

傳遞函數概念

採樣系統的傳遞函數概念可以類似地定義已經做過連續的時間。為了澄清這一點，讓我們參考圖 4.10 上游採樣器是真實的，而下游採樣器是虛擬的，我們假設是理想狀態，並且在相同的採樣週期內保持同步。引入第二個採樣器是為了定義 $Y(z)$ ，從而正確定義脈衝傳遞函數。

根據圖 4.10，我們得到：

$$Y(s) = G(s)U^*(s)$$

由於輸出是由虛擬採樣器採樣的，因此我們可以得到：

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= [G(s)U^*(s)]^* \\ &= G^*(s)U^*(s) \end{aligned}$$

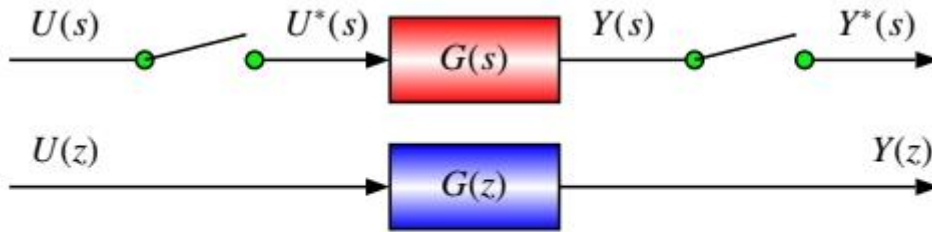


Fig. 4.10 Pulse transfer function definition

圖 4.10 脈衝傳遞函數定義

如果我們應用 z 變換，則可以獲得：

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

where $Y(z) = \mathcal{Z}[Y^*(s)]$ and $U(z) = \mathcal{Z}[U^*(s)]$.

從時域開始可以很好地證明這種關係。實際上，我們有：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U^*(s)]$$

現在使用卷積定理，我們得到：

$$y(t) = \int_0^t g(t-\sigma)u^*(\sigma)d\sigma$$

另一方面，我們知道 $u^*(\sigma)$ 可以寫成如下形式：

$$u^*(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT)$$

使用此， $y(t)$ 的表達式變為：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t-\sigma) \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta(t-kT) d\sigma \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t g(t-\sigma) u(kT) \delta(t-kT) d\sigma \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT) u(kT) \end{aligned}$$

現在使用採樣信號 $y^*(t)$ 的 Z 變換的定義，我們得到：

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} g(kT-lT) u(lT) \right] z^{-k} \end{aligned}$$

執行變量 $m = k - l$ 的更改，我們得到：

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [g(mT) u(lT)] z^{-m-l}$$

可以重寫如下：

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} u(lT) z^{-l} \right] \\ &= G(z) U(z) \end{aligned}$$

最後，傳遞函數由下式給出：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

這是輸出的 Z 變換和輸入的 Z 變換之間的比率。

在操作採樣系統的框圖時，應格外小心。

以下關係將有助於此目的。

- If $Y(s) = G(s)U(s)$, then

$$Y(z) = \mathcal{Z}[Y^*(s)] = \mathcal{Z}[[G(s)U(s)]^*] \neq \mathcal{Z}[G^*(s)U^*(s)] = G(z)U(z).$$

- If $Y(s) = G(s)U^*(s)$, then

$$Y(z) = \mathcal{Z}[Y^*(s)] = \mathcal{Z}[[G(s)U^*(s)]^*] = \mathcal{Z}[G^*(s)U^*(s)] = G(z)U(z).$$

例 4.3.1 在本例中，我們考慮圖 4.11 所示的系統，該系統表示兩個串行的系統，並且兩個系統之間有理想的採樣器。這兩個傳遞函數的表達式是：

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$G_2(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

我們的目標是為該系統計算等效傳遞函數。

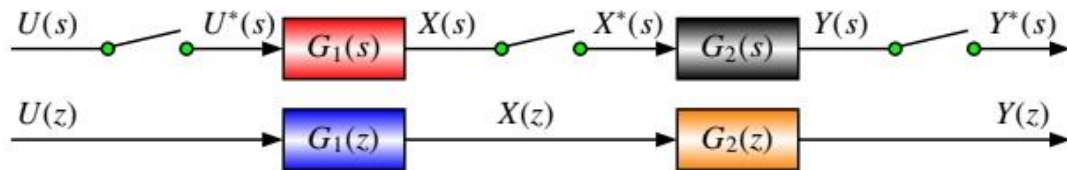


Fig. 4.11 Cascade transfer functions with sampler between

圖 4.11 級聯傳遞函數與採樣器之間

根據此圖，我們得到：

$$Y^*(s) = G_2^*(s)X^*(s)$$

$$X^*(s) = G_1^*(s)U^*(s)$$

這使：

$$Y^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)U^*(s)$$

這又意味著：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z)G_2(z)$$

使用 Z-transform 表，我們有：

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= G_1(z)G_2(z) = \frac{z}{(z - e^{-aT})} \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \\ &= \frac{z^2(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})^2} \end{aligned}$$

例 4.3.2 在本例中，我們考慮了在兩個串行傳遞函數之間移走樣品的情況。圖 4.12 說明了這種情況。傳遞函數 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 由下式給出表達：

$$G_1(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$G_2(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

其中 a 為正標量。

我們的目標是計算等效傳遞函數，並將其與前面示例中獲得的傳遞函數進行比較。

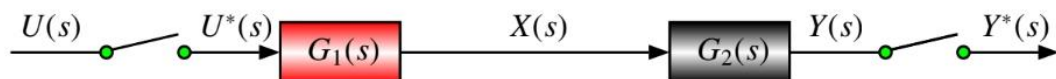


圖 4.12 之間沒有採樣器的級聯傳遞函數
在這種情況下，我們有：

$$\frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = [G_1(s)G_2(s)]^*$$

依次給出：

$$\frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = \mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z)$$

值得要注意的事，在這種情況下，我們獲得的等效傳遞函數與在先前示例的系統中獲得的等效傳遞函數不同。

使用 G_1 和 G_2 的表達式，我們得到：

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{a^2}{s(s+a)^2}$$

根據 Z-transform 表，我們有：

$$\mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \frac{zaTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

例 4.3.3 在本例中，我們考慮在反饋中具有傳遞函數，並且像在前面的例子中一樣搜索等效函數的情況。該系統如圖 4.13 所示。傳遞函數由以下表達式給出：

$$G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

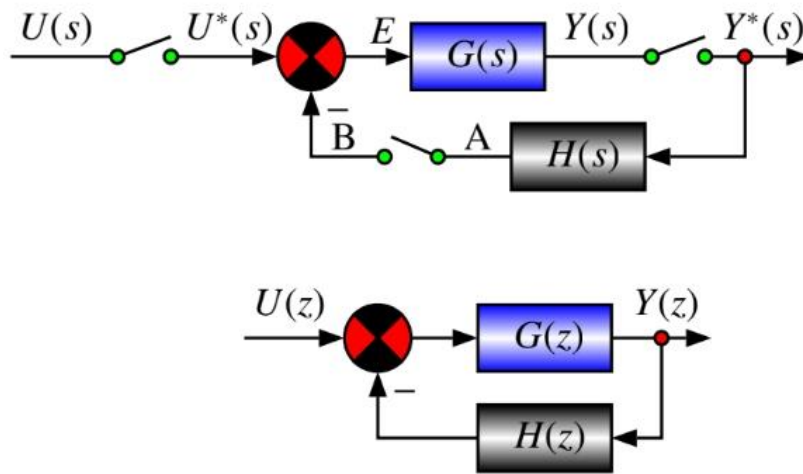


Fig. 4.13 Transfer functions in feedback

圖 4.13 反饋中的傳遞函數

根據此圖，我們可以：

$$A = H(s)Y^*(s)$$

$$B = [A]^* = [H(s)Y^*(s)]^* = H^*(s)Y^*(s)$$

$$E = U^*(s) - B = U^*(s) - H^*(s)Y^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)[U^*(s) - H^*(s)Y^*(s)]$$

依次給出：

$$Y^*(s) = [Y(s)]^* = [G(s)[U^*(s) - H^*(s)Y^*(s)]]^* = G^*(s)[U^*(s) - H^*(s)Y^*(s)]$$

由此我們得到：

$$\frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)H^*(s)}$$

這提供了以下脈衝傳遞函數：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

從 Z-transform 表中，我們得到：

$$G(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$H(z) = \frac{z}{z - 1}$$

使用此我們可以獲得：

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}}{1 + \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})} \frac{z}{z-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-aT})z(z - 1)(z - e^{-aT})}{(z - 1)^2(z - e^{-aT}) + z^2(1 - e^{-aT})} \end{aligned}$$

例 4.3.4 作為前面情況的第二個例子，讓我們考慮圖 4.14 的系統。問題是如何計算該系統的脈衝傳遞函數 $F(z) = Y(z)/G(z)$ 。

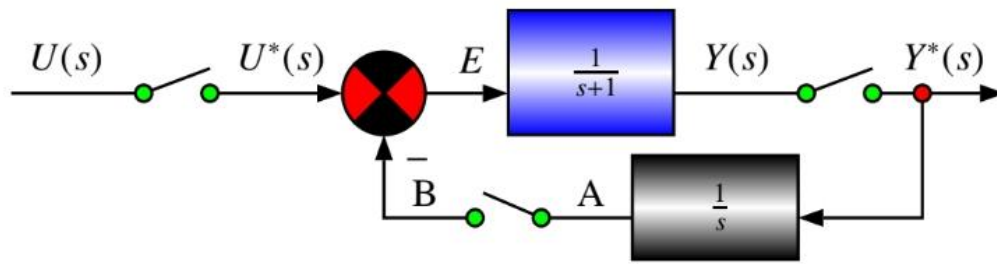


Fig. 4.14 Transfer functions in feedback

圖 4.14 反饋中的傳遞函數

由於（請參閱表 Z-transform）

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{and} \quad H(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{z}{z - 1}$$

對於閉環脈衝傳遞函數，我們得到以下表達式：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{z(z-1)}{(z - e^{-T})(z-1) + z^2}$$

示例 4.3.5 在此示例中，圖 4.15 所示的系統使用零階保持（ZOH）。

1. 找到開環和閉環脈衝傳遞函數 $Y(z)/U(z)$
2. 如果 $K = 1$ 且 $T = 0.1$ ，則找到單位階躍響應

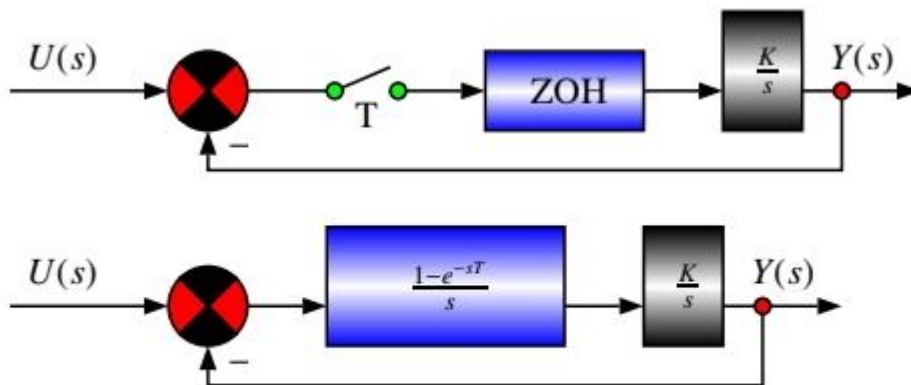


Fig. 4.15 Transfer functions in feedback

圖 4.15 反饋中的傳遞函數

此示例的解決方案可以輕鬆獲得。實際上，我們有：

- 開環：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2}(1 - e^{-sT})$$

從中我們有：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{KTz}{(z-1)^2} \frac{z-1}{z} = \frac{KT}{z-1}$$

最後我們得到：

$$Y(z) = \frac{KT}{z-1} U(z)$$

閉環：

$$Y(z) = \frac{KT/(z-1)}{1 + \frac{KT}{z-1}} U(z) = \frac{KT}{z - (1 - KT)} \frac{z}{z-1}$$

使用 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 1 - KT$ 的殘差法，以及 $K = 1$ ，我們發現：

$$y(kT) = 1 - (1 - T)^k \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

如果使用 $T = 0.1s$ ，則得到：

$$y(k) = 1 - 0.9^k$$

示例 4.3.6 讓我們考慮圖 4.16 的系統併計算轉移功能。

使用此圖，我們可以：

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s)$$

依次給出：

$$E^*(s) = R^*(s) - [H(s)Y(s)]^*$$

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

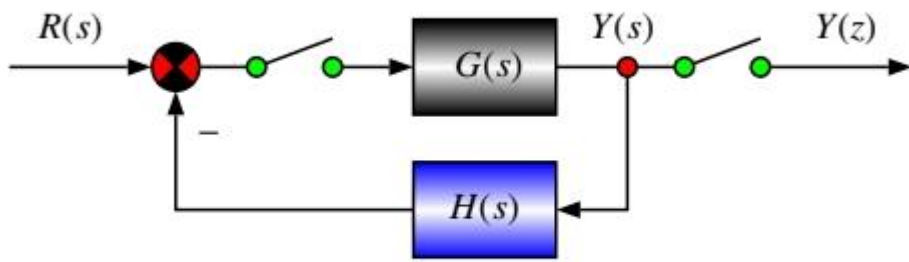


Fig. 4.16 Transfer functions in feedback

圖 4.16 反饋中的傳遞函數

使用 Z 變換，我們獲得：

$$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$$

例 4.3.7 讓我們考慮圖 4.17 的系統併計算轉移功能。

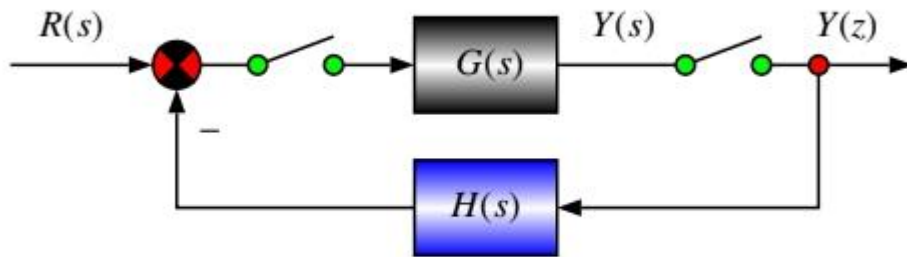


Fig. 4.17 Transfer functions in feedback

圖 4.17 反饋中的傳遞函數

使用此圖，我們可以：

$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s)$$

依次給出：

$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s)Y^*(s)$$

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

現在使用 Z 變換，我們得到：

$$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

示例 4.3.8 讓我們考慮框圖的動態系統，如圖 4.18 所示

$$Y(z) = \frac{RG(z)}{1 + HG(z)}$$

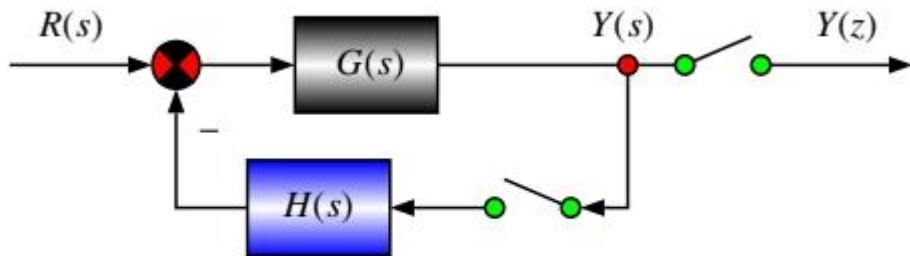


Fig. 4.18 Transfer functions in feedback

圖 4.18 反饋中的傳遞函數

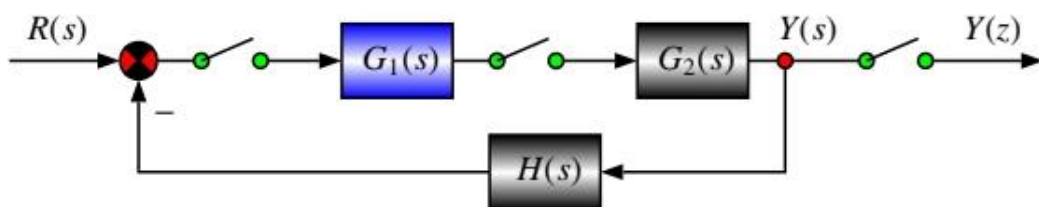


Fig. 4.19 Transfer functions in feedback

圖 4.19 反饋中的傳遞函數

例 4.3.9 讓我們考慮圖 4.19 的框圖系統併計算傳遞函數

$$Y(z) = \frac{G_2(z)RG_1(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

例 4.3.10 讓我們考慮圖 4.20 的框圖系統併計算傳遞函數

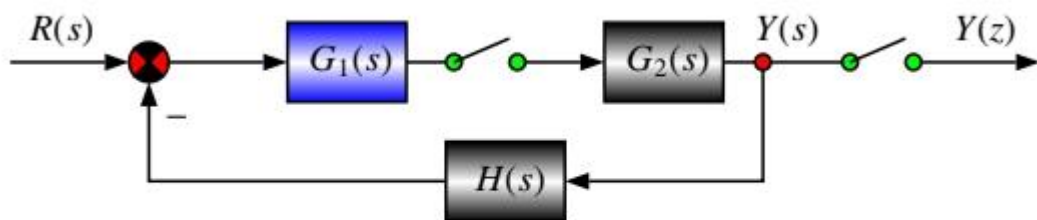


Fig. 4.20 Transfer functions in feedback

圖 4.20 反饋中的傳遞函數

使用此圖，我們可以：

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = [G(s)E(s)]^*$$

依次給出：

$$Y^*(s) = \left[[(R(s) - H(s)Y(s)) G_1(s)]^* \right]^* G_2(s)$$

現在使用 Z 變換，我們得到：

$$Y(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)H(z)}$$

根據這些示例，我們始終能夠計算出該系統及其表達方式如下：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

其中 Y (z) 和 U (z) 分別是輸出 Y (s) 和 Z 的 Z 變換，輸入 U (s)。

此傳遞函數始終採用以下形式：

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\ &= \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \end{aligned}$$

其中 ai 和 bi 是實數標量，n 是一個整數，表示整數的階數系統。

多項式 N (z) 和 D (z) 的根，即以下項的解等式：

$$N(z) = 0$$

$$D(z) = 0$$

分別稱為系統的零點和極點。

極點在系統響應中起重要作用。他們的位置非常很重要，並且與系統性能（例如穩定性，瞬態狀態等）有關。如稍後所示。

例 4.3.11 讓我們考慮一個具有以下轉移的動力系統功能：

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \\ = \frac{z^2 - z + 0.02}{z^3 - 2.4z^2 + z - 0.4}$$

計算系統的極點和零點並將它們繪製在 z 域中。

根據傳遞函數的表達式，我們有：

$$N(z) = z^2 - z + 0.02 \\ D(z) = z^3 - 2.4z^2 + z - 0.4 = (z - 2)(z^2 - 0.4z + 0.2)$$

多項式的根為零時為 $0.1 \pm 0.1j$ ，極點為 2 時為 $0.2 \pm 0.4j$ 。零都在單位圓內。

複雜極點也位於單位圓內，而真實極點在此圓外。

我們介紹了傳遞函數的概念，並且學習瞭如何操作框圖。現在是時候計算傳感器的時間響應了。給定信號輸入的系統。這是下一部分的主題。

4.4 時間響應及其計算

通常，控制系統必須保證某些性能，例如：

- 穩定時間為給定百分比
- 過衝
- 阻尼比

等

對於時間定義，我們要求讀者看一下圖 4.21。為了對穩定時間，過衝等概念有所了解，讓我們考慮具有輸入 $r(t)$ 和輸出 $y(t)$ 的線性時不變系統。如果我們在輸入上應用階躍函數，該系統的輸出將如圖 4.21 所示。從這個數字來看，可以看到建立時間定義為系統響應時間，

$y(t)$ 達到誤差帶（定義為一定百分比，2%，5%等），並在其餘時間停留。百分比越低，建立時間越長。

過衝是給定係統時間響應的另一個特徵。

如果我們參考上圖，則過衝定義為系統輸出的穩態值的最大超出值。

通常，我們使用百分比超調，它被定義為輸出的最大值減去步長值除以步長值。

錯誤也是輸出行為的另一個特徵。

它定義為輸出所獲得的穩定值與期望值之間的差。

對於具有統一反饋的閉環系統，誤差 $E(z)$ 在數學上定義為：

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

其中 $R(z)$ 是參考輸入， $Y(z)$ 是輸出。

以前，我們開發了可用於在給定信號時間內計算表達式的工具。

在這裡，我們將使用它來計算給定係統對選定輸入的時間響應，該輸入可能是以

下信號之一或組合：

- Dirac impulse 狄拉克脈衝
- step 步
- ramp 坡道

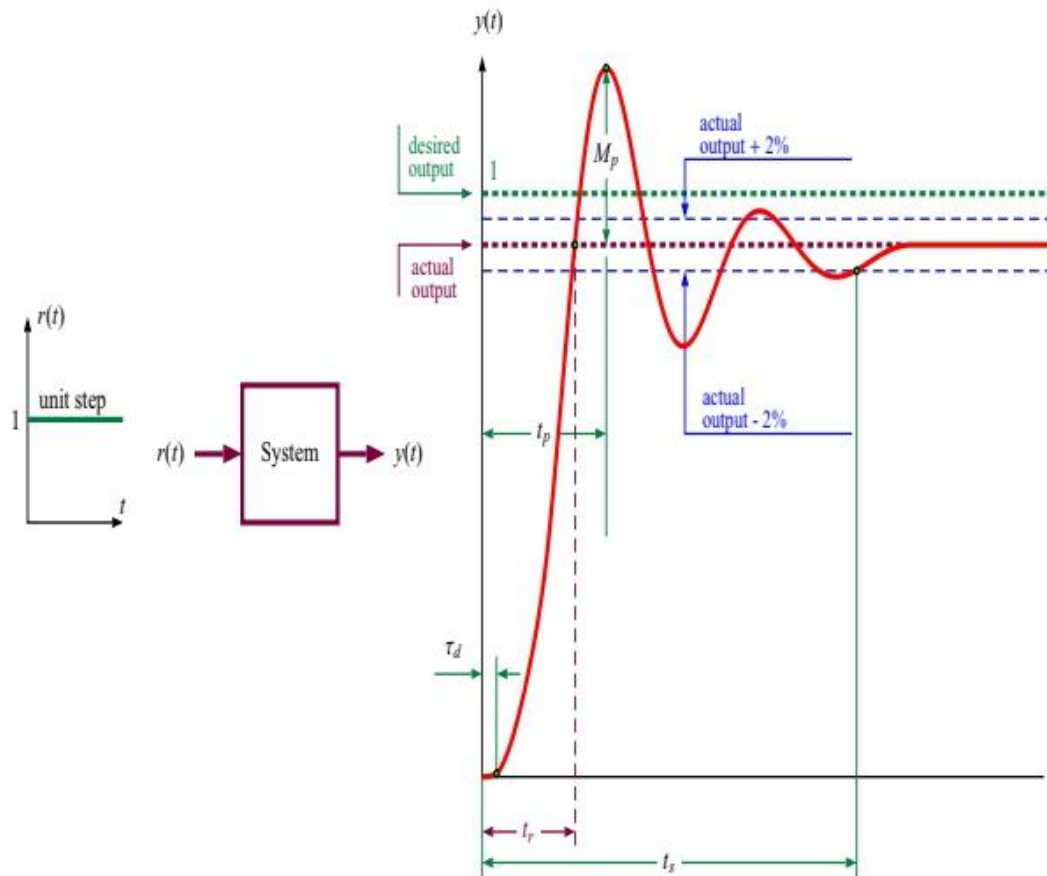


Fig. 4.21 Behavior of the time response for a step input

圖 4.21 步進輸入的時間響應行為

為了計算時間響應，讓我們考慮一個具有給定輸入信號 $U(z)$ 的脈衝傳遞函數 $G(z)$ 的系統，並考慮 $y(kT)$ 表達式的計算。

該系統如圖 4.22 所示。該圖可能代表開環脈衝傳遞函數或其等效的閉環脈衝傳遞函數，這是我們在簡化系統框圖後得到的。

從這個數字，我們得到：

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

將時間響應 $y(kT)$ 的計算帶入 Z 逆變換的計算，可以使用以下方法之一確定該逆 Z 變換：



Fig. 4.22 Block diagram (BD)

- 擴展為部分分數
- 多項式除法
- 殘留法

為了說明時間響應如何，讓我們考慮以下示例。

例 4.4.1 在本例中，我們考慮了在給定機械負載下通過齒輪驅動的直流電動機的速度控制。我們假設系統是使用微控制器控制的。系統的傳遞函數由下式給出：

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

其中 $K = 2$ 和 $\tau = 2$

該系統被認為是開環的。在這種情況下，由於我們存在 ZOH，我們獲得：

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{2}{s(2s + 1)} \right]$$

使用 Z-transform 表，我們得到：

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{z(1 - e^{-\frac{T}{2}})}{(z - 1)(z - e^{-\frac{T}{2}})} \right] \\ &= \frac{(1 - e^{-\frac{T}{2}})}{(z - e^{-\frac{T}{2}})} \end{aligned}$$

對於我們的系統，由於時間常數等於 2 秒，因此採樣時間的適當選擇是 $T = 0.2$ 秒。使用這個，我們得到：

$$G(z) = \frac{0.0952}{z - 0.9048}$$

如果現在我們認為信號輸入是單位步長，我們得到

$$Y(z) = \frac{0.0952z}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

要計算時間響應，我們可以使用表格或將其擴展為部分分數。
使用 Z-transform 表，我們得到：

$$y(kT) = 1 - e^{-0.1k}$$

通過擴展為部分分數，我們得到：

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{0.0952}{(z-1)(z-0.9048)} \\ &= \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-0.9048} \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-0.9048}\end{aligned}$$

由此我們得到：

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-0.9048}$$

使用 Z-transform 表，我們得到：

$$y(kT) = 1 - e^{-0.1k}$$

since $e^{-0.1} = 0.9048$.

例 4.4.2 在本例中，我們考慮了在給定機械負載下通過齒輪驅動的直流電動機的位置控制。我們假設系統是使用微控制器控制的。系統的傳遞函數由下式給出：

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 $K = 2$ 和 $\tau = 2$

該系統被認為是開環的。在這種情況下，由於我們存在 ZOH，因此我們獲得：

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{2}{s^2(2s + 1)} \right]$$

使用 $T = 0.2$ 秒的 Z 轉換表，我們得到：

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})}{0.5(z-1)(z - e^{-\frac{T}{\tau}})} \right]$$

$$= \frac{(0.4048z - 0.5476)}{0.5(z-1)(z - 0.9048)}$$

如果現在我們認為信號輸入是單位步長，我們得到

$$Y(z) = 0.8096 \frac{z(z - 1.3528)}{(z-1)^2(z - 0.9048)}$$

為了計算時間響應，我們可以使用 Z 變換錶，也可以採用擴展為部分分數的方法或採用殘差的方法。

使用 Z-transform 表，我們得到：

$$y(kT) = kT - \frac{1}{a} [1 - e^{akT}]$$

$$a = 0.5 \text{ 和 } T = 0.2$$

通過將方法擴展為部分分數，我們可以：

$$Y(z) = \frac{K_1}{(z-1)^2} + \frac{K_2}{(z-1)} + \frac{K_3}{(z-0.9048)}$$

用殘基的方法，我們得到：

$$y(kT) = \sum \text{residues of } 0.8096 \frac{z(z - 1.3528)z^{k-1}}{(z-1)^2(z - 0.9048)}$$

在極點 $z = 1$ 和 $z = 0.9048$ 處。

這些殘基計算如下：

z 極處的殘差= 1

$$\frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 0.8096 \frac{z(z - 1.3528)z^{k-1}}{(z-1)^2(z - 0.9048)} \right] \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz} \left[0.8096 \frac{(z - 1.3528)z^k}{(z - 0.9048)} \right] \Big|_{z=1}$$

$$= 119.0464 - 2.9568k$$

z 極處的殘留量= 0.9048

$$\left[0.8096 \frac{(z - 1.3528) z^k}{(z - 1)^2} \right]_{|z|=0.9048}$$

$$= -40.0198 (0.9048)^k$$

現在使用該表，我們得到：

$$y(kT) = 1 - e^{-0.1k}$$

因為 $e^{-0.1} = 0.9048$ 。

從上一節中計算的時間響應可以看出，對於給定的系統，對於給定的信號輸入，輸出可以取有限值或無限值。問題是為什麼會這樣。這個問題的答案由穩定性分析給出，這將在下一部分中介紹。

4.5 穩定性和穩態誤差

對於連續時間域中的系統，穩定性意味著所有極點都必須具有負實部。在變換 $z = eTs$ 的情況下，以 T 為採樣週期，我們看到 s 域的左半平面對應於內部單位圓，因此，在 z 域中，如果所有極點在此單位圓內。

為了分析離散時間系統的穩定性，讓我們考慮圖 4.23 的系統。該系統的閉環傳遞函數由下式給出：

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

其中 $R(z)$ 和 $Y(z)$ 分別是輸入和輸出。

系統的極點是以下特徵方程的解：

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

穩定性的研究需要計算這些根。對於小階系統，我們總是可以手動求解特徵方程，然後求出極點，並根據極點所在的事實得出穩定性結論。對於高階，不建議使用此方法，而需要替代方法。已經開發了一些標準來研究穩定性。在這些標準中，我們引用了一個陪審團和一個 Raible。

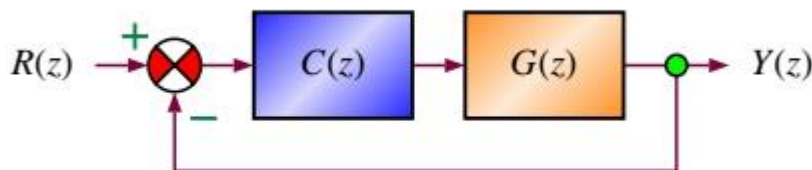


Fig. 4.23 Block diagram of the closed-loop

圖 4.23 閉環框圖

Let $z = e^{sT}$ with $s = \sigma \pm j\omega$. Therefore,

令 $z = e^{sT}$ ，其中 $s = \sigma \pm j\omega$ 。因此，

如果 $\sigma < 0$ ，則 $|z| < 1$ 並且系統穩定

如果 $\sigma > 0$ ，則 $|z| > 1$ ，系統不穩定

如果 $\sigma = 0$ ，則 $|z| = 1$ ，系統處於穩定性極限

例 4.5.1 讓我們考慮一個具有以下特徵方程的動力系統：

$$1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0$$

特徵方程的根為： $z = 1/2$ 和 $z = 1/4$ 。這些根位於單位圓內，因此系統穩定。

例 4.5.2 讓我們考慮一個具有以下特徵方程的動力系統：

$$1 - 2z^{-1} + \frac{5}{4}z^{-2} = 0$$

或等效地：

$$z^2 - 2z + \frac{5}{4} = 0$$

系統的根是 $z_{1,2} = 1 \pm j1/2$ ，並且都在單位圓之外，這表示系統不穩定。

研究離散時間系統穩定性的直接方法是將其轉換為等效的連續時間系統，然後使用 Routh-Hurwitz 的準則。

這個想法是找到一個合適的應用程序，將單位圓的內部映射到左側的半平面上。

然後，我們可以應用 Routh-Hurwitz 準則。我們正在尋找的轉變是：

$$z = \frac{1+w}{1-w} \text{ with } w \neq 1$$

在特性方程式中用該表達式替換 z 將得到 w 的一個新值，我們可以應用 Routh-Hurwitz 的準則。

例 4.5.3 為了展示我們如何使用勞斯-赫維茲準則，讓我們考慮具有以下特徵方程的動力學系統：

$$z^3 - 2.4z^2 + z - 0.4 = 0$$

可以看出極點為 2 和 $0.2 \pm 0.4j$ 。因此系統不穩定。

現在讓我們在特徵方程中將 z 替換為 $1+w/1-w$ 。這給出：

$$\left[\frac{1+w}{1-w} \right]^3 - 2.4 \left[\frac{1+w}{1-w} \right]^2 + \left[\frac{1+w}{1-w} \right] - 0.4 = 0$$

可以採用以下形式：

$$4.8w^3 + 3.2w^2 + 0.8w - 0.8 = 0$$

勞斯·赫維茲準則的條件包括填寫下表：

w^3	4.8	0.8	0
w^2	3.2	-0.8	0
w^1	2	0	
w^0	-0.8		

在第一列的基礎上，我們可以看到符號發生了變化，因此系統不穩定。這證實了我們前面已經提到的結果。

還需要注意的是， w 中特徵方程的根由下式給出：

$$w_1 = 0.3333$$

$$w_{2,3} = -0.5000 \pm 0.5000j$$

這些根也可以使用 $w = z-1 / z + 1$ 從 z 域中的根獲得。

例 4.5.4 考慮特徵方程：

$$z^2 + z(6.32K - 1.368) + 0.368 = 0$$

應用雙線性變換可得出：

$$\left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + \left(\frac{1+w}{1-w} \right) (6.32K - 1.368) + 0.368 = 0$$

依次給出：

$$w^2[2.736 - 6.32K] + 1.264w + (6.32K - 1) = 0$$

應用勞斯·赫維茲準則可以得出：

w^2	$2.736 - 6.32K$	$6.32K - 1$
w^1	1.264	0
w^0	$6.32K - 1$	

為了保證穩定性，我們應該確定參數 K 的範圍，以使第一列中的符號沒有變化。對於 w^0 行，我們應該有 $6.32K - 1 > 0$ ，即 $K > 1 / 6.32 = 0.158$ 。對於 w^2 行，我們

還應該有 $2.736 - 6.32K > 0$ ，即 $K < 2.736 / 6.32 = 0.4329$ 。如果我們看這兩個條件，可以得出結論，系統對於 $0.158 < K < 0.4349$ 是穩定的。

To check this, let us consider $K = 0.2$, which is inside the interval. Using this value, we obtain the following characteristic equation:

為了檢查這一點，讓我們考慮在間隔內的 $K = 0.2$ 。使用該值，我們獲得以下特徵方程式：

$$z^2 - 0.104z + 0.368 = 0$$

其根為 $z_1 = 0.052 + j0.6044$ 和 $z_2 = 0.052 - j0.6044$ 。根位於單位圓內，因此系統穩定。對於 $K = 1$ ，我們獲得：

$$z^2 + 4.952z + 0.368 = 0$$

根是 $z_1 = -0.076$ 和 $z_2 = -4.876$ 。由於 $|z_2| > 1$ ，因此系統不穩定。

對於離散時間，陪審團已經制定了一個準則，該準則給出了任何系統穩定性的思想，而無需求解特徵方程。

為了說明這種方法是如何工作的，讓我們考慮以下具有實係數的特徵多項式：

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

其中 $a_n > 0$ 且 a_i 是實標量。

評審團的穩定性標準包括建立以下一系列係數：

row 1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-k}	\dots	a_{n-1}	a_n
row 2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_k	\dots	a_1	a_0
row 3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-k}	\dots	b_{n-1}	
row 4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_k	\dots	b_0	
row 5	c_0	c_1	c_2	\dots		c_{n-2}		
row 6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots		c_0		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots				
row $2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3				
row $2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0				
row $2n-3$	q_0	q_1	q_2					

評審團的陣列係數計算如下：

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

P(z) 描述的系統穩定的必要和充分條件是：

$$P(1) > 0$$

$$P(-1) \begin{cases} > 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ < 0 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$\text{with } (n-1) \text{ constraints } \begin{cases} |a_0| < a_n & |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| & |d_0| > |d_{n-3}| \\ \dots & \dots \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$$

示例 4.5.5 檢查以下多項式描述的系統的穩定性：

$$1 + K \frac{z}{(z-1)(z-0.4)} = 0$$

其中 K 是確定參數以使系統穩定的參數。

此特徵方程式可重寫如下：

$$z^2 + (K - 1.4)z + 0.4 = 0$$

應用評審標準可得出：

- P(1) > 0，使 K > 0
- P(-1) > 0，這使得 K < 2.8
- |a₀| < a_n，即：0.4 < 1，這是正確的

因此，如果 K ∈]0, 2.8[，我們的系統將是穩定的。例如，如果我們將 K 固定為 2，

給出以下特徵方程式：

$$z^2 + 0.6z + 0.4 = 0$$

根是 $z_{1,2} = -0.3000 \pm 0.5568j$ ，由於 $|z_{1,2}|$ 而在單位圓內 <1 。

Raible 提出了另一個研究穩定性基礎的標準。此穩定性標準還包括作為陪審團標準來填充數組，然後得出穩定性的結論。為了說明此標準的工作原理，讓我們考慮以下特徵方程式：

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

其中 a_i 是真正的標量。

row 1	a_0	a_1	\cdots	a_{n-1}	a_n	multiplier
row 2	a_n	a_{n-1}	\cdots	a_1	a_0	$\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$
row 3	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	\cdots	$a_{n-1}^{(n-1)}$	0	multiplier
row 4	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$	\cdots	$a_0^{(n-1)}$	0	$\alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
row 2n-1	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$				multiplier
row 2n	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$				$\alpha_1 = \frac{a_1^{(1)}}{a_0^{(1)}}$
row 2n+1	$a_0^{(0)}$					

- 第一行由多項式係數組成
- 第二行由相同的係數組成，但順序相反
- 通過將第二行乘以 $\alpha_n = a_n / a_0$ ，然後減去第一行的結果來獲得第三行
- 第 4 行由第 3 行的係數以相反的順序排列而成。

重複這些過程，直到數組獲得 $2n+1$ 行。最後一行僅包含一個數字。

Raible 的穩定性標準

當 $a_0 > 0$ 時，且僅當 $a(i) > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$ 時，多項式的根都在單位圓內

係數 $a(i) > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$ 出現在 Raible 數組中。

備註 4.5.1 假設 $a_0 > 0$ 不是限制性的。實際上，當 $a_0 < 0$ 時，足以改變多項式 $P(z)$ 的所有係數的符號以獲得 $-P(z)$ ，

依次用於 Raible 的標準。

該過程是正確的，因為 $P(z)$ 和 $-P(z)$ 的根相同。

例 4.5.7 為了說明 Raible 準則是如何工作的，讓我們考慮以下特徵方程式：

$$P(z) = -z^3 - 0.7z^2 - 0.5z + 0.3$$

係數 a_0 必須為正，然後形成多項式的係數數組 $-P(z) = z^3 + 0.7z^2 + 0.5z - 0.3$

1	0.7	0.5	-0.3	
-0.3	0.5	0.7	1	$\alpha_3 = \frac{0.3}{-1} = -0.3$
0.91	0.85	0.71		
0.71	0.85	0.91		$\alpha_2 = \frac{0.71}{0.91} = 0.78$
0.36	0.19			
0.19	0.36			$\alpha_1 = \frac{0.19}{0.36} = 0.53$
0.26				

系統穩定是因為 $a(i) > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$

我們提出了一些技術來研究離散時間系統的穩定性。還必須注意，我們也可以在頻域中應用這些準則。

4.6 根軌跡技術

根軌跡技術是一種強大的方法，通常用於連續時間或離散時間系統以進行分析或設計。該技術給出了當增益或更大（參數或更大）改變時閉環動力學的極點表現方式的想法。直接的結論是，我們立即知道參數的變化如何影響系統的穩定性和其他性能。

如今，有許多工具可以繪製任何動態系統的根基因座，其中一些是免費提供的。在本節的其餘部分中，我們將使用 **Matlab** 進行繪圖，但是我們將製定規則，以防萬一沒有計算機時如何獲取根軌跡草圖。

對於連續情況，離散系統的根軌跡由我們用以下形式編寫的特徵方程式描述：

$$1 + KG(z) = 0$$

其中 K 是變化的參數，

$$G(z) = \frac{(z - n_1)(z - n_2) \cdots (z - n_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}$$

其中 z_1, z_2, \dots, z_n 是極點， n_1, n_2, \dots, n_m 是開環傳遞函數的零點。

當參數 K 從 0 變為無窮大 (∞) 時。與在 s 平面中繪製連續時間系統的根軌跡所用的規則相同，適用於在 z 平面中繪製離散時間系統之一的圖，除了對結果的解釋是主要在穩定性方面有所不同。

從特徵方程式，我們得到以下條件：

$$\frac{1}{K} = \frac{\prod_{i=1}^m |z - n_i|}{\prod_{i=1}^n |z - z_i|} \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m \arg(z - n_i) - \sum_{i=1}^n \arg(z - z_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

第一個條件稱為幅度條件，而第二個條件稱為角度條件。z 平面中滿足這兩個條件的任何點都屬於系統的根軌跡。在這一點上對應於增益 Kz_0 。如果這點是 z_0 ，那麼我們有：

$$\frac{1}{K_{z_0}} = \frac{\prod_{i=1}^m |z_0 - n_i|}{\prod_{i=1}^n |z_0 - z_i|}$$

$$\sum_{i=1}^m \arg(z_0 - n_i) - \sum_{i=1}^n \arg(z_0 - z_i) = \theta_0$$

其中 θ_0 是該點的對應角度。

如果滿足上述兩個條件，則 z 平面的點將屬於根軌跡。

通常，除非給我們提供合適的工具，否則為給定係統繪製確切的根軌跡是一項艱鉅的任務。

通常，可以使用一些簡單的規則輕鬆獲得此根軌跡的草圖。

其中一些規則是：

1. 分支的數量等於系統的階數，即 i.e.:n;
2. 根軌跡相對於實軸對稱。這是由於特徵方程的根是實數還是複數的事實。如果存在複雜的根，我們將自動獲得其共軛。
3. 軌跡起源於開環傳遞函數的極點，並終止於該傳遞函數的零點。為了解釋為什麼基因座起源於極點，我們可以使 K 等於零，而為什麼基因座終止於零點可以通過讓 K 在等式中變為 ∞ 來解釋。（4.4）。
4. 漸近線的數量等於開環傳遞函數的極數 n 和零數 m 之差。這些漸近線的特徵是：

$$\delta = \frac{\sum \text{poles} - \sum \text{zeros}}{n - m}$$

$$\beta_k = (2k + 1) \frac{\pi}{n - m}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

參數 δ 給出漸近線與實軸的交點，而 β_k 給出使每個漸近線與實軸的夾角。

5. 對於根軌跡的斷點，首先我們確定各種參數 K 的表達式，即：

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |z - z_i|}{\prod_{i=1}^m |z - n_i|}$$

斷點是以下方程式的解：

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

從方程式的根中選擇對於斷點而言可行的解決方案非常重要。

- 通過在特性方程中用 $j\omega$ 替換 z 並確定，可以確定 z 平面中虛軸的交點，並將其寫為：

$$\Re(K, \omega) + j\Im(K, \omega) = 0$$

依次給出兩個方程式：

$$\Re(K, \omega) = 0$$

$$\Im(K, \omega) = 0$$

該解給出了相交發生的頻率和相應的增益。

- 使用角度條件計算從復數極點出發的角度或到零點的到達角度。如果要計算角度的點為 z_0 ，則條件角度變為：

$$\sum_{i=1}^m \arg(z_0 - n_i) - \sum_{i=1}^n \arg(z_0 - z_i) - \theta_0 = 180$$

其中 θ_0 是該點的對應角度。

例 4.6.1 為了說明根源技術是如何工作的，讓我們考慮圖 4.24 中的系統，其中設備是雙積分器，而控制器是具有增益 K 的比例動作，由於某些物理原因（例如加熱，老化等），我們將假定在零和無窮大之間進行切換。

使用 z 變換錶和閉環傳遞函數的表達式，我們得到了該系統的以下特徵方程：

$$1 + K \frac{(z+1)}{(z-1)^2} = 0, \text{ with } K = \frac{k}{2}$$

- 分支數量： $n = 2$
- 有限的分支數量： $m = 1$
- 無限數量的分支： $n - m = 2 - 1 = 1$
- 漸近角： $\beta = \pi (2k + 1) / n - m = \pi (2k + 1) / 2 - 1 = \pi, k = 0$

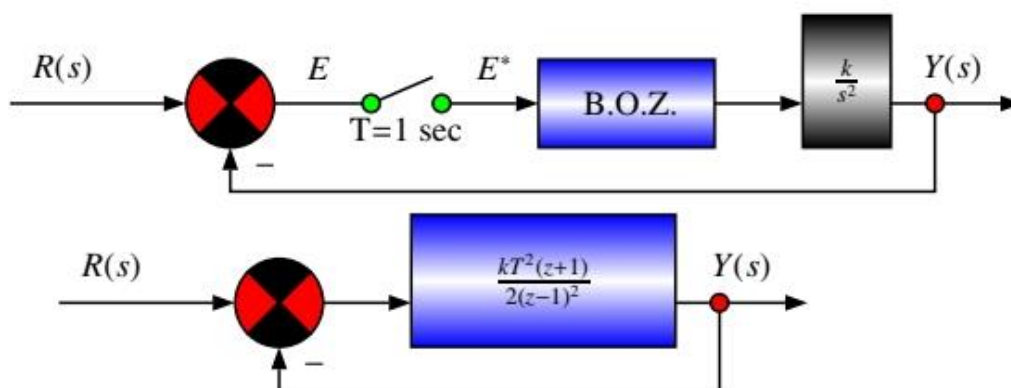


Fig. 4.24 BD of the system with characteristic eqn: $1 + K(z+1)/(z-1)^2 = 0$
具有特徵方程的系統的 BD: $1 + K(z+1)/(z-1)^2 = 0$

- 漸近線與實軸的交點：

$$\delta = (1) + (1) - (-1) / 2 - 1 = 3$$

- 軌跡與實軸的交點： $dK/dz = 2z^2 + 4z - 6 = 0$ ，得出 $z_1 = -1$ 和 $z_2 = -3$ 。

根軌跡如圖 4.25 所示。所有的根都在藍色的單位圓之外。系統不穩定。這意味著比例控制器無法穩定雙積分器。

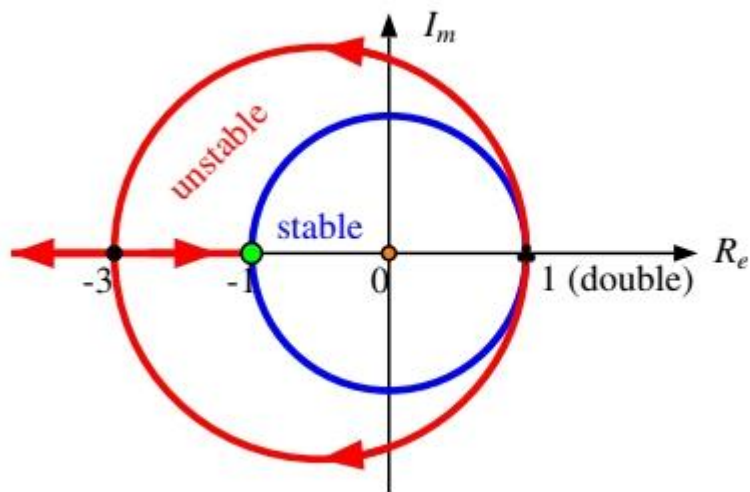


Fig. 4.25 RL of the system with characteristic eqn: $1 + K \frac{(z+1)}{(z-1)^2} = 0$

圖 4.25 具有特徵 eqn 的系統的 RL： $1 + K(z+1)/(z-1)^2 = 0$

示例 4.6.2 作為根軌跡技術的第二個示例，讓我們考慮圖 4.26 的系統。

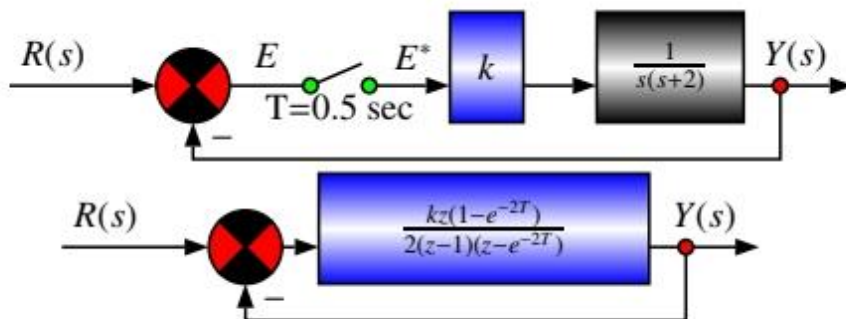


Fig. 4.26 BD of the system with characteristic eqn: $1 + K \frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 0$

圖 4.26 特徵方程為 eqn 的系統的 BD： $1 + K * Z / (z-1)(z-0.368) = 0$

該系統的特徵方程由下式給出：

$$1 + k \frac{z(1 - e^{-2T})}{2(z - 1)(z - e^{-2T})} = 1 + K \frac{z}{(z - 1)(z - 0.368)} = 0$$

with $K = 0.316k$

- 分支數量：n = 2。
- 有限分支數：m = 1。
- 無限數量的分支 n - m = 2 - 1 = 1。
- 漸近角： $\beta = \pi (2k + 1) / n - m = \pi (2k + 1) / 2 - 1 = \pi$ 。
- 軌跡與實軸的交點：dK / dz = -z² + 0.368 = 0。此等式的分辨率為：z₁ = -0.606 et z₂ = +0.606。

如果在特性方程式中用-1 代替 z，我們會發現：

$$1 + K \frac{z}{(z - 1)(z - 0.368)} = 1 + K \frac{(-1)}{(-1 - 1)(-1 - 0.368)} = 0$$

這又意味著：

$$K = 2.738$$

$$K = 0.316k$$

這使：

$$k = \frac{K}{0.316} = \frac{2.738}{0.316} = 8.65$$

根軌跡如圖 4.27 所示。所有的根都在藍色的單位圓內。因此，系統對於所有增益 k < 8.65 都是穩定的。

4.7 波特圖技術

頻率響應在連續時間和離散時間系統的分析 and 設計中起著重要作用。時間響應，頻率

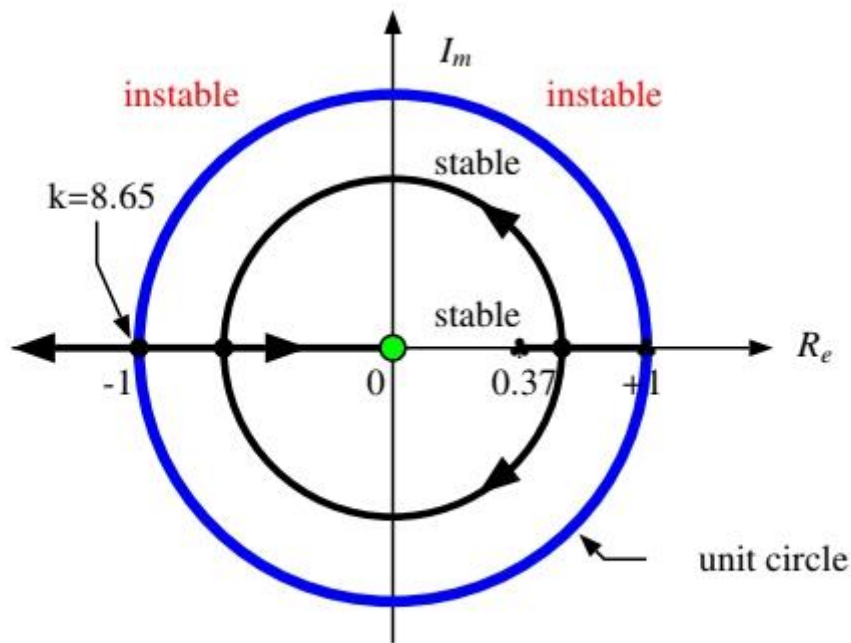


Fig. 4.27 RL of the system with characteristic eqn: $1 + K \frac{z}{(z-1)(z-0.368)} = 0$

圖 4.27 具有特徵方程式的系統的 RL： $1 + K * z / (z-1)(z-0.368) = 0$

響應包括通過正弦輸入激勵系統。在連續時間系統中，已證明對於正弦輸入，穩定線性系統的輸出是正弦的，並且輸入頻率相同，並且輸出的幅度和相位是該頻率的函數。對於離散時間系統，輸出也是與輸入信號相同頻率的正弦波，並且相位和幅度仍是該頻率的函數。為了說明這一點，讓我們考慮具有以下傳遞函數的穩定線性系統：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}$$

令輸入 $r(t)$ 具有以下表達式：

$$r(t) = \sin(\omega t)$$

其中 ω 是輸入頻率。此處的幅度等於 1。

該信號的 Z 變換由下式給出（請參見 Z 變換錶）：

$$R(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} = \frac{z \sin(\omega T)}{(z - e^{-j\omega T})(z - e^{j\omega T})}$$

現在，如果我們認為系統由 $R(z)$ 激勵，則相應的輸出 $Y(z)$ 由下式給出：

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= G(z)R(z) \\
 &= K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} \frac{z \sin(\omega T)}{(z - e^{-j\omega T})(z - e^{j\omega T})}
 \end{aligned}$$

為了得到輸出的表達式，讓我們繼續處理 $Y(z)$ 的一部分，得到：

$$Y(z) = \frac{cz}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{\bar{c}z}{z - e^{j\omega T}} + \text{terms due to } G(z)$$

現在讓 s 將等式的兩邊乘以 $(z - e^{-j\omega T}) / z$ 得到以下結果：

$$G(z) \frac{\sin \omega T}{(z - e^{j\omega T})} = c + \frac{\bar{c}(z - e^{-j\omega T})}{z - e^{j\omega T}} + \left[\frac{(z - e^{-j\omega T})}{z} \right] \text{terms due to } G(z)$$

而

$$\begin{aligned}
 c &= \left[G(z) \frac{\sin(\omega T)}{(z - e^{j\omega T})} \right]_{|z=e^{-j\omega T}} \\
 \bar{c} &= \text{conjugate of } c
 \end{aligned}$$

請注意， $e^{-j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ ，這意味著

$$(z - e^{j\omega T})_{|z=e^{-j\omega T}} = -2j \sin \omega T$$

使用這個我們得到：

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{G(e^{-j\omega T})}{-2j} \\
 \bar{c} &= \frac{G(e^{j\omega T})}{2j}
 \end{aligned}$$

現在利用以下事實：對於任何復數，我們都有：

$$G(e^{j\omega T}) = M(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

其中 M 和 θ 分別代表頻率 ω 的幅度和相位。
穩態，歸因於 $G(z)$ 的項消失，我們有：

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{G(e^{-j\omega T})}{-2j} \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{G(e^{j\omega T})}{2j} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \\
&= \frac{M(\omega)}{2j} \left[-\frac{e^{-j\theta(\omega)} z}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{e^{j\theta(\omega)} z}{z - e^{j\omega T}} \right]
\end{aligned}$$

穩態下 $Y(z)$ 的 z 變換逆由下式給出：

$$\begin{aligned}
y(kT) &= \frac{M(\omega)}{2j} \left[e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega T} - e^{-j\theta(\omega)} e^{-j\omega T} \right] \\
&= \frac{M(\omega)}{2j} \left[e^{j(\theta(\omega) + \omega T)} - e^{-j(\theta(\omega) + \omega T)} \right] \\
&= M(\omega) \sin(\omega T + \theta(\omega))
\end{aligned}$$

備註 4.7.1 重要的是要提到正弦輸入的輸出幅度和相位都是其頻率的函數。

因此，它們的值將隨頻率變化而變化。

可以通過連續時間的頻率響應進行一定的並聯。實際上，對於這些系統，可以通過執行以下操作從描述系統的傳遞函數 $G(s)$ 中獲得頻率響應：

- 大小 $M(\omega)$ 由下式給出：

$$M(\omega) = |G(j\omega)|$$

- 相位 $\theta(\omega)$ 由下式給出：

$$\theta(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

這意味著在頻率為 ω 時輸出的幅度和相位是通過首先用 $s\omega$ 替換 s 然後從系統的傳遞函數獲得的，然後使用先前的公式來計算幅度和相位。

對於離散時間，除了我們必須用 $e^{j\omega T}$ 替換 z 並使用以下公式之外，採用相同的推理：

- 大小 $M(\omega)$ 由下式給出：

$$M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$$

- 相位 $\theta(\omega)$ 由下式給出：

$$\theta(\omega) = \arg(G(e^{j\omega T}))$$

對於離散時間系統的頻率響應，必須採取一些預防措施。實際上， z 變換是通過用 esT 替換 z 獲得的。因此， s 域左側的主要條帶和互補條映射到 z 域中單位圓的內部。如果我們用 $e^{j\omega T}$ 依次替換 z 以獲得離散時間系統的頻率響應，則由於涉及整個 z 平面，因此得到的結果沒有意義。為了避免這種情況，通常使用以下轉換：

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}\omega}{1 - \frac{T}{2}\omega}$$

這意味著：

$$\omega = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

然後分別使用 z 變換和 w 變換，將 s 平面左半部分的一次行程轉換為單位圓，然後將其轉換為 w 平面的整個左半部分。更具體地，首先將 s 平面 $-\omega_s/2 \leq w \leq \omega_s/2$ 中的頻率範圍變換為 z 平面中的單位圓，然後將其變換為 w 平面的整個左半部。最後，重要的是要注意頻率 ω 和 ν 之間的關係。實際上， ω 定義為：

$$\begin{aligned} \omega|_{\omega=j\nu} &= j\nu = \left[\frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \right]_{z=e^{j\nu T}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{j\nu T} - 1}{e^{j\nu T} + 1} \end{aligned}$$

分子和分母乘以 $e^{-j\nu T/2}$ ，得到：

$$\begin{aligned} w|_{w=j\nu} &= j\nu \\ &= j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\nu T}{2}\right) \end{aligned}$$

給出 w 和 ν 之間的以下關係：

$$w = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\nu T}{2}\right)$$

在低頻下，這些頻率之間是相等的。實際上，當 w 低時，我們的 $\tan(wT/2) = wT/2$ ，得出 $w = \nu$ 。

基於這一點，在將 z 替換為 $z = (1 + T/2 w) / (1 - T/2 w)$ （之後得到的傳遞函數的新表達式中，離散時間的頻率響應包括：用 $j\nu$ 替換 w ，其中 ν 是虛擬頻率。 $1 - T/2 w$ ）。為了了解如何繪製頻率響應，讓我們考慮以下示例。

例 4.7.1 作為頻率響應的第一個例子，讓我們考慮圖 4.28 的系統。它表示由直流電動機驅動的負載的速度控制。控制器是成比例的。系統和控制器的傳遞函數由下式給出：

$$\bar{G}(s) = \frac{K_p k}{\tau s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

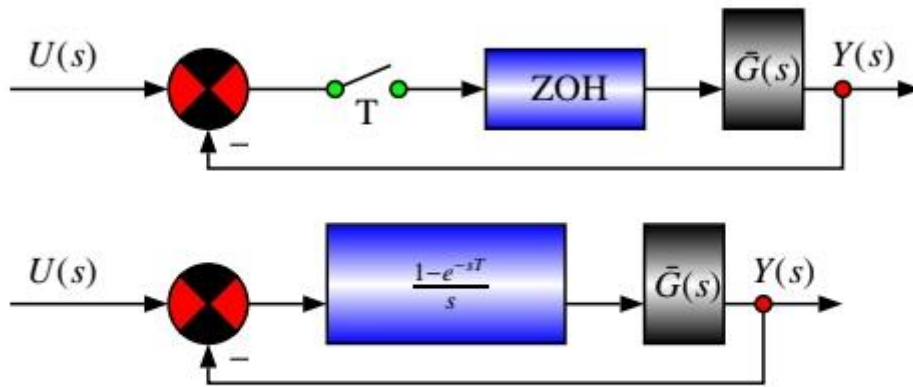


Fig. 4.28 Speed control of mechanical part driven by a dc motor

圖 4.28 由直流電動機驅動的機械零件的速度控制
 首先，讓我們計算圖 4.26 中系統的開環傳遞函數。
 既然有了 ZOH，我們得到：

$$G(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 $K = K_{pk} = 2$ ， $\tau = 1s$ ， T 是用於我們系統的採樣週期，它等於 $0.1s$ 。
 使用 Z-transform 表，我們得到：

$$\begin{aligned} G(z) &= K \frac{(z-1)}{z} \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^T)} \\ &= K \frac{(1-e^{-T})}{(z-e^T)} \\ &= \frac{0.1903}{z-0.9048} \end{aligned}$$

現在將 z 替換為 $(1+T/2w)/(1-T/2w) = 1+0.05w/1-0.05w$ ，我們得到：

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{0.1903}{\frac{1+0.05w}{1-0.05w} - 0.9048} \\ &= \frac{0.1903(1-0.05w)}{0.0952 + 0.0952w} \\ &= \frac{1.9989(1-0.05w)}{1+w} \end{aligned}$$

使用 Matlab，我們可以獲得該傳遞函數的伯德圖，如圖 4.29 所示。

4.8 結論

本章介紹基於傳遞函數概念的分析工具。主要是，我們開發瞭如何計算時間響應和確定係統性能的技術。我們還介紹了根軌跡和波德圖技術。

4.9 問題

1. 計算以下信號的 Z 變換：

- (a) 單位步長
- (b) 單位坡道
- (c) 單位指數
- (d) $r(t) = t + \sin \omega t$
- (e) 1-重量

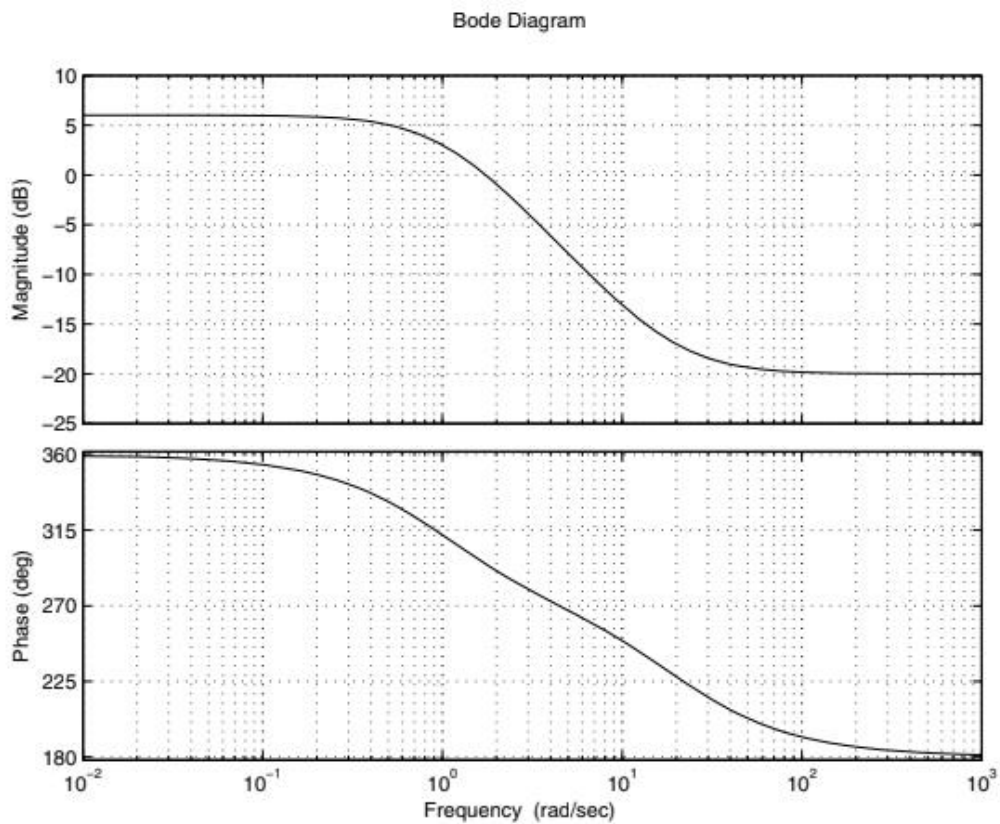


Fig. 4.29 Bode diagram of $\frac{1.9989(1-0.05w)}{1+w}$

2. 按以下時間計算信號的表達式：

- (a) $Y(z) = \frac{Tze^{aT}}{(z-e^{-aT})^2}, a > 0$
- (b) $Y(z) = \frac{z(1-e^{aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}, a > 0$
- (c) $Y(z) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{z}{z-e^{aT}} - \frac{z}{z-e^{bT}} \right], a > 0, b > 0 \text{ and } a \neq b$

3.對於動力系統，輸入為 $u(t)$ ，輸出為 $y(t)$ ，具有
以下動態：

- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = u(t)$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4u(t)$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 8u(t)$
- $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$

- (a) 確定採樣週期 T
- (b) 使用逼近方法確定輸入 $U(z)$ 與輸出 $Y(z)$ 之間的關係
- (c) 確定每種動力學的脈衝傳遞函數
- (d) 使用 **Matlab** 計算每個動力學的階躍響應
- (e) 現在使用零階保持，確定相應的傳遞函數併計算階躍響應。將此響應與上一個問題進行比較

4.在這個問題中，我們考慮圖 4.30 的系統，其中系統的傳遞函數由下式
給出：

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

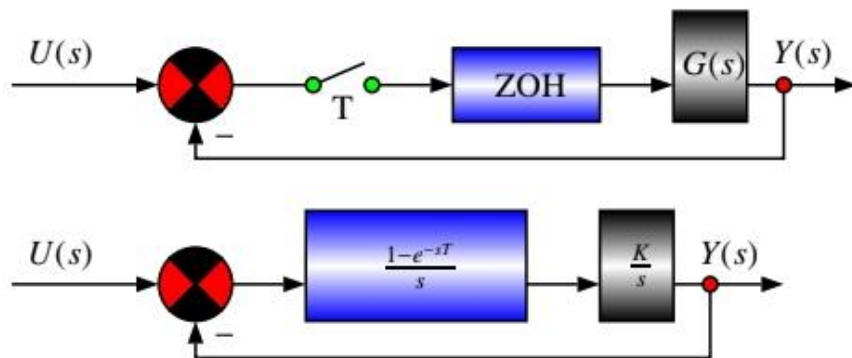


Fig. 4.30 Transfer functions in feedback

圖 4.30 反饋中的傳遞函數

- (a) 確定我們可以用於該系統的採樣週期
- (b) 使用該採樣週期確定開環傳遞函數和閉環傳遞函數
- (c) 確定係統的階躍響應
- (d) 繪製輸出相對於時間的行為

5. 用以下特徵方程式研究動力系統的穩定性：

(a) $z^3 + 0.8z^2 + 0.17z + 0.01$

(b) $z^4 + 1.4z^3 + 0.65z^2 + 0.112z + 0.006$

(c) $z^5 + 2.39z^4 + 2.036z^3 + 0.7555z^2 + 0.1169z + 0.0059$

(d) $z^5 + 11.4z^4 + 14.65z^3 + 6.6120z^2 + 1.126z + 0.06$

6. 在這個問題中，我們考慮動力學系統，如圖 4.31 所示。傳遞函數由下式給出：

$$G(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$C(z) = K$$

跟 $a = 0.1$ 和 $T = 0.01$

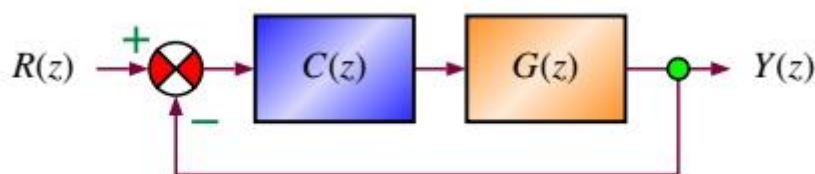


Fig. 4.31 Block diagram of the closed-loop

圖 4.31 閉環框圖

(a) 研究增益 K 的函數穩定性

(b) 繪製系統的根軌跡並得出穩定性結論

7. 考慮圖 4.30 的系統，其中 $G(s)$ 具有以下表達式：

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 K 是增益， $\tau = 1s$ 是系統的時間常數。

- 確定採樣週期
- 計算傳遞函數 $G(z)$
- 當增益 K 在 0 和 ∞ 之間變化時，繪製系統的根軌跡

8. 考慮圖 4.30 的系統，其中 $G(s)$ 具有以下表達式：

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

其中 $K = 10$ 是增益，而 $\tau = 0.1s$ 是系統的時間常數。

- 確定採樣週期
- 計算傳遞函數 $G(z)$

- 繪製系統的伯德圖