

## Серия 1. Групповая практика.

Symmetry is a vast subject, significant in art and nature. Mathematics lies at its root, and it would be hard to find a better one on which to demonstrate the working of the mathematical intellect.

Герман Вейль

0. Докажите, что композиция отображений ассоциативна, т.е., что для  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1. а) Докажите, что нейтральный элемент группы единственен. б) Докажите, что для любого элемента  $g \in G$  существует единственный обратный элемент  $g^{-1}$ .

2. а) Опишите (словами и геометрически) группу симметрий квадрата. б) Найдите в ней такой элемент  $x$ , что  $x^3 = R_{90^\circ}$ . в) Найдите три симметрии квадрата  $f, g, h \in D_4$ , для которых  $fg = gh$ , но  $f \neq h$ .

**Определение.** Полугруппой называют множество с ассоциативной бинарной операцией.

3. а) Пусть в группе  $G$  для любого  $g \in G$  выполнено  $g^2 = e$ . Докажите, что  $G$  — абелева группа. б) Пусть  $G$  — конечная полугруппа. Докажите, что существует такой элемент  $g \in G$ , что  $g^2 = e$ .

4. Карлсон, убежавший от бабушки, сидит на дереве с одним носком, надетым на одну из ног. Он может оставить носок на ноге, переодеть его на другую ногу или вывернуть его, оставив на той же ноге. Опишите группу, которая получается из таких преобразованиях.

5. а) Опишите группу симметрий прямоугольника, который не является квадратом. б) Опишите группу симметрий параллелипипеда, который не является кубом (например, спичечного коробка). в) Обобщите предыдущие два пункта на высшие размерности.

