

Серия 3. Действию время, а потехе час.

Двадцать две основные буквы: Бог их нарисовал, высек в камне, соединил, взвесил, *переставил* и создал из них все, что есть, — и все, что будет.

Сефер Йецира

0. Докажите, что $G \times H \cong H \times G$.

1. Пусть A, B — абелевы группы. Обозначим за $\text{Hom}(A, B)$ множество гомоморфизмов из A в B . Задайте на $\text{Hom}(A, B)$ структуру абелевой группы.

2. Докажите формулу для числа сочетаний $\binom{n}{k}$ при помощи действия группы на множестве.

3. а) Докажите, что $\sum_{\pi \in S_n} |\text{fix}(\pi)| = n!$. б) Пусть группа G транзитивно действует на множестве X . Каково среднее значение числа неподвижных точек элементов по всей G , то есть

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

4. а) Мальчик Вася нарисовал на бесконечном листе бумаги такой концептуальный рисунок:

... Г Г Г Г Г Г Г Г Г Г ...

Найдите группу симметрий этого рисунка.

б) то же самое, но для рисунка

... D D D D D D D D D D ...

Комментарий. в данной задаче мы ищем *только те симметрии, которые переводят соседние буквы в соседние*. И, отметим, что буквы стоят на одинаковом расстоянии.

Определение. Симметрической группой S_X на множестве X называется группа биекций $X \rightarrow X$.

5. Докажите, что любая группа G реализуется, как подгруппа в некоторой симметрической группе (т.е. симметрической группе какого-то множества). *Подсказка.* Если у нас есть инъективный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ по очевидным причинам $\text{Im} \varphi \cong G$ и мы можем отождествить образ с самой группой G .

Определение. Дробно-линейным преобразованием называется функция $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Здесь $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

6. Докажите, что дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции.

Серия 3. Действию время, а потехе час.

Двадцать две основные буквы: Бог их нарисовал, высек в камне, соединил, взвесил, *переставил* и создал из них все, что есть, — и все, что будет.

Сефер Йецира

0. Докажите, что $G \times H \cong H \times G$.

1. Пусть A, B — абелевы группы. Обозначим за $\text{Hom}(A, B)$ множество гомоморфизмов из A в B . Задайте на $\text{Hom}(A, B)$ структуру абелевой группы.

2. Докажите формулу для числа сочетаний $\binom{n}{k}$ при помощи действия группы на множестве.

3. а) Докажите, что $\sum_{\pi \in S_n} |\text{fix}(\pi)| = n!$. б) Пусть группа G транзитивно действует на множестве X . Каково среднее значение числа неподвижных точек элементов по всей G , то есть

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

4. а) Мальчик Вася нарисовал на бесконечном листе бумаги такой концептуальный рисунок:

... Г Г Г Г Г Г Г Г Г Г ...

Найдите группу симметрий этого рисунка.

б) то же самое, но для рисунка

... D D D D D D D D D D ...

Комментарий. в данной задаче мы ищем *только те симметрии, которые переводят соседние буквы в соседние*. И, отметим, что буквы стоят на одинаковом расстоянии.

Определение. Симметрической группой S_X на множестве X называется группа биекций $X \rightarrow X$.

5. Докажите, что любая группа G реализуется, как подгруппа в некоторой симметрической группе (т.е. симметрической группе какого-то множества). *Подсказка.* Если у нас есть инъективный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ по очевидным причинам $\text{Im} \varphi \cong G$ и мы можем отождествить образ с самой группой G .

Определение. Дробно-линейным преобразованием называется функция $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Здесь $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

6. Докажите, что дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции.