

Содержание

1.	Введение в теорию групп	2
1.1	Преобразования . . . . .	2
1.2	Группы . . . . .	3
1.3	Группа перестановок . . . . .	4
1.4	Циклическая группа . . . . .	4

# 1. Введение в теорию групп

**Общая конва такова:** следуем [Б01], добавляя нужные конкретно нам примеры. Делаем мощный упор в действие

## 1.1 Преобразования

**Определение 1.** Пусть  $M$  — некоторое множество элементов произвольной природы. Если каждой упорядоченной паре элементов из  $M$  поставлен в соответствие определённый элемент также из  $M$ , то говорят, что на  $M$  задана бинарная операция (обозначим её за  $\circ$ ).

Говоря чуть более взрослым языком, бинарная операция — это отображение

$$\circ: M \times M \rightarrow M, \quad (m, m) \mapsto m \circ m \in M.$$

**Пример 1.** Для начала, всякие скучные числовые примеры.

Причём же тут преобразования? Оказывается, бинарные операции — удобный способ записывать, что происходит, когда мы проделываем последовательно много различных преобразований. Рассмотрим сначала некоторые примеры.

**Пример 2.** Повороты равностороннего треугольника, переводящие его в себя, *переставляют* вершины. Композиция преобразований — бинарная операция. Какие у неё свойства? Выпишем *таблицу умножения* (см. [Б01, пример 1]).

А ещё есть симметрии, их тоже можно композиционировать (и композиционировать с поворотами).

Коллеги, сюда напишите Ваш любимый пример про строки и любимый пример про графы (по шутке, соответственно).

Теперь давайте подумаем, какие свойства естественно было бы требовать от преобразований.

- Если мы говорим о преобразованиях одного типа, то естественно требовать, чтобы когда мы проделывали несколько одно за другим, получалось преобразование того же типа (как композиция поворотов — поворот).
- Во всех примерах мы видели, что есть *тождественное* преобразование (которое просто не делает ничего).
- Кроме того, композиция преобразований естественным образом *ассоциативна*. То есть, для любых преобразований  $f, g, h$  мы имеем  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$ .
- В примерах мы также видели, что для каждого преобразования  $g$  существует преобразование  $h$ , которое после применения  $g$  возвращает ситуацию в исходный вид.

Теперь попробуем сделать наши примеры немного более строгими.

**Определение 2.** Напоминание про функции, инъекции, сюръекции, биекции.

Приведём какой-нибудь не слишком скучный пример.

**Пример 3.** Пусть отображение  $\varphi$  ставит в соответствие каждому городу мира первую букву из его названия на русском языке (например,  $\varphi(\text{Санкт-Петербург}) = \text{С}$ ). Будет ли  $\varphi$  отображением всех городов мира на весь русский алфавит?

Нет, не будет (так как едва ли есть город, начинающийся на *ъ*, например). Будет ли это отображение инъективным? Очевидно, что тоже нет.

Пока что мы понимали слово *преобразование* наивно, дадим теперь строгое математическое определение.

**Определение 3.** Произвольное взаимно однозначное отображение множества  $M$  на себя,  $g: M \rightarrow M$ , мы будем для краткости называть *преобразованием* множества  $M$ .

**Пример 4.** Если множество  $M$  конечное, то можно писать табличку и будет перестановка (слово перестановка тут еще не говорим), но тем не менее.

**Определение 4.** Так как преобразование — это взаимно однозначное отображение, то для каждого преобразования  $g$  существует обратное преобразование  $g^{-1}$ , которое определяется следующим образом: если  $g(A) = B$ , то  $g^{-1}(B) = A$ .

**Пример 5.** Выписать обратное преобразование для какой-нибудь композиции поворота и симметрии.

Если у нас есть некоторое фиксированное множество  $M$  и все его преобразования, то мы можем определить их произведение (композицию):

$$(g_1 g_2)(A) = g_1(g_2(A)),$$

то есть сначала делаем  $g_2$ , а потом  $g_1$ .

**Определение 5.** Пусть некоторое множество преобразований  $G$  таково, что

1. если преобразования  $g_1$  и  $g_2$  содержатся в  $G$ , то и их произведение  $g_3 = g_1 g_2$  содержится в  $G$ ;
2. если преобразование  $g$  содержится в  $G$ , то и обратное ему преобразование  $g^{-1}$  содержится в  $G$ .

Тогда такое множество преобразований  $G$  мы будем называть *группой преобразований*.

## 1.2 Группы

И вот мы наконец плавно подошли к одному из главных определений в нашем курсе.

**Определение 6.** Множество  $G$  с заданной на нём бинарной операцией  $\circ$  (мы часто будем называть её умножением) называется *группой*, если

1.  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ .
2. Существует *нейтральный* элемент  $e \in G$ , то есть такой элемент, что  $e \circ g = g \circ e = g$  для всех элементов  $g \in G$ .
3. У всех элементов  $g \in G$  есть обратный элемент  $g^{-1}$ , то есть такой, что  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .

*Замечание.* Заметим, что любая группа преобразований является группой. Группы бывают разные, но в дальнейшем, группы преобразований будут основным примером групп для нас.

**Пример 6.** Вновь глупые числовые примеры. Пояснение примеров из прошлого параграфа.

*Замечание.* Вот в этом месте я бы хотел сделать такой разгон про то, зачем это всё на самом деле (зачем переходить от изучения *конкретных преобразований* к *группам*, как *обще алгебраических структур*. Хороший пример такого разгона в первых пяти минутах этой лекции, гляньте пж. Мне кажется, что это **очень важно** при изложении групп детям.

После того, как мы вдоволь насладились примерами, можно начать изучать наши объекты с общей точки зрения.

**Наблюдение 1.** Нейтральный элемент группы единственен. Обратный элемент к элементу группы  $g \in G$  единственен.

*Замечание.* Какими аксиомами группы мы пользовались для доказательства?

**Определение 7.** Два элемента группы  $a, b \in G$  называются *коммутирующими* (или, перестановочными), если  $ab = ba$ . Если все элементы группы  $G$  коммутируют между собой,  $G$  называется *Абелевой* или *коммутативной*.

*Замечание.* Заметим, что **не абелевы** группы бывают. Например, рассмотренная нами ранее группа симметрий треугольника  $S_3 \cong D_3$ .

**Пример 7.** Заметим, что  $(ab)^1 = b^{-1}a^{-1}$  (Сначала мы надеваем носок, а потом ботинок. С другой стороны, сначала мы снимаем ботинок, а потом носок).

**Наблюдение 2.** В группе можно сокращать равенство справа и слева.

### 1.3 Группа перестановок

Мы об этом уже не раз говорили, теперь

**Определение 8.** Пусть  $X$  — множество. Множество взаимно однозначных отображений  $X \rightarrow X$  образует группу (относительно композиции), её мы будем называть *симметрической группой* на множестве  $X$  и обозначать  $S_X$ .

*Замечание.* Если множество  $X$  конечно и в нём  $n$  элементов, то мы можем думать про него, как про множество  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда перестановки можно записывать в виде табличек вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Симметрическую группу множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  мы будем обозначать, как  $S_n$ .

**Про группу перестановок вообще много чего можно говорить. Чего мы хотим про неё говорить?**

### 1.4 Циклическая группа

to be upd. . .

### 1.5 Дальнейший план того, что я не написал еще

1. Группы перестановок, группы движений, аффинные преобразования, строковые примеры.
2. Циклические группы, остатки, порядок группы.
3. Гомоморфизмы и изоморфизмы, как сохранение структуры (и как разный способ записывать одни и те же преобразования).
4. Подгруппы.
5. Действие группы на множестве, сопряжения, нормальные подгруппы.
6. (?) классы смежности, индекс, теорема Лагранжа.
7. (?) нормальные подгруппы и фактор.
8. (?) Теорема о гомоморфизме.
9. (?) Образующие и соотношения.

**Лекции:**

1. Введение самая база преобразования  $\Rightarrow$  группы моноиды

2. Примеры 1
3. Примеры 2 (где-то среди них разговор как задать группу и разговор про циклические группы)
4. Примеры 3 + симметрические группы
5. Гомоморфизмы + подгруппы
6. Действие группы на множестве. Примеры. Орбиты, стабилизаторы, фиксаторы. Действие, как гомоморфизм в группу перестановок.
7. Всё еще действия. Больше примеров и какие-то содержательные факты про орбиты/стабилизаторы.
8. Свободная группа  $\leftrightarrow$  языки, регулярные корневые деревья, самоподобие.
9. Автоматы (как преобразование языка или как модель машины с кончной памятью). Побольше примеров.
10. Рост,

Листики:

1. Банальщина про биекции и группы и моноиды (такая-то операция дает что).
2. Задачки про группы и перестановки.
3. Пропаганда гомоморфизмов (всякие свойства и какие-то примеры).
- 4.

Идеи для листочков (это артему добавить) действие группы на автомате дает симметрии языка + язык григорчука

## Список литературы

- [Б01] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в задачах и решениях*. 1-е изд. М.: МЦНМО, 2001. URL: <https://old.mccme.ru/free-books/pdf/alekseev.pdf>.