

[12pt]article  
 graphicx  
 booktabs enumitem  
 [english,russian]babel [T1]fontenc libertine  
 titling textcomp  
 mathtext amsmath,amsfonts,amssymb,amsthm,mathtools icomma import  
 pdfpages transparent  
 caption epigraph  
 comment xfrac moresize dsfont  
 Предложение Следствие Теорема Определение  
 Пример Наблюдение Домашнее задание Антипример Лемма Замечание Упражнение  
 geometry  
 left=0.5cm,right=0.5cm,top=1.5cm,bottom=1cm, a4paper  
 ord ordldldididexiexioscosnumnumcharcharCardCardskskdendenessupessupranranrankrankdomdomdiamdi  
 sign signIntIntRelIntRelIntClClClClCW CW Ideals IdealsprprindindAff Af f Aut AutconvconvFrFrTrTrNNspa  
 xcolor [unicode, pdftex]hyperref  
 esint  
 pgfplots tikz mathtools  
 pdfscape wrapfig

## Серия 1. Групповая практика.

Symmetry is a vast subject,  
 significant in art and nature.  
 Mathematics lies at its root, and it  
 would be hard to find a better one  
 on which to demonstrate the  
 working of the mathematical  
 intellect.

---

Герман Вейль

0. Докажите, что композиция отображений ассоциативна, т.е., что для  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1. а) Докажите, что нейтральный элемент группы единственен. б) Докажите, что для любого элемента  $g \in G$  существует единственный обратный элемент  $g^{-1}$ .

2. а) Опишите (словами и геометрически) группу симметрий квадрата. б) Найдите в ней такой элемент  $x$ , что  $x^3 = R_{90^\circ}$ . в) Найдите три симметрии квадрата  $f, g, h \in D_4$ , для которых  $fg = gh$ , но  $f \neq h$ .

**Определение.** Полугруппой называют множество с ассоциативной бинарной операцией.

3. а) Пусть в группе  $G$  для любого  $g \in G$  выполнено  $g^2 = e$ . Докажите, что  $G$  — абелева группа. б) Пусть  $G$  — конечная полугруппа. Докажите, что существует такой элемент  $g \in G$ , что  $g^2 = e$ .

4. Карлсон, убежавший от бабушки, сидит на дереве с одним носком, надетым на одну из ног. Он может оставить носок на ноге, переодеть его на другую ногу или вывернуть его, оставив на той же ноге. Опишите группу, которая получается из таких преобразованиях.

5. а) Опишите группу симметрий прямоугольника, который не является квадратом. б) Опишите группу симметрий параллелепипеда, который не является кубом (например, спичечного коробка). в) Обобщите предыдущие два пункта на высшие размерности.

