Параболические подгруппы группы p-Базилики

Алексей Исковских, Михаил Ураков, Владислав Гребенюк

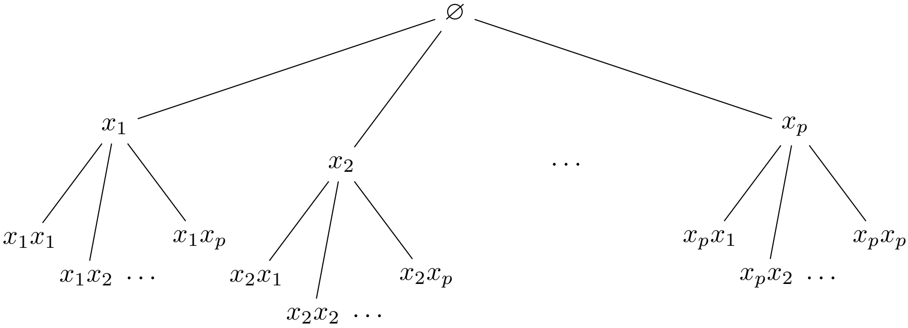
Май 2024

Сириус, IV Майская проектная смена по математике и теоретической информатие

Введение и постановка задачи

Группы, действующие на корневых деревьях

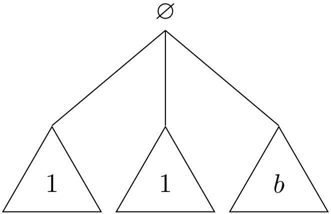
Группы, действующие на деревьях играют важную роль в теории групп: именно среди групп такого типа был обнаружен первый пример группы промежуточного роста.

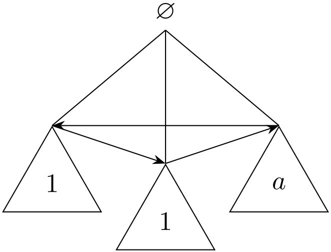


Группа p-Базилики

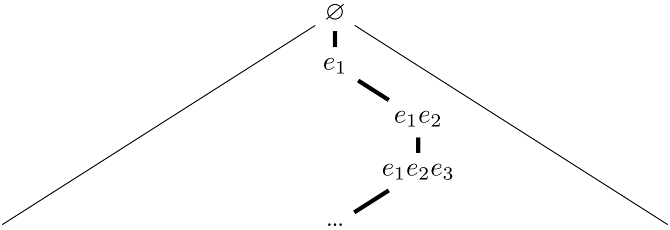
Группа p-Базилики (подробнее в [Dom+21]) — подгруппа группы автоморфизмов p-регулярного дерева на двух образующих:

$$a = (1,\ 1,\ \dots b) \qquad\qquad b = \sigma\,(1,\ 1,\ \dots a),\ \sigma = (1\ 2\ 3\ \dots\ p)$$





Параболические подгруппы



$$\mathrm{P}(\mathbf{e}) = \bigcap_{x_i \in x_e} \mathrm{St}(x_i), \; x_e = \{e_1, \; e_1e_2, \; e_1e_2e_3...\}$$

Параболические подгруппы

Предложение из [BG01]

Пусть $G < Aut(T)$, каждый элемент группы меняет каждый луч в конечном колличестве мест и обладает транзитивностью на уровне. Тогда существуют константы λ, μ такие, что $|g_i| \leq \lambda|g| + \mu$ для всех $i \in X$. Тогда асимптотический рост G/P это полином степени $\log_{1/\lambda'}(d)$, где λ' инфимум λ.

Основные результаты

Стабилизатор P_{2^∞}

$$\mathrm{P}_{2^\infty} = \langle \xi^n(a^b),\, \xi^n(a^{b^2}) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle, \quad \xi\colon \begin{array}{l} a \mapsto b^3 \\ b \mapsto a \end{array}$$

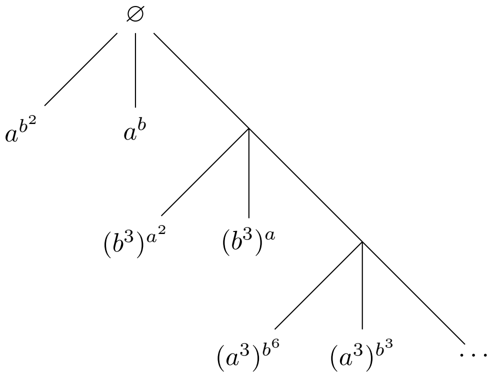


Рис. 1: Представление порождающго множества P_{2^∞}

Обобщение на произвольный луч

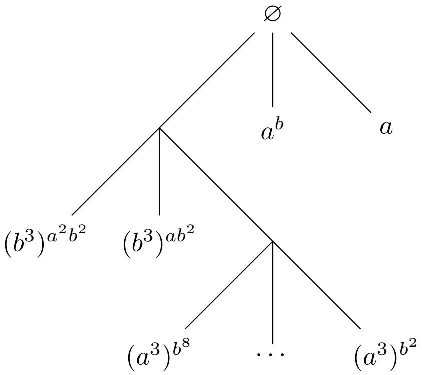


Рис. 2: Представление порождающего множества $\mathrm{P}_{021\ldots}$

Некоторые факты о стабилизаторах

Предложение

1. $\mathrm{St}_G(2^{n+1}) = \langle a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^n))\rangle$
2. $\mathrm{St}_G(2^{n+1}) \trianglelefteq \mathrm{St}_G(2^n)$
3. $\mathrm{St}_G(2^n)/\,\mathrm{St}_G(2^{n+1}) = C_3$

Сопряжения параболической подгруппы

Предложение

$$\mathrm{P}_{e_1e_2\ldots e_m\ldots}^{t_{e_1}(\ldots t_{e_{m-1}}(b^k)\ldots)} = \mathrm{P}_{e_1e_2\ldots\sigma^k(e_m)\ldots}, \ k \in \mathbb{Z}$$

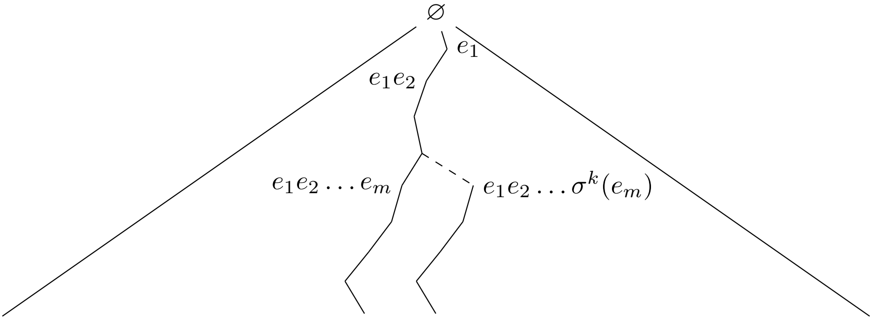


Рис. 3: Сопряжение стабилизаторов луча

Сопряжения параболической подгруппы

$$\psi(g^{b^{np+k}}) = (g|^{a^n}_{\sigma^k(0)}, g|^{a^n}_{\sigma^k(1)}, \ldots, g|^{a^n}_{\sigma^k(p-k-1)}, g|^{a^{n+1}}_{\sigma^k(p-k)}, \ldots, g|^{a^{n+1}}_{\sigma^k(p-1)}),$$

$$g \in B_p, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\xi\colon \quad \begin{aligned} a &\mapsto b^p \\ b &\mapsto a \end{aligned}$$

$$t_x(g) = \xi(g)^{b^{p-x-1}}$$

Список литературы

[BG01] Laurent Bartholdi и Rostislav I. Grigorchuk. ***On Parabolic Subgroups and Hecke Algebras of Some Fractal Groups.*** 2001. arXiv: *math/9911206 [math.GR]*.

[Dom+21] Elena Di Domenico и др. ***p-Basilica groups.*** 2021. arXiv: *2105.12443 [math.GR]*.

Спасибо за внимание!

Рис. 4: Ёж недоволен