

### 3 Задание

да

$$1. \text{ а) } y = x\sqrt{x}, p(x, y) = 8, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 5$$

Решение:

Масса  $M$  гирь массой  $m$  килограмм наименьшему  
кручине между точками  $A$  и  $B$  будем сдес  
кручине наименьшей непрерывной параболы  $y = f(x)$  на отрезке  $AB$ :

$$M = \int_{AB} p(x, y) dl, \quad \text{где } dl - \text{длинна гипотенузы гири.}$$

Если определить задача уравнением  $y = f(x)$ , то

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

а кручине наименьшая преобразуется в  
непрерывную наименьшую по оценке:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} p(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

В нашем случае  $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Получаем:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x} dx$$

Наше значение:  $p(x, y) = 8$

$$M = \int_{\frac{1}{4}}^5 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4+9x} dx = 4 \int_{\frac{1}{4}}^5 \sqrt{4+9x} dx$$

$$\text{Задача: } u = 4 + 9x, \text{ тогда } du = 9dx, dx = \frac{du}{9}$$

$$M = 4 \cdot \frac{1}{9} \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{5}{2}} \Big|_1^{25}$$

$$u(5) = 49 \quad u\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{25}{9}$$

$$M = \frac{8}{27} \left( 49^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{8}{27} \left( 393 - \frac{125}{8} \right) = 92$$

1. 5)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, p(x, y) = 1, t_1 = \ln \sqrt{2}, t_2 = \ln \sqrt{8}$

Решение:

Масса  $M$  гирь между материальными точками:

$$M = \int_{AB} p(x, y) dl$$

Если кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

$$M = \int_{t_1}^{t_2} p(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

В нашем случае:  $\varphi(t) = e^t \cos t, \psi(t) = e^t \sin t$

$$\varphi'(t) = e^t (\cos t - \sin t), \quad \psi'(t) = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = e^{2t} \cdot 2$$

$$dl = \sqrt{2} e^t dt.$$

Используем  $p(x, y) = 1$ . Следовательно:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} (e^{t_2} - e^{t_1})$$

$$e^{t_1} = e^{\ln \sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad e^{t_2} = e^{\ln \sqrt{8}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$M = \sqrt{2} (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 2$$

Ответ: 07, 2

## 4 Задание

Дана пространственная кривая:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 2t + 1, \\ z = t - 1, \end{cases} P(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{(z+1)^2}, t_1 = \frac{1}{8}, t_2 = \frac{1}{2}$$

Решение

Масса  $M$  дуи пространственной материальной кривой выражается криволинейной интеграцией по дуге:

$$M = \int_{AB} P(x, y, z) dl$$

Если кривая задана параметрически  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ , то:

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

$$M = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

В нашем случае:

$$x = 2, y = 2, z = 1 \Rightarrow dl = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} dt = \sqrt{9} dt = 3dt.$$

Найдем зависимость ~~на~~ на кривой:

$$z + 1 = (t - 1) + 1 = t.$$

$$x^2 + y^2 = (2t - 1)^2 + (2t + 1)^2 = (4t^2 - 4t + 1) + (4t^2 + 4t + 1) = 8t^2 + 2$$

Поэтому:

$$P(t) = \frac{8t^2 + 2}{t^2} = 8 + \frac{2}{t^2}$$

Gegeben:

$$M = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left( 8 + \frac{2}{t^2} \right) \cdot 3dt = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left( 24 + \frac{6}{t^2} \right) dt = \left[ 24t - \frac{6}{t} \right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( 24 \cdot \frac{1}{2} - \frac{6}{\frac{1}{2}} \right) - \left( 24 \cdot \frac{1}{8} - \frac{6}{\frac{1}{8}} \right) = (12 - 12) - (3 - 48) = 45$$

Antwort: 45