# Геодезические тупики в группе $\mathbb{Z}$ с различными порождающими множествами

Анна Бобрикова, Таисия Липатова

Май 2024

**Аннотация**

Работа посвящена изучению тупиков в $\mathbb{Z}$ для нестандартного порождающего множества. Основной инструмент описания тупиков является интерпретация $\mathbb{Z}$ Были изучены во многих группах. Например, тупики в свободной группе были подробно изучены в статье [Gub05]. В группе Гейзенберга в работе [CM22]. Также их связь с числами Фробениуса и общий вид тупиков в группе $\mathbb{Z}$ для двух порождающих были изучены методами теории чисел в работе [Sun07]. Мы решали эту задачу геометрическими методами в плоскости с манхэтеннской метрикой. В нашем проекте изучаются тупики в группе $\mathbb{Z}$ на двух или трех порождающих.

# Содержание

# 1 Введение и постановка задачи

Мы решали задачу для множества $\mathbb{Z}$ на двух порождающих и для множества $\mathbb{Z}$ на трех порождающих вида $pq, qr, rp$, где $(p,q) = (q,r) = (r,p) = 1$. Описали общий вид тупиков.

Еще задачу можно переформулировать таким образом:

Вспомним детскую задачу про Васю и лифт, в котором не работают какие-то кнопки. Пусть Вася изначально стоит в лифте на 0-ом этаже. Дом бесконечный в обе стороны, все этажи - целые числа. Вася на каждом шаге может подняться на $\pm a$ или $\pm b$. При этом лифт едет так, чтобы каждый конечный путь был кратчайшим. Если же Вася после $m$ ходов стоит на $n$-ом этаже, а до всех этажей $n \pm a$ и $n \pm b$ можно добраться за $\leq m$ ходов, то Вася застрянет. С каких этажей Вася не сможет уехать?

# 2 Определения и обозначения

**Определение 1.** $\ell(a)$ — длина кратчайшего слова, соответствующего элементу $a$.

*Геодезическое слово* — кратчайшее слово, соответствующее элементу.

Слово $w$ — *тупик*, если $w$ геодезическое слово и его нельзя продолжить на одну букву до другого геодезического слова.

Элемент $g$ — *тупик*, если для любой буквы $s$ выполняется $\ell(g \circ [s]) \leq l(g)$.

Чтобы понять, где расположены тупики для порождающего множества из двух элементов см. Рис. 1, для трех порождающих вида $pq$,$qr$,$rp$ см. Рис. 8, а для трех порождающих общего вида см. Рис. 9.

**Лемма 1.** Если элемент $g$ тупик, то любое геодезическое слово $w$, соответствующее ему, тупик.

*Доказательство.* Для любой буквы $s$ $\ell(g \circ [s]) \leq l(g), |w| = l(g) \Rightarrow$ для любой буквы $s$ $\ell([ws]) \leq |w|, |ws| = |w| + 1 \Rightarrow$ слово $ws$ не геодезическое ☐

## 2.1 Определения для случая с двумя порождающими.

**Определение 2.** Введем *функцию* на координатной плоскости $f(x, y) = ax + by$, где $a$ и $b$ — образующие.

Найдем *нули функции* $f$.

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ (a, b) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Значит, $x = k \cdot b$, $y = -k \cdot a$ для любого целого $k$.

*Соседние нули* — это нули, на отрезке между которыми нет других нулей.

*Диагональ* — множество точек, равноудаленных от соседних нулей.

Чтобы понять, как выглядит диагональ см. Рис. 3

*Прямоугольник на нулях $A$ и $B$* — прямоугольник по линиям сетки, в противоположных вершинах которого находятся $A$ и $B$.

Чтобы понять, как выглядит прямоугольник см. Рис. 3

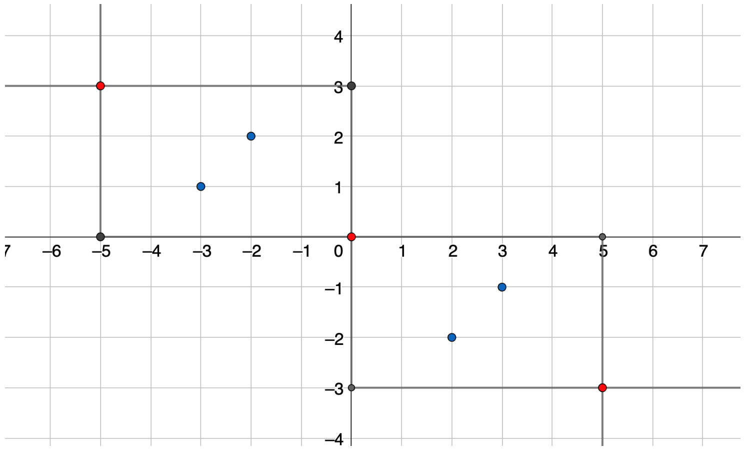



Рис. 1: Тупики и нули

## 2.2 Определения для случая с тремя порождающими

**Определение 3.** Введем *функцию* на координатном пространстве $f(x, y, z) = ax + by + cz$, где $a$, $b$ и $c$ — образующие.

Найдем *нули функции* $f$.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ (a, b, c) = 1 \\ (a,b) \neq 1 \\ (b,c) \neq 1 \\ (a,c) \neq 1 \end{cases} \tag{2}$$

Значит, нули для чисел $a = pq, b = qr, c = pr$ это точки вида $k \cdot r, t \cdot p, (-k - t) \cdot q$, где $k,t \in \mathbb{Z}$.

*Плоскость нулей* — плоскость, в которой находятся все нули.
Чтобы понять, как выглядит плоскость нулей см. Рис. 2a.

*Решетка нулей* — треугольная решетка в плоскости нулей, вершинами которой являются нули, образующие решетки и их разность параллельны каждая одной из плоскостей $XOY, YOZ, XOZ$, это следует из вида нулей.
Чтобы понять, как выглядит решетка нулей см. Рис. 2a.

*Линии решетки* — прямые на решетке, параллельные $XOY$, или $YOZ$, или $XOZ$.
Чтобы понять, как выглядят линии решетки см. Рис. 2a.

*Соседние нули A, B* — это нули, которые являются соседними по одной из линий решетки.

*Соседние нули A, B и C* — это три нуля, любые два из которых соседние.

*Диагональ нулей A и B* — множество точек, равноудаленных от соседних нулей $A$ и $B$.

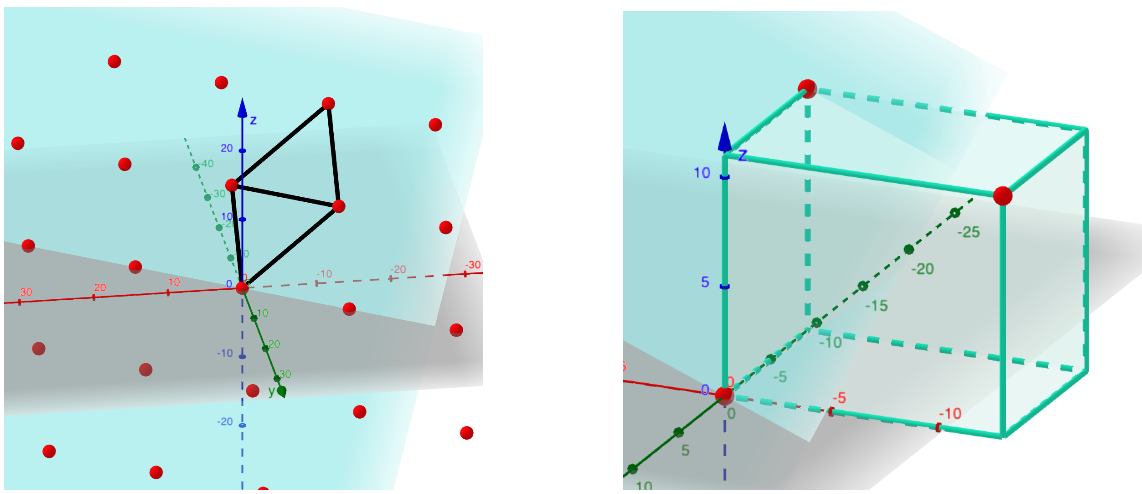
*Диагональ нулей A, B и C* — множество точек, равноудаленных от соседних нулей $A$, $B$ и $C$.

*Параллелепипед на нулях A, B и C* — прямоугольный параллелепипед по линиям сетки, в трех вершинах которого нули, любые два из которых на одной грани, а все три не на одной грани.

Чтобы понять, как выглядит параллелепипед на нулях см. Рис. 2b.

*Параллелепипед на единичном параллелограмме решетки $ABCD$* —прямоугольный параллелепипед, в противоположных вершинах которого находятся точки $A$ и $C$, а на ребрах находятся точки $B$ и $D$.

Чтобы понять, как выглядит такой параллелепипед см. Рис. 7



(a) Решетка

(b) Параллелепипед

# 3 Случай порождающего множества из двух элементов

Давайте считать, что $(a,b) = 1$ и $a+b \,\vdots\, 2$. В случае, если $(a, b) \neq 1$, разделим все числа на $(a, b)$ и сведем задачу к взаимно простым образующим. Случай, когда $a + b$ не делится на 2 разбирается аналогично.

## 3.1 Сведение задачи к геометрической

**Лемма 2.** Рассмотрим точку $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, пусть ей соответствует элемент $A$ (т.е. $(f(x, y) = A)$). Тогда расстояние в манхэтеннской метрике от точки до ближайшего нуля равна $\ell(A)$.

*Доказательство.* Пусть дан путь длины $n$ до нуля. Сопоставим ему слово следующим образом: начинаем в нуле, на каждом шаге пути дописываем в слово букву в зависимоти от направления (вверх — $+b$, вниз — $-b$, влево — $-a$, вправо — $+a$. Таким образом, мы получили слово длины $n \Rightarrow \ell(A) \leq n$.

С другой стороны пусть A представимо как слово длины $m$. Сопоставим этому слову путь. Рассмотрим последний символ слова, двинемся в сторону обратного к нему (если последний символ $a$, то движемся в сторону $-a$, т. е. влево). Две последние буквы в новом слове сократятся. Дальше будем повторять операцию. За $m$ шагов мы придем в 0. Значит, кратчайший путь до нуля $\leq m$.

Получается, длина кратчайшего пути до нуля $= \ell(A)$.

$\square$

**Лемма 3.** Элемент $g$ — тупик, если и только если для любой буквы $s$ из порождающего множества $S \cup S^{-1}$ у $g$ есть геодезический представитель, заканчивающийся на $s$.

Эта лемма доказана в работе [CM22, стр. 5, лемма 5.3]

**Следствие 1.** *В геометрической интерпретации элемент, соответствующей точке, является тупиком тогда и только тогда, когда для соседних точек* $A$,$B$,$C$,$D$ $\ell(A) = \ell(B) = \ell(C) = \ell(D)$.

## 3.2 Поиск тупиков

**Лемма 4** (Лемма о четности)**.** При $(a+b) \,\vdots\, 2$ и $(a,b) = 1$ все расстояния от точки $X$ до нулей одинаковой четности.

*Доказательство.* Предположим, что $a \,\vdots\, 2$. Тогда, $(a+b) \,\vdots\, 2$, мы имеем $b \,\vdots\, 2 \Rightarrow (a,b) \neq 1$, что даёт нам протворечие.

Аналогично в случае, если $b \,\vdots\, 2 \Rightarrow$ оба числа нечетны.

Предположим, что есть расстояния до нулей разной четности. Тогда $x$,$y$,$x_1$,$y_1$ такие, что $ax + by = ax_1 + by_1$ и $x + y \not\equiv_2 x_1 + y_1$. $a \equiv_2 1$ и $b \equiv_2 1 \Rightarrow x + y \equiv_2 ax + by = ax_1 + by_1 \equiv_2 x_1 + y_1$, что даёт нам противоречие. $\square$

**Лемма 5.** Если у точки $X$ только один ближайший ноль, она не является тупиком.

*Доказательство.* Рассмотрим кратчайший путь из $X$ в ноль. Пусть на первом шаге мы перешли из $X$ в $A$. Тогда рассмотрим точку $B$, лежащую на расстоянии 1 от $X$ в направлении, противоположном $A$. Расстояние от $B$ до ближайшего к $X$ нуля стало $\ell(X)+1$. Предположим, $X$ — тупик. Тогда $\ell(B) \leq \ell(X)$. Следовательно, есть другой ноль, расстояние до которого от $B \leq \ell(X)$, но расстояние от $X$ до этого нуля $\geq \ell(X) + 2$ по лемме о четности. Но из $B$ в $X$ можно добраться за один шаг. Противоречие. $\square$

Давайте поймем, как выглядит диагональ. Не умаляя общности рассмотрим случай, когда один из нулей находится в $(0,0)$, а другой — в точке $(-a,b)$, иначе сделаем параллельный перенос.

Уравнение диагонали: $|x| + |y| = |a + x| + |y - b|$.

Рассмотрим случаи раскрытия модулей:

1. Пусть $x < 0, a + x \geq 0, y < 0, y - b < 0$. Тогда

$$-x - y = a + x - y + b \iff 2x = -a - b \iff \begin{cases} x = \frac{-a-b}{2} \\ a + x \geq 0 \\ y < 0 \\ y - b < 0 \end{cases} \iff x = \frac{-a-b}{2}, y < 0 \quad (3)$$

2. Пусть $x < 0, a + x \geq 0, y \geq 0, y - b < 0$. Тогда

$$-x + y = a + x - y + b \iff \begin{cases} y - x = \frac{a+b}{2} \\ -a \leq x < 0 \\ 0 \leq y < b \end{cases} \quad (4)$$

3. Пусть $x < 0, a + x < 0, y \geq 0, y - b \geq 0$. Тогда

$$-x + y = a + x + y - b \iff 2x = b - a \iff \begin{cases} x = \frac{b-a}{2} \\ x < 0 \\ a + x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - b \geq 0 \end{cases} \iff x = \frac{b-a}{2}, y \geq b \qquad (5)$$

Нетрудно проверить, что в других вариантах раскрытия нет решений. Итого, мы получаем, что диагональ представляет из себя ломанную из 3-х частей (см. 3).

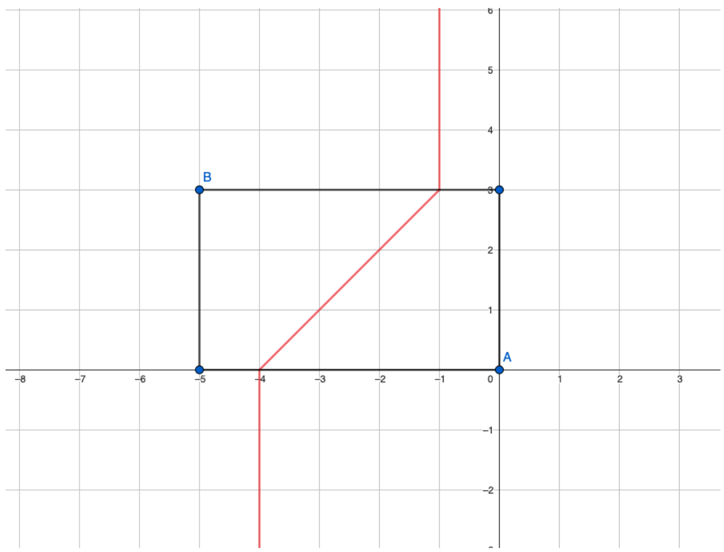



Рис. 3: Диагональ

**Лемма 6.** Пусть у точки $X$ есть 2 ближайших нуля $A$ и $B$, тогда эти нули соседние.

*Доказательство.* Пусть $A$ левее $B$. Предположим, между ними есть еще нули $C$ и $D$ такие, что $A$ и $C$ соседние, $B$ и $D$ соседние. Пусть $L_1$ — диагональ $A$ и $C$, $L_2$ — диагональ $B$ и $D$. Заметим, что диагонали параллельны и $L_1$ левее $L_2$. Мы знаем, что $A$ ближе к $X$, чем $C$, и $B$ ближе к $X$, чем $D$. Тогда $X$ лежит левее $L_1$, с другой стороны $X$ лежит правее $L_2$. Такое невозможно. Противоречие. □

**Следствие 2.** *Из леммы следует, что у точки не может быть трех ближайших нулей, так как не бывает трех попарно соседних нулей.*

**Следствие 3.** *Как мы уже доказали, у всех тупиков есть 2 ближайших нуля. Из леммы следует, что эти нули соседние. Значит, все тупики лежат на диагоналях.*

**Лемма 7.** Если у точки $X$ два ближайших нуля $A$ и $B$, но она не внутри прямоугольника, образованного ими, то элемент, соответсвующий ей не тупик.

*Доказательство.* Если у точки $X$ два ближайших нуля, то по лемме 6 они соседние $\Rightarrow$ она на диагонали. Если точка $X$ расположена на верхней стороне прямоугольника или над ней, то сделаем один шаг вверх и попадем в точку $X_1$. Расстояние до $A$ и $B$ от точки $X_1$ на один больше, чем от точки $X$. А расстояние до других нулей по лемме о четности сравнимо по модулю 2 с $\ell(f(X))+1$ и не может быть меньше, чем $\ell(f(X))$, так как иначе у точки $X$ есть еще ближайшие нули, кроме $A$ и $B$, что противоречит следствию 2 $\Rightarrow \ell(f(X_1)) > \ell(f(X)) \Rightarrow X$ не тупик.

В случае если точка $X$ расположена на нижней стороне прямоугольника или под ней, аналогично, только сделаем шаг вниз вместо шага вверх. $\square$

**Теорема 1.** *Тупики — это значения функции в точках, которые лежат на диагонали внутри какого-то прямоугольника.*

*Доказательство.* Из следствия 3 и леммы 7 следует, что тупики могут быть только на диагонали $A$ и $B$ и внутри прямоугольника, построенного на $A$ и $B$, где $A$, $B$ - произвольные соседние нули.

Докажем, что любая точка $X$, которая лежит на диагонали внутри какого-то прямоугольника является тупиком. Предположим, что это не так и путь от какого-то из ближайших нулей $A$ и $B$ можно продолжить на один шаг в каком-то направлении и получить крачайший путь для точки $X_1$. Так как $X$ внутри прямоугольника, то $X_1$ внутри или на границе прямоугольника $\Rightarrow$ сумма расстояний от $X_1$ до нулей равна $a+b$. Сумма расстояний от $X$ до нулей тоже равна $a+b \Rightarrow \ell(f(X)) = \frac{a+b}{2}$. Так как сумма расстояний от $X_1$ до нулей равна $a+b \Rightarrow$ одно из расстояний от $X_1$ не больше, чем $\frac{a+b}{2} = \ell(f(X))$. Противоречие. $\square$

*Замечание* 1. Прямоугольники получаются друг из друга параллельным переносом. Поэтому множества значений функции в них, как и множества тупиков совпадают. Значит, чтобы найти все тупики, достаточно рассмотреть всего один прямоугольник. Из этого следует, что тупиков конечное число.

Тупики для образующих $a, b$ таких, что $a+b$ не делится на 2, выглядят похожим образом, но там есть два отрезка внутри прямоугольника (так получается из-за того, что появляются нестрогие тупики).

pictures/РЈ•РҳСЉРҳСЂР,,СЌРє.png

Рис. 4: Тупики для образующих 5, 4

# 4 Случай порождающего множества из трёх элементов $pq$,$qr$,$rp$

Давайте считать, что $a = pq, b = qr, c = pr$, где $p, q, r$ — нечетные попарно взаимно простые числа.

## 4.1 Сведение задачи к геометрической

Сведение задачи к геометрической аналогично случаю для двух порождающих.

Найдем ГМТ нулей.

$ax + by + cz = 0$. Это уравнение плоскости. Значит, нули — это целочисленные точки в плоскости $\Rightarrow$ нули образуют решетку. Векторы $(r, -p, 0)$ и $(r, 0, -q)$ порождают решетку нулей.

Пусть точка $A = (0,0,0)$, $B = (r,-p,0)$, $C = (r,0,-q)$. Тогда $AB \in$ плоскости $z = 0$, $AC \in$ плоскости $y = 0$, $BC \in$ плоскости $x = r$, параллельной $x = 0$. Аналогично для остальных нулей. Решетка разбивается на параллелограммы, в которых стороны и одна диагональ параллельны плоскостям координат (или лежат в этих плоскостях).

## 4.2 Поиск тупиков

**Лемма 8** (Лемма о четности)**.** Все расстояния от точки $X$ до нулей одинаковой четности.

*Доказательство.* Предположим, что есть расстояния до нулей разной четности. Тогда существуют $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ такие, что $ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$ и $x + y + z \not\equiv_2 x_1 + y_1 + z_1$. $a \equiv_2 1$, $b \equiv_2 1$ и $c \equiv_2 \Rightarrow x + y + z \equiv_2 ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 \equiv_2 x_1 + y_1 + z_1$, что даёт нам противоречие. Лемма доказана аналогично случаю с двумя порождающими. □

**Лемма 9.** Если у точки $X$ только один ближайший ноль, она не является тупиком.

*Доказательство.* Доказательство то же, что и в случае для двух порождающих. □

**Лемма 10.** Если у точки $X$ есть два ближайших нуля $A, B$, то $A, B$ - соседние нули.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть $A$ и $B$ не соседние. Рассмотрим параллелограмм(возможно вырожденный) по линиям решетки, построенный на $A$ и $B$ как на противоположных вершинах. Назовем его оставшиеся вершины $C$ и $D$ (предположим, $A$ и $B$ не лежат на одной прямой, параллельной линиям решетки). Предположим, между $A$ и $C$ есть нули, тогда между $B$ и $D$ тоже есть нули. Рассмотрим на отрезке $AC$ ближайший к $A$ ноль, назовем его $S$. Ближайший к $B$ ноль на отрезке $BD$ назовем $T$. Ближайшие нули к $C$ и $D$ на отрезках $AC$ и $BD$ назовем $T_1$ и $S_1$. Тогда прямые $BC$, $TT_1$, $SS_1$, $AD$ параллельны. Пусть $L_1$ — диагональ

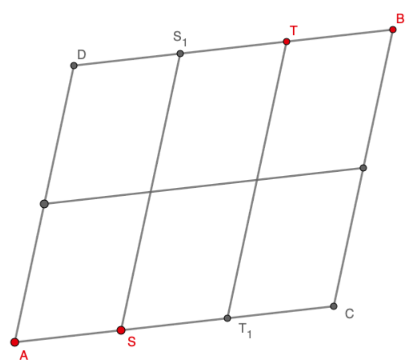



Рис. 5: Параллелограмм

$A$ и $S$, $L_2$ — диагональ $B$ и $T$. Заметим, что $AS$ параллельно $BT$, $AS = BT$. При этом эти прямые параллельны одной из координатных плоскостей, не умаляя общности, предположим, что они параллельны $z = 0$. Спроецируем картинку на эту плоскость (в данном случае на $z = 0$). Получим 2 параллельных отрезка $AS$ и $BT$. Прямые $AD$, $TT_1$, $SS_1$, $BC$ перейдут в прямые, параллельные линиям сетки, так как они лежат в плоскостях координат. Тогда $L_1$ перейдет в диагональ $A$ и $S$ на плоскости, значит, $L_1$ будет лежать между $AD$ и $SS_1$. Аналогично $L_2$ будет лежать между $BC$ и $TT_1$.

Предположим, $A$ левее $B$. Тогда $A$ левее $S$ левее $T$ левее $B$. $L_1$ параллельна $L_2$ и левее. Мы знаем, что $A$ ближе к $X$, чем $S \Rightarrow$ при проекции $X$ перейдет в точку, лежащую левее $L_1$. Аналогично $X$ перейдет в точку, лежащую правее $L_2$. Но эти части плоскости не пересекаются. Противоречие.

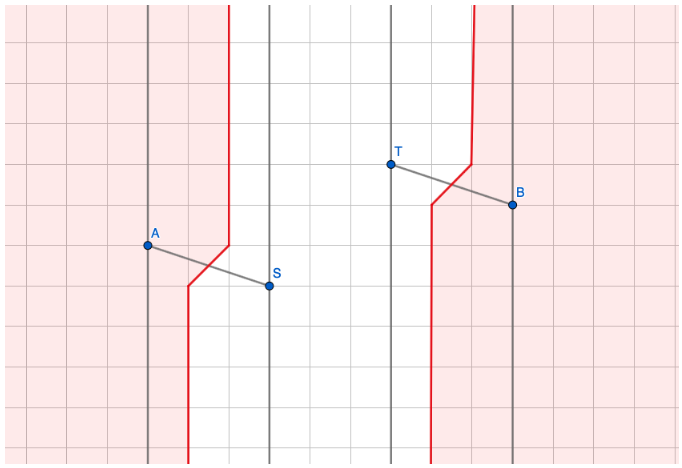



Рис. 6: Проецирование

Осталось рассмотреть один случай, когда между $A$ и $C$ нет нулей и между $A$ и $D$ нет нулей, то есть параллелограмм единичный. Сделаем параллельный перенос так, чтобы одна из вершин параллелограмма стала $(0,0,0)$. Без ограничения общности рассмотрим единичный параллелограмм с вершинами $(0,0,0),(r,-p,0),(r,0,-q),(2r,-p,-q)$. Вершины $(r,-p,0)$ и $(r,0,-q)$ мы считаем соседними. Осталось доказать, что ближайшими двумя нулями не могут быть $(0,0,0)$ и $(2r,-p,-q)$. Предположим противное. Тогда

$$\begin{cases} |x-2r|+|y+p|+|z+q| = |x|+|y|+|z| \\ |x-r|+|y+p|+|z| > |x|+|y|+|z| \\ |x-r|+|y|+|z+q| > |x|+|y|+|z| \end{cases} \implies \begin{cases} |x-2r|+|y+p|+|z+q| = |x|+|y|+|z| \\ 2|x-r|+|y+p|+|z+q| > 2|x|+|y|+|z| \end{cases} \implies$$

$$\implies |2x-2r|-|x-2r| > |x| \quad (6)$$

Однако $|2x-2r|-|x-2r| \leq |x|$, потому что модуль разности не меньше разности модулей. Противоречие.

□

**Следствие 4.** *Если среди ближайших нулей точки есть противоположные вершины единичного параллелограмма, то оставшиеся вершины параллелограмма тоже ближайшие.*

*Доказательство.* В этом случае получится система уравнений, как в лемме 10, если заменить в ней строгие неравенства на нестрогие. В такой системе могут быть решения, но только если $|x-r|+|y+p|+|z| = |x|+|y|+|z|$ и $|x-r|+|y|+|z+q| = |x|+|y|+|z|$, значит, расстояние до точек $(r, -p, 0)$ и $(r, 0, -q)$ такое же, как и до точки $(0, 0, 0)$. Следовательно, точки $(r, -p, 0)$ и $(r, 0, -q)$ тоже ближайшие, а это и есть оставшиеся вершины параллелограмма. $\square$

**Следствие 5** (О единичном параллелограмме)**.** *Если у точки $X$ есть три ближайших нуля $A$,$B$ и $C$, то $A, B, C$ — соседние нули.*

*Доказательство.* Так как по лемме 10 в таком случае они должны быть попарно соседними. $\square$

**Следствие 6.** *У точки не более четырех ближайших нулей.*

*Доказательство.* Предположим противное. Расстояние между какими-то двумя точками $\leq 2$. Точки не могут быть попарно соседними. При этом, если расстояние 2, то точки должны располагаться в противоположных вершинах единичного параллелограмма. Значит, среди точек гарантированно есть противоположные вершины параллелограмма $\Rightarrow$ по следствию о единичном параллелограмме две оставшиеся вершины параллелограмма тоже есть. Куда бы мы ни добавили пятую точку, расстояние до каких-то двух соседних вершин параллелограмма будет $\leq 2$. Но пятая точка не может одновременно быть противоположной вершиной параллелограмма для двух соседних вершин. Противоречие. $\square$

**Лемма 11.** Если у точки ровно два ближайших нуля $A$ и $B$, то она не тупик.

*Доказательство.* По лемме 10 $A$ и $B$ соседние $\Rightarrow$ они на одной прямой, параллельной одной из плоскостей $XOY, YOZ, XOZ$. Тогда давайте сдвинем точку $X$ на один в направлении от плоскости, параллельной $AB$, и получим точку $X_1$. Расстояние от $A$ и от $B$ до $X_1$ равно $\ell(f(X))+1$. Нулей ближе, чем $A$ и $B$ у точки $X_1$ нет. Предположим, что это не так. Тогда есть ноль $C$, расстояние до которого от точки $X_1$ меньше, чем $\ell(f(X))+1$. По лемме о четности это расстояние не может быть больше, чем $\ell(f(X)) - 1$. Но тогда мы можем сделать один шаг от $X_1$ к $X$ и получим, что $X$ находится на расстоянии не больше, чем $\ell(f(X))$ от $C$. Но это противоречит условию, что у $X$ ближайшие нули только $A$ и $B$. Тогда получается, что $\ell(f(X_1)) = \ell(f(X))+1 \Rightarrow X$ не тупик, так как путь до него можно продолжить на 1 и получить кратчайший путь до другого элемента. $\square$

**Лемма 12.** Если у точки $S$ четыре ближайших нуля, то она не тупик.

*Доказательство.* По лемме 10 эти нули $A$, $B$, $C$ и $D$ являются нулями единичного параллелограмма решетки. Впишем этот параллелограмм в параллелепипед так, что $A$ и $C$ - противоположные вершины, $B$ и $D$ лежат на противоположных ребрах (см. Рис. 7). Если $S$ лежит вне параллелепипеда, то $S$ не тупик, так как можно удалиться от всего параллелепипеда, а значит, и от каждого из четырех нулей. Если же $S$ внутри параллелепипеда, то мы понимаем в каких пределах находятся координаты $S$, поэтому мы сможем раскрыть модули в уравнении. Пусть координаты $S$ — $(x, y, z)$. Тогда $0 < x < 2r$, $-p < y < 0$, $-q < z < 0$. Предположим, $x \geq r$. Тогда

$$\begin{cases} 2r - x + y + p + z + q = x - y - z \\ x - r + y + p - z = x - y - z \\ x - r - y + z + q = x - y - z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2r + p + q \\ 2y = r - p \\ 2z = r - q \end{cases} \Longrightarrow \tag{7}$$

$$\Longrightarrow 2x - (r - p) - (r - q) = 2r + p + q \Longrightarrow x = 2r$$

Но мы предполагали, что $x < 2r$. Противоречие. Если $x < r$, можем отразить точку $S$ относительно центра параллелограмма $ABCD$. Мы попадем в точку $T$, также лежащую внутри параллелепипеда, равноудаленную от $A, B, C, D$ и с координатой по $OX$ большей $r$. А мы уже доказали, что таких точек нет. Значит, и точек с $x < r$ тоже нет. $\square$

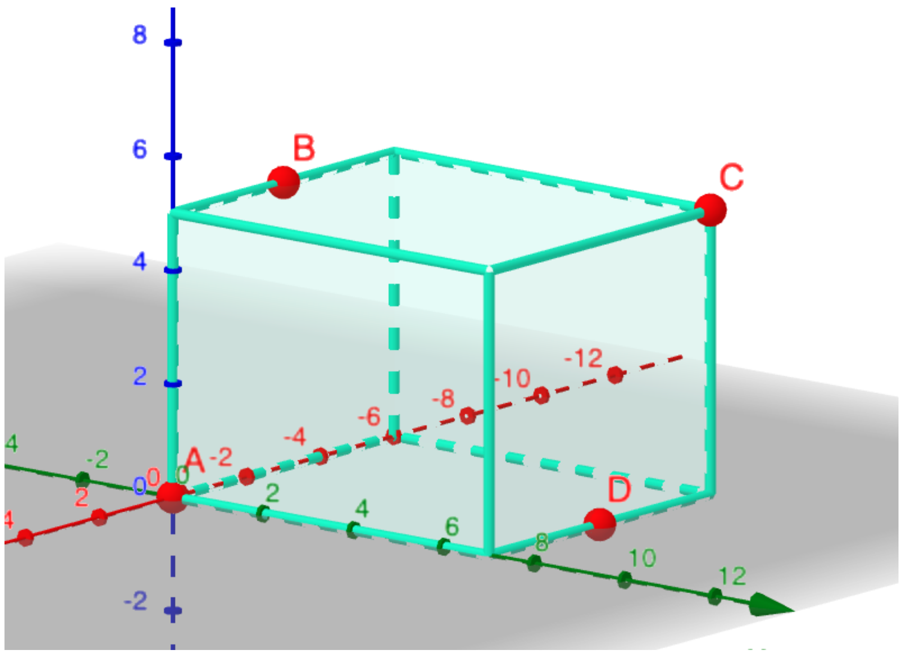



Рис. 7: Параллелепипед, внутри которого 4 нуля.

**Лемма 13.** Если у точки $X$ ровно три ближайших нуля $A$,$B$,$C$ и она не внутри параллелепипеда, образованного ими, то она не тупик.

*Доказательство.* Если точка не внутри параллелпипеда, то она либо находится на его грани, тогда можно сделать шаг из $X$ в сторону от параллелепипеда и попасть в точку $X_1$. Расстояние от $A$, от $B$ и от $C$ до $X_1$ равно $\ell(X)+1$. Нулей ближе, чем $A$, $B$ и $C$ у точки $X_1$ нет. Предположим, что это не так. Тогда есть ноль $D$, расстояние до которого от точки $X_1$ меньше, чем $\ell(X)+1$. По лемме о четности это расстояние не может быть больше, чем $\ell(X)-1$. Но тогда мы можем сделать один шаг от $X_1$ к $X$ и получим, что $X$ находится на расстоянии не больше, чем $\ell(x)$ от $D$. Но это противоречит условию, что у $X$ ближайшие нули только $A$, $B$ и $C$. Тогда получается, что $\ell(X_1)=\ell(X)+1 \Rightarrow X$ не тупик, так как путь до него можно продолжить на 1 и получить кратчайший путь до другого элемента. □

**Лемма 14.** Диагональ внутри параллелепипеда — прямая(см. Рис. 8)

*Доказательство.* Диагональ, как геометрическое место точек равноудаленных от трех соседних нулей, задается двумя линейно независимыми уравнениями с модулями. В любой точке параллелепипеда модули раскрываются одинаково $\Rightarrow$ эта система уравнений задает одну прямую. Можно доказать иначе: спроецируем диагональ внутри параллелепипеда на одну из граней с двумя нулями. Двумерная диагональ внутри прямоугольника — прямая. Аналогично для другой грани с двумя нулями. Получается, трехмерная диагональ при двух разных проекциях переходит в прямую $\Rightarrow$ трехмерная диагональ — прямая. □

**Теорема 2.** *Тупики — это значения функции в точках, которые лежат на диагонали внутри какого-то параллелепипеда, образованного тремя соседними нулями.*

*Доказательство.* Из леммы 9, леммы 11, леммы 12, леммы 13 мы знаем, что других тупиков быть не может.

Предположим, что точка $X$, которая лежит внутри параллелепипеда, образованного соседними нулями $A$, $B$ и $C$, не тупик. Тогда можно продлить ее путь до одного из нулей $A$, или $B$, или $C$ на один шаг и получить кратчайший путь до какой-то точки $X_1$. Так как $X$ внутри параллелепипеда, то $X_1$ внутри или на границе параллелепипеда. Каждая из граней параллельна одной из плоскостей $XOY, YOZ, XOZ$ и $X \Rightarrow$ при движении вдоль одной из осей мы приблизились к одной из граней. На каждой из граней есть хотя бы один ноль $\Rightarrow$ при приближении к грани мы приближаемся к нулю $\Rightarrow$ расстояние до какого-то нуля уменьшилось и оно меньше, чем $\ell(f(X))+1 \Rightarrow$ мы получили не кратчайший путь. Противоречие. □

*Замечание* 2. Числа в некоторых параллелепипедах совпадают. Найдем количество разных тупиков. Параллельным переносом мы можем перевести единичный параллелограмм в любой другой. Каждый параллелограмм состоит из двух треугольников. Поэтому существует всего два типа параллелепипедов.

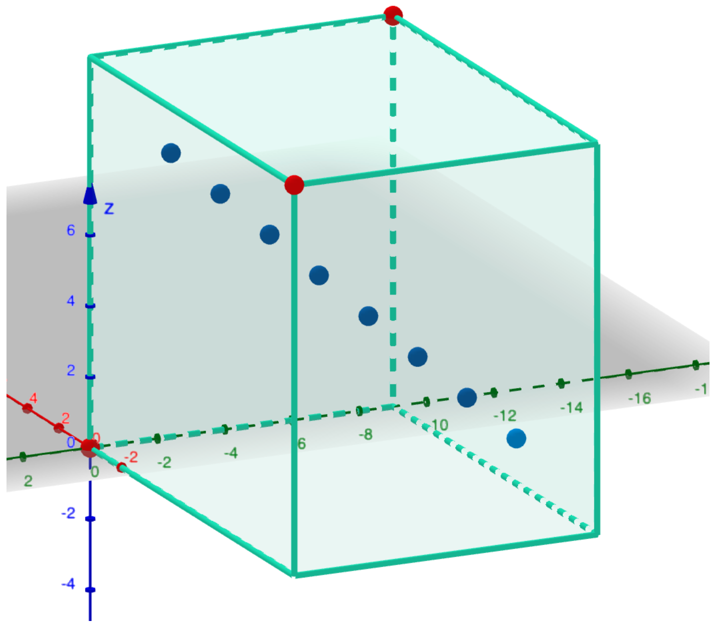



Рис. 8: Тупики

# 5 Общий случай порождающего множества на трех элементах

Давайте считать, что порождающие множества — это числа $a$,$b$,$c$ такие, что $(a,b,c) = 1$ и $(a,b) \neq 1, (b,c) \neq 1, (a,c) \neq 1, a \equiv_2 1, b \equiv_2 1, c \equiv_2 1$.

## 5.1 Сведение задачи к геометрической

Сведение задачи к геометрической аналогично случаю для двух порождающих.

## 5.2 Поиск тупиков

**Лемма 15** (Лемма о четности)**.** Все расстояния от точки $X$ до нулей одинаковой четности.

*Доказательство.* Предположим, что есть расстояния до нулей разной четности. Тогда существуют $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ такие, что $ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$ и $x + y + z \not\equiv_2 x_1 + y_1 + z_1$. $a \equiv_2 1$, $b \equiv_2 1$ и $c \equiv_2 \Rightarrow x + y + z \equiv_2 ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 \equiv_2 x_1 + y_1 + z_1$, что даёт нам противоречие. Лемма доказана аналогично случаю с тремя порождающими вида $pq$,$qr$,$rp$ порождающими. □

**Лемма 16.** Если у точки $X$ только один ближайший ноль, она не является тупиком.

*Доказательство.* Доказательство то же, что и в случае для трех порождающих вида $pq$,$qr$,$rp$. □

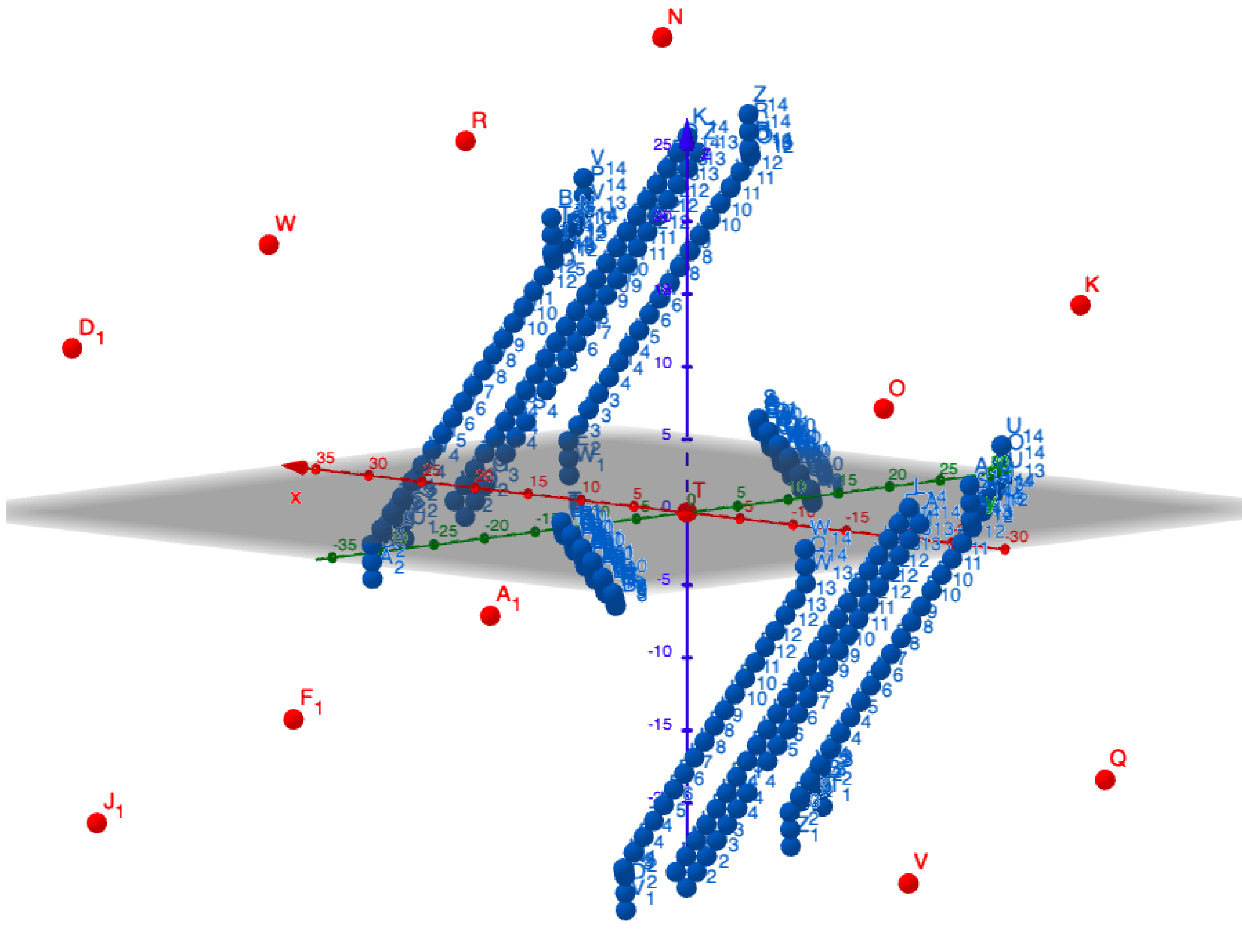



Рис. 9: Тупики для трех порождающих

## Список литературы

[Gub05] Victor Guba. *Strict dead end elements in free soluble groups*. 2005. arXiv: `math/0508422 [math.GR]`.

[Sun07] Zoran Sunic. *Frobenius Problem and dead ends in integers*. 2007. arXiv: `math/0612271 [math.NT]`.

[CM22] Oleg Chistov и Ruslan Magdiev. *Geodesic words in central extension of the Klein bottle group*. 2022. arXiv: `2204.07383 [math.GR]`.