

Серия 2. Нормальное завтра.

0. Докажите, что $G \times H \cong H \times G$.

1. Пусть A, B — абелевы группы. Обозначим за $\text{Hom}(A, B)$ множество гомоморфизмов из A в B . Задайте $\text{Hom}(A, B)$.

2. Докажите формулу для числа сочетаний $\binom{n}{k}$ при помощи действия группы на множестве.

3. а) Докажите, что $\sum_{\pi \in S_n} |\text{fix}(\pi)| = n!$. б) Пусть G

4. а) Мальчик Вася нарисовал на бесконечном листе бумаги такой концептуальный рисунок:

... Г Г Г Г Г Г Г Г Г Г ...

Найдите группу симметрий этого рисунка.

б) то же самое, но для рисунка

... D D D D D D D D D D ...

Комментарий. в данной задаче мы ищем *только те симметрии, которые переводят соседние буквы в соседние*. И, отметим, что буквы стоят на *одинаковом* расстоянии.

Определение. Симметрической группой S_X на множестве X называется группа биекций $X \rightarrow X$.

5. Докажите, что любая группа G реализуется, как подгруппа в некоторой симметрической группе (т.е. симметрической группе какого-то множества).

Определение. Дробно-линейным преобразованием называется функция $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Здесь $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

6. Докажите, что дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции.