quad (x, y) \mapsto y$$

Тогда π_1 непрерывная линейная биекция $G \rightarrow X$, причем G и X – F -пространства. Тогда по теореме об открытом отображении π_1^{-1} непрерывно. А значит,

$$\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \text{ непрерывна}$$

■

Замечание. Пусть для всяких $x_n \rightarrow x, \Lambda x_n \rightarrow y$ выполняется $y = \Lambda x$. Тогда график Λ замкнут.

1.5 Билинейные отображения

Пусть X, Y, Z – ТВП и $B : X \times Y \rightarrow Z$.

Можем определить $B_x : Y \rightarrow Z$, $B^y : X \rightarrow Z$ для фиксированных x, y – функции на срезе $X \times Y$. Если они непрерывны, то B называется **раздельно непрерывным**; если B_x, B^y линейны, то B называется **билинейным**. В некоторых случаях из раздельной непрерывности следует обычная непрерывность:

Теорема 1.10. Если X – F -пространство и B – раздельно непрерывное билинейное. Тогда B секвенциально непрерывно. В частности, если Y метризуемо, то B непрерывно.

Доказательство. Выберем $x_n \rightarrow x_0$ в X и $y_n \rightarrow y_0$ в Y . Возьмем U, W окрестности 0 в Z такие, что $U + U \subseteq W$, положим $b_n(x) = B(x, y_n)$.

1. Так как эти последовательности сходятся, множества $\{b_n(x)\}$ ограничены в Z .
2. Тогда $b_n(x)$ – непрерывные линейные отображения из F -пространства X в Z .
3. Значит, по ??[следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза], семейство $\{b_n\}$ равномерно непрерывно.

А значит найдется V – окрестность 0 в X такая, что $\forall n \ b_n(V) \subset U$. Тогда начиная с некоторого места:

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \in U + U \subseteq W$$

Если Y метризуемо, то $X \times Y$ метризуемо, а значит секвенциальная непрерывность эквивалентна обычной ■