Сколько групп Григорчука можно нетривиально вложить в $\mathrm{Aut}(T_m)$

Иван Чиченков, Илья Амехин. Руслан Магдиев

Майская проектная смена

1 Определения и мотивировка

Определение 1 *Сплетением группы A и группы B действующей на множестве X, при $\#X = n$ называется $A^n \rtimes B$ и обозначается $A \wr B$*

Определение 2 *Деревом называется связный (неориентированный) граф без циклов. Если X - конечное множество, то на X^* задана структура бесконечного дерева: между словами v и w существует ребро (v, w), если $v = xw$ или $w = xv$, где $x \in X$, при $\#X = m$ такое дерево будет называться T_m. Группа $\mathrm{Aut}(T_m) = \{\alpha : T_m \to T_m | \alpha - \text{ изоморфизм}\}$*

S_X - группа перестановок множества X, тогда существует изоморфизм

$$\psi : \mathrm{Aut}(T) \to \mathrm{Aut}(T)^{|X|} \wr S_X$$

Определение 3 *Определим четыре автоморфизма бинарного дерева, что задают группу по композиции:*

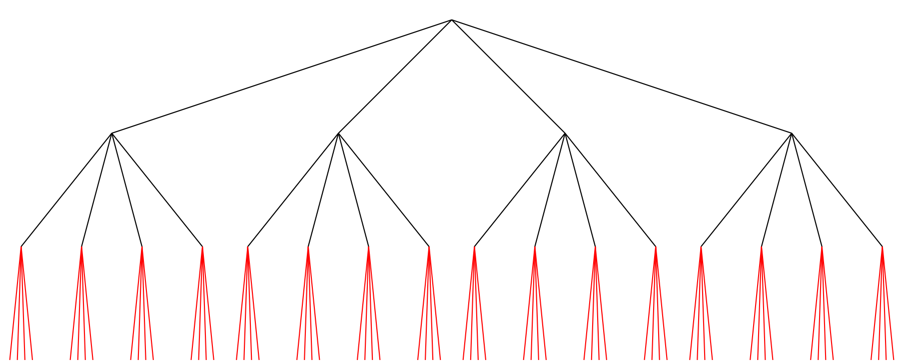
$$a(0w) = 1w, \quad b(0w) = 0a(w), \quad c(0w) = 0a(w), \quad d(0w) = 0w$$
$$a(1w) = 0w, \quad b(1w) = 1c(w), \quad c(1w) = 1d(w), \quad d(1w) = 1b(w)$$

Такая группа называется группой Григорчука

Определение 4 *Назовем вложение $f : G^n \to \mathrm{Aut}(T_m)$ группы тривиальным, если*
$\exists N > 1 \in \mathbb{N} : \forall m \leq N$

$$\psi_m(f(G^n)) = \{\mathrm{id}\}$$

Поскольку иначе легко придумать вложение которое заключается в том, чтобы каждой группе определить поддерево на d-том уровне.



В данном случае мы будем рассматривать только те мономорфизмы, что на каждом уровне будут хоть что-то делать

2 Первый пример нетривиального вложения

2.1 Формальная запись

Рассмотрим вложение φ определенное следующими соотношениями, которые действуют не как id:

Рассмотрим случай, m = 2k: Тогда определим автоморфизмы такими рекуррентными соотношениями $0 \le r \le k-2$, $(g_0, g_1, ..., g_{n-1}) \in G^n$, где g_i может быть одним из действий $a_i, b_i, c_i, d_i, \quad a_i = a_{kq+r}$ или $a_i = a_{kq+(k-1)}$, также определим перестановку $\sigma = (0k)(1(k+1))...((k-1)(2k-1))$

$$a_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w, \text{ при } 0 \le r \le k-2$$

$$a_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w, \text{ при } 0 \le r \le k-2$$

$$a_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i), \text{ при } 0 \le i \le k-1$$

$$a_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i, \text{ при } 0 \le i \le k-1$$

$$b_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)a_r(w)$$

$$b_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)c_r(w)$$

$$b_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)iw) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i\sigma(w)$$

$$b_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)c_{k-1}(w)$$

$$c_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r)a_r(w)$$

$$c_{kq+r}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)d_r(w)$$

$$c_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)iw) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)i\sigma(w)$$

$$c_{kq+(k-1)}(\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)d_{k-1}(w)$$

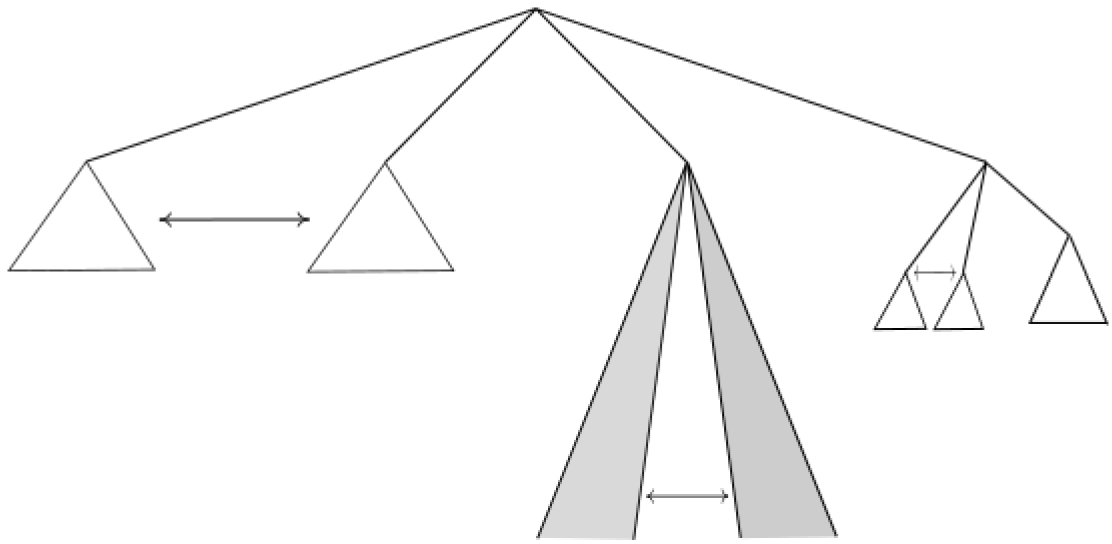


Рис. 1: Прим. $(a_0, a_1, a_2, \mathrm{id}, \mathrm{id}, ...)$

$$d_{kq+r}((\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(2r+1)b_r(w)$$

$$d_{kq+(k-1)}((\underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)w) = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q}(m-2)(k+i)b_{k-1}(w)$$

В случае при m = 2k + 1 мы убираем каждую 4-ю строку.

2.2 Рекуррентный вид

Теперь перепишем действия описанные выше в терминах рекурсивных формул для удобства чтения.

$$\begin{aligned} w = \underbrace{(m-1)...(m-1)}_{q-2} w'; w' = (2r)w'' \\ a_{kq+r}((m-1)w) = (m-1)a'_{kq+r}(w) \\ a'_{kq+r}((m-1)w) = (m-1)a''_{kq+r}(w) \\ \vdots \\ a^{(q-1)}_{kq+r}((m-1)w') = (m-1)a^{(q)}_{kq+r}(w') \\ a^{(q)}_{kq+r}((2r)w'') = (2r+1)w'' \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогичным образом записываем в рекуррентном виде и для m = 2k, для $a_{kq+(k-1)}$

2.3 Проверка гомоморфизма

Ссылаясь на результат в работе Григорчука, мы говорим, что группа григорчука задана такими соотношениями

$$G = \langle a, b, c, d | a^2, b^2, c^2, d^2, bcd, \sigma^i(ad)^4, \sigma^i(adacac)^4 (i \in \mathbb{N}) \rangle$$

где σ это перестановка $\{a, b, c, d\}^*$ определенная

$$\sigma(a) = aca, \quad \sigma(b) = d, \quad \sigma(c) = b, \quad \sigma(d) = c$$

Проверим, что всякое $[w] = 1$ при гомоморфизме $\varphi(w) = 1$, при условии, что всякое такое слово раскладывается в произведение соотношений, проверим что такие соотношения при вложение действительно тривиальны. Для начала рассмотрим как действуют a_i: по формуле 1 мы можем сказать что на всяком поддереве оно действует либо как id, либо как a из группы Григорчука, аналогично и всякие другие так же выполняются ввиду того, что поддеревья на которых они действуют тривиально либо совпадают на для b_i, c_i, d_i, либо являются образами нейтральных элементов группы Григорчука, значит так как в изначальной группе G такие элементы тривиальны, то и при вложении они будут тривиальными

2.4 Замечание о самоподобии

Легко видеть, что наша группа самоподобна, покажем что для всякого $a_i^{(j)}$ тождество самоподобия выполняется:

1) Пусть $x \neq m-1$. Тогда $a_i^{(j)}(xw) = x\,\mathrm{id}(w)$

2) Пусть $x = m-1$. Тогда $a_i^{(j)}((m-1)w) = (m-1)a_i^{(j+1)}(w)$, по формуле 1

Так как всякие другие элементы представляются либо как id, либо выражаются через рекурренту то и всякий другой элемент самоподобен

2.5 Инъективность вложения

Введем понятие индексированного вложения, при заданном $f : G^n \to \mathrm{Aut}(T_m)$ - гомоморфизме $g \in G^n,\ v_i \in X^*,\ w \in X^*$

$$f^{(v_i)}(g) : f^{(v_i)}(g)(v_j w) = \mathrm{id} \ \text{ при } j \neq i \text{ и } f^{(v_i)}(g)(v_i w) = f(g)(v_i w)$$

Понятно, что из того как мы определили наше вложение, то всякое отображение можно разложить в произведение индексированных вложений поскольку для i-того элемента из набора $(g_1, g_2, ..., g_n) \in G^n$ соответствует действие на поддереве, что не пересекается с остальными $f((g_1, g_2, ..., g_n)) = f^{(v_1)}(g_1)f^{(v_2)}(g_2)...f^{(v_n)}(g_n)$. При этом понятно что если $i \neq j$ то для любых элементов $g_i, h_j \in G$ верно что $f^{(v_i)}(g_i) \neq f^{(v_j)}(h_j)$, значит что для того чтобы показать инъективность осталось сказать, что так как мы ни одно действие из группы григорчука не "склеиваем то из равенства $f^{(v_i)}(g_i) = f^{(v_i)}(h_i)$ следует $g_i = h_i$, из чего следует что и все отображение является мономорфизмом

2.6 Пример вложения G^4 в $\mathrm{Aut}(T_4)$

Рассмотрим 4-регулярное дерево и группу G^4, на котором перестановка имеет вид
$\sigma = (02)(13)$:

$$a_0(0w) = 1w, \quad a_0(1w) = 0w \quad b_0(0w) = 0a_0(w), \quad b_0(1w) = 1c_0(w) \quad c_0(0w) = 0a_0(w) \tag{2}$$

$$c_0(1w) = 1d_0(w), \quad d_0(1w) = 1b_0(w) \quad a_1(2w) = 2\sigma(w) \quad a_2(30w) = 31w \quad a_2(31w) = 30w \tag{3}$$

$$a_3(320w) = 322w \quad a_3(321w) = 323w \quad a_3(322w) = 320w \quad a_3(323w) = 321w \tag{4}$$

3 Свойства нетривиальных вложений G^n в $\mathrm{Aut}(T_m)$

3.1 Количество вложенных копий G на уровень m-тый уровень

Покажем, что в m-регулярном дереве на n-том уровне количество вложенных групп григорчука не превосходит $[\frac{m}{2}]^n$. Так как мы рассматриваем m-регулярное дерево, на n-том уровне находятся m^n вершин. Заметим, что группа Григорчука действует на двух поддеревьях, поэтому при условии, что мы пытаемся на уровень вложить более $[\frac{m}{2}]^n$ групп, то как минимум две группы $\varphi(G_1), \varphi(G_2)$ будут действовать на одном и том же поддереве xw, что плохо, так как произведение двух перестановок $a_i = (i, x)$ и $a_j = (x, j)$ не коммутативно, где iw, jw - вторые поддеревья на которые действуют группы. Поскольку в прообразе $(\mathrm{id}, ..., \mathrm{id}, a_i, \mathrm{id}, ...)\cdot(\mathrm{id}, ..., \mathrm{id}, a_j, \mathrm{id}, ...)\cdot(\mathrm{id}, ..., \mathrm{id}, a_i, \mathrm{id}, ...)\cdot(\mathrm{id}, ..., \mathrm{id}, a_j, \mathrm{id}, ...) = \mathrm{id}$, а в образе нет - противоречие

3.2 Сколько всего таких вложений

Всего нетривиальных гомоморфизмов несчетное количество, так как для каждого поддерева на котором мы определяем a_i, мы можем несколькими образами задать на каких поддеревьях a_i будет действовать, то есть как минимум на двух. Так как всего уровней бесконечное количество, то всего гомоморфизмов не менее $2^{\mathbb{N}}$ то бишь несчетное множество.