Тупики в группе целых чисел

Анна Бобрикова, Таисия Липатова

Май 2024

Сириус, IV Майская проектная смена по математике и теоретической информатие

Содержание

Введение

Граф Кэли

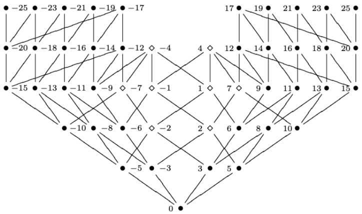

Рис. 1: Граф Кэли для образующих 3, 5

Определения

Графом Кэли группы G по системе образующих S является граф, вершинами которого являются элементы группы, и элемент g соединён ребром в точности с теми элементами, которые получаются домножением g на элемент из S.

Формулировка проблемы

Определения

$\ell(g)$ — длина кратчайшего слова, соответствующего элементу g.

Геодезическое слово — кратчайшее слово, соответствующее элементу.

Слово w — *тупик*, если w геодезическое слово и его нельзя продолжить на одну букву до другого геодезического слова.

Элемент g — *тупик*, если для любой буквы s выполняется $\ell(g \circ [s]) \leq l(g)$.

Формулировка проблемы

Определения

$\ell(g)$ — длина кратчайшего слова, соответствующего элементу g.

Геодезическое слово — кратчайшее слово, соответствующее элементу.

Слово w — *тупик*, если w геодезическое слово и его нельзя продолжить на одну букву до другого геодезического слова.

Элемент g — *тупик*, если для любой буквы s выполняется $\ell(g \circ [s]) \leq l(g)$.

Вопрос

Как выглядт тупики в группе $\mathbb{Z} \cong \langle S \rangle$, где $|S| > 1$.

Тупики для двух порождающих

Связь с числами Фробениуса

Тупики в $\mathbb{Z}$ для двух порождающих = *максимальные* числа Фробениуса

Эта теорема доказана в работе [Sun07].

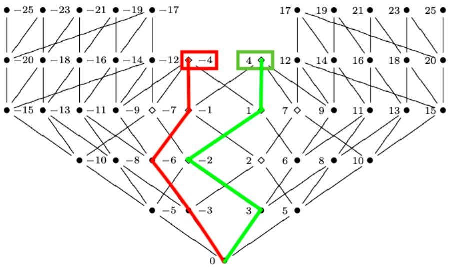

Рис. 2: Числа Фробениуса для образующих 3, 5

Рисование $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}^{|S|}$

$$f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z} = \langle \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rangle$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

Рисование $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}^{|S|}$

$$f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z} = \langle \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rangle$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

$$f^{-1}(\text{ТУПИКИ}) = ???$$

Рисование $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}^{|S|}$

$$f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z} = \langle \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rangle$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

$$f^{-1}\,(\text{ТУПИКИ}) = ???$$

$$f(???) = \text{ТУПИКИ}$$

Геометрическое представление

Теорема

Тупики — это точки, которые лежат на диагонали внутри какого-то прямоугольника.

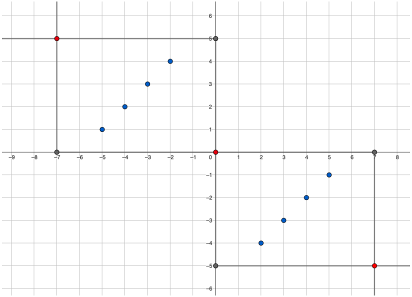

Рис. 3: Тупики для порождающих $5, 7$

Тупики для трех порождающих

Образующие вида pq, qr, pr

p, q, r - нечетные попарно взаимно простые числа.

Теорема

Тупики — это значения функции в точках, которые лежат на диагонали внутри какого-то параллелепипеда, образованного тремя соседними нулями.

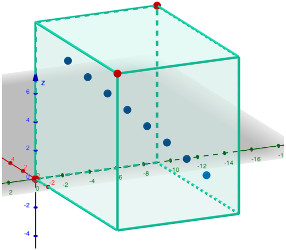

Рис. 4: Тупики для порождающих $11 \cdot 13, 9 \cdot 13, 9 \cdot 11$

Тупики для трех произвольных образующих

Тупик может быть равноудален от двух, трех и даже четрырех ближайших нулей так.

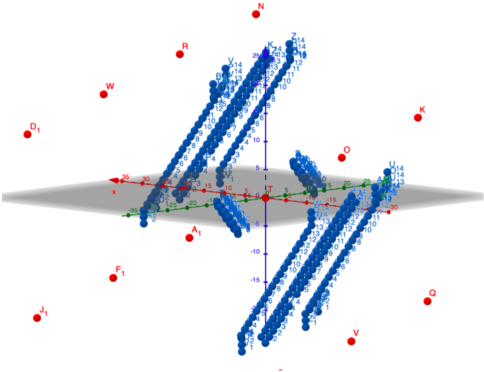

Рис. 5: Тупики для порождающих $13 \cdot 5 \cdot 7, 11 \cdot 7 \cdot 3, 17 \cdot 5 \cdot 3$

Список литературы

[Sun07] Zoran Sunic. ***Frobenius Problem and dead ends in integers.*** 2007. arXiv: math/0612271 [math.NT].

Спасибо за внимание!