Серия 3. Действию время, а потехе час.

> Двадцать две основные буквы: Бог их нарисовал, высек в камне, соединил, взвесил, *переставил* и создал из них все, что есть, — и все, что будет.
>
> Сефер Йецира

0. Докажите, что $G \times H \cong H \times G$.

1. Пусть A, B — абелевы группы. Обозначим за $\mathrm{Hom}(A, B)$ множество гомоморфизмов из A в B. Задайте на $\mathrm{Hom}(A, B)$ структуру абелевой группы.

2. Докажите формулу для числа сочетаний $\binom{n}{k}$ при помощи действия группы на множестве.

3. а) Докажите, что $\sum_{\pi \in S_n} |\mathrm{fix}(\pi)| = n!$. б) Пусть группа G транзитивно действует на множестве X. Каково среднее значение числа неподвижных точек элементов по всей G, то есть

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

4. а) Мальчик Вася нарисовал на бесконечном листе бумаги такой концептуальный рисунок:

$$\ldots \Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\,\Gamma \ldots$$

Найдите группу симметрий этого рисунка.

б) то же самое, но для рисунка

$$\ldots \mathrm{D\,D\,D\,D\,D\,D\,D\,D\,D\,D} \ldots$$

Комментарий. в данной задаче мы ищем *только те симметрии, которые переводят соседние буквые в соседние.* И, отметим, что буквы стоят на *одинаковом* расстоянии.

Определение. Симметрической группой S_X на множестве X называется группа биекций $X \to X$.

5. Докажите, что любая группа G реализуется, как подгруппа в некоторой симметрической группе (т.е. симметрической группе какого-то множество). *Подсказка.* Если у нас есть инъективный гомоморфизм $\varphi \colon G \to H$ по очевидным причинам $\mathrm{Im}\varphi \cong G$ и мы можем отождествить образ с самой группой G.

Определение. *Дробно-линейным* преобразованием называется функция $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Здесь $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

6. Докажите, что дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции.