Константы гиперболичности различных пространств

Роман Шумилов, Василий Филянин, Мика Нелимов, Марк Захаров, Владислав Оглоблин

Май 2024

Аннотация

В статье введено понятие δ-функции пространства. Она измеряет рост оптимальной константы гиперболичности шара радиуса R. Исследована асимптотика этой функции для разных пространств и групп. Построены примеры метрических пространств, для которых она растет заданным образом. Доказана её линейность для группы Баумслага-Солитера $\mathbf{BS}(1, 2)$, а также для группы лампочника.

Текст создан на исследовательской программе для школьников в центре Сириус, под научным руководством Артёма Семидетнова, Руслана Магдиева и Матвея Магина.

Содержание

1 Введение и постановка задачи

Мотивировка понятия роста гиперболичности в том чтобы научиться более тонко различать гиперболичность пространства. Смотреть на динамику тонкости треугольников.

2 Основные определения

Определение 1. Пусть M — некоторое множество. Метрикой на нем называется функция $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

Метрическим пространством называется пара из множества и метрики на нем.

Основными примерами метрических пространств в этой работе будут выступать:

1. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^2$. Евклидова метрика индуцируется с $\mathbb{R}^2$.
2. Неориентированный локально конечный связный граф. Метрика определяется как длина наикратчайшего пути между точками.

Определение 2. Произведением Громова на метрическом пространстве (M, d) точек $x, y \in M$ относительно $o \in M$ называется функция:

$$(x|y)_o = \frac{\mathrm{d}(x, o) + \mathrm{d}(y, o) - \mathrm{d}(x, y)}{2}$$

Определение 3. Пусть $\delta \ge 0$ — некоторое число. Метрическое пространство (M, d) называется δ-гиперболическим по Громову, если для всех четверок точек $x, y, z, o \in M$ выполняется неравенство

$$(x|z)_o \ge \min((x|y)_o, (y|z)_o) - \delta$$

Далее, δ-гиперболические по Громову метрические пространства мы будем называть просто δ-гиперболическими.

Определение 4. *Геодезический путь* между точками $x, y \in M$ — изометрическое отображение $f\colon [0; \mathrm{d}(x, y)] \to M$ такое, что $f(0) = x$ и $f(\mathrm{d}(x, y)) = y$. Далее, мы отождествляем геодезические пути с их образами. Отрезком между двумя точками x, y будет называться любой геодеический путь между ними. Он будет обозначаться как $[x, y]$. Далее предполагается, что во всех рассматриваемых метрических пространствах между любыми двумя точками есть некоторый отрезок.

Определение 5. Определим расстояние от точки $x \in M$ до множества $A \subset M$ — это

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf\big\{\mathrm{d}(x, a)\big|a \in A\big\}$$

Определение 6. Треугольником на точках x, y, z будет называться объединение некоторых геодезических отрезков $[x, y], [y, z], [z, x]$. Такой треугольник далее будет обозначаться $\triangle xyz$. Каждый из отрезков выше в таком случае будет называться стороной треугольника.

Определение 7. Будем говорить, что треугольник $\triangle xyz$ — δ-тонкий, если от любой точки на стороне треугольника расстояние до совокупности двух других сторон не больше δ.

Очевидно, что в любом метрическом пространстве любой треугольник является δ-тонким для некоторого δ. Положим $\delta(\triangle xyz)$ как инфимум по таким δ, что $\triangle xyz$ — δ-тонкий. Как мы только что поняли, $\delta(\triangle xyz) < +\infty$. Определим функцию *роста гиперболичности.*

Определение 8. Пусть M — метрическое пространство с отмеченной точкой $o \in M$. Положим

$$\delta(\mathrm{R}) := \sup\bigl\{\delta(\triangle xyz) \bigm| x, y, z \in \mathrm{B}(\mathrm{R})\bigr\},$$

где $\mathrm{B}(\mathrm{R}) := \bigl\{x \in M \bigm| \mathrm{d}(x, o) < \mathrm{R}\bigr\}$ — шар в M.

Наша работа посвящена оценкам на $\delta(R)$ для разных метрических пространств. Без подробностей, упомянем, что скорость роста этой функции является инвариантом метрического пространства и поэтому представляет интерес. Под скоростью роста мы здесь понимаем следующее отношение эквивалентности:

Определение 9. Пусть $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, будем говорить, что f асимптотически не быстрее g, и писать $f \preccurlyeq g$, если существует такая $c > 0$, что $f(x) \le g(cx + c) + c$. Будем говорить, что f и g растут с одинаковой скоростью, и писать $f \approx g$, если $f \preccurlyeq g$ и $g \preccurlyeq f$.

Мы будем рассматривать функцию δ с точностью до одинаковой скорости роста.

2.1 Свойства $\delta(R)$ для абстрактных метрических пространств

Несложно получить следующую оценку на $\delta(R)$:

Утверждение. В любом метрическом пространстве $\delta(R) \leqslant 2R$

Доказательство. Возьмём произвольный треугольник $\triangle ABC$, расстояние от любой точки X в нем до любой Y в нем не больше $2R$ по неравенству треугольника:

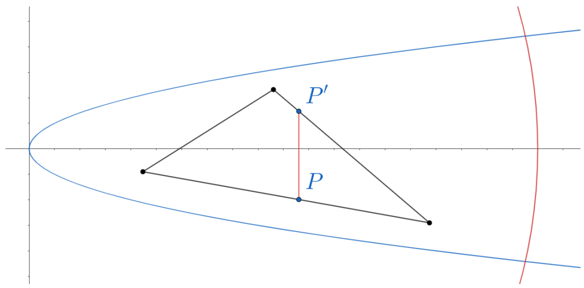
$$\mathrm{d}(X,Y) \leqslant \mathrm{d}(X,O) + \mathrm{d}(O,Y) < 2R$$

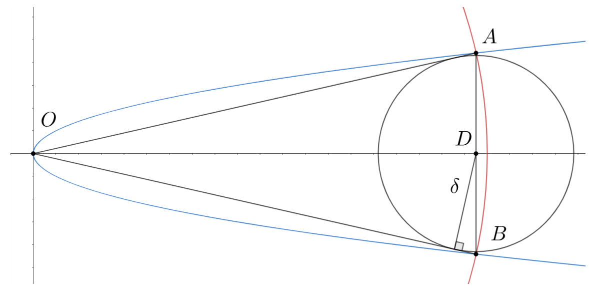
Значит, шар радиуса R является $2R$ гиперболичным. Оценка доказана. $\square$

Далее мы строим метрические пространства, в которых функция $\delta(R)$ растет заданным образом.

Теорема. *Пусть $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — выпуклая положительная непрерывная функция такая, что $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $f(x)/x \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда метрическое пространство $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ |y| \le f(x)\}$ с индуцированной с $\mathbb{R}^2$ метрикой имеет функцию роста гиперболичности с ограничениями*

$$\frac{1}{2} f(R) \le \delta_M(R) \le 2f(R).$$





Доказательство. Оценим $\delta(R)$ снизу с помощью треугольника OAB как на рисунке **??**. Рассмотрим оптимальную костанту для точки D, из $\sin \angle OBD = \frac{OD}{R} = \frac{\delta}{f(OD)}$. Значит $\delta(R) \geqslant \frac{OD}{R} f(OD)$. Так как $f(R) \leqslant R$, то $\cos \angle DOA \geqslant \cos 45°$, то есть $OD \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} R$. Также по свойству выпуклости функции мы знаем, что $f(\alpha R) \geqslant \alpha f(R)$. Значит $\delta(R) \geqslant \frac{OD}{R} f(OD) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} f(\frac{1}{\sqrt{2}} R) \geqslant \frac{1}{2} f(R)$. Оценка снизу доказана.

Даём оценку сверху. Докажем, что каждый треугольник является δ-тонким при $\delta = 2f(R)$. Рассмотрим произвольный треугольник и произвольную точку P на его стороне, тогда расстояние от этой точки до ближайшей оценивается сверху вертикальным расстоянием до ближайшей точки стороны PP' как на рисунке **??**, а это вертикальное расстояние оценивается наибольшим вертикальным расстоянием в пространстве $2f(OD) < 2f(R)$.

□

3 Геометрия групп

Пусть G — группа, порожденная конечным множеством S. По ней можно определить граф Кэли этой пары: в нем вершинами являются элементы группы G, причем две из них соединены ребром тогда и только тогда, когда они отличаются домножением на элемент $S^{\pm 1}$. Этот граф индуцирует так называемую словарную метрику на G.

4 Группы Баумслага-Солитера

4.1 Определения

Группы Баумслага-Солитера $\mathbf{BS}(q, p)$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{BS}(q, p) := \langle a, t \mid t a^q t^{-1} = a^p \rangle.$$

Докажем, что для них $\delta(R)$ растет линейно на $\mathbf{BS}(1, 2)$.

Построим последовательность четверок точек (O, A_n, B_n, C_n), для которых минимальная константа гиперболичности (через произведение Громова) линейно растет от радиуса шара, в котором они находятся. Пусть n – четное натуральное число. Определим

$$A_n = a^{2^n},\ B_n = t^{\frac{n}{2}},\ C_n = a t^{\frac{n}{2}},\ D = a,\ O = 1$$

Далее нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 1. $|a^{2^n}| = \mathrm{d}(O, A_n) = 2n$, $|a^{2^n - 1}| = \mathrm{d}(D, A_n) = 2n + 1$.

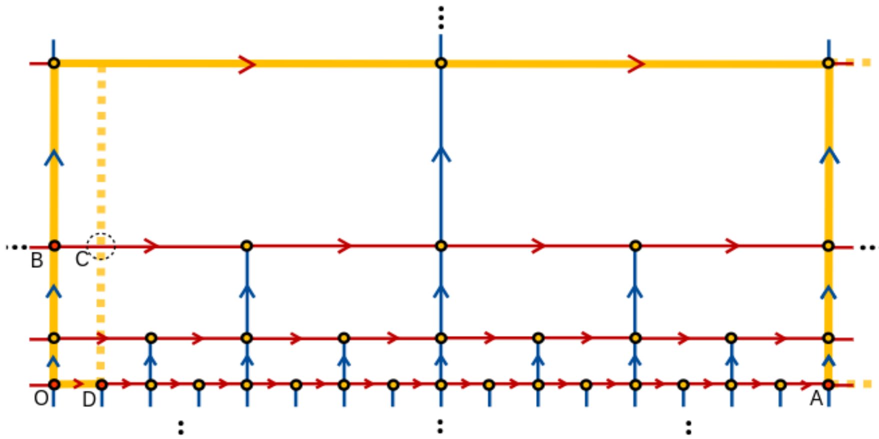


Рис. 1: Лист графа Кэли $\mathbf{BS}(1,2)$: сплошной желтой линией отмечен геодезический отрезок $[O, A_n]$, пунктирной – $[D, A_n]$, он находится на другом листе. Точка C_n также находится на другом листе, поэтому расстояние $\mathrm{d}(B_n, C_n)$ большое ($\mathrm{d}(B_n, C_n) = n+1$).

Из этого следует, что все точки A_n, B_n, C_n лежат в окружности радиуса $2n$ с центром в O. При этом $\mathrm{d}(O, A_n) = 2n$, $\mathrm{d}(O, B_n) = \frac{n}{2}$, $\mathrm{d}(O, C_n) = \frac{n}{2} + 1$, $\mathrm{d}(B_n, C_n) = |t^{-\frac{n}{2}} a t^{\frac{n}{2}}| = n + 1$. Для подсчета $\mathrm{d}(A_n, B_n)$ и $\mathrm{d}(A_n, C_n)$ докажем еще одно утверждение:

Лемма 2. B_n содержится в некотором геодезическом отрезке $[O, A_n]$, а C_n – в некотором геодезическом отрезке $[D, A_n]$.

Из леммы имеем,

$$\mathrm{d}(O, B_n) + \mathrm{d}(B_n, A_n) = \mathrm{d}(O, A_n),$$

$$\mathrm{d}(D, C_n) + \mathrm{d}(C_n, A_n) = \mathrm{d}(D, A_n),$$

откуда находим $\mathrm{d}(B_n, A_n) = \frac{3n}{2}$, $\mathrm{d}(C_n, A_n) = \frac{3n}{2} + 1$. Наконец, зная все расстояния, найдем произведения Громова:

$$(A_n|B_n)_O = \frac{n}{2},\ (A_n|C_n)_O = \frac{n}{2},\ (B_n|C_n)_O = 0$$

По определению дельта-функции имеем:

$$\delta(2n) \geq \min\{(A_n|B_n)_O, (A_n|C_n)_O\} - (B_n|C_n)_O = \frac{n}{2},$$

что доказывает линейность дельта-функции.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим для a^{2^n} кратчайшее слово w. Пусть

$$w = t^{\beta_0} a^{\alpha_1} t^{\beta_1} a^{\alpha_2} t^{\beta_2} \dots a^{\alpha_s} t^{\beta_s}, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$$

Так как $w = a^{2^n}$, $\sum \beta_i = 0$. Обозначим $h = \sum_{\beta_i < 0} \beta_i = \sum_{\beta_i > 0} \beta_i$. Рассмотрим следующие преобразования слова w, где β и β' – это некоторая пара β_i и β_{i+1}:

$$t^{\beta} a^{\alpha} t^{\beta'} \longmapsto t^0 a^{\alpha \cdot 2^{\beta}} t^{\beta + \beta'}, \quad \beta > 0$$

$$t^{\beta}a^{\alpha}t^{\beta'} \longmapsto t^{\beta+\beta'}a^{\alpha\cdot 2^{-\beta'}}t^0, \quad \beta' < 0$$

Оба преобразования не меняют w как элемент группы $\mathbf{BS}(1,2)$, и с их помощью мы можем привести слово к виду

$$w = t^{-m}a^{\tilde{\alpha}_1}t^0a^{\tilde{\alpha}_2}t^0 \dots t^0a^{\tilde{\alpha}_s}t^m = t^{-m}a^{\sum\tilde{\alpha}_i}t^m, \quad m > 0$$

С другой стороны, $w = a^{2^n} = t^{-m}a^{2^{n+m}}t^m$, откуда $\sum\tilde{\alpha}_i = 2^{n+m} \geq 2^n$. Также $\tilde{\alpha}_i \leq \alpha_i \cdot 2^h$ (так как h – максимальное число букв t, которые мы можем "перекинуть" через α_i с помощью преобразований). Соответственно, $\sum\tilde{\alpha}_i \leq 2^h\sum\alpha_i = 2^h(|w| - 2h)$. Но мы знаем, что $\sum\tilde{\alpha}_i \geq 2^n$, тогда имеем следующую оценку:

$$|w| \geq 2h + \frac{1}{2^h}\sum\tilde{\alpha}_i \geq 2h + 2^{n-h}$$

Минимум выражения справа достигается при $h = 1$ или $h = 2$ и равен $2n$, то есть мы получили нужную нам оценку на $|w|$, которая достигается при $w = t^{n-1}a^2t^{1-n}$ (или же $w = t^{n-2}a^4t^{2-n}$).

Для доказательства $|a^{2^n-1}| = 2n + 1$ поступим аналогично, при этом слегка улучшим оценку на $\sum\tilde{\alpha}_i$: так как $2^n - 1$ нечетно, хотя бы одно $\tilde{\alpha}_j$ тоже нечетно, а значит равняется α_j (то есть α_j не участвовало ни в одном преобразовании). Тогда оценка $\sum\tilde{\alpha}_i \leq 2^h\sum\alpha_i$ заменяется на $\sum\tilde{\alpha}_i \leq 2^h(\sum\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_j \leq 2^h(\sum\alpha_i - 1) + 1 = 2^h(|w| - 2h - 1) + 1$, то есть

$$|w| - 1 \geq 2h + \frac{1}{2^h}\sum\tilde{\alpha}_i - \frac{1}{2^h} \geq 2h + 2^{n-h} - \frac{1}{2^h}$$

Находя минимум, получаем требуемую оценку $|w| \geq 2n + 1$, достигающуюся, например, при $w = t^{n-1}a^2t^{1-n}a^{-1}$.

$\square$

Доказательство леммы 2. По лемме 1, A_n имеет кратчайшее представление $t^{n-1}a^2t^{1-n}$, тогда все префиксы этого слова образуют геодезический отрезок. Нетрудно видеть, что $B_n = t^{\frac{n}{2}}$ является таким префиксом.

Так как $\mathrm{d}(D, A_n) = |D^{-1}A_n| = |a^{2^n-1}| = 2n+1$, и $D^{-1}A = t^{n-1}a^2t^{n-1}a^{-1}$ – кратчайшее слово, префиксы этого слова с приписанным словом D в начале также образуют геодезический отрезок, куда входит $C_n = at^{\frac{n}{2}}$.

$\square$

5 Группа лампочника

5.1 Определения

Определение 10. Пусть группа H действует на множестве X перестановками. Будем называть A^X прямым произведением A самим с собой, индексированное элементами X. Можно считать, что A^X — множество всевозможных последовательностей $\overline{a} = (a_x)_{x\in X}$. Действие группы H на X может быть представлено как действие H на A^X переиндексированием элементов. $h(a_x)_{x\in X} = (a_{h\cdot x})_{x\in X}$. Тогда *Сплетением* ($A \wr H$ или $A wr H$) называется полупрямое произведение A^X и H с действием H на A^X, описанным выше. Элементом сплетения будет пара $(h, \overline{a})$. $(h_1, \overline{a}_1)\cdot(h_2, \overline{a}_2) = (h_1h_2, (h_2 \cdot \overline{a}_1)\overline{a}_2)$.

Тогда группа лампочника задается как

$$\mathbf{L}_p = \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z}/p) \cong \langle a, t \mid a^p = \mathrm{id}, \forall n, m \in \mathbb{Z} : [t^n a t^{-n}, t^m a t^{-m}] = \mathrm{id} \rangle$$

В частности обозначение $\mathbf{L}_\infty$ означает группу $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \cong \langle a, t \mid \forall n, m \in \mathbb{Z} : [t^m a t^{-n}, t^m a t^{-m}] = \mathrm{id} \rangle$

Рассмотрим множество X_p целочисленных прямых, с отмеченной точкой человеком-лампочником, а также лампочкой в каждой целой точке, имеющей p различных состояний. Причём не нулевое состояние лампочки только в конечном числе лампочек. Заметим, что $\mathbf{L}_p$ действует на этом множестве последовательными применениями операций $t^{\pm 1}$ (переход в соседнюю целочисленную точку слева/справа) и $a^{\pm 1}$ (изменение состояния лампочки в позиции лампочника на следующее/предыдущее по циклу).

$\forall x \in X_p : \exists! h \in \mathbf{L}_p : h \ \cdot \ 0 = x$, где 0 - тривиальный элемент множества X_p, когда лампочник не делал никаких движений из начала координат и не переключал никакие лампочки, то есть дейсвтие группы транзитивно. Это верно в силу построения нашего множества X_p. А значит мы можем отождествить элементы группы $\mathbf{L}_p$ с элементами множества X_p.

5.2 Линейность дельта функции группы лампочника

Утверждение. Обозначим $a_i = t^i a t^{-i}$. Тогда если элемент g включает лампочки на позициях $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ с состояниями $c_1, c_2, \ldots, c_k$, и лампочник завершает движение в позиции m, то:

$$g = a_{i_1}^{c_1} \ a_{i_2}^{c_2} \ \ldots a_{i_k}^{c_k} t^m$$

Доказательство.

$$\forall i, j \in \mathbb{Z} : a_i a_j = (t^i a t^{-i})(t^j a t^{-j}) = (t^j a t^{-j})(t^i a t^{-i}) = a_j a_i \Rightarrow [a_i; a_j] = \mathrm{id}$$

$$t^n * a_i = t^n * (t^i a t^{-i}) = (t^{n+i} a t^{-n-i}) * t^n = a_{n+i} t^n$$

Фактически a_i означает: "прийти из начала координат в позицию i, переключить лампочку и вернуться в начало координат". $a_i^{c_i}$ означает переключить лампочку в позиции a_i c_i раз. Последовательное применение a_i при упорядоченной последовательности i означает последовательно прийти к крайней лампочке, переключить ее к нужному состоянию, дойти до следующей, переключить ее и тд. В конце необходимо дойди до конечной позиции лампочника. Последовательное применение выгодно тем, что соседние t^{-i} и t^j при i < j будут сокращаться и останется лишь t^{j-i}. □

Согласно книге [Mat17]:

$$\text{Пусть } g \in \mathbf{L}_p, \text{ тогда } g = a_{-j_1}^{c_1} \ a_{-j_2}^{c_2} \ \ldots a_{-j_k}^{c_k} a_{i_1}^{r_1} \ a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_l}^{r_l} t^m,$$
$$\text{где } j_1 > j_2 > \cdots > j_k, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_l,$$
$$\forall i \geq 0, j > 0, \forall \ 0 < c, r < p$$

$$\Rightarrow |g| = \sum_{ind=1}^{k} c_{ind} + \sum_{ind=1}^{l} r_{ind} + j_1 + i_l + \min(j_1 + |m - i_l|, i_l + |m + j_1|)$$

Утверждение. $\delta(\mathbf{R})$ для любой группы лампочника растет линейно.

Доказательство. Рассмотрим $R = 5n + 1$ для некоторого натурального n. Выберем четыре элемента A, B, C и O такие что:

$$A = \left(\prod_{i=-2n}^{-1} a_i\right) \cdot t^{-2n},\ B = \left(\prod_{i=1}^{2n} a_i\right) \cdot t^{2n},\ C = \left(\prod_{i=-n}^{n} a_i\right) \cdot t^{n},\ O = \mathrm{id}$$

Посчитаем все возможные попарные расстояния между этими элементами.

$$\mathrm{d}(A,B) = |A^{-1}B| = \left|t^{2n} \cdot \prod_{i=-2n}^{-1} a_i \cdot \prod_{i=1}^{2n} a_i \cdot t^{2n}\right| = \left|\prod_{i=0}^{2n-1} a_i \cdot \prod_{2n+1}^{4n} a_i \cdot t^{4n}\right| = 8n$$

$$\mathrm{d}(A,C) = |A^{-1}C| = \left|t^{2n} \cdot \prod_{i=-2n}^{-1} a_i \cdot \prod_{i=-n}^{n} a_i \cdot t^{n}\right| = \left|\prod_{i=0}^{2n-1} a_i \cdot \prod_{n}^{3n} a_i \cdot t^{3n}\right| = \left|\prod_{0}^{n-1} a_i \cdot \prod_{2n}^{3n} a_i \cdot t^{3n}\right| = 5n+1$$

$$\mathrm{d}(A,O) = |A| = \left|\prod_{i=-2n}^{-1} a_i \cdot t^{-2n}\right| = 4n$$

$$\mathrm{d}(B,C) = |B^{-1}C| = \left|t^{-2n} \cdot \prod_{i=1}^{2n} a_i \cdot \prod_{i=-n}^{n} a_i \cdot t^{n}\right| = \left|\prod_{i=-2n+1}^{0} a_i \cdot \prod_{i=-3n}^{-n} a_i \cdot t^{-n}\right| =$$

$$= \left|\prod_{i=-3n}^{-2n} a_i \cdot \prod_{-n+1}^{0} a_i \cdot t^{-n}\right| = 7n+1$$

$$\mathrm{d}(B,O) = |B| = \left|\prod_{i=1}^{2n} a_i \cdot t^{2n}\right| = 4n$$

$$\mathrm{d}(C,O) = |C| = \left|\prod_{i=-n}^{n} a_i \cdot t^{n}\right| = 5n+1$$

По определению **??**

$$\begin{gathered} p = \mathrm{d}(A,C) + \mathrm{d}(B,0) = 5n+1+4n = 9n+1 \\ m = \mathrm{d}(A,0) + \mathrm{d}(B,C) = 4n+7n+1 = 11n+1 \\ g = \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(C,0) = 8n+5n+1 = 13n+1 \\ \Rightarrow \delta(5n+1) \geq (g-m)/2 = n \end{gathered}$$

что доказывает линейность δ-функции $\mathbf{L}_p$.

□

5.3 Связь группы лампочника и $\mathbf{BS}(2,3)$

Определение 11. Группа G называется Хопфовой если она не изоморфна ни одной из своих факторгрупп. Иначе говоря не существует такой нетривиальной группы H, что $G \rtimes H \cong G$. Также это значит что любой эпиморфизм в себя является изоморфизмом.

Утверждение. $\mathbf{BS}(2,3)$ не хопфова.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм

$$\phi : \mathbf{BS}(2,3) \to \mathbf{BS}(2,3) : \begin{cases} a \to a^2 \\ t \to t \end{cases}$$

$\phi([t,a]) = \phi(tat^{-1}a^{-1}) = ta^2t^{-1}a^{-2} = a^3a^{-2} = a, \phi(t) = t$
$\Rightarrow \phi$ - сюрьективный гомоморфизм (т.к. все порождающие имеют прообраз), а значит $\mathbf{BS}(2,3)/\operatorname{Ker}(\phi) \cong \mathbf{BS}(2,3)$.

Также $\phi([tat^{-1},a]) = (ta^2t^{-1})a^2(ta^{-2}t^{-1})a^{-2} = a^3a^2a^{-3}a^{-2} = \mathrm{id}$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\phi) \neq \{\mathrm{id}\}$. Значит $\mathbf{BS}(2,3)$ не хопфова. $\square$

Согласно Proposition 10 в статье [Kai20]:
$\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{Ker}(\phi^n) = \langle [t^mat^{-m}] :\ 0 < m \leq n\rangle^{\mathbf{BS}(2,3)}$

Из этого следует, что $\mathbf{BS}(2,3)/\bigcup_{i=1}^{\infty}\operatorname{Ker}(\phi^i) = \langle a,t \mid ta^2t^{-1} = a^3,\ [t^nat^{-n},a] = \mathrm{id}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\rangle$. Назовем эту группу $\mathbf{L}$.

Заметим, что из $[t^nat^{-n},a] = \mathrm{id}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ следует $[t^nat^{-n},t^mat^{-m}] = \mathrm{id}\ \ \forall n,m \in \mathbb{Z}$, ведь:

$$\begin{aligned}[t^nat^{-n},t^mat^{-m}] &= t^nat^{m-n}at^{n-m}a^{-1}t^{m-n}a^{-1}t^{-m} = \\ &t^m(t^{n-m}at^{m-n})a(t^{n-m}a^{-1}t^{m-n})a^{-1}t^{-m} = \\ &t^ma(t^{n-m}at^{m-n})(t^{n-m}a^{-1}t^{m-n})a^{-1}t^{-m} = t^maa^{-1}t^{-m} = \mathrm{id}\end{aligned}$$

А значит, получившаяся группа $\mathbf{L}$ является группой лампочника $\mathbf{L}_\infty$, отфакторизованная по соотношению $ta^2t^{-1} = a^3$ из группы $\mathbf{BS}(2,3)$.

5.4 Проблема слов в группе L

Как было описано выше, любой элемент g из группы лампочника $\mathbf{L}_\infty$ (а значит и группы $\mathbf{L}$) можно описать как $a_{i_1}^{c_1}a_{i_2}^{c_2}\dots a_{i_k}^{c_k}t^m$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. По построению понятно, что эта форма записи единственна для любого элемента.

Сразу заметим, что применение соотношения $ta^2t^{-1} = a^3$ оставляет инвариантным сумму степеней t в записи любого элемента группы $\mathbf{L}$, а значит это наводит на метод проверки, совпадают ли две записи элементов или нет.

Понятно, что если финальная позиция лампочника в этих записях различается, то и сами элементы различны. Далее будем считать, что они совпадают. Соотношение $ta^2t^{-1} = a^3$ с другой стороны означает, что $a_{i+1}^2 = a_i^3$ для любого i. Рассмотрим отображение $f :\ L \to \mathbb{Q}$, $f(a_{i_1}^{c_1}a_{i_2}^{c_2}\dots a_{i_k}^{c_k}) = \sum_{j=1}^{k} c_j * (3/2)^{i_j}$. $f(a_{i+1}^2) = 2*(3/2)^{i+1} = 3*(3/2)^i$, $f(a_i^3) = 3*(3/2)^i \Rightarrow f(a_{i+1}^2) = f(a_i^3)$, а значит отображение статично относительно применения соотношения.

Значение f от любого элемента группы будет являться дробью со знаменателем, равным целочисленной степени двойки, а значит любое такое число можно представить в виде конечной записи в системе счисления $(3/2)$. А значит:

$$\exists\ \phi :\ L \to L :\ \forall g \in L :\ f(g) = f(\phi(g)),\ \phi(g) = a_{j_1}^{\alpha_1}a_{j_2}^{\alpha_2}\dots a_{j_l}^{\alpha^l}t^m, \\ j_1 < j_2 < \dots < j_l,\ 0 < |\alpha_i| < 3,\ \forall i,j :\ \alpha_i\alpha_j > 0$$

Рассмотрим алгоритм приведения любого элемента g к элементу $\phi(g)$, используя соотношение $a^3 = ta^2t^{-1}$. Рассмотрим самую левую лампочку, состояние которой не совпадает в записи

g и $\phi(g)$. Докажем, что численно ее состояния в записи g и $\phi(g)$ обязаны быть сравнимы по модулю 3, а значит используя соотношение, мы можем их приравнять. Пусть численно эти состояния равняются x_1 в записи g и x_2 в записи $\phi(g)$. Обозначим за y_1 и y_2 значения функции f от всех состояний лампочек правее первой несовпавшей в элементе g и $\phi(g)$ соответственно, а порядковый номер рассматриваемой лампочки равен i. Обозначим за α В силу равенства $f(g)$ и $f(\phi(g))$ знаем что:

$$
\begin{gathered}
x_1 + \frac{3}{2} \cdot y_1 = x_2 + \frac{3}{2} \cdot y_2 \\
x_1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z_1}{2^n} = x_2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z_2}{2^n} \\
x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^n}(z_2 - z_1) \\
2^{n+1} \cdot (x_1 - x_2) = 3 \cdot (z_2 - z_1)
\end{gathered}
$$

Так как и $(x_1 - x_2)$, и $(z_2 - z_1)$ - целые, получаем, что $(x_1 - x_2)$ делится на 3. Что и требовалось доказать.

Значит, перебирая лампочки слева направо и применяя соотношение, мы всегда сможем привести запись элемента g к записи $\phi(g)$. Таким образом, если две записи элементов g и h группы **L** имеют одинаковые значения $f(g)$ и $f(h)$ и финальную позицию лампочника, то они эквивалентны (существует последовательность преобразований, которая не меняя значения элементов, приводит их к одной и той же записи). А значит проблема слов в группе **L** разрешима.

Список литературы

[Mat17] Dan Margalit Matt Clay. «Office Hours with a Geometric Group Theorist». В: (2017).

[Kai20] Tom Kaiser. «A closer look at the non-Hopfianness of BS(2; 3)». В: (май 2020). URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.03396.