# Содержание

# 1. Введение в теорию групп

## 1.1 Преобразования

**Определение 1.** Пусть $M$ — некоторое множество элементов произвольной природы. Если каждой упорядоченной паре элементов из $M$ поставлен в соответствие определённый элемент также из $M$, то говорят, что на $M$ задана бинарная операция (обозначим её за $\circ$).

Говоря чуть более взрослым языком, бинарная операция — это отображение

$$\circ\colon M \times M \to M, \quad (m, m) \mapsto m \circ m \in M.$$

**Пример 1.** Для начала, всякие скучные числовые примеры.

Причём же тут преобразования? Оказывается, бинарные операции — удобный способ записывать, что происходит, когда мы проделываем последовательно много различных преобразований. Рассмотрим сначала некоторые примеры.

**Пример 2.** Повороты равностороннего треугольника, переводящие его в себя, *переставляют* вершины. Композиция преобразований — бинарная операция. Какие у неё свойства? Выпишем *таблицу умножения* (см. [Б01, пример 1]).

А еще есть симметрии, их тоже можно композицировать (и композицировать с поворотами).

Коллеги, сюда напишите Ваш любимый пример про строки и любимый пример про графы (по штуке, соовтественно).

Теперь давайте подумаем, какие свойства естественно было бы требовать от преобразований.

- Если мы говорим о преобразованиях одного типа, то естественно требовать, чтобы когда мы проделывали несколько одно за другим, получалось преобразование того же типа (как композиция поворотов — поворот).
- Во всех примерах мы видели, что есть *тождественное* преобразование (которое просто не делает ничего).
- Кроме того, композиция преобразований естественным образом *ассоциативна*. То есть, для любых преобразований $f, g, h$ мы имеем $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$.
- В примерах мы также видели, что для каждого преобразования $g$ существует преобразование $h$, которое после применения $g$ возвращает ситуацию в исходный вид.

Теперь попробуем сделать наши примеры немного более строгими.

**Определение 2.** Напоминиание про функции, инъекции, сюръекции, биекции.

Приведём какой-нибудь не слишком скучный пример.

**Пример 3.** Пусть отображение $\varphi$ ставит в соответствие каждому городу мира первую букву из его названия на русском языке (например, $\varphi$(Санкт-Петербург) = С). Будет ли $\varphi$ отображением всех городов мира **на** весь русский алфавит?

Нет, не будет (так как едва ли есть город, начинающийся на ъ, например). Будет ли это отображение инъективным? Очевидно, что тоже нет.

Пока что мы понимали слово *преобразование* наивно, дадим теперь строгое математическое определение.

**Определение 3.** Произвольное взаимно однозначное отображение множества $M$ на себя, $g\colon M \to M$ , мы будем для краткости называть *преобразованием* множества $M$.

**Пример 4.** Если множество $M$ конечное, то можно писать табличку и будет перестановка (слово перестановка тут еще не говорим), но тем не менее.

**Определение 4.** Так как преобразование — это взаимно однозначное отображение, то для каждого преобразования $g$ существует обратное преобразование $g^{-1}$, которое определяется следующим образом: если $g(A) = B$, то $g^{-1}(B) = A$.

**Пример 5.** Выписать обратное преобразование для какой-нибудь композиции поворота и симметрии.

Если у нас есть некоторое фиксированное множество $M$ и все его преобразования, то мы можем определить их произведение (композицию):

$$(g_1 g_2)(A) = g_1(g_2(A)),$$

то есть сначала делаем $g_2$, а потом $g_1$.

**Определение 5.** Пусть некоторое множество преобразований $G$ таково, что

1. если преобразования $g_1$ и $g_2$ содержатся в $G$, то и их произведение $g_3 = g_1 g_2$ содержится в $G$;
2. если преобразование $g$ содержится в $G$, то и обратное ему преобразование $g^{-1}$ содержится в $G$.

Тогда такое множество преобразований $G$ мы будем называть *группой преобразований.*

## 1.2 Группы

И вот мы наконец плавно подошли к одному из главных определений в нашем курсе.

**Определение 6.** Множество $G$ с заданной на нём бинарной операцией $\circ$ (мы часто будем называть её умножением) называется *группой*, если

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$.
2. Существует *нейтральный* элемент $e \in G$, то есть такой элемент, что $e \circ g = g \circ e = g$ для всех элементов $g \in G$.
3. У всех элементов $g \in G$ есть обратный элемент $g^{-1}$, то есть такой, что $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

*Замечание.* Заметим, что любая группа преобразований является группой. Группы бывают разные, но в дальнейшем, группы преобразований будут основным примером групп для нас.

**Пример 6.** Вновь глупые числовые примеры. Пояснение примеров из прошлого параграфа.

**Пример 7.** В частности, тут можно и ввести впервые $\mathrm{Aut}(X^*)$.

Далее разговор о том, когда важно, в каком порядке делать преобразования, а в каком нет (и определение *абелевой группы*). И разговор об обратном к произведению (сначала надевают насок, а потом ботинок, а снимают в обратном порядке).

### 1.3 Дальнейший план того, что я не написал еще

1. Группы перестановок, группы движений, аффинные преобразования, строковые примеры.
2. Циклические группы, остатки, порядок группы.
3. Гомоморфизмы и изоморфизмы, как сохранение структуры (и как разный способ записывать одни и те же преобразования) .
4. Подгруппы.
5. Действие группы на множестве, сопряжения, нормальные подгруппы.
6. (?) классы смежности, индекс, теорема Лагранжа.
7. (?) нормальные подгруппы и фактор.
8. (?) Теорема о гомоморфизме.
9. (?) Образующие и соотношения.

## Список литературы

[Б01] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в задачах и решениях.* 1-е изд. М.: МЦНМО, 2001. URL: https://old.mccme.ru/free-books/pdf/alekseev.pdf.