Серия 8. Растём над собой...

> Свободная группа с двумя образующими — это не группа, это просто набор слов.
>
> Анатолий Моисеевич Вершик

0. Чему изоморфна группа $\langle a, b, c \mid a^5 = 1,\ b^{17} = 1,\ c^{239} = 1,\ [a, b] = 1,\ [a, c] = 1,\ [b, c] = 1\rangle$.

1. В группе G выполнены соотношения $a^2 = b^5 = (ab)^4$ и $(ab^{-2}ab^2)^2 = a^2$. Докажите, что $(ba)^4 = 1$.

2. Мама отправила Васю в магазин «Мир теории групп», чтоб он принёс полезную в быту группу, но написала в списке не её название, а задание образующими и соотношениями:

$$G = \langle \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \mid \eta_j^2 = 1,\ (\eta_j\eta_{j+1})^3,\ \eta_j\eta_\ell = \eta_\ell\eta_j\ \forall\, j, \ell \colon |j - \ell| \geq 1\rangle.$$

Помогите Васе понять, какую группу ему надо купить в магазине.

3. Пусть G — транзитивная на уровнях подгруппа в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X^*)$, а $w \in X^*$. Докажите, что если $h \in G[w]$ и $g(w) \neq w$, то $[h, g] \neq 1$.

4. Рассмотрим в группе Григорчука $\mathbf{G}$ следующее правивло переписывания

$$\tau \colon a \mapsto aca,\ c \mapsto cd,\ d \mapsto c.$$

Докажите, что $\tau^i(ad)^4 = 1$

5. Рассмотрим группу $\mathbb{Z} = \langle r, s\rangle$, где $0 < r < s$. Докажите, что для достаточно больших n сферическая функция роста будет иметь вид $s_{\mathbb{Z}}(n) = 2s$.

6. Пусть G — произвольная конечнопорожденная группа. Докажите, что для её шаровой функции роста выполнено неравенство

$$b(n + m) \leq b(n)b(m).$$

б) выведите из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} (b(n))^{1/n}$ существует и конечен.

7. Заведём на множестве функций $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ такое отношение эквивалентности

$$f \approx g \Leftrightarrow f \preceq g \text{ и } g \preceq f,$$

где $f \leqslant g$, если $\exists A \geq 1\colon f(n) \leq A \cdot g(An)$ для достаточно больших n. Убедитесь, что это в самом деле отношение эквивалетности.

Серия 8. Растём над собой...

> Свободная группа с двумя образующими — это не группа, это просто набор слов.
>
> Анатолий Моисеевич Вершик

0. Чему изоморфна группа $\langle a, b, c \mid a^5 = 1,\ b^{17} = 1,\ c^{239} = 1,\ [a, b] = 1,\ [a, c] = 1,\ [b, c] = 1\rangle$.

1. В группе G выполнены соотношения $a^2 = b^5 = (ab)^4$ и $(ab^{-2}ab^2)^2 = a^2$. Докажите, что $(ba)^4 = 1$.

2. Мама отправила Васю в магазин «Мир теории групп», чтоб он принёс полезную в быту группу, но написала в списке не её название, а задание образующими и соотношениями:

$$G = \langle \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \mid \eta_j^2 = 1,\ (\eta_j\eta_{j+1})^3,\ \eta_j\eta_\ell = \eta_\ell\eta_j\ \forall\, j, \ell \colon |j - \ell| \geq 1\rangle.$$

Помогите Васе понять, какую группу ему надо купить в магазине.

3. Пусть G — транзитивная на уровнях подгруппа в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X^*)$, а $w \in X^*$. Докажите, что если $h \in G[w]$ и $g(w) \neq w$, то $[h, g] \neq 1$.

4. Рассмотрим в группе Григорчука $\mathbf{G}$ следующее правивло переписывания

$$\tau \colon a \mapsto aca,\ c \mapsto cd,\ d \mapsto c.$$

Докажите, что $\tau^i(ad)^4 = 1$

5. Рассмотрим группу $\mathbb{Z} = \langle r, s\rangle$, где $0 < r < s$. Докажите, что для достаточно больших n сферическая функция роста будет иметь вид $s_{\mathbb{Z}}(n) = 2s$.

6. Пусть G — произвольная конечнопорожденная группа. Докажите, что для её шаровой функции роста выполнено неравенство

$$b(n + m) \leq b(n)b(m).$$

б) выведите из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} (b(n))^{1/n}$ существует и конечен.

7. Заведём на множестве функций $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ такое отношение эквивалентности

$$f \approx g \Leftrightarrow f \preceq g \text{ и } g \preceq f,$$

где $f \leqslant g$, если $\exists A \geq 1\colon f(n) \leq A \cdot g(An)$ для достаточно больших n. Убедитесь, что это в самом деле отношение эквивалетности.