Сколько групп Григорчука можно нетривиально вложить в $\mathrm{Aut}(T_m)$

Иван Чиченков, Илья Амехин

Май 2024

Сириус, IV Майская проектная смена по математике и теоретической информатие

Группа григорчука и нетривиальные вложения

Определение группы григорчука

Определим четыре автоморфизма бинарного дерева, что задают группу по композиции:

$$a(0w) = 1w, \quad b(0w) = 0a(w), \quad c(0w) = 0a(w), \quad d(0w) = 0w$$
$$a(1w) = 0w, \quad b(1w) = 1c(w), \quad c(1w) = 1d(w), \quad d(1w) = 1b(w)$$

Такая группа называется группой Григорчука

Самоподобные группы

Определение

Группа G действующая на X^* называется самоподобной, если $\forall g \in G\ \forall x \in X\ \exists h \in G\ \exists y \in X$:

$$g(xw) = yh(w)$$

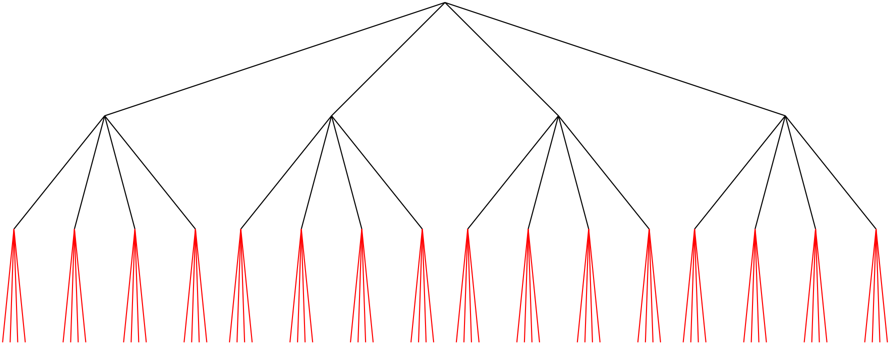
Определения, примеры, блоки

Определим те вложения, что будут нам интересны

Определение

Назовем вложение $f : G^n \to \mathrm{Aut}(T_m)$ группы тривиальным, если $\exists N > 1 \in \mathbb{N} : \forall m \leq N$

$$\psi_m(f(G^n)) = \{\mathrm{id}\}$$



Первый пример нетривиального вложения

$$a_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w, \text{ при } 0 \le r \le k-2$$

$$a_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w, \text{ при } 0 \le r \le k-2$$

$$a_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i), \text{ при } 0 \le i \le k-1$$

$$a_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i, \text{ при } 0 \le i \le k-1$$

$$b_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)a_r(w)$$

$$b_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)c_r(w)$$

$$b_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)iw) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i\sigma(w)$$

$$b_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)c_{k-1}(w)$$

$$c_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)a_r(w)$$

$$c_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)d_r(w)$$

$$c_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)iw) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i\sigma(w)$$

$$c_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)d_{k-1}(w)$$

Рекуррентный вид

Попробуем сделать формулу менее пугающей

$$w = \underbrace{(m-1)\ldots(m-1)}_{q-2} w'; w' = (2r)w''$$

$$a_{kq+r}((m-1)w) = (m-1)a'_{kq+r}(w)$$
$$a'_{kq+r}((m-1)w) = (m-1)a''_{kq+r}(w)$$
$$\vdots$$
$$a^{(q-1)}_{kq+r}((m-1)w') = (m-1)a^{(q)}_{kq+r}(w')$$
$$a^{(q)}_{kq+r}((2r)w'') = (2r+1)w''$$

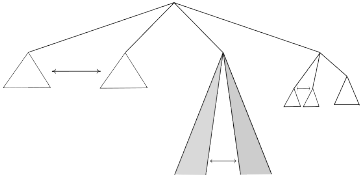


Рис. 1: Прим. $(a_0, a_1, a_2, \mathrm{id}, \mathrm{id}, \ldots)$

Некоторые свойства такой группы

Немного пояснения того что было написано выше

Утверждение 1

Данное вложение самоподобно

Утверждение 2

Из построения видно, что всего таких вложений несчетно много

Спасибо за внимание!