МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2

по дисциплине

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Вариант № **17**

Выполнил:
Рязанов Никита Сергеевич,
студент группы P3207,
поток 23.1

Проверил:
Краснов Александр Юрьевич

г. Санкт-Петербург, 2025

Содержание

Задание 1

Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = te^{3t} + 2\sin(4t) - \cos(2t)$$

Используя свойство линейности:

$$F(s) = \mathcal{L}\{te^{3t}\} + 2\mathcal{L}\{\sin(4t)\} - \mathcal{L}\{\cos(2t)\}$$

(1): $\mathcal{L}\{te^{3t}\}$

По свойству дифференцирования оригинала для $f(t) = t$:

$$\mathcal{L}\big(\dot{f}(t)\big) = \mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} - f(0) = s\mathcal{L}\{t\} - 0 = s\mathcal{L}\{t\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t\} = \frac{\mathcal{L}(1)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)|_0^\infty = -\frac{1}{s^2} \cdot (0-1) = \frac{1}{s^2}$$

Тогда по теореме о смещении:

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = F(s-3) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

(2): $\mathcal{L}\{\sin(4t)\}$

По свойству дифференцирования оригинала для $f(t) = \sin(at)$:

$$\dot{y} = a\cos(at), \quad \ddot{y} = -a^2\sin(at)$$

$$\mathcal{L}\{a\cos(at)\} = s\mathcal{L}\{\sin(at)\} - \sin(0) = s\mathcal{L}\{\sin(at)\}$$

$$\mathcal{L}\{-a^2\sin(at)\} = s\mathcal{L}\{a\cos(at)\} - a\cos(0) = s\mathcal{L}\{a\cos(at)\} - a$$

Подставим $\mathcal{L}\{a\cos(at)\}$, тогда:

$$-a^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} = s^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} - a \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{sa}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Получаем, что $\mathcal{L}\{\sin(4t)\} = \frac{4}{s^2+16}$

(3): $\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$

Из (2) получаем, что $\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$

Объединяем полученные результаты:

$$F(s) = \mathcal{L}\{te^{3t}\} + 2\mathcal{L}\{\sin(4t)\} - \mathcal{L}\{\cos(2t)\} =$$

$$= \frac{1}{(s-3)^2} + 2 \cdot \frac{4}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+4} =$$

$$= \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{8}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+4}$$

Задание 2

Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^2-4s+13}$$

Преобразуем $F(s)$:

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^2-4s+13} = \frac{3(s-2)+4}{(s-2)^2+9} =$$

$$= \frac{3(s-2)+4}{(s-2)^2+3^2} = 3 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{(s-2)^2+3^2}$$

Заметим из прошлого задания, что

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Тогда по теореме о смещении:

$$f(t) = e^{2t} \cdot 3 \cdot \cos(3t) + e^{2t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \sin(3t) = e^{2t}\left(3\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right)$$

Задание 3

Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

По свойству дифференцирования оригинала для $y(t)$:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - \dot{y}(0) = s^2\mathcal{L}\{y\} - 1$$

По теореме о смещении для $f(t) = 1$:

$$\mathcal{L}\big\{e^{-3t}f(t)\big\} = F(s+3) = \frac{1}{s+3}$$

Получаем, что

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 + 6 \cdot s\mathcal{L}\{y\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{y\}\big(s^2 + 6s + 9\big) = 1 + \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s+3)^2 = \frac{s+4}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+4}{(s+3)^3} = \frac{s+3+1}{(s+3)^3} = \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+3)^3}$$

Из первого задания знаем, что $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

Тогда по теореме о смещении:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} = e^{-3t} \cdot t$$

Если по аналогии из первого задания рассмотреть $\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$, то

$$\mathcal{L}\big(\dot{f}(t)\big) = \mathcal{L}\{t\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} - f(0) = s\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} - 0 = s\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{\mathcal{L}(t)}{s} = \frac{1}{s^3}$$

Тогда по теореме о смещении:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} = e^{-3t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Получаем, что

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y\}\} = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\}$$

$$y(t) = e^{-3t} \cdot t + e^{-3t} \cdot \frac{t^2}{2} = e^{-3t} \cdot \left(t + \frac{t^2}{2}\right)$$