

## Серия 1. Вводная и предпраздничная.

Symmetry is a vast subject,  
significant in art and nature.  
Mathematics lies at its root, and it  
would be hard to find a better one  
on which to demonstrate the  
working of the mathematical  
intellect.

---

Герман Вейль

**0.** Докажите, что композиция отображений ассоциативна, т.е., что для  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow T$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**1.** а) Докажите, что нейтральный элемент группы единственен. б) Докажите, что для любого элемента  $g \in G$  существует единственный обратный элемент  $g^{-1}$ .

**2.** а) Опишите (словами и геометрически) группу симметрий квадрата. б) Найдите в ней такой элемент  $x$ , что  $x^3 = R_{90^\circ}$ . в) Найдите три симметрии квадрата  $f, g, h \in D_4$ , для которых  $fg = gh$ , но  $f \neq h$ .

**Определение.** Полугруппой называют множество с ассоциативной бинарной операцией.

**3.** а) Пусть в группе  $G$  для любого  $g \in G$  выполнено  $g^2 = e$ . Докажите, что  $G$  — абелева группа. б) Пусть  $G$  — конечная полугруппа. Докажите, что существует такой элемент  $g \in G$ , что  $g^2 = e$ .

**4.** Вася нарисовал бесконечно длинную полоску из букв  $H$  на одинаковом расстоянии.

... H H H H H H H H H H ...

Помогите Васе описать группу симметрий этого рисунка.