

Серия 1. Вводная и предпраздничная.

Symmetry is a vast subject,
significant in art and nature.
Mathematics lies at its root, and it
would be hard to find a better one
on which to demonstrate the
working of the mathematical
intellect.

Герман Вейль

0. Докажите, что композиция отображений ассоциативна, т.е., что для $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1. а) Докажите, что нейтральный элемент группы единственен. б) Докажите, что для любого элемента $g \in G$ существует единственный обратный элемент g^{-1} .

2. а) Опишите (словами и геометрически) группу симметрий квадрата. б) Найдите в ней такой элемент x , что $x^3 = R_{90^\circ}$. в) Найдите три симметрии квадрата $f, g, h \in D_4$, для которых $fg = gh$, но $f \neq h$.

Определение. Полугруппой называют множество с ассоциативной бинарной операцией.

3. а) Пусть в группе G для любого $g \in G$ выполнено $g^2 = e$. Докажите, что G — абелева группа. б) Пусть G — конечная полугруппа. Докажите, что существует такой элемент $g \in G$, что $g^2 = e$.

4. Вася нарисовал бесконечно длинную полоску из букв H на одинаковом расстоянии.

... H H H H H H H H H H ...

Помогите Васе описать группу симметрий этого рисунка.