

Однажды, сидя под деревом бодхи, Сиддхартха достиг просветления. Ему открылась истина о природе страдания и пути к освобождению от него. Он понял, что основной источник страданий — это желание и привязанность к материальным вещам. Из этого понимания родилось учение о восьми благородных истин и пути к просветлению — Изначальному Учению.

Об автоморфизмах деревьев.

0. Вычислите факторгруппу группы симметрий пятиугольника по подгруппе поворотов.

Определение. Пусть G — группа. Коммутатором элементов g и h называется $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

1. Для группы G обозначим через $[G, G]$ подгруппу $\langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$. а) Докажите, что $[G, G] \trianglelefteq G$, б) Докажите, что $G/[G, G]$ — абелева группа.
2. Пусть G — группа, H, K — её подгруппы. а) Докажите, что $K \leq H, H \leq G \implies K \leq G$.
- б) Пусть $K \trianglelefteq H, H \trianglelefteq G$. Верно ли, что $K \trianglelefteq G$?
3. Пусть H и K — подгруппы в G . Докажите, что

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Определение. Обозначим группу матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$ за $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

4. Проверьте, что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ это действительно группа и постройте изоморфизм в группу дробно-линейных преобразований \mathbb{H}^2 .

Во всех задачах ниже G — транзитивная на уровнях подгруппа $\mathrm{Aut}(X^*)$.

5. Докажите, что для любой вершины $v \in X^n$ её стабилизатор $\mathrm{Stab}(v)$ — это подгруппа индекса $|X|^n$ в группе G .

6. Докажите, что для любой вершины $v \in X^*$ и любого $g \in G$ жесткий стабилизатор $G[v]$ обладает следующим свойством:

$$G[g(v)] = gG[v]g^{-1}.$$

7. Докажите, что если слово v является началом слова $u \in X^*$, то $\mathrm{Stab}(u) \leq \mathrm{Stab}(v)$ и $G[u] \leq G[v]$.

8. Докажите, что а) уровневые стабилизаторы $\mathrm{Stab}(n)$ являются нормальными подгруппами конечного индекса в G . б) Докажите, что

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathrm{Stab}(n) = \{e\}.$$

Однажды, сидя под деревом бодхи, Сиддхартха достиг просветления. Ему открылась истина о природе страдания и пути к освобождению от него. Он понял, что основной источник страданий — это желание и привязанность к материальным вещам. Из этого понимания родилось учение о восьми благородных истин и пути к просветлению — Изначальному Учению.

Об автоморфизмах деревьев.

0. Вычислите факторгруппу группы симметрий пятиугольника по подгруппе поворотов.

Определение. Пусть G — группа. Коммутатором элементов g и h называется $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

1. Для группы G обозначим через $[G, G]$ подгруппу $\langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$. а) Докажите, что $[G, G] \trianglelefteq G$, б) Докажите, что $G/[G, G]$ — абелева группа.
2. Пусть G — группа, H, K — её подгруппы. а) Докажите, что $K \leq H, H \leq G \implies K \leq G$.
- б) Пусть $K \trianglelefteq H, H \trianglelefteq G$. Верно ли, что $K \trianglelefteq G$?
3. Пусть H и K — подгруппы в G . Докажите, что

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Определение. Обозначим группу матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$ за $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

4. Проверьте, что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ это действительно группа и постройте изоморфизм в группу дробно-линейных преобразований \mathbb{H}^2 .

Во всех задачах ниже G — транзитивная на уровнях подгруппа $\mathrm{Aut}(X^*)$.

5. Докажите, что для любой вершины $v \in X^n$ её стабилизатор $\mathrm{Stab}(v)$ — это подгруппа индекса $|X|^n$ в группе G .

6. Докажите, что для любой вершины $v \in X^*$ и любого $g \in G$ жесткий стабилизатор $G[v]$ обладает следующим свойством:

$$G[g(v)] = gG[v]g^{-1}.$$

7. Докажите, что если слово v является началом слова $u \in X^*$, то $\mathrm{Stab}(u) \leq \mathrm{Stab}(v)$ и $G[u] \leq G[v]$.

8. Докажите, что а) уровневые стабилизаторы $\mathrm{Stab}(n)$ являются нормальными подгруппами конечного индекса в G . б) Докажите, что

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathrm{Stab}(n) = \{e\}.$$