Серия 2. Нормальное завтра.

> Whenever groups disclose themselves, or could be introduced, simplicity crystallized out of comparative chaos.
>
> E. T. Bell

0. а) Верно ли, что $C_2 \times C_4 \cong C_8$? б) Опишите условия, при которых $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/nm$ (и докажите изоморфность в этом случае).

1. Пусть G — конечная абелева группа, в которой в точности один элемент f порядка 2. Докажите, что
$$\prod_{g \in G} g = f.$$

2. Пусть G — группа чётного порядка. Докажите, что в ней есть элемент порядка 2.

3. Пусть $g \in G$ — элемент нечётного порядка. Что можно сказать о порядке g^2?

4. Пусть N — подгруппа группы G, будем говорить, что она *удовлетворяет свойству* $(\mathcal{H})$, если $\forall g \in G\ \forall n \in N$ существует такой $n' \in N$, что $gn = n'g$.

Для подгруппы H и элемента g будем обозначать $gH = \{gh \mid h \in H\}$, а для $R \subset G$ будем обозначать $RH = \{rh \mid r \in R, h \in H\}$.

а) Докажите, что если N это подгруппа, то

1. $NN = N$.
2. $N^{-1} = N$.
3. Если $\forall g \in G\ \forall n \in N \colon gng^{-1} \in N$, то N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$.

б) Докажите, что если N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$, то

1. $\forall g\ gN = Ng$.
2. $(gN)(hN) = (gh)N$ и приведите пример, когда это не так если N не удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$.

в) Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, $N = \operatorname{Ker}\varphi$. Докажите, что N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$.

5. Неряшливый преподаватель выписал на доску список из девяти целых чисел, образующих группу по умножению по модулю 91. К сожалению, он забыл выписать одно из чисел и на доске были выписаны лишь числа $1, 9, 16, 22, 53, 74, 79, 81$. Какое число он забыл написать?

Определение. *Моноидом* называется множество M с ассоциативной бинарной операцией и нейтральным элементом.

6. Пусть M_1, M_2 — моноиды. Отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ назовём *хорошим*, если $\forall a, b \in M_1\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ Верно ли, что если φ — хорошее отображение, то $\varphi(e_{M_1}) = e_{M_2}$?

7. Пусть G, H — группы, $G \cong H \times G$. Можно ли из этого заключить, что H — тривиальная группа. (*Подсказка.* Нет! Попробуйте построить контрпример.)

8. Докажите, что $(\mathbb{Q}, +)$ не может быть представлена в виде произведения двух нетривиальных групп.

Серия 2. Нормальное завтра.

> Whenever groups disclose themselves, or could be introduced, simplicity crystallized out of comparative chaos.
>
> E. T. Bell

0. а) Верно ли, что $C_2 \times C_4 \cong C_8$? б) Опишите условия, при которых $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/nm$ (и докажите изоморфность в этом случае).

1. Пусть G — конечная группа, в которой в точности один элемент f порядка 2. Докажите, что
$$\prod_{g \in G} g = f.$$

2. Пусть G — группа чётного порядка. Докажите, что в ней есть элемент порядка 2.

3. Пусть $g \in G$ — элемент нечётного порядка. Что можно сказать о порядке g^2?

4. Пусть N — подгруппа группы G, будем говорить, что она *удовлетворяет свойству* $(\mathcal{H})$, если $\forall g \in G\ \forall n \in N$ существует такой $n' \in N$, что $gn = n'g$.

Для подгруппы H и элемента g будем обозначать $gH = \{gh \mid h \in H\}$, а для $R \subset G$ будем обозначать $RH = \{rh \mid r \in R, h \in H\}$.

а) Докажите, что если N это подгруппа, то

1. $NN = N$.
2. $N^{-1} = N$.
3. Если $\forall g \in G\ \forall n \in N \colon gng^{-1} \in N$, то N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$.

б) Докажите, что если N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$, то

1. $\forall g\ gN = Ng$.
2. $(gN)(hN) = (gh)N$ и приведите пример, когда это не так если N не удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$.

в) Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, $N = \operatorname{Ker}\varphi$. Докажите, что N удовлетворяет свойству $(\mathcal{H})$.

5. Неряшливый преподаватель выписал на доску список из девяти целых чисел, образующих группу по умножению по модулю 91. К сожалению, он забыл выписать одно из чисел и на доске были выписаны лишь числа $1, 9, 16, 22, 53, 74, 79, 81$. Какое число он забыл написать?

Определение. *Моноидом* называется множество M с ассоциативной бинарной операцией и нейтральным элементом.

6. Пусть M_1, M_2 — моноиды. Отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ назовём *хорошим*, если $\forall a, b \in M_1\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ Верно ли, что если φ — хорошее отображение, то $\varphi(e_{M_1}) = e_{M_2}$?

7. Пусть G, H — группы, $G \cong H \times G$. Можно ли из этого заключить, что H — тривиальная группа. (*Подсказка.* Нет! Попробуйте построить контрпример.)

8. Докажите, что $(\mathbb{Q}, +)$ не может быть представлена в виде произведения двух нетривиальных групп.