Серия 5. Разгрузочное.

Все мы по-разному смотрим на понятие группы. Физики смотрят на группы, как на группы Ли, как на непрерывные группы. Я беседовал с одним очень продвинутым физиком, пытался ему объяснить, что такое свободная группа на двух образующих, очень трудно было!

Роман Валерьевич Михайлов

Напомним, что $\mathrm{Aut}X^*$ — группа автоморфизмов корневого дерева X^*, а S_X — симметрическая группа на множестве X.

Пусть $g\colon X^* \to X^*$ — **эндоморфизм** корневого дерева X^*. Рассмотрим поддеревья vX^* и $g(v)X^*$. Тогда g индуцирует мофизм корневых деревьев $g\colon vX^* \to g(v)X^*$ (**нарисуйте картинку!**).

Заметим, что корневое поддерево vX^* естественно изоморфно **всему** дереву X^* (вспомните, что изоморфизм задаётся отображением $vw \mapsto w$). Тот же факт $g(v)X^*$. Отождествляя оба поддерева vX^* и $g(v)X^*$ с X^* мы получаем отображение $g|_v\colon X^* \to X^*$, однозначно определённое формулой

$$g(vw) = g(v)g|_v(w).$$

Мы будем называть эндоморфизм $g|_v$ *сужением* f на вершину v.

0. Докажите, что выполняются следующие свойства сужения: а) $g|_{v_1v_2} = g|_{v_1}|_{v_2}$, б) $(g_1 \cdot g_2)|_v = g_1|_{g_2(v)} \cdot g_2|_v$.

1. Постройте изоморфизм

$$\mathrm{Aut}X^* \to S_X \wr \mathrm{Aut}X^*.$$

2. Пусть H — группа, действующая на конечном множестве X, а G — произвольная группа. Докажите, что

$$H \rtimes G^X,$$

где H действует на на $G^X \cong \prod_{x\in X} G$ перестановками сомножителей в прямом произведении.

Хоть эта задача и не сложная, в ней оцениваются любые продвижения!

3. Опишите группу аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}$ (т.е. функция вида $ax+b,\ a,b \in \mathbb{R}$, как полупрямое произведение двух групп.