Серия 5. А теперь к делу.

0. Вычислите фатькторгруппу группы симметрий пятиугольника по подгруппе поворотов. m

Определение. Пусть G — группа. *Коммутатором* элементов g и h называется $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

1. Для группы G обозначим через $[G,G]$ подгруппу $\langle [g,h] \mid f,h \in G \rangle$. а) Докажите, что $[G,G] \trianglelefteq G$, б) Докажите, что $G/[G,G]$ — абелева группа.

2. Пусть G — группа, H, K — её подгруппы. а) Докажите, что $K \le H,\ H \le G \implies K \le G$. б) Пусть $K \trianglelefteq H,\ H \trianglelefteq G$. Верно ли, что $K \trianglelefteq G$?

3. Пусть H и K — подгруппы в G. Докажите, что

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Определение. Обозначим группу матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$ за $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

4. Проверьте, что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ это действительно группа и постройте изоморфизм в группу дробно-линейных преобразований $\mathbb{H}^2$.

Во всех задачах ниже G — транзитивная на уровнях подгруппа $\mathrm{Aut}(X^*)$.

5. Докажите, что для любой вершины $v \in X^n$ её стабилизатор $\mathrm{Stab}(v)$ — это подгруппа индекса $|X|^n$ в группе G.

6. Докажите, что для любой вершины $v \in X^*$ и любого $g \in G$ жесткий стабилизатор $G[v]$ обладает следующим свойством:

$$G[g(v)] = gG[v]g^{-1}.$$

7. Докажите, что если слово v является началом слова $u \in X^*$, то $\mathrm{Stab}(u) \le \mathrm{Stab}(v)$ и $G[u] \le G[v]$.

8. Докажите, что уровневые стабилизаторы $\mathrm{Stab}(n)$ являются нормальными подгруппами конечного индекса в G и

$$\bigcap_{n \ge 1} \mathrm{Stab}(n) = \{e\}.$$