

Серия 7. Папа Карло тоже действовал на дереве...

Целый новый ряд мыслей
безнадежных, но
грустно-приятных в связи с
этим дубом возник в душе
князя Андрея. Во время этого
путешествия он как будто вновь
обдумал всю свою жизнь и
пришел к тому же прежнему,
успокоительному и
безнадежному, заключению,
что ему начинать ничего было
не надо, что он должен
доживать свою жизнь, не делая
зла, не тревожась и ничего не
желая.

Л.Н. Толстой, «Война и мир»

В этой серии задач G — группа Григорчука, а a, b, c, d — как в лекции.

1. а) Проверьте, что a, b, c, d имеют порядок 2, коммутируют друг с другом и удовлетворяют групповому тождеству $b \cdot c \cdot d = 1$. б) Выведите отсюда, что $\langle b, c, d \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$. в) Докажите, что $G = \langle a, b, c, d \rangle$ 3-порожденная.
2. а) Проверьте, что в группе G выполняются соотношения

$$(ad)^4 = (ac)^8 = (ab)^{16} = 1.$$

- б) Выведите отсюда, что подгруппы $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$, $\langle a, d \rangle$ группы G конечны.

3. Вася переписывает элементы группы G по следующим правилам

$$\xi: a \mapsto aba, b \mapsto d, c \mapsto b, d \mapsto c.$$

- а) Помогите Васе построить последовательность элементов G такую, что $x_1 = a$ и $\forall i \geq 1 \ x_{i+1} = \xi(x_i)$. б) Докажите, что все элементы x_i различны. в) Выведите из этого, что G бесконечна.