# Об одном гиперболическом инварианте

Роман Шумилов, Василий Филянин, Мика Нелимов, Марк Захаров, Владислав Оглоблин

Май 2024

Сириус, IV Майская проектная смена по математике и теоретической информатие

# Метрика на группе

**Определение**

Граф Кэли – граф с вершинами-элементами группы где ребром соединены элементы отличающиеся на образующие группы.

**Определение**

Словарная метрика – наименьшее число образующих и обратных к ним домножение на которое переводит один элемент в другой.

# $\delta$-тонкий треугольник

**Определение**

$\triangle xyz$ – $\delta$-тонкий, если от любой точки на стороне треугольника расстояние до совокупности двух других сторон не больше $\delta$.

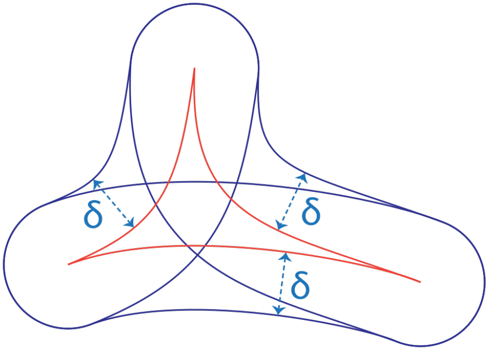


**Рис. 1:**

# Гиперболические группы

**Определение**

Пространство называется гиперболическим если существует такое $\delta$ что в нём любой треугольник $\delta$-тонкий.

**Определение**

Группа называется гиперболической если метрическое пространство её графа Кэли гиперболично.

Гиперболических групп много!

# Гиперболический инвариант группы

**Определение**

$$\delta(\triangle xyz) := \sup\Big\{\delta \text{ такое, что } \triangle\text{xyz} - \delta\text{-тонкий}\Big\}$$

**Определение**

$\delta$-фукнцией пространства будем называть

$$\delta(\mathsf{R}) := \sup\Big\{\delta(\triangle xyz) \;\Big|\; x, y, z \in \mathsf{B}(\mathsf{R})\Big\},$$

где шар B(R) := $\Big\{x \in \mathbf{M} \Big| \operatorname{dist}(x, O) < \mathsf{R}\Big\}$ (O – отмеченная точка из **M**).

# Оценка сверху линейной функцией

**Утверждение**

В любом метрическом пространстве $\delta(R) \leqslant 2R$

**Доказательство.**

Возьмём произвольный треугольник $ABC$, расстояние от любой точки $X$ до любой $Y$ меньше $2R$ по неравенству треугольника:

$$\operatorname{dist}(X, Y) \leqslant \operatorname{dist}(X, O) + \operatorname{dist}(O, Y) < 2R$$

Тогда константа гиперболичности $2R$ подходит, а значит она не меньше оптимальной. $\square$

# Для произвольных пространств она любая!

**Теорема**

Для любой неубывающей выпуклой функции $f(0) = 0$ и $f(R) \leqslant R$ существует метрическое пространство с $\frac{1}{2}f(R) \leqslant \delta(R) \leqslant 2f(R)$

**Доказательство.**

$\mathbb{R}^2_{x \geq 0}$ ограниченное графиками $f(x)$ и $-f(x)$ с обычной евклидовой метрикой. □

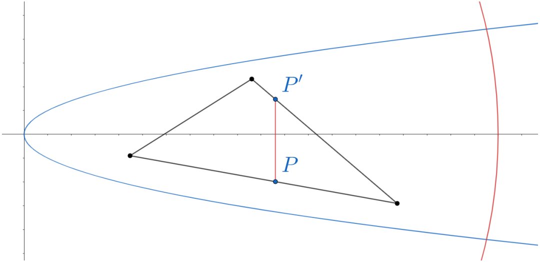


**Рис. 2:** Оценка сверху расстояния до ближайшей точки

# А как дела с группами?

Результат Артёма Семидетнова

**Теорема**

Любая нильпотентная группа $\delta$-линейна.

А бывает ли не линейно и не ограниченно?

# Группа Баумслага-Солитера

# Группа Баумслага-Солитера

Группа *Баумслага-Солитера*(1, p) определяется как

**Определение**

$$\mathbf{BS}(1,p) \cong \langle a, t \mid tat^{-1} = a^p \rangle$$

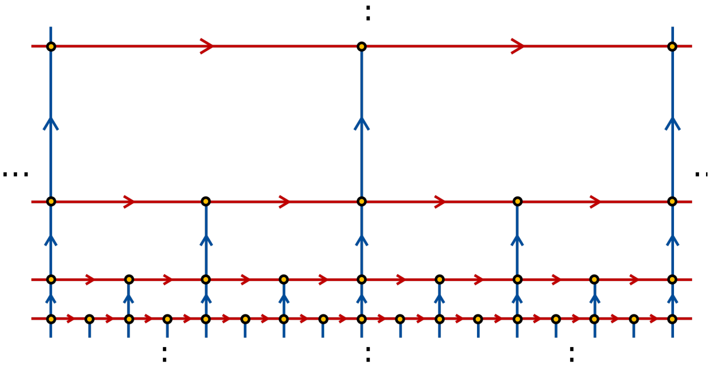

**Рис. 3:** "Лист" графа Кэли для **BS**(1, 2)

# Картинки

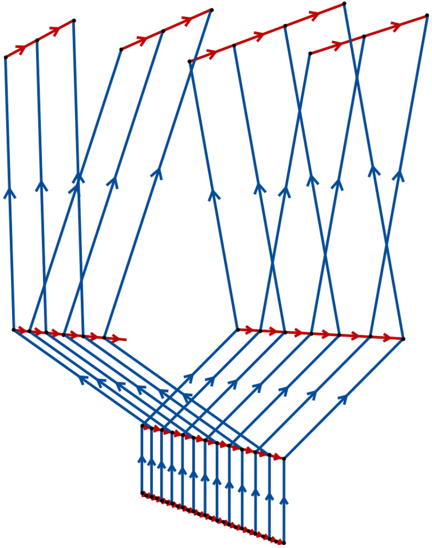

**Рис. 4:** Граф Кэли для **BS**(1, 2)

**Утверждение**

$\delta(R)$ для **BS**(1, 2) линейна.

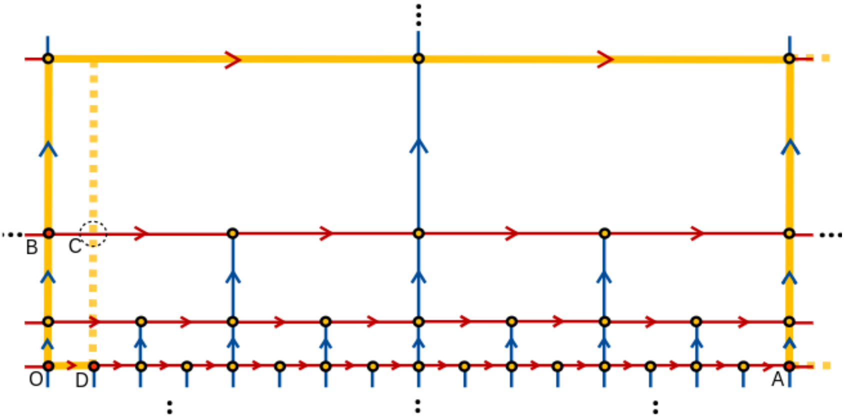


**Рис. 5:** Сильно негиперболический треугольник

# Группа лампочника

# Что такое группа лампочника

## Определение

Группа лампочника $\mathbf{L}_p$ определяется как

$$\mathbf{L}_p = \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z}/p) \cong \langle a, t \mid a^p = \mathrm{id}, \forall n, m \in \mathbb{Z} : [t^n a t^{-n}, t^m a t^{-m}] = \mathrm{id} \rangle$$

В частности обозначение $\mathbf{L}_\infty$ означает группу

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \cong \langle a, t \mid \forall n, m \in \mathbb{Z} : [t^m a t^{-n}, t^m a t^{-m}] = \mathrm{id} \rangle$$

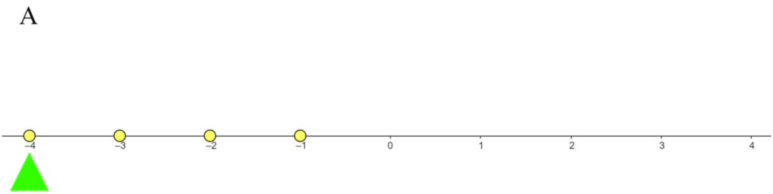


**Рис. 6:** Пример картинки в $\mathbf{L}_2$

# $\delta(R)$ в $\mathbf{L}_p$

**Утверждение**

$\delta(\mathbf{R})$ для любой группы лампочника растет линейно.

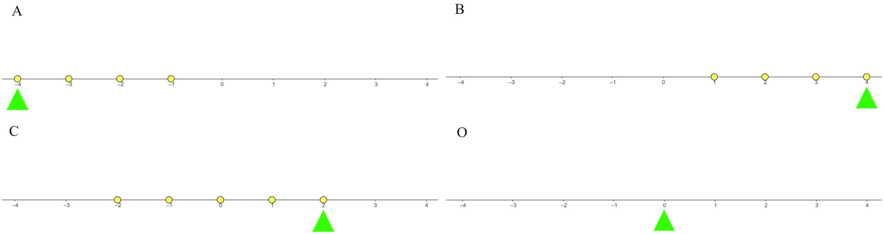


**Рис. 7:** Пример линейной $\delta(R)$

# Расстояния между точками в примере

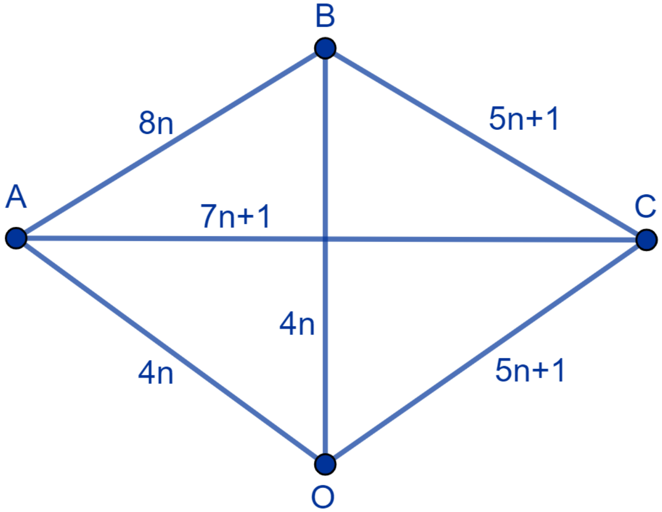


**Рис. 8:** Расстояния между точками

# Группа лампочника-Баумслага

**Определение**

$$L := \langle a, t \mid ta^2t^{-1} = a^3,\ [t^n a t^{-n}, a] = \mathrm{id}\ \ \forall n \in \mathbb{N} \rangle \approx L_\infty / \langle ta^2t^{-1} = a^3 \rangle$$

# Пример равных слов

## Значение инварианта для примеров

$$-7 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 + (-1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2301}{128}$$

$$2 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2301}{128}$$

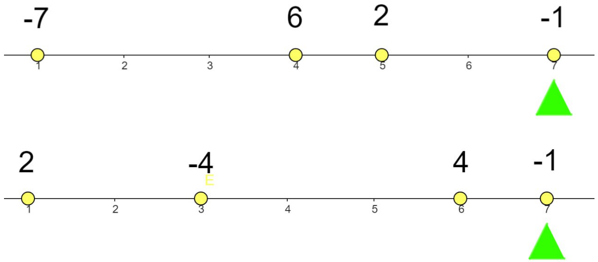


**Рис. 9:** Примеры

# Что делать дальше?

Дальше искать контр-пример! Ведь тезис Громова говорит что он существует :)

**Тезис Громова**

Любое утверждение про конечнопорождённые группы либо очевидно, либо неверно.

# Спасибо за внимание!

**Рис. 10:** Мяу (ждёшь чего-то?)