

3.1.2 狀態空間描述

現在,如果我們讓 $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$ 和 $y(t) = x_2(t)$ 我們得到:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_m} & -\frac{K_w}{L_m} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.6)$$

提供以下標準形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_m} & -\frac{K_w}{L_m} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

這種數學形式的系統在文獻中被稱為狀態空間表示。

3.1.3 在本範例中,我們假定我們只能存取速度,這意味著 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。如果我們

只能訪問電流或兩個變數,則相應的輸出矩陣將分別變為

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

對於給出位置的狀態空間表示,要注意可以重寫電壓和速度之間的數學模式的先前關係以及連結速度和位置的關係,如下所示:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) = -\frac{R}{L_m}i(t) - \frac{K_w}{L_m}w(t) + \frac{1}{L_m}u(t) \\ \frac{dw}{dt}(t) = \frac{K_t}{J}i(t) - \frac{b}{J}\omega(t) \\ \frac{d\theta}{dt}(t) = \omega(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

現在,如果我們讓 $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = w(t)$, $x_3(t) = \theta(t)$ 和 $y(t) = x_3(t)$ 得到:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_m} & -\frac{K_w}{L_m} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.9)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

從表(3.7)提供標準

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_m} & -\frac{K_w}{L_m} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

要使用這些模型，我們需要知道每個模型中的不同參數。這個在某些情況下可能難以衡量，因此另一種替代方法是需要。在下一節中，將通過使用標識來克服這種情況

備註

3.1.4 必須提到狀態空間描述並非唯一,這意味著對於給定的系統,我們可以找到許多狀態空間描述。這一問題將在本卷的後面部分加以解釋。

備註

3.1.5 請注意,一般來說,直流電機製造商提供的數據表,我們可以在其中找到與選擇測試的樣本對應的所有這些參數。這些參數可能與我們使用的直流電機的參數不同,這可能導致建模中出現一些錯誤。反饋控制將處理此類錯誤。

作為第二個示例,我們考慮了賽格威的模型(參見

[6])。該系統的動態由兩個模型組成,這些模型將在一些適當的假設下分離。

我們假設賽格威在以小速度移動時保持接近其垂直位置,車輪與地面保持接觸並且不會滑動。

根據這些假設,我們的賽格威的動態將分為兩部分。第一個給出傾斜和線性位移動力學的行為,而第二個給出方向角度動力學。現在,如果我們定義表3.1的變數。

表3.1 變數定義

Variable	definition
$\psi(t)$	tilt angle
$x(t)$	linear position
$\theta_i(t)$	motors' shaft angle
$\theta_o(t)$	gear box shaft angle
$\theta(t)$	wheels' angle
$T_i(t)$	torque delivered to a gear box by one of the dc motors
$T(t)$	torque delivered to a wheel by one of the dc motors
$F(t)$	resultant force between the ground and each of the wheels
$u_x(t)$	motors' voltage input controlling tilt and linear displacement
r_w	wheels' radius
M	mass of the half robot including one wheel
m_b	mass of half the body of the robot
m_w	mass of one of the wheels
J_b	moment of inertia of half the body of the robot
J_w	moment of inertia of one of the wheels
d	distance between motors' shafts and center of gravity of the body
K_t	motors' torque constant
K_e	motors' back emf constant
r_a	motors' armature resistance
r_g	gear boxes' ratio
η	gear boxes' Efficiency
C_f	rotational damping constant

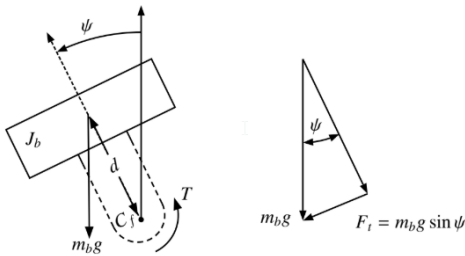
並注意以下關係始終保持:

$$\begin{aligned}
 M &= m_b + m_w \\
 K_t &= K_e = K \\
 x(t) &= r_w \theta(t) \\
 \theta_i(t) &= r_g \theta_o(t) \\
 \theta_o(t) &= \theta(t) + \psi(t) \\
 F(t) &= M \ddot{x}(t)
 \end{aligned}$$

我們有以下關係:

- 電機動力學

$$\begin{aligned}
 T_i(t) &= K_t i(t) \\
 i(t) &= \frac{u_x(t)}{r_a} - \frac{K_e \dot{\theta}_i(t)}{r_a} \\
 T_i(t) &= K_t \left[\frac{u_x(t)}{r_a} - \frac{K_e \dot{\theta}_i(t)}{r_a} \right]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$



$$J_b \ddot{\psi} = \Sigma M$$

$$J_b \ddot{\psi} = m_b g d \sin \psi + T - C_f \dot{\psi} - C_f \dot{\theta}$$

Fig. 3.2 Tilt dynamics free body diagram

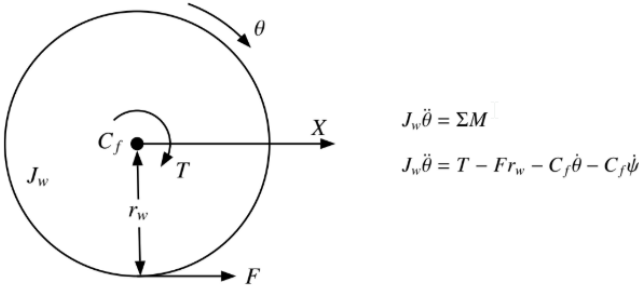


Fig. 3.3 Wheels and linear displacement free body diagram

施加在車輪上的扭矩

$$\begin{aligned}
 T(t) &= \eta r_g T_i(t) \\
 &= \frac{\eta r_g K u_x(t)}{r_a} - \frac{\eta r_g K^2}{r_a} \dot{\theta}_i(t) \\
 T(t) &= \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a} \dot{\theta}(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) \\
 &= \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a} \dot{\psi}(t)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

機器人動力學

$$\begin{aligned}
 J_b \ddot{\psi}(t) &= m_b g d \sin(\psi(t)) + T(t) - C_f \dot{\psi}(t) - C_f \dot{\theta}(t) \\
 &= m_b g d \sin(\psi(t)) + \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) - C_f \dot{\psi}(t) - C_f \frac{\dot{x}(t)}{r_w} \\
 \ddot{\psi}(t) &= \frac{m_b g d \sin(\psi(t))}{J_b} - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a J_b} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w J_b} \right] \dot{x}(t) + \frac{\eta r_g K}{r_a J_b} u_x(t)
 \end{aligned}$$

如果我們假設 $\psi(t)$ 很小, 我們得到 $\sin(\psi(t)) \approx \psi(t)$ 反過來意味著:

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi}(t) = & \frac{\eta r_g K}{r_a J_b} u_x(t) + \frac{m_b g d}{J_b} \psi(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a J_b} \right] \dot{\psi}(t) \\
& - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w J_b} \right] \dot{x}(t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

- 機器人車輪和線性位移動力學, 參考圖3.3

$$\begin{aligned}
J_w \ddot{\theta}(t) = & T(t) - F(t) r_w - C_f \dot{\theta}(t) - C_f \dot{\psi}(t) \\
= & \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) - r_w M \ddot{x}(t) - \frac{C_f}{r_w} \dot{x}(t) - C_f \dot{\psi}(t)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

反過來給予:

$$\left[\frac{J_w}{r_w} + M r_w \right] \ddot{x}(t) = \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w} \right] \dot{x}(t)$$

and finally, we obtain:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) = & \left[\frac{\eta r_w r_g K}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] u_x(t) - \left[\frac{\eta r_w r_g^2 K^2 + C_f r_w r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] \dot{\psi}(t) \\
& - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] \dot{x}(t)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

最後, 我們獲得:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) = & \left[\frac{\eta r_w r_g K}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] u_x(t) - \left[\frac{\eta r_w r_g^2 K^2 + C_f r_w r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] \dot{\psi}(t) \\
& - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} \right] \dot{x}(t)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

如果我們定義

$\mathbf{x}^\top(t) = [\psi(t) \dot{\psi}(t) x(t) \dot{x}(t)]$ and $\mathbf{y}^\top(t) = [\psi(t) x(t)]$,我們得到以下狀態空間表示:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u_i(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_b g d}{J_b} & -\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a J_b} & 0 & -\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w J_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\eta r_w r_g^2 K^2 + C_f r_w r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} & 0 & \frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a (J_w + M r_w^2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\eta r_g K}{r_a J_b} \\ 0 \\ \frac{\eta r_w r_g K}{r_a (J_w + M r_w^2)} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

現在,我們將建立表示機器人的導角動力學模型,考慮到兩個電機必須施加相等但相反的扭矩,以便在機器人上誘導純粹的旋轉運動,而沒有傾斜和線性位置。因此,對兩個電機施加相等但相反的電壓,該電壓作為該系統的輸入。在這裡,我們假設機器人保持垂直位置,並且其圍繞垂直軸的慣性矩不會改變。如果我們引入表 3.2 的其他變數,並再次注意到以下變數保留:

表3.2變數定義

Variable	definition
$\delta(t)$	heading angle
$x_r(t)$	linear position of the right wheel
$x_l(t)$	linear position of the left wheel
$\theta_r(t)$	right wheel angle
$\theta_l(t)$	left wheel angle
$T_r(t)$	torque delivered by the right dc motor
$T_l(t)$	torque delivered by the left dc motor
$F_r(t)$	driving force of right wheel
$F_l(t)$	driving force of left wheel
$u_r(t)$	right motor voltage input
$u_l(t)$	left motor voltage input
$u_h(t)$	motors' voltage input controlling heading
J_d	moment of inertia of the robot around the vertical axis
S	wheel span

$$\begin{aligned}x_r(t) &= r_w \theta_r(t) \\x_l(t) &= r_w \theta_l(t) \\\delta(t) &= \left[\frac{x_l(t) - x_r(t)}{S} \right] \\u_l(t) &= -u_r(t) = u_h(t) \\u_l(t) - u_r(t) &= 2u_h(t)\end{aligned}$$

我們有以下關係:

- 從 (3.14), 求解為 $F(t)$, 我們有:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{T(t) - J_w \ddot{\theta}(t) - C_f \dot{\theta}(t) - C_f \dot{\psi}(t)}{r_w} \\
 &= \frac{\eta r_g K}{r_a r_w} u(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w^2} \right] \dot{x}(t) - \frac{J_w}{r_w} \ddot{\theta}(t)
 \end{aligned}$$

現在參考左和右,我們得到:

$$\begin{aligned}
 F_l(t) &= \frac{\eta r_g K}{r_a r_w} u_l(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w^2} \right] \dot{x}_l(t) - \frac{J_w}{r_w} \ddot{\theta}_l(t) \\
 F_r(t) &= \frac{\eta r_g K}{r_a r_w} u_r(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w^2} \right] \dot{x}_r(t) - \frac{J_w}{r_w} \ddot{\theta}_r(t)
 \end{aligned}$$

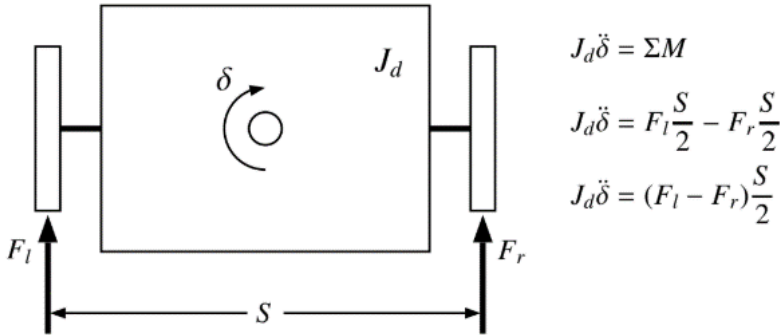


圖 3.4 標題動態自由體圖

- 參考圖3.4,我們得到:

$$\begin{aligned}
J_d \ddot{\delta}(t) &= [F_l(t) - F_r(t)] \frac{S}{2} \\
&= \frac{\eta r_g K S}{2 r_a r_w} [u_l(t) - u_r(t)] + \left[\frac{\eta S r_g^2 K^2 + S C_f r_a}{2 r_a r_w^2} \right] [\dot{x}_r(t) - \dot{x}_l(t)] + \frac{J_w S}{2 r_w} [\ddot{\theta}_r(t) - \ddot{\theta}_l(t)] \\
&= \frac{\eta r_g K S}{r_a r_w} u_h(t) - \left[\frac{\eta S^2 r_g^2 K^2 + S^2 C_f r_a}{2 r_a r_w^2} \right] \dot{\delta}(t) - \frac{J_w S^2}{2 r_w^2} \ddot{\delta}(t)
\end{aligned}$$

反過來給予:

$$\left[J_d + \frac{J_w S^2}{2 r_w^2} \right] \ddot{\delta}(t) = \frac{\eta r_g K S}{r_a r_w} u_h(t) - \left[\frac{\eta S^2 r_g^2 K^2 + S^2 C_f r_a}{2 r_a r_w^2} \right] \dot{\delta}(t)$$

最後,我們獲得:

$$\ddot{\delta}(t) = \left[\frac{2 \eta r_w r_g K S}{r_a (2 J_d r_w^2 + J_w S^2)} \right] u_h(t) - \left[\frac{\eta S^2 r_g^2 K^2 + S^2 C_f r_a}{r_a (2 J_d r_w^2 + J_w S^2)} \right] \dot{\delta}(t) \quad (3.16)$$

如果我們定義 $\mathbf{x}_h(t) = (t(t) \mu s(t) \text{ 與 } \mathbf{y}_h(t) = (t)$, 我們得到以下狀態空間表示:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_h(t) &= \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{B}_h u_h(t) \\
\mathbf{y}_h(t) &= \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h(t)
\end{aligned}$$

其中

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\eta S^2 r_g^2 K^2 + S^2 C_f r_a}{r_a (2 J_d r_w^2 + J_w S^2)} \end{bmatrix}$$
$$B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2 \eta r_w r_g K S}{r_a (2 J_d r_w^2 + J_w S^2)} \end{bmatrix}, C_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最後一個例子是磁懸浮系統。此系統由圖 4.10 表示。下表 3.3 匯總了該系統的數據。

表3.3磁浮浮系統資料

Variable	value
R	62.7 Ω
L	60 mH
m (object mass)	7.64 g
diameter of the permanent magnet	9 mm

讓*x(t)*表示從線圈底部測量的物件時間位置。移動物件的動力學由以下二等式來描述：

$$m\ddot{x}(t) = mg - F_c - F_p$$

(3.17)

其中*g*是重力,*F_c*和*F_p*是線圈和永磁體分別產生的磁力。

備註 3.1.6請務必注意,磁力*F_c*的方向與線圈中電流的方向相關聯。

如果我們用*i(t)*表示時*t*的電流,該電流在時間*t*時用以下運算式指向時*t*的力*F_c*: with the following expression:

$$F_c(t) = k_c \frac{i^2(t)}{x^2(t)}$$

永久力 F_p 由以下表示式給出:

$$F_p(t) = k_p \frac{1}{x^2(t)}$$

使用這些運算式,我們得到:

$$m\ddot{x}(t) = mg - k_c \frac{i^2(t)}{x^2(t)} - k_p \frac{1}{x^2(t)} \quad (3.18)$$

另一方面,電流 $i(t)$ 與施加的電壓 $u(t)$ 之間存在以下關係。

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

如果我們忽略了線圈的 eff 等,此關係將成為:

$$u(t) = Ri(t)$$

動態變為:

$$m\ddot{x}(t) = mg - k_c \frac{u^2(t)}{x^2(t)} - k_p \frac{1}{x^2(t)} \quad (3.19)$$

對於輸出方程,請注意,我們有一個霍爾感測器,該感測器產生一個電壓,該電壓是物體的位置 $x(t)$ 的函數,因此它是磁場 B 的函數(兩個磁場的總和(一個由於線圈,另一個由於永磁體)。如果我們 $y(t)$ 表示此電壓並使用此感測器的數據表,我們會得到:

$$y(t) = 0.003125B + 2.5$$

其中 B 以高斯 (1 Telta = 1000 高斯)測量。

這給出了以下一個:

$$y(t) = 31 \cdot 25B = 2.5$$

其中 B 是在特斯拉測量的可以看出,總磁場的表達是由:

$$B = C_p \frac{1}{x^3(t)} + C_b i(t) + C_1 + C_2$$

其中 $C_p = 1 \cdot 9446 \cdot 10^{-8}$, $C_b = 0.1671$, $C_1 = 0.011027$ 和 $C_2 = 0.003568$.

最後,感測器的輸出由:

$$y(t) = \left[\frac{1}{0.032} \left[C_p \frac{1}{x^3(t)} + C_b i(t) + C_1 + C_2 \right] \right] + 2.5$$

可以看出,該模型是非線性的,我們將在本卷中提出的理論將無濟於事。因此,需要圍繞平衡點進行線性化。在平衡點,物體的速度和加速度等於零,電流在時間上是恆定的,總力等於引力。使用此和以前的動態,我們得到:

$$\begin{cases} \dot{x}^2(t) = \text{sign}(u(t)) \frac{k_c}{mgR^2} u^2(t) + \frac{k_p}{mg} \\ y(t) = \left[\frac{1}{0.032} \left[C_p \frac{1}{x^3(t)} + C_b i(t) + C_1 + C_2 \right] \right] + 2.5 \end{cases}$$

使用這些條件和一些適當的實驗,我們可以確定 k_c 和 k_p 的值,這些值由以下值給出:

$$k_c = 5.9218 \cdot 10^{-4}$$

$$k_p = 4.0477 \cdot 10^{-6}$$

在平衡點,物件佔據一個固定位置 x_e 對應於電壓 $u_e(u_e = Ri_e)$ 。感應器提供的相應電壓為 y_e 。在這個平衡點附近 (x_e, u_e, i_e, y_e) , 系統具有線性行為線性化模型由 (1) 給出:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t)(\text{position}) \\ x_2(t)(\text{velocity}) \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2[\text{sign}(u_e)k_c u_e^2 + k_p R^2]}{mR^2 x_e^3} & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2\text{sign}(u_e)k_c u_e}{mR^2 x_e^2} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} \frac{-3C_p}{0.032x_e^4} & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= \frac{C_b}{0.032R}
 \end{aligned}$$

3.2 識別

從前面的示例中可以看出,我們可以用於分析和設計的數學模型的建立並非易事,即使我們可以從物理定律中獲取模型,模型的二等參數值可能也不可能得到,因此分析模型是無用的。系統識別是從測試數據中提取動態系統的數學描述的過程。標識的目的是構建一種演演演算法,允許從觀測到的數據構建數學模型。主要是我們想要建模的系統被視為黑匣子,一些輸入和輸出是在一些有限的時間瞬間收集的。為給定線性時間不變量系統建立適當的模型可以分為兩個步驟。首先,選擇一個可能與收集的數據相符的模型結構,然後確定該模型的參數。識別問題可以說明如下:給定 $u(k)$ 和 $y(k)$ 樣本對 $(u(k), y(k))$ 分別表示從實際系統上的實驗收集的輸入和輸出,我們希望確定所選模型的系統參數,使其與實際系統很好地匹配。

3.2.1 傳輸函式方法

我們可用於構建具有傳輸函數描述的模型的方法之一是最小平方系統標識。為了顯示此演演演算法的工作原理,讓我們假設所選模型的結構由以下方式給出:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n}{z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n} =$$

其中 $Y(z)$ 和 $U(z)$ 分別是輸出 $y(k)$ 和 $u(k)$ 的 Z 變換, a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 是我們必須確定的模型參數。使用 Z 變換逆, 我們得到以下模型:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n)$$

識別程式的目的是從輸入 N 的測量值 $u(k), k=0, 1, \dots, N-1$ 和相應的輸出 $y(k), k=0, 1, \dots, N-1$ 為此, 讓:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \quad (3.20)$$

現在, 讓我們假設我們收集了 $N-1$ 測量對:

$$(u(0), y(0)), (u(1), y(1)), \dots, (u(N-1), y(N-1))$$

且 $N > n$.

定義 $f(k)$ 如下所示:

$$f(k) = y(k-1)y(k-2)\cdots y(k-n)u(k-1)u(k-2)\cdots u(k-n)$$

然後對於樣本周期 $n, n=1, \dots, N$ 我們有:

$$y(n) = f(n) + e(n)$$

$$y(1) = f(1) + e(1)$$

...

(3.21)

$$y(N) = f(N) + e(N)$$

其中 $e(k)$ 是期間 kT 處的誤差估計。

如果我們定義 $\mathbf{y}(N)$, $\mathbf{f}(N)$ 和 $\mathbf{e}(N)$ 如下所示:

$$\mathbf{y}(N) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \mathbf{f}(N) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(N) \end{bmatrix}, \mathbf{e}(N) = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

然後,前一個關係變為:

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{f}(N)\theta + \mathbf{e}(N) \quad (3.22)$$

其中 $\mathbf{y}(N) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{f}(N) \in \mathbb{R}^{N \times 2n}$ 和 $\mathbf{e}(N) \in \mathbb{R}^N$

使用現在具有以下成本的最小平方演算法:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N e^2(k) = \mathbf{e}(N)^T \mathbf{e}(N) \quad (3.23)$$

這意味著以下內容:

$$J(\theta) = \mathbf{f}^T(N) \mathbf{y}(N) - \mathbf{f}^T(N) \mathbf{f}(N) \theta + \theta^T \mathbf{f}^T(N) \mathbf{f}(N) \theta - \theta^T \mathbf{f}^T(N) \mathbf{e}(N) + \mathbf{e}^T(N) \mathbf{e}(N)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}(N)\theta + \theta \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N) - \theta(N) \mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N) \mathbf{f}(N) = \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N) \mathbf{y}(N) - \mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N) \mathbf{f}(N) = \mathbf{f}(N) \\
 & = \mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N) - 2\theta \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N) + \theta \mathbf{f}(N) \mathbf{f}(N) \theta
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

為了搜索將成本降至最低 J 的最佳解決方案 $(*)$, θ 我們可以使用優化條件(參見 [3])。通過這些最佳條件,我們得到:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\mathbf{f}^T(N) \mathbf{y}(N) + 2\mathbf{f}^T(N) \mathbf{f}(N) \theta^* = 0$$

可以重寫為:

$$\mathbf{f}(N) \mathbf{f}(N) = \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N)$$

我們從中獲得最佳解決方案,如下所示:

$$[\mathbf{f}(N) \mathbf{f}(N)]^{-1} \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N)$$

前提是矩陣 $\mathbf{f}(N) \mathbf{f}(N)$ 不是奇異的。

備註 3.2.1 我們剛剛開發的公式允許我們在收集數據後計算參數 off-line。但是,在某些應用中,我們可能需要在線計算這些參數,從而調整控制器的參數,就像自適應控制一樣。這可以使用最小平方演算法的遞歸形式來完成。

為了建立遞歸演算法,我們將使用一些遺忘因素。因此,將成本修改為:

$$\begin{aligned}
 J(N) &= \sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^N e^2(k-1) + e^2(N) \\
 &= \mu(N) e^2(N) + \mathbf{e}(N) \mathbf{F}(N) \mathbf{e}(N)
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 $\mathbf{F}(N)$ 是對角矩陣,

$$\mathbf{F}(N) = \text{diag}(\mu(1), \dots, \mu(N)).$$

$\mu(N)$ 。與之前一樣,我們得到:

$$\theta^* = \mathbf{F}(N) \mathbf{f}(N) \mathbf{f}(N)^{-1} \mathbf{f}(N) \mathbf{y}(N) \quad (3.26)$$

備註 3.2.2 遺忘因素用於對最近數據給予更多權重。

讓 $\mu(k) = \lambda^{N-1+k}$ 與 $\lambda = 1$ 。現在基於 μ 的運算式,我們得到:

$$\lambda^{N-1}$$

$$f^k(k) = \alpha \beta f(N+1) f(N+1) f(N+1) = \alpha \beta f(N+1) f(N+1) f(N+1)$$

$$\frac{k=n}{N}$$

$$[]^{N+k} f(k) = f(k) = f(N+1) f(N+1)$$

$$k=n$$

現在讓我們定義 $\#(k)$ 如下:

$$\pm(k) = \mathbf{f}(k) \mathbf{f}(k) \mathbf{f}(k) \mathbf{f}(k) = \quad (3.27)$$

使用這個,我們得到:

$$\bullet = 1(N+1) = 1(N+1) = f(N+1) f(N+1) \quad (3.28)$$

現在使用以下關係:

$$[A = BCD] \cdot 1 = A=1 + A=1 C=1 = DA=1 B=1 DA=1$$

前一個關係變為:

$$[(N+1) = 1(N) = 1(N) f(N+1)]$$

$$[1 + 1 f(N+1) + (N)(N) f(N+1) = 1 f(N+1) \Psi(N) (N)]$$

對於*運算式的第二個術語,我們有:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T(N) \mathbf{F}(N) \mathbf{y}(N) &= \begin{bmatrix} f(n) & \cdots & f(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \beta^{N+1-n} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(n) \\ \vdots \\ y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} \\ &= \beta \mathbf{f}^T(N) \mathbf{F}(N) \mathbf{y}(N) + \alpha f(N+1) y(N+1) \end{aligned}$$

結合以前的關係,經過一些代數操作,我們得到:

$$\begin{aligned}\Psi(N) &= [\mathbf{f}^\top(N)\mathbf{F}(N)\mathbf{f}(N)]^{-1} \\ Q(N+1) &= \beta^{-1}\Psi(N)f(N+1)\left[\alpha^{-1} + \beta^{-1}f^\top(N+1)\Psi(N)f(N+1)\right]^{-1}\beta^{-1}f^\top(N+1)\Psi(N) \\ \theta(N+1) &= \theta(N) + Q(N+1)[y(N+1) - f^\top(N+1)\theta(N)] \\ \Psi(N+1) &= \beta^{-1}[\mathbf{I} - Q(N+1)f^\top(N+1)]\Psi(N)\end{aligned}$$

適用於 $N = n$ 。

示例

3.2.1 為了演示如何使用此技術來標識給定的系統,讓我們考慮直流電機套件的設置。它由驅動機械負載的直流電機組成。我們知道,系統單輸入單輸出及其在軸轉速和電壓之間的傳輸功能是第一順序:

$$G(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}$$

其中 K_m 和 τ_m 是我們必須確定的兩個參數。對於這個系統,我們可以用兩種方法來獲取模型。第一,個包括使用UART獲取資料 $u(k), y(k)$ 與PC通訊,然後使用最小平方方法建構模型。第二個包括使用微控制器,然後將系統作為一個黑匣子。

對於第二種方法,增益在穩態機制下確定為輸出和輸入電壓之間的比率。對於時間常數我們將其視為輸出佔用輸出穩定狀態值63%的瞬間。此過程可以在微控制器中程式設計,並可輕鬆建立模型。我們在機電實驗室中使用這種方法。

3.2.2 國家空間描述方法

請考慮以下狀態空間描述中描述的動態系統系統:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是狀態, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是輸入, $y(k) \in \mathbb{R}^l$ 是輸出。

請務必注意,狀態描述並非唯一,任何轉換: $\tilde{x}(k) = T^{-1}x(k)$,帶有 T 非單數矩陣,將給出另一種描述:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases}$$

其中 $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$ 與 $\tilde{D} = D$ 。

為了確定這個系統的模型,我們需要確定矩陣 \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} 與 \tilde{D} 。如果系統是單輸入單輸出,我們可以計算傳輸函數,並繼續採用前面的方法建立數學模型。在狀態空間描述中,我們嘗試確定與輸入輸出數據集匹配的狀態空間 \tilde{A}, \tilde{B} 描述 (\tilde{A} 、 \tilde{B} 、 \tilde{C} 、 \tilde{D})。在文獻中,在狀態空間描述中有許多識別系統的方法。請讀者查閱本主題的文獻。在這裏,我們將介紹一個簡單的演算算法,可用於確定狀態空間描述。

在提出此演算算法之前,我們將建立演算算法在計算中使用的一些關係。如果我們用 $u(k)$ 表示, $u(k=1), \dots, y(k), y(k+1), \dots$ 與 $x(k), x(k+1), \dots$ 輸入的順序,輸出和狀態的順序,可以顯示漢克爾矩陣, Y_h 可以給出:

$$Y_h = \Gamma_i X + H_i U_h$$

where:

$$Y_h = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+j-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+i-1) & y(k+i) & \cdots & y(k+j+i-2) \end{bmatrix}$$

U_h 是 Hankel 塊,其塊尺寸與 Y_h 包含連續輸入

$$U_h = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) \cdots & u(k+j-1) \\ u(k+1) & u(k+2) \cdots & u(k+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k+i-1) & u(k+i) \cdots & u(k+j+i-2) \end{bmatrix}$$

X 包含連續狀態向量:

$$X = \begin{bmatrix} x(k) & x(k+1) \cdots & x(k+j-1) \end{bmatrix}$$

* i 作為延伸的可觀測矩陣:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}$$

與 H_t 是塊 Toeplitz 矩陣:

$$H_t = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & y(k+j) \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

讓 H 成為矩陣 H_1 和 H_2 的串聯, 即:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} Y_{h1} \\ U_{h1} \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} Y_{h2} \\ U_{h2} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
Y_{h1} &= \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+j-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+i-1) & y(k+i) & \cdots & y(k+j+i-2) \end{bmatrix} \\
Y_{h2} &= \begin{bmatrix} y(k+i) & y(k+i+1) & \cdots & y(k+i+j-1) \\ y(k+i+1) & y(k+i+2) & \cdots & y(k+i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+2i-1) & y(k+2i) & \cdots & y(k+j+2i-2) \end{bmatrix} \\
U_{h1} &= \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \cdots & u(k+j-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \cdots & u(k+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k+i-1) & u(k+i) & \cdots & u(k+j+i-2) \end{bmatrix} \\
U_{h2} &= \begin{bmatrix} u(k+i) & u(k+i+1) & \cdots & u(k+i+j-1) \\ u(k+i+1) & u(k+i+2) & \cdots & u(k+i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k+2i-1) & u(k+2i) & \cdots & u(k+j+2i-2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

滿足:

$$Y_{h1} = iX_1 = H^t U_{h1}$$

$$Y_{h2} = =iX_2 = H^t U_{h2}$$

與

$$X_1 = \begin{bmatrix} x(k) & x(k+1) & \cdots & x(k+j-1) \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x(k+i) & x(k+i+1) & \cdots & x(k+i+j-1) \end{bmatrix}$$

以下演算法可用於計算 $\text{off}(A, B, C, D)$ in α 行中的矩陣 (A, B, C, D) :

1. 在 H 的 SVD 中計算 U 與 S :

$$H = USV = U_{11} U_{12} S_{11} 0V U_{21} U_{22} 0 \quad 0$$

2. 計算 $U_{12} U_{11} S_{11}$ 的 SVD

$$U_{12} U_{11} S_{11} = U_q U_{q=} S_{00q} 0V V_{q=q}$$

3. 求解以下一組線性方程:

$$\begin{aligned} U_{q \text{美國}}^T U(m+l+1 : (i+1)(m+l), :) \\ \bullet U(mi=li=m=1 : (m+l)(i=1), :) S \\ A B U_q U_{12}^T U(1 : mi+li, :) S \\ C D \quad U(mi+li+1 : mi+li+m, :) S \end{aligned}$$

該演演算法可以程式設計以獲得系統的矩陣 (A, B, C, D) 。還可以獲得另一個在線計算版本,對於感興趣的讀者,我們參考文獻瞭解更多詳細資訊。

3.3 結論

在本章中,我們介紹了動態系統的數學建模。我們介紹了使用物理定律生成模型的技術。我們還開發了在某些情況下可能使用的識別技術,以建立一個有效的模型,充分描述所考慮的動態系統。這兩種技術都需要實驗數據來建立所需的模型。

3.4 問題

- 1.

在此問題中,我們要求構建直流電機套件的數學模型,而不考慮 L 。我們要求建立:

- (a) 傳輸功能
 - (b) 狀態空間描述
2. 建立兩輪機器人的數學模型
 3. 建立浮浮浮系統的數學模型
 4. 考慮一個動態系統,具有可以給出的傳輸函數。寫入產生資料 k 序列 $(u)(yy(k))$ 的寫入Matlab程式。使用此資料,在Matlab中編寫一個程式來識別系統並建立數學模型。比較兩個模型並得出結論。
 5. 考慮狀態空間描述中的動態系統。編寫Matlab語法以生成適當的數據,以便使用狀態空間描述方法識別系統。使用此資料編寫Matlab程式以建立狀態空間描述並將其與原始空間描述進行比較。

第三部分

傳輸函式方法

機電一體化系統一般是硬體和軟體的組合,以確保系統為其設計所需的任務。這種機電一體化系統的分析和設計可以用二等方法來完成。在這些方法中,我們引用了基於傳輸函數的方法和使用國家空間技術的方法。

本部分採用轉移函數方法對機電一體化系統的分析和綜合。主要分析微控制器控制的動態系統。我們將學習如何確定系統的性能。控制器的設計也得到了處理。主要是看如何說明控制設計問題,如何解決。設計部分側重於控制器的確定,為我們的動態系統提供所需的性能。

這部分分為兩章。第一個處理分析工具。特別是,我們將看到如何通過適當選擇採樣週期,將連續時間模型轉換為離散時間版本。選擇這個週期后,將獲取所審議系統的模型的離散時間版本,用於對所研究的動態系統的分析和設計。本部分的第一章介紹了我們可能用來獲取系統性能的 *different* 工具。第二章介紹了可用於設計適當的控制器的設計技術,以確保所需的性能。設計方法由兩個步驟組成。第一個,確定適當的控制器的結構,可以保證所需的性能。第二個計算機的參數。在實現開發的演演演算法之前,需要一些模擬結果。馬特拉布和西穆林克用於此目的。

4

建基於轉移函式分析

閱讀本章後,讀者將:

1. 掌握轉移函數概念的概念
2. 能夠執行任何 LTI 系統的分析,並確定系統具有的規格
3. 能夠計算給定輸入 LTI 系統的任何時間回應
4. 能夠檢查任何動態系統的穩定性
5. 繪製任何 LTI 系統的根位,並將其用於分析和設計目的
6. 繪製任何 LTI 系統的博德圖,並將其用於分析和設計目的

4.1 簡介

如今,微控制器更強大,其價格也更加誘人,這使得它們的使用具有吸引力。在機電一體化系統中,它們用於開/關或連續時間控制。在這兩種情況下,微控制器機電系統。在的情況下,它用於安全和控制目的。在這種情況下,演演算法很容易,而且通常不需要時間來計算要執行的操作。對於連續時間情況,微控制器在每個採樣期間接收數據,並根據所選演算法計算所需操作。在這種情況下的計算可能需要更多的時間和更多的注意,以防止意外。在這兩種情況下都使用中斷。我們將在本書中使用微控制器必須有相當高的處理速度。

在實踐中,使用微控制器控制實際過程時,可以採用兩種結構。在第一個中,輸出和參考之間的誤差在連續時間完成,然後透過模擬數位轉換器(A/D)傳送到微控制器,對照操作按照選取演算法計算,而在第二種情況下,輸出通過A/D轉換為數位值/。在這種情況下,引用以數位形式饋送。控件操作的計算方式與第一種情況類似。圖4.1和4.2分別說明瞭這兩個結構。

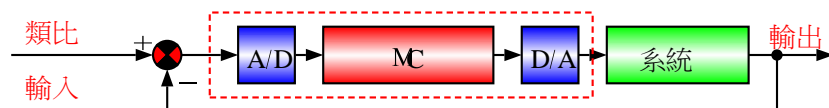


圖 4.1信號轉換在前進路徑中進行

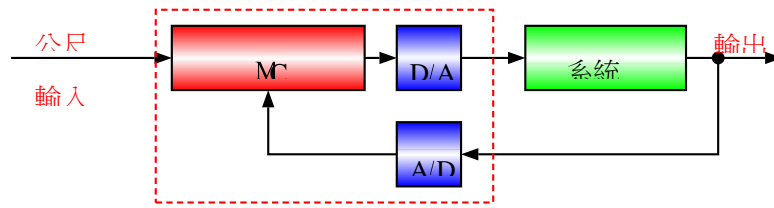


圖 4.2 信號轉換在回饋路徑中進行

第二種結構在實踐中更常用,因此,它是我們將在本書的其餘部分中使用的結構。

注 4.1.1 在圖 4.2 的結構中,我們採樣的信號具有以下優點:

1. 易於數據
2. 易於編碼
3. 易於傳輸和再生,並且有積極點。

在本章的其餘部分中,我們將介紹可用於分析此類系統的工具。主要是我們將展示一個給定的實踐系統:

1. 如何確定取樣期
2. 如何使用所選取樣週期將連續時間模型轉換為離散時間模型
3. 如何確定該系統的性能,如穩定性、過沖、沉降時間等。
4. 如何將根塊和博德圖技術用於離散時間案例

所有這些問題都在本章的其餘部分中討論。本章的其餘部分按如下方式組織。第2節,開發了採樣過程,建立了連續時間與離散時間的關係。主要是兩個域(s -網域與 z -網域)建立極點之間的關係。第3部分介紹了轉移函數的概念和極點和零的概念。在第 4 節中,開發了給定輸入的時間回應,並介紹了計算該輸入的方法。第 5 部分介紹了穩定性問題和系統錯誤。根位點和博德圖的技術分別在第6節和第7節中開發。這些技術用於分析和設計階段。

4.2 取樣過程

實際流程通常是持續不斷的系統,這些系統會隨著時間而不斷演變。他們的分析和設計應該仔細。事實上,我們始終需要將此類系統的動態轉換為離散時間對應系統,以分析和繼續使用微控制器控制控制器的設計。選擇採樣期是一個關鍵問題。事實上,一個小採樣期將導致大量的數據,微控

制器將無法處理,而一個大的結果會很差,並且可能是系統將無法正確控制。必須正確選擇採樣期以避免此類問題。在過程動態中,可以選擇小於最小時間常數。帶寬也用於選擇採樣週期。

香農定理用於選擇採樣週期。香農定理的這句話給出的結果如下:

定理4.2.1 A信號 $y(t)$ 不包含大於 f_h 的頻率分量,由一組從 $y(t)$ 間隔 $2f_h$ 的取樣中唯一重建。取樣頻率的正確選擇應滿足:

$$f_s \geq 2f_h \quad (4.1)$$

備註4.2.1 實際上,因數是不夠的,通常我們選擇的數位大於。不錯的選擇是採樣率大於 $30w_b$,其中 w_b 是閉環系統的頻寬。

備註 4.2.2 請務必注意,我們在期間、 T 、頻率、 f 和脈動之間具有以下關係, w :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ w &= 2\pi f \end{aligned}$$

這意味著:

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

範例4.2.1 為了展示如何為連續時間系統選擇採樣週期,讓我們考慮具有以下傳輸函數的動態系統:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

並確定該系統的採樣期。

首先請注意,存在可用於此系統的無限數量的周期採樣。在此示例中,我們使用兩種方法定義採樣週期。

從系統的傳輸功能中,我們得出結論,系統中的最高頻率是 $w_b=5\text{rad/s}$ 。這對應於系統中的更快動態,因此在採樣時,我們應該使用此資訊,採樣速度要快。

請注意,我們有 $w_s T = 2\pi$ 。現在,如果我們對系統中頻率最高的30倍進行採樣,我們有 $w = 30 \times 5 = 150\text{rad/秒}$ 。這給出了:

$$T = \frac{2\pi}{150} = 0.021\text{s}$$

另一方面,系統的恆定時間分別為 $\tau_1 = 1s, \tau_2 = 0.5s$ 與 $\tau_3 = 0.2s$ 。這意味著系統中的快速動態的時間常數等於 $0.2s$ 。選擇取樣週期的規則包括使用以下公式:

$$T = \frac{0.2}{a} \quad (4.2)$$

其中 a 是正實數,將在7 和 14之間選擇。正確的選擇是10。

使用此規則,我們得到

$$T = 0.02s$$

選擇採樣週期后,下一步是將連續時間動力學轉換為等效的離散時間動力學。事實上,如果採樣週期 T 正確選擇,則可以從採樣值中獲取給定輸入的實際輸出,因此不會丟失資訊。

從連續時間系統到取樣系統的轉換透過兩個裝置:

- 採樣
- 零訂單保持 (ZOH)

取樣器的作用是將連續時間訊號轉換為等效脈衝線,而ZOH會阻止從取樣器接收的值,使其可用於透過類比/數位轉換器讀取它們的微控制器。取樣過程如圖4.3所示。

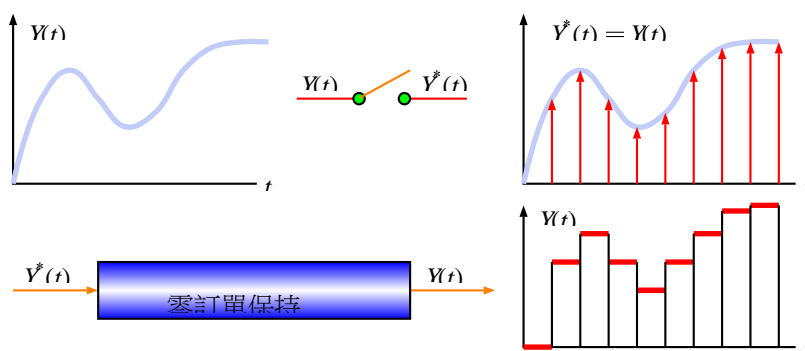


圖4.3 取樣過程

信號 $y(t)$ 採樣過程的主要目標是將其大部分資訊保存在採樣中。還必須注意,處理此信號的常用微控制器的位數在量化方面具有顯著的此對結果也具有顯著的影響。量化是通過一組離散整數值近似連續值範圍的過程。它也被稱為信號振幅值的離散化。如果使用具有16位的微控制器,我們將具有每個樣本的 $2^{16} = 65536$ 個可能的值。

讓 $y(t)$ 是模擬訊號,取樣器應考慮的最大頻率為 f_m (頻寬)。假設 $y(t)$ 以頻率 f_s 進行取樣。香農定理指出,如果 $f_s=2f_m$,則可以從 $y(kT)$ 重建訊號 $y(t)$ 是可能的。從數學上講,模擬信號的採樣過程可以看作是信號 $y(t)$ 和脈衝線之間的數學產物。

這由以下表示式給出:

$$y_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) \delta(t - kT) \quad (4.3)$$

其中 $\delta(t)$ 是 Dirac 脈衝, T 是採樣週期。

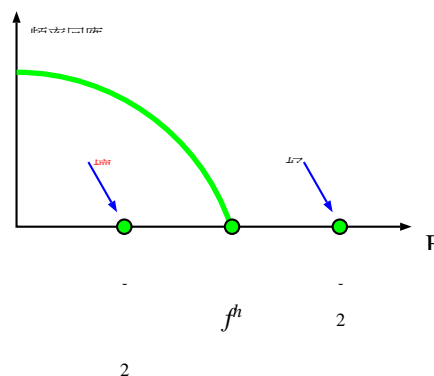


圖 4.4 取樣週期選擇

對於連續時間系統, Laplace 變換用於將描述動力學的線性二等方程集轉換為代數,並定義了傳輸函數或轉移矩陣函數的概念。然後,已經開發的分析和設計工具可用於此目的。對於採樣系統,我們將使用相同的方法,因為它們的動態是等效的,用於分析和設計的轉換稱為 Z 變換是從拉普拉斯變換獲得的。這兩個轉換之間有許多相似之處。讓 $f^*(t)$ 成為取樣信號,例如:

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt$$

其中 $f^*(t)$ 等於零,除了在即時 $t = kT$,其中 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

As an example of the signal $f(t)$ we give the step signal defined as follows:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Notice that the Laplace transform of $f^*(t)$, yields:

$$\int_0^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) (e^{sT})^{-k} = F^*(s)$$

Z轉換 $f(t)$ 定義為等於拉普斯變換 $F^*(t)$:

$$Zf(t) = L^F(t)$$

現在,如果我們定義 $z = e^{sT}$ 那麼我們有:

$$(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F(kT) z^{-k}$$

此運算式可用於計算任何訊號的 Z轉換。

示例 4.2.2讓我們現在提供一些範例,以演示如何使用 Z 變換及其屬性。

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{when } k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

單位脈(衝函數)的 Z 變換:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

使用ZZ轉換的定義,我們可以得到:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

- Z-單位步進功能的 Z 轉換:

$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{when } k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 同樣,我們有:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k$$

最後一個運算等效於以下系列

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

將收斂,如果 $|a| < 1$,我們得到:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

要獲得此關係,如果我們允許:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

計算 $S = aS$ 意味著結果。使用此,我們得到:

$$F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

- Z - 指數函數的轉換: $f(k) \mapsto F(z)$

$$f(k) = \begin{cases} a^k & \text{when } k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

再次使用Z轉換的定義,我們得到:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

但條件是 $|az^{-1}| < 1$ 。

表 4.1Z 提供了一些常見信號的 Z 轉換表。這些函數的 Z 轉換的計算留給讀者作為練習。

從控制系統的基本課程中,拉普拉斯變換具有線性、同質性等有趣的特性,由於Z變換是從該變換中獲得的,Z變換的特性Z 直接得到:

- 線性 - Z 轉換是線性運算子:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \mathcal{Z}[f_1(t)] \pm \mathcal{Z}[f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z) \\ \mathcal{Z}[af(t)] &= aF(z) \end{aligned}$$

其中 a 是實數, $f(t)$, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 被賦予的函數分別承認拉普拉斯變換、 $F(z)$ 、 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 是函數 $f(t)$ 的Z 變換, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 。

- 初始值定理

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

- 最終值定理

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

- 移位屬性:

$$\mathcal{Z}[f(t - kT)] = z^{-k}F(z)$$

回移屬性:

$$\mathcal{Z}[f(t + nT)] = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right]$$

然後,對於 $k = 0, 1, 2, \dots, n$,我們有:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(t + T)] &= \mathcal{Z}[f((k + 1)T)] = zF(z) - zf(0) \\ \mathcal{Z}[f(t + 2T)] &= \mathcal{Z}[f((k + 2)T)] = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(T) \\ \mathcal{Z}[f(t + nT)] &= \mathcal{Z}[f((k + n)T)] = z^nF(z) - z^nf(0) \\ &\quad - z^{n-1}f(T) - \dots - zf((n - 1)T) \end{aligned}$$

表格 4.1 Z 轉換表

$F(s)$		使用「Google 文件」開啟 $F(z)$
1	$\delta(t)$	1
e^{-kTs}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{s}$	1(t)	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{(k-1)!}{s^k}$	t^{k-1}	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} \right]$
$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$t^k e^{-aT}$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} \right]$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-at}(1 + at)$	$\frac{z[\alpha z + \beta]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$ $\alpha = 1 - e^{-at} - aT e^{-at}$ $\beta = e^{-2at} - e^{-at} + aT e^{-at}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{b-a} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right]$
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt} - ae^{-at}$	$\frac{z[z(b-a) - (be^{-aT} - ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1}{a} (1 - ae^{-at})$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{z[z - e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
	a^k	$\frac{z}{z-a}$
	$a^k \cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$