Посчитать $KL(P||Q)$, где $P = \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2), Q = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. Обозначим p,q – функции плотностей P, Q соответственно. По определению:

$$KL(P \mid\mid Q) = -H[P] - \int p(x) \log q(x) dx = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma_0^2 - \frac{1}{2} - \int p(x) \log q(x) dx$$

Посчитаем этот второй интеграл:

$$\int p(x) \log q(x) dx = \int p(x) \left(-\log \sqrt{2\pi\sigma_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) dx =$$

$$= -\log \sqrt{2\pi\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \int p(x)(x - \mu_1)^2 dx$$

А теперь посчитаем новый возникший интеграл:

$$\int p(x)(x-\mu_1)^2 dx = \int p(x)(x-\mu_0+\mu_0-\mu_1)^2 dx = \int p(x)\big((x - \mu_0)^2 + (\mu_0 - \mu_1)^2 + 2(\mu_0 - \mu_1)(x - \mu_0)\big) dx =$$

$$= (\mu_0 - \mu_1)^2 + \sigma_0^2 + 2(\mu_0 - \mu_1) \int p(x)(x - \mu_0) dx = (\mu_0 - \mu_1)^2 + \sigma_0^2$$

Последнее равенство верно потому что интеграл справа это $E(X - EX) = 0$. Соберем все вычисления вместе:

$$KL(P \mid\mid Q) = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma_0^2 - \frac{1}{2} + \log \sqrt{2\pi\sigma_1^2} + \frac{(\mu_0 - \mu_1)^2 + \sigma_0^2}{2\sigma_1^2} = \log \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} + \frac{(\mu_0 - \mu_1)^2 + \sigma_0^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2}$$