Задание 6 (вариант 1)

Заменяя приращение функции дифференциалом приближенно вычислить:

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98,\sqrt[4]{1.05^2}}}$$

1) Обозначим переменные:

- x = 1.03
- y = 0.98
- z = 1.05

Тогда исходная функция:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^2}}}$$

Упростим степени:

$$\sqrt[4]{z^2} = z^{2/4} = z^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{y \cdot z^{1/2}} = (y \cdot z^{1/2})^{1/3} = y^{1/3} z^{1/6}$$

Значит

$$f(x, y, z) = x^2 y^{-1/3} z^{-1/6}$$

$$x = 1 + 0.03, \quad y = 1 - 0.02, \quad z = 1 + 0.05$$

Значит,

$$dx = 0.03, \quad dy = -0.02, \quad dz = 0.05$$

2)Решение через дифференциал

$$\ln f = 2 \ln x - \frac{1}{3} \ln y - \frac{1}{6} \ln z$$

Дифференцируем:

$$\frac{df}{f} = 2\frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{dz}{z}$$

Берем точку разложения $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. Тогда $f_0 = f(1,1,1) = 1$ и

$$df \approx f_0 \left(2\frac{dx}{1} - \frac{1}{3}\frac{dy}{1} - \frac{1}{6}\frac{dz}{1}\right)$$

Подставляем $(dx = 0.03,\ dy = -0.02,\ dz = 0.05)$:

$$df \approx 1 \cdot \left(2 \cdot 0.03 - \frac{1}{3}(-0.02) - \frac{1}{6}(0.05)\right)$$

Считаем по частям:

- $(2 \cdot 0.03 = 0.06)$
- $(-\frac{1}{3}(-0.02) = 0.006666\ldots)$
- $(-\frac{1}{6}(0.05) = -0.008333\ldots)$

  Итого:

  $$df \approx 0.06 + 0.006666\ldots - 0.008333\ldots = 0.058333\ldots$$

  Значит приближенно:

  $$f \approx f_0 + df = 1 + 0.058333\ldots = 1.05833$$

Приближенный ответ по дифференциалу:

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98,\sqrt[4]{1.05^2}}} \approx 1.05833$$

3) Графическая иллюстрация

Так как переменных три, удобно сделать **параметр t**

$$x(t) = 1 + 0.03t, \quad y(t) = 1 - 0.02t, \quad z(t) = 1 + 0.05t$$

Тогда реальная функция:

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

А дифференциал вокруг $t = 0$:

$$L(t) = 1 + 0.058333\ldots t$$

График:
https://www.desmos.com/calculator/7dydtnuekb
На графике видно, что **кривая F(t)** и **прямая L(t)** близки, а в точке t=1 мы получаем нужное приближение

4) Ответ

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98,\sqrt[4]{1.05^2}}} \approx 1.05833$$