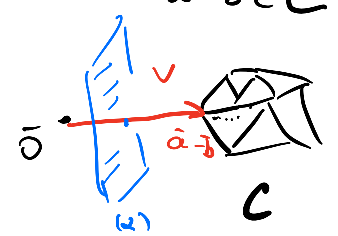
$X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ – выборки

X, Y – линейно разделимы $\iff$ $Conv(X) \cap Conv(Y) = \varnothing$

$\square$ Пусть $A = Conv(X)$, $B = Conv(Y)$. Т.к. $|X|, |Y| < \infty$, $Conv(X), Conv(Y)$ – полиэдры (теорема Вейля-Минковского).

$\Rightarrow C = A - B$ – выпуклый полиэдр (замкнутый) и $\bar{0} \notin C$

$\Rightarrow dist(\bar{0}, C) = R > 0$ – и это расстояние реализуется на $a - b \in C$. $\bar{v} := \bar{a} - \bar{b}$, $|\bar{v}| = R$.

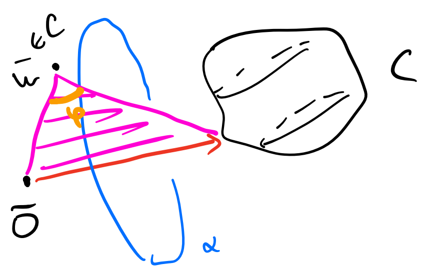


Рассмотрим (α): $\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle - \frac{R}{2} = 0$ – плоскость. ("срединный перпендикуляр")

Покажем, что она разделяет $\{0\}$ и C.

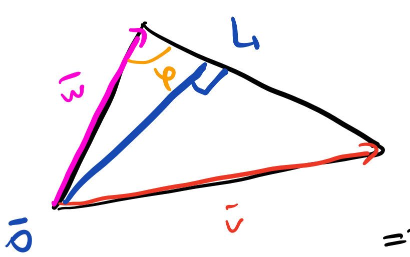
Пусть нет: $\exists \bar{w} \in C: \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle < 0 \Rightarrow$

Рассмотрим плоскость на концах $\bar{w}, \bar{0}, \bar{v}$ (или прямой)



- Если угол φ $\bar{0}\bar{w}\bar{v}$ тупой, то $dist(\bar{0}, \bar{w}) < dist(\bar{0}, \bar{v}) \Rightarrow$ расстояние было не минимальным ?!

- Если угол φ $\bar{0}\bar{w}\bar{v}$ острый $\Rightarrow$ перпендикуляр $\bar{0}L$ на прямую $\bar{w}\bar{v}$ лежит на отрезке между концами $\Rightarrow L_1 \in C$ (по выпуклости)



$\Rightarrow |\bar{0}L_1| < |\bar{v}| \Rightarrow$ расстояние было не минимальным ?!

$\blacksquare$