Вариант 1. Глава I.

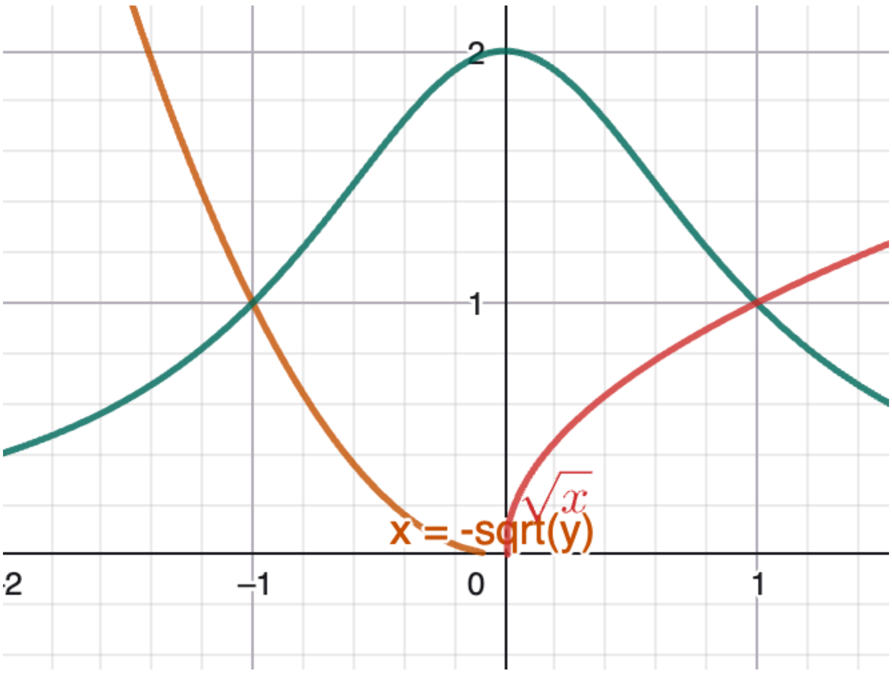
Дано:

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$x = -\sqrt{y}$$

1) Сделайте схематический рисунок области D.
2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.
Рисунок:



Площадь:

$$S = \iint_D 1 dA \,.$$

Удобнее резать вертикальными полосками по x, потому что верхняя граница одна и та же, а нижняя меняется при x=0.

Для $x \in [-1,0]$ снизу $y = x^2$, сверху $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

Для $x \in [0,1]$ снизу $y = \sqrt{x}$, сверху $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

Значит:

$$S = \int_{-1}^{0}\int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} 1 dy dx + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{\frac{2}{x^2+1}} 1 dy dx .$$

Считаем внутренние интегралы по y:

$$S = \int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{x^2+1} - x^2\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1} - \sqrt{x}\right)dx$$

1. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}dx = 2\arctan x$
2. $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$

Первая часть:

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{x^2+1} - x^2\right)dx \left[2\arctan x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$

Подставляем:

- при 0: $2\arctan 0 - 0 = 0$
- при -1:$2\arctan(-1) - \dfrac{(-1)^3}{3} = 2\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

Значит:

$$I_1 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Вторая часть:

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1} - \sqrt{x}\right)dx \left[2\arctan x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{1}$$

Подставляем:

- при 1: $2\arctan 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$
- при 0: 0

$$I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$$

Итоговая площадь:

$$S = I_1 + I_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \pi - 1$$

Ответ

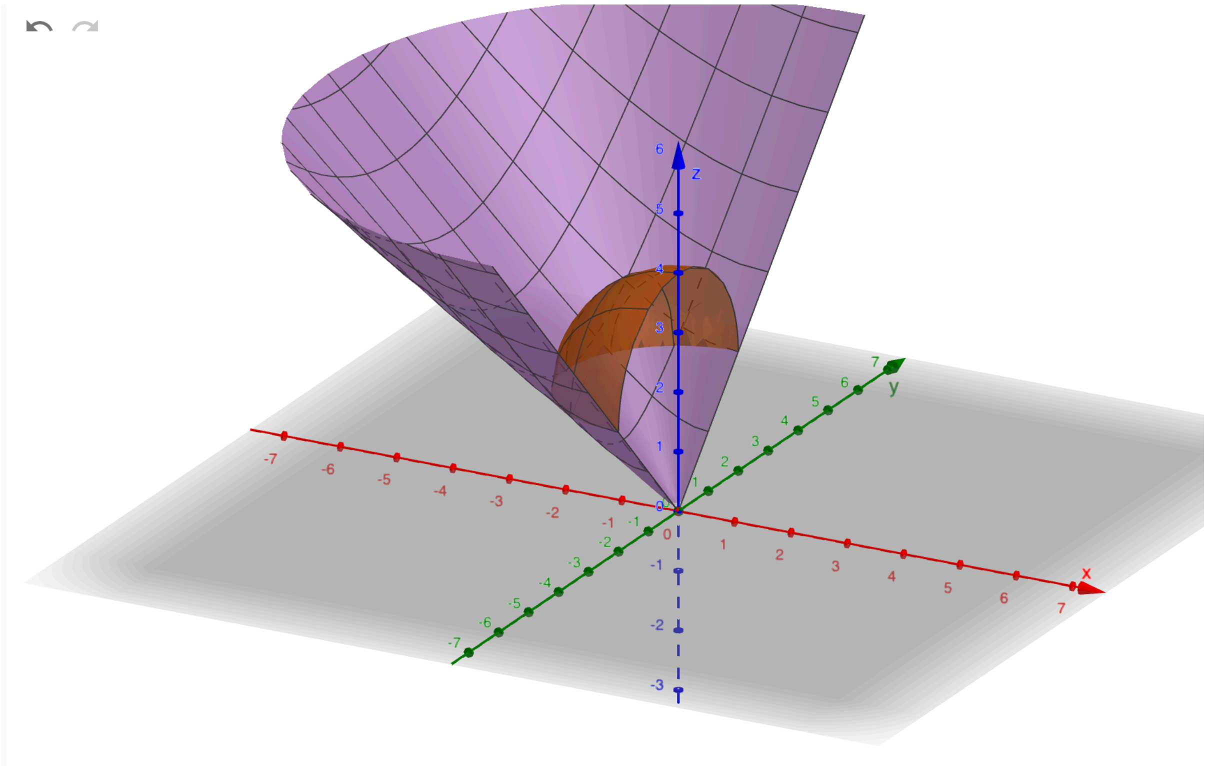
$S = \pi - 1.$

Вариант 1. Глава II.

Дано:

$$z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Рисунок

Вычисление объема

Переходим к цилиндрическим координатам:
$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad dV = r, dz, dr, d\theta.$

Границы

- По углу из-за $x \le 0$:
  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- По радиусу: полусфера существует при $0 \le r \le 2$, и именно на r=2 она стыкуется с конусом:
  $r \in [0,2]$.

- По z: снизу конус z=r, сверху полусфера $z = 2 + \sqrt{4 - r^2}$:
  $z \in \left[r, 2 + \sqrt{4 - r^2}\right]$.

Тройной интеграл

$$V = \iiint\limits_T 1 dV = \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{r=0}^{2} \int_{z=r}^{2+\sqrt{4-r^2}} 1 \cdot r dz dr d\theta.$$

Интегрируем по z:
$$V = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 r\left(2 + \sqrt{4 - r^2} - r\right) dr d\theta.$$

Интеграл по θ даёт множитель длины промежутка:
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta = \pi.$$

Значит:
$$V = \pi \int_0^2 \left(2r - r^2 + r\sqrt{4 - r^2}\right) dr.$$

Считаем по частям:

1. $\int_0^2 2r, dr = \left[r^2\right]_0^2 = 4$

2. $\int_0^2 r^2, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

3. $\int_0^2 r\sqrt{4 - r^2} dr$

Подстановка $u = 4 - r^2 \Rightarrow du = -2r, dr \Rightarrow r, dr = -\frac{1}{2} du$
Тогда при $r = 0 \Rightarrow u = 4$, при $r = 2 \Rightarrow u = 0$:
$$\int_0^2 r\sqrt{4 - r^2} dr = -\frac{1}{2} \int_4^0 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_0^4 u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^{3/2} = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}.$$

Теперь складываем:
$$\int_0^2 \left(2r - r^2 + r\sqrt{4 - r^2}\right) dr = 4 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

И значит объём:
$V = \pi \cdot 4 = 4\pi$.

Ответ

$V = 4\pi$.