

Модификация групп

Павел Соколов, Илья Давиденко, Семён Вац

Сириус 2024

Определения

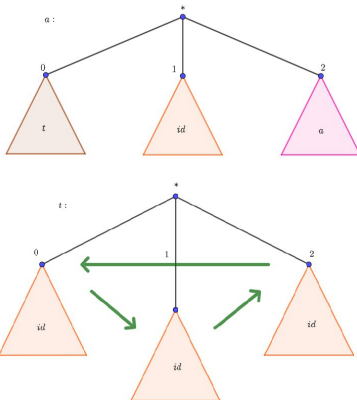
Definition

Группой Гупты-Фабриковского Γ_3 будем называть группу, порождённую двумя действиями a, t , действующую на бесконечном 3-регулярном дереве. Действия a, t задаются следующим образом: $t(0w) = 1w$, $t(1w) = 2w$, $t(2w) = 0w$
 $a(0w) = 0t(w)$, $a(1w) = 2w$, $a(2w) = 2a(w)$

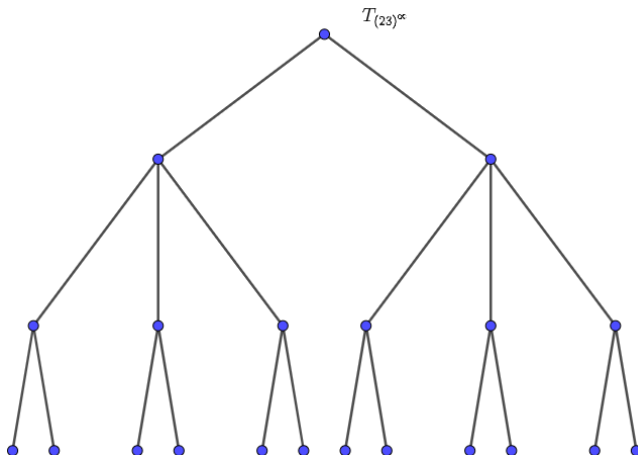
Definition

Будем называть бесконечное корневое дерево, в котором у любой вершины на уровнях с чётным номером по 2 потомка, а на нечётном по 3 потомка — $T_{(23)}^\infty$.

Группа Гупты-Фабриковского



Дерево $T_{(23)^\infty}$



Некоторые свойства

Lemma

Порядок любого элемента группы Γ_3 равен ∞ или 3^N .

Lemma

Пусть есть $\varphi : \Gamma_3 \longrightarrow \text{Aut}(T_{(23)^\infty})$ - инъективный гомоморфизм. $\Gamma_3 = \langle a, t \rangle$. Тогда или $\varphi(a)$, или $\varphi(t)$ можно задать рекурсивно.

Леммы о самоподобии

Lemma

При инъективном гомоморфизме образ самоподобной группы будет являться самоподобной группой.

Lemma

При инъективном гомоморфизме образ Γ_3 действует тривиально на первом уровне, а на втором действуем как Γ_3 или тривиально.

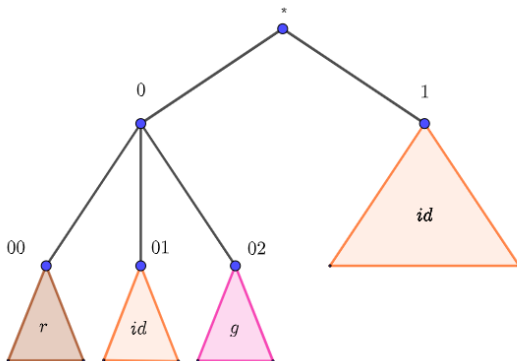
Порождающая структура

- Повороты
- Спуск
- Растягивание
- Накладывания

Образующие

$$r(00w) = 01w, \quad r(01w) = 02w, \quad r(02w) = 00w$$

$$g(00w) = 00r(w), \quad g(01w) = 01w, \quad g(02w) = 02g(w)$$



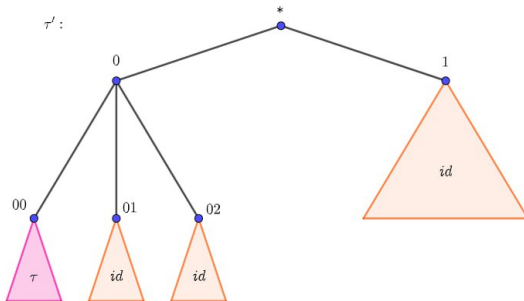
Построение изоморфизмов

Теорема

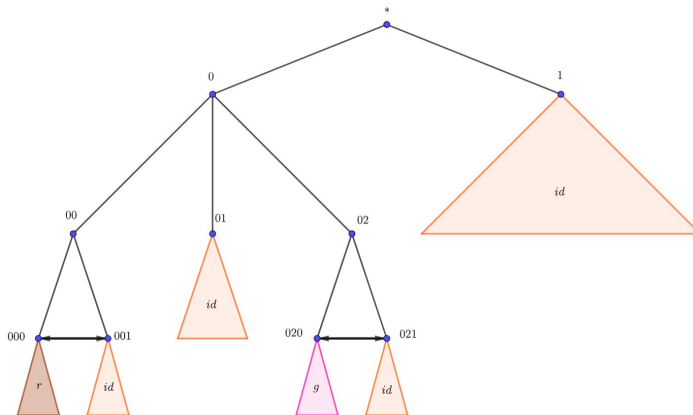
Пусть имеется инъективный гомоморфизм $\varphi : \Gamma_3 \longrightarrow \text{Aut}(T_{(23)^\infty})$, тогда при помощи обратных действий можно свести $\varphi(a)$ или $\varphi(t)$, к g или к r .

Спуск

$$\forall \tau \in p(\Gamma_3) \quad \tau \longrightarrow \tau' \in p'(\Gamma_3), \quad \tau'(00w) = 00\tau(w)$$



Повороты

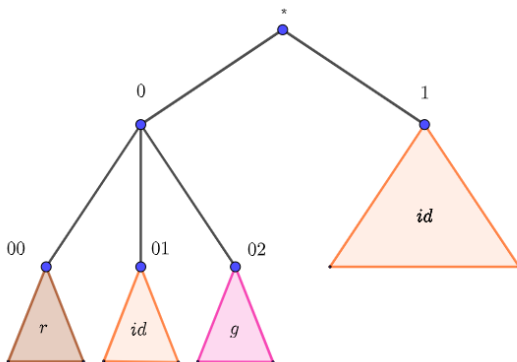


$$H \cong C_2 \times S_3 \times C_2 \times S_3 \times \dots$$

Растягивание

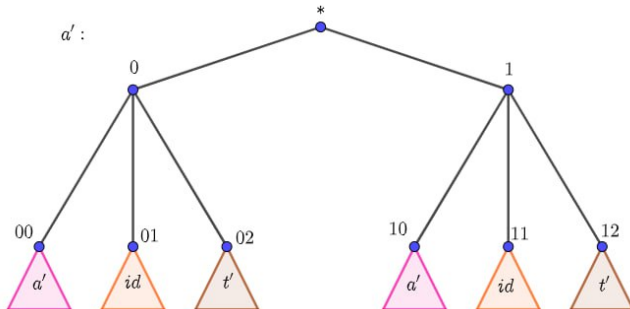
$$\forall q \in \sigma q \longrightarrow q' \in \sigma', \quad q'(u00x) = q'(u)00q(x),$$

$$q'(xy) = q(xy) \quad x, y \in 0, 1, 2$$



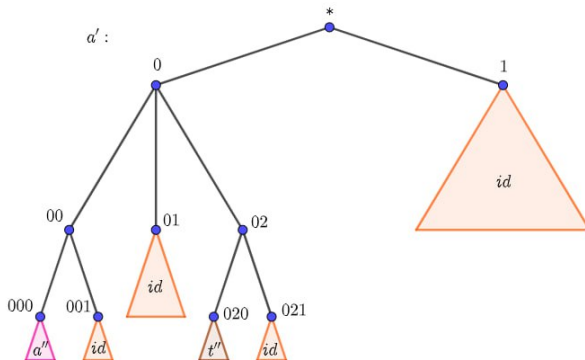
Накладывание

Тип A:

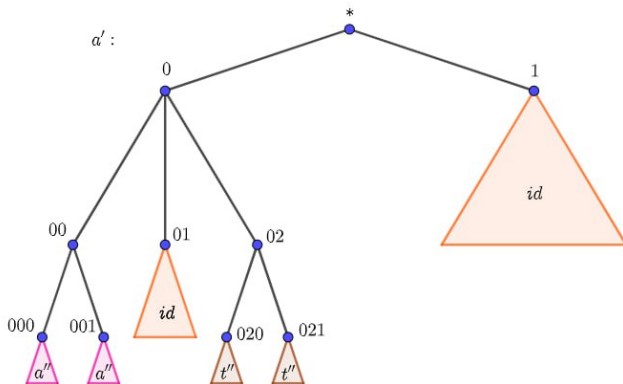


Накладывание

Тип В:



Накладывание



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!