МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

по дисциплине

«ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

Вариант № **1**

Выполнили:
Рязанов Никита Сергеевич,
Тенькаев Артём Антонович,
Прокофьев Роман Алексеевич,
Федяев Михаил Дмитриевич

Проверил:
Беспалов Владимир Владимирович

г. Санкт-Петербург, 2026

Содержание

Задание 1

Плоская область D ограничена заданными линиями:

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$x = -\sqrt{y}$$

1. Сделайте схематический рисунок области D.

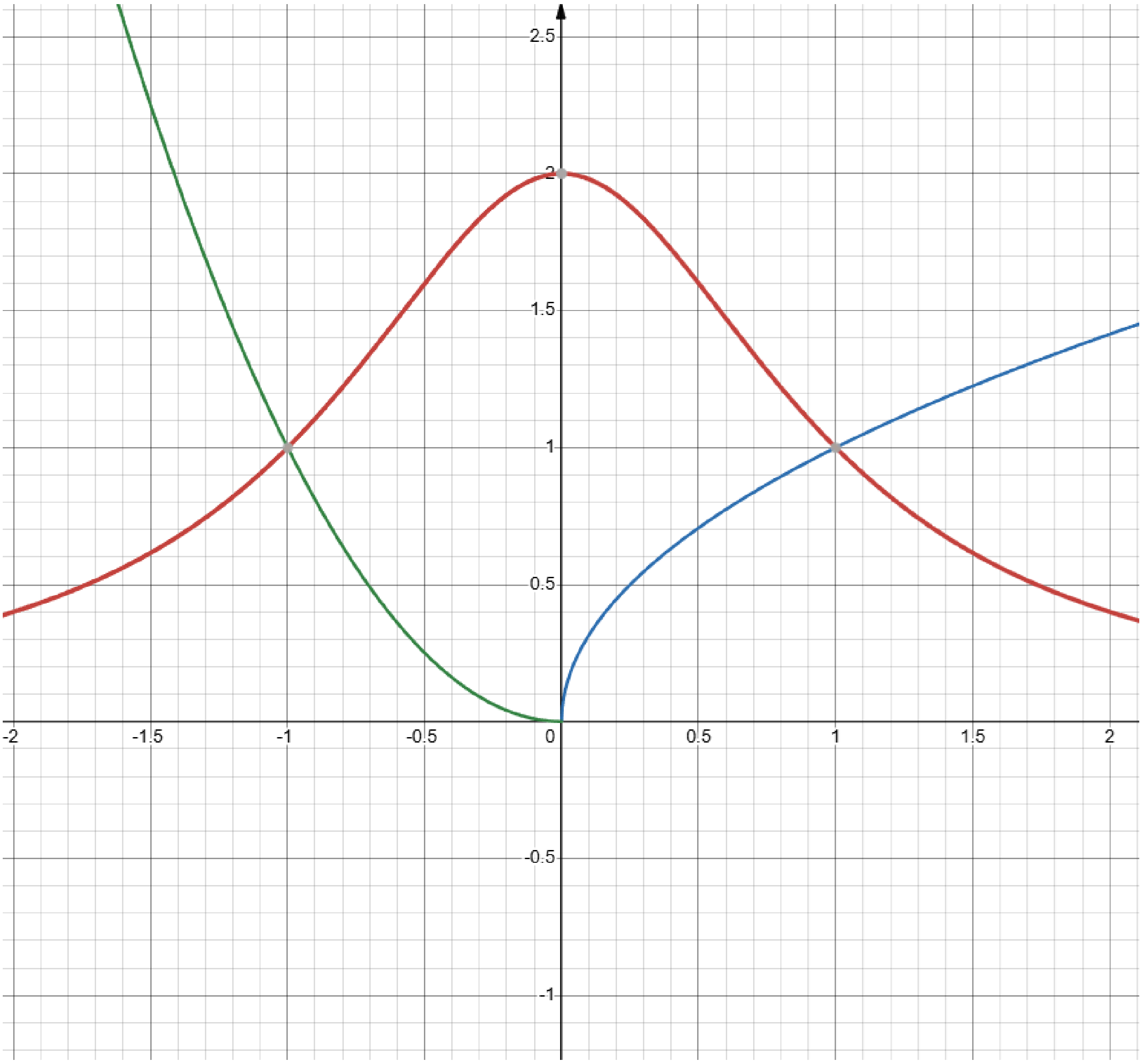

Рис. 1. График области D

Более подробно график можно рассмотреть по ссылке:

https://www.desmos.com/calculator/qdlwfonvdo

2. С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

Площадь находим по следующей формуле:

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Для $x \in [-1, 0]$ снизу $y = x^2$, сверху $y = \frac{2}{x^2+1}$
Для $x \in [0, 1]$ снизу $y = \sqrt{x}$, сверху $y = \frac{2}{x^2+1}$
Тогда получаем, что

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} \mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\frac{2}{x^2+1}} \mathrm{d}y$$

$$S = \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{x^2+1} - x^2\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$S = \left[2\arctan(x) - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[2\arctan(x) - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$S = \left(0 - \left(2\arctan(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) + \left(2\arctan(1) - \frac{2}{3} - 0\right)$$

$$S = -\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \pi - 1$$

Ответ: $S = \pi - 1$.

Задание 2

Тело Т ограничено заданными поверхностями:

$$z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = 0$$

$$x \leq 0$$

1. Сделайте схематический рисунок тела Т.

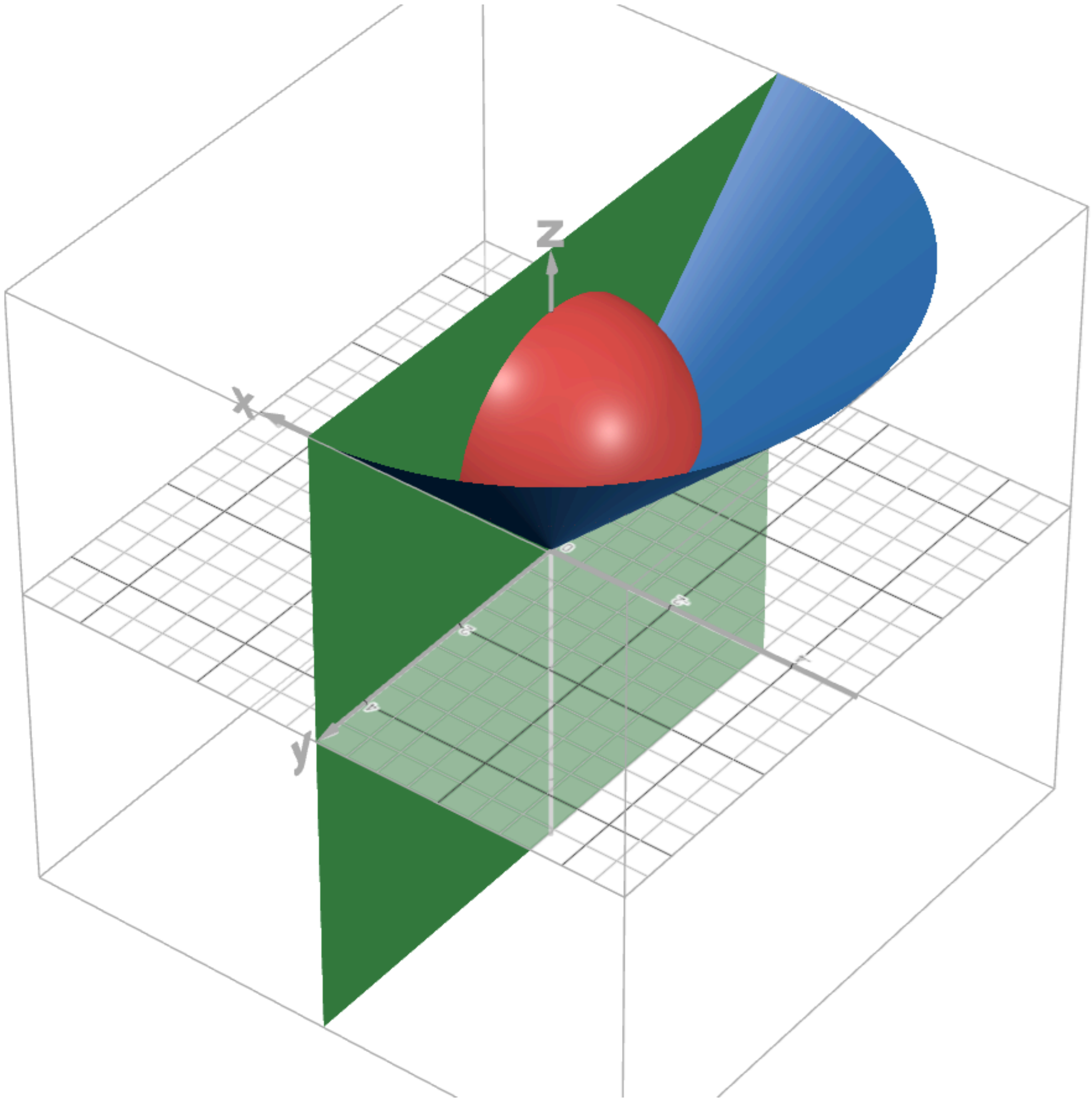

Рис. 2. Рисунок тела T

Более подробно рисунок можно рассмотреть по ссылке:

https://www.desmos.com/3d/js4bwuqbco

2. С помощью тройного интеграла найдите объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z, J = r$$

Тогда тело T ограничено:

$$z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 + \sqrt{4 - r^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x = 0 \to r = 0$$

$$x \leq 0 \to \cos(\varphi) \leq 0 \to \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Граница пересечения сферы и конуса:

$$r = 2 + \sqrt{4 - r^2} \to (r-2)^2 = 4 - r^2 \to r = 2$$

Получаем, что

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} \mathrm{d}z$$

$$V = \pi \cdot \int_0^2 r\left([z]_r^{2+\sqrt{4-r^2}}\right)\mathrm{d}r = \pi \int_0^2 \left(2r + r\sqrt{4-r^2} - r^2\right)\mathrm{d}r$$

$$V = \pi\left[r^2 - \frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\left(4 - 0 - \frac{8}{3}\right) - \left(0 - \frac{8}{3} - 0\right)\right) = \pi\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = 4\pi$$

Ответ: $V = 4\pi$.

Задание 3

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями

а) $y = f(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$

$$y = x\sqrt{x}$$

$$\rho(x, y) = 8$$

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = 5$$

Массу M дуги плоской материальной кривой между точками A и B можно найти с помощью криволинейного интеграла 1-го рода по дуге AB по следующей формуле:

$$M = \int\limits_{AB} \rho(x, y)\,\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Криволинейный интеграл можем преобразовать в определенный по следующей формуле:

$$M = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

В нашем случае

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \to f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x$$

$$M = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{5} 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_{\frac{1}{4}}^{5} \sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x$$

$$M = 4\left[\frac{2}{3\cdot 9}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{5} = \frac{8}{27}\left((4+45)^{\frac{3}{2}} - \left(4+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$M = \frac{8}{27}\left(49^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{27}\left(343 - \frac{125}{8}\right) = 97$$

б) $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ при $t_1 \le t \le t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x, y)$.

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{cases}$$

$$\rho(x, y) = 1$$

$$t_1 = \ln\sqrt{2}, \quad t_2 = \ln\sqrt{8}$$

Масса M дуги плоской материальной кривой:

$$M = \int\limits_{AB} \rho(x, y)\,\mathrm{d}l$$

Если кривая задана параметрически, то

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

В нашем случае

$$x' = e^t(\cos t - \sin t), \quad y' = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$(x')^2 + (y')^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t) = 2e^{2t}$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}e^t\,\mathrm{d}t$$

$$M = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{8}} 1\cdot\sqrt{2}e^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left[e^t\right]_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{8}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = 2$$

Ответ: а) $M = 97$; б) $M = 2$.

Задание 4

С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ при $t_1 \le t \le t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x,y,z)$.

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

$$\rho(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{(z+1)^2}$$

$$t_1 = \frac{1}{8}, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

Массу M дуги пространственной материальной кривой можно найти с помощью криволинейного интеграла 1-го рода по следующей формуле:

$$M = \int\limits_{AB} p(x,y,z)\,\mathrm{d}l$$

Если кривая задана параметрически, то

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

В нашем случае

$$x' = 2, y' = 2, z' = 1 \to \mathrm{d}l = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}t$$

$$\rho(t) = \frac{(2t-1)^2 + (2t+1)^2}{(t-1+1)^2} = \frac{4t^2 - 4t + 1 + 4t^2 + 4t + 1}{t^2} = \frac{8t^2 + 2}{t^2} = 8 + \frac{2}{t^2}$$

$$M = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left(8 + \frac{2}{t^2}\right) \cdot 3\,\mathrm{d}t = 3\left[8t - \frac{2}{t}\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} = 3((4-4) - (1-16)) = 3(0 - (-15)) = 45$$

Ответ: $M = 45$.

Задание 5

Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M – точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

$$\vec{a} = (y - x)\vec{\imath} + (3y - z)\vec{k}$$

$$\sigma : 2x + y + z = 4$$

1. Найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат O$(0;0;0)$.

Поток векторного поля через поверхность S определяется поверхностным интегралом первого рода:

$$Q = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\vec{n} = \vec{\imath}\cos(\alpha) + \vec{\jmath}\cos(\beta) + \vec{k}\cos(\gamma)$$

Рассмотрим уравнение плоскости относительно z:

$$z = 2 - 2x - 2y$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y) = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = q(x, y) = -1$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 4 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Согласно условию задачи, $\cos\gamma > 0$, следовательно

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Найдем скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=(y-x)\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+0+(3y-z)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2y-2x+3y-z}{\sqrt{6}}=\frac{5y-2x-z}{\sqrt{6}}$$

Для вычисления потока преобразуем поверхностный интеграл по части S плоскости σ в двойной интеграл по плоской области D_{xy} - проекции области S на плоскость Oxy.

Подставим $z=4-2x-y$:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=\frac{5y-2x-(4-2x-y)}{\sqrt{6}}=\frac{6y-4}{\sqrt{6}}$$

Тогда

$$Q=\iint\limits_{S}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{6y-4}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{4-2x}(6y-4)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^2\left[3y^2-4y\right]_0^{4-2x}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(12x^2-40x+32\right)\mathrm{d}x=\left[4x^3-20x^2+32x\right]_0^2=16$$

2. С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.

Формула Остроградского-Гаусса для нахождения потока векторного поля через замкнутую поверхность наружу, имеет вид

$$Q=\iiint\limits_{T}\operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}v,\text{где }\ T\text{ - тело, ограниченное замкнутой поверхностью}$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

В нашем случае

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-1+0-1=-2$$

$$Q=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V=-2\cdot V_{OLMK}^{*}=-2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot2\cdot4\cdot4\right)=-\frac{32}{3}$$

$*\,V_{OLMK}$ - объем тетраэдра

3. Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

Циркуляция векторного поля по контуру $\vec{a}$ представляет собой криволинейный интеграл 2-го рода:

$$C = \int\limits_{l} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{l} a_x \,\mathrm{d}x + a_y \,\mathrm{d}y + a_z \,\mathrm{d}z$$

В нашем случае

$$C = \int\limits_{KLMK} (y - x)\,\mathrm{d}x + (3y - z)\,\mathrm{d}z$$

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов I_{KL}, I_{LM} и I_{MK}, взятых по отрезкам KL, LM и MK соответственно, т.е.

$$C = \int\limits_{KL} \vec{a} d\vec{r} + \int\limits_{LM} \vec{a} d\vec{r} + \int\limits_{MK} \vec{a} d\vec{r}$$

- На KL:

$$z = 0, dz = 0, y = 4 - 2x, dy = -2dx$$

$$x : 2 \to 0$$

$$I_{KL} = \int_2^0 (4 - 3x) dx = -2$$

- На LM:

$$x = 0, dx = 0, z = 4 - y, dz = -dy$$

$$y : 4 \to 0$$

$$I_{LM} = \int_4^0 (4y - 4)(-dy) = 16$$

- На MK:

$$y = 0, dy = 0, x = 2 - \frac{z}{2}, dx = -d\frac{z}{2}$$

$$z : 4 \to 0$$

$$I_{MK} = \int_4^0 \Big(1 - 5\frac{z}{4}\Big) dz = 6$$

Получаем, что

$$C = -2 + 16 + 6 = 20$$

Ответ: 1) $Q = 16$; 2) $Q = -\frac{32}{3}$; 3) $C = 20$.

Задание 6

Дано векторное поле $\vec{a}(M)$.

$$\vec{a} = (yz + y - 1)\vec{\imath} + (xz + x)\vec{\jmath} + (xy + 2)\vec{k}$$

1. Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.

Условием соленоидальности векторного поля является равенство его дивергенции нулю во всей области его определения. Для проверки его соленоидальности найдем дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(yz + y - 1) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + x) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + 2) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Поле является соленоидальным.

Условием потенциальности векторного поля является равенство его ротора нулевому вектору во всей области определения поля. Для проверки его потенциальности найдем ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial} x & \frac{\partial}{\partial} y & \frac{\partial}{\partial} z \\ yz + y - 1 & xz + x & xy + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + 2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz + x)\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy + 2) - \frac{\partial}{\partial z}(yz + y - 1)\right) +$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz + x) - \frac{\partial}{\partial y}(yz + y - 1)\right) =$$

$$= \vec{\imath}(x - x) - \vec{\jmath}(y - y) + \vec{k}((z + 1) - (z + 1)) = 0$$

Поле является потенциальным.

2. Если поле потенциально, найдите его потенциал.

Используем криволинейный интеграл по ломаной $O(0,0,0) \to A(x,0,0) \to B(x,y,0) \to M(x,y,z)$:

$$U(x,y,z) = \int_0^x a_x(\tilde{x},0,0)\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_0^y a_y(x,\tilde{y},0)\,\mathrm{d}\tilde{y} + \int_0^z a_z(x,y,\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} + C$$

1. На отрезке OA $(y=0, z=0)$:

$$I_1 = \int_0^x (y \cdot z + y - 1)\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_0^x (0 \cdot 0 + 0 - 1)\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_0^x -1\,\mathrm{d}\tilde{x} = -x.$$

2. На отрезке AB $(x=x, z=0)$:

$$I_2 = \int_0^y (x \cdot z + x)\,\mathrm{d}\tilde{y} = \int_0^y (x \cdot 0 + x)\,\mathrm{d}\tilde{y} = \int_0^y x\,\mathrm{d}\tilde{y} = xy.$$

3. На отрезке BM $(x=x, y=y)$:

$$I_3 = \int_0^z (xy+2)\,\mathrm{d}\tilde{z} = \int_0^z (xy+2)\,\mathrm{d}\tilde{z} = (xy+2)z = xyz + 2z.$$

Ответ: 1) Поле соленоидально и потенциально;

2) $U(x,y,z) = xyz + xy - x + 2z + C$.