Опр: $E \subset X$ — нигде не плотно, если $\operatorname{int}(\overline{E}) = \varnothing$

E — мн-во I категории, если $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ $\quad S_n$ — нигде не плотно

E — мн-во II категории, если не I-й

Св-ва: 1) B — мн-во I катег., $A \subset B \Rightarrow A$ — мн-во I кат.

2) $\{A_n\}$ — посл-ть мн-во I катег $\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — мн-во I кат.

3) F — замк. $\operatorname{int}(F) = \varnothing \Rightarrow F$ - мн-во I кат.

4) Категор — топол. св-во, категория не меняется при гомеоморф.

Теорема: (Бэра о категории) X — либо:

1) полное метр. пр-во, 2) лок. комп. хаусдорфово

$\Rightarrow \forall \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — откр. вс. плотно в X $\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ — вс. плотно

Зам: 1) U — нигд. не плот. $\Leftrightarrow X \setminus \overline{U}$ — вс. плотно

2) $\{V_n\}$ — нигде не плотн. $\Rightarrow U_n = X \setminus \overline{V_n}$ — откр. вс. плотн

$\underset{\text{по т. Бэра}}{\Rightarrow}$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing \Rightarrow X \setminus \left(\bigcup\limits_{n} V_n\right) \neq \varnothing$

$\Rightarrow X \neq \bigcup\limits_{n=1} V_n$ (т.е. X — мн-во II категор в себе)

<u>д-во</u>: $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — откр. вс. плот. в X

B_0 — откр, $\neq \emptyset$ в X, рассм $\operatorname{int}(U_1 \cap B_0) \neq \emptyset$

$\exists B_1$ — откр, $\neq \emptyset$: $B_1 \subset \overline{B_1} \subset U_1 \cap B_0$?

в 1) B_1 — шарик, в 2) $\overline{B_1}$ — комп.

<u>по индукции</u>: построены $B_0, \ldots, B_{n-1}$

берем B_n: $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$ $\boxed{r_n < \frac{1}{n}}$

рассм: $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$

1) $\{B_n\}$ — влож. шары $r_n \to 0$ $\Rightarrow$ центры B_n — посл-ть Коши

$\Rightarrow$ по полноте центры $\to$ сх-ся. $\Rightarrow K \neq \emptyset$

2) $\overline{B_n}$ — компакт. $\Rightarrow K \neq \emptyset$

$K \subset B_0$

$\forall n \; K \subset U_n$

$\Rightarrow B_0 \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n\right) \neq \emptyset$

$\forall\ \mathcal{U}$ - откр в X $\quad \mathcal{U} \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n\right) \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap \mathcal{U}_n$ - вс. плот. ■

<u>Опр:</u> X, Y - т.в.п. $\quad \Gamma$ - сем-во лин. отобр. $\Lambda: X \to Y$

Γ - равностепенно непр., если $\forall\ \mathcal{U}$ - окр. 0 в Y $\ \exists\ V$ - окр 0 в X:

$\forall\ \Lambda \in \Gamma \quad \Lambda(V) \subset \mathcal{U}$

<u>Теорема:</u> (о равномерн. огр. равност. непр. сем-ва)

X, Y - т.в.п. $\quad \Gamma$ - равностеп. непр. $\quad E \subset X$ - огр. мн-во

$\Rightarrow \exists\ F \subset Y$ - огранич : $\forall\ \Lambda \in \Gamma \quad \Lambda(E) \subset F$

<u>д-во:</u> E - огр. в X $\quad$ возьмем $F = \bigcup\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda(E)$

$\forall\ \Lambda \in \Gamma \quad \Lambda(E) \subset F$ ✓

$\mathcal{U}$ - окр 0 в Y $\quad \Gamma$ - равностен. непр $\Rightarrow \exists\ V$ - окр 0 в X:

$\forall\ \Lambda \in \Gamma \quad \Lambda(V) \subset \mathcal{U}$

E - огр. $\Rightarrow$ НСНМ $\ E \subset tV \Rightarrow \Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset t \cdot \mathcal{U}$

НСНМ $\quad \Lambda(E) \subset t \cdot \mathcal{U} \quad \forall\ \Lambda \in \Gamma$

$\Rightarrow$ $\forall\, \mathcal{U}$ - окр 0 в Y $\exists$ НСНМ $F \subset t \cdot \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ F - огран. ✓

■

<u>Теорема</u>: (Банаха - Штейнгауза) X, Y - т.в.п. Γ - сем-во непр. лин. отобр.

$\Gamma(x) = \{ \Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma \}$ - орбита x

$B = \{ x \in X \mid \Gamma(x)$ - огр. в $Y \}$

если B - мн-во II категор, то $B = X$, а Γ - равност. непр.

<u>д-во</u>: берем $\mathcal{U}, W$ - уравн. окр 0 в Y ! $\overline{\mathcal{U}} + \overline{\mathcal{U}} \subset W$

рассм. $x \in B \Rightarrow \Gamma(x)$ - огр в Y $\Rightarrow \exists\, n : \Gamma(x) \subset n\mathcal{U}$

$\Downarrow$ $x \in nE$

рассм. $E = \bigcap\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$

$\Gamma(x) \subset n\mathcal{U} \Rightarrow \forall\, \Lambda \in \Gamma \quad \Lambda x \in n\mathcal{U} \Rightarrow \forall \Lambda \in \Gamma \quad x \in \bigcap\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(n\overline{\mathcal{U}})$

$\boxed{n = n(x)}$

$\bigcap\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(n\overline{\mathcal{U}}) \subseteq n \bigcap\limits_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}}) = nE$

$\Rightarrow B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nE$

В-мн-во II категории $\Rightarrow$ хотя бы одно из nE — II категор.
$n_0 E$ — II категор.

рассм. $x \longmapsto n_0 \cdot x$ — гомеоморф. $\Rightarrow$ E — II категор.
Кроме того, E — замкнуто
$\Rightarrow \operatorname{int}(E) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\exists\, x_0$ - внутр. $\bar{E}$ $\Rightarrow$ $\exists\, V$ - окр 0 : $V \subset x_0 - E$

$$\Rightarrow \Lambda(V) \subset \Lambda(x_0 - E) = \underset{\overline{\mathcal{U}}}{\underset{\cap}{\Lambda x_0}} - \underset{\overline{\mathcal{U}}}{\underset{\cap}{\Lambda E}} \subset \overline{\mathcal{U}} - \overline{\mathcal{U}} \subset W \qquad \forall \lambda \in \Gamma$$

$\underbrace{\forall W\text{-уравн. окр } 0 \text{ в } Y}$ $\exists\, V$ — окр 0 в X : $\forall \lambda \in \Gamma$ $\lambda(V) \subset W$
$\Downarrow$
$\forall W$ - окр. 0 в Y $\Rightarrow$ Γ — равностеп. непр.

$\underset{\text{по т. о равн. огр.}}{\Rightarrow}$ $\forall x \in X$ $\Gamma(x)$ — огран. $\Rightarrow$ $B = X$

<u>Теорема:</u> Γ — сем-во непр. лин. отобр. $\Lambda: X \to Y$
X — F-пр-во, Y — т.в.п.

Если $\forall x \in X$ $\Gamma(x) = \{ \Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma \}$ — огр в Y $\Rightarrow$ Γ — равностеп. непр

Зам: 1) поточ. огран. $\Rightarrow$ равн. огранич.

2) X — банахово Y — нормир.

Если $\forall x \in X$ $\sup\limits_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\| = C(x) < \infty$ (поточ. огранич.)

$\Rightarrow \exists C :$ $\forall x$ $\|x\| \leq 1$ $\forall \Lambda \in \Gamma$ $\|\Lambda x\| \leq C$

$\Rightarrow \forall x$ $\forall \Lambda \in \Gamma$ $\|\Lambda x\| \leq C \|x\|$ $\left(\left\| \Lambda \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq C \right)$

$\left\| \Lambda \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| \cdot \|\Lambda x\|$

Теорема: (непр-ть предел посл-ти непр. отобр.)

X, Y — т.в.п. $\{\Lambda_n\}$ — посл-ть непр лин. отобр. $X \to Y$

1) $C = \{ x \mid \{\Lambda_n x\}$ — посл-ть Коши в $Y \}$

если C — II категор $\Rightarrow C = X$

2) $L = \{ x \mid \exists \Lambda x = \lim\limits_{n \to \infty} \Lambda_n x \}$ Λ — поточ. предел Λ_n

Если L – мн-во II категор], то $L = X$ $\quad \Lambda$ – непр. и Y – F-пр-во

<u>Д-во</u>: 1) $\Gamma = \{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad x \in C \Rightarrow \{\Lambda_n x\}$ – посл. Коши $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\Lambda_n x\}$ – огр. в Y] $\Rightarrow$

C – это и есть B из т. Б-Ш.

$\Rightarrow \{\Lambda_n\}$ – равностеп. непр.

$x, y \in C \Rightarrow \{\Lambda_n x\}, \{\Lambda_n y\}$ – посл. Коши $\Rightarrow \{\lambda \Lambda_n x + \mu \Lambda_n y\}$ – посл. Коши

$\Rightarrow C$ – подпр-во X

(!) C – вс. плотно $\quad$ ∃ противное: $\quad \overline{C} \neq X \Rightarrow \overline{C}$ – собств. подпр-во X

$X = \overline{C} \oplus Y$ $\quad$ Если $\exists\, x_0 \in \overline{C}$ – внутр. $\Rightarrow$?!!

$\Rightarrow \operatorname{int}(\overline{C}) = \varnothing \Rightarrow C$ – мн-во I категор $\Rightarrow$?!!

$\Rightarrow C$ – вс. плот. $\quad \boxed{X \in X}$ $\quad W$ – опр о. в Y

$\{\Lambda_n\}$ – равност. непр $\Rightarrow$ $\exists\, V$ - окр 0 в X :

$\forall n \quad \Lambda_n(V) \subset W$

C – вс. плотно $\Rightarrow$ $y \in C \cap (x+V)$ $\Rightarrow$ $\overset{\text{НСНМ}}{\exists}\, m, n \quad \Lambda_m y - \Lambda_n y \in W$

рассм $(\Lambda_m - \Lambda_n)x = \Lambda_m x - \Lambda_n x = \Lambda_m x - \Lambda_m y + \Lambda_m y - \Lambda_n x =$

$= \Lambda_m(x-y) + \Lambda_n y - \Lambda_n x + \Lambda_n y - \Lambda_n y = \Lambda_m(x-y) + \Lambda_n(y-x) +$

$+ (\Lambda_m - \Lambda_n) y$

$W \quad W \quad W$

$\Rightarrow \Lambda_m x - \Lambda_n x \in W \leftarrow$ НСНМ $\Rightarrow \{\Lambda_n x\}$ – посл-ть Коши в Y

$\Rightarrow \boxed{x \in C}$

■