

3 Задача

~~Задача~~

1. а) $y = x\sqrt{x}$, $\rho(x, y) = 8$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 5$

Решение:

Масса M гирь плоской материальной кривой между точками A и B вычисляется криволинейным интегралом первого рода по дуге AB :

$$M = \int_{AB} \rho(x, y) dl, \quad \text{где } dl - \text{дифференциал дуги.}$$

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

В нашем случае $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Получаем:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x} dx$$

Подставляем в формулу: $\rho(x, y) = 8$

$$M = \int_{\frac{1}{4}}^5 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9x} dx = 4 \int_{\frac{1}{4}}^5 \sqrt{4 + 9x} dx$$

Замена: $u = 4 + 9x$, тогда $du = 9dx$, $dx = \frac{du}{9}$

$$M = 4 \cdot \frac{1}{9} \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{4}{9}}^5$$

$$u(5) = 49$$

$$u\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{25}{9}$$

$$M = \frac{8}{27} \left(49^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8}{27} \left(343 - \frac{125}{8} \right) = 97$$

i. d) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $p(x, y) = 1$, $t_1 = \ln \sqrt{2}$, $t_2 = \ln \sqrt{8}$

Решение:

Масса M гравитационно неупругой кривой:

$$M = \int_{AB} p(x, y) dl$$

Если кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$M = \int_{t_1}^{t_2} p(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

В нашем случае: $\varphi(t) = e^t \cos t$, $\psi(t) = e^t \sin t$

$$\varphi'(t) = e^t (\cos t - \sin t), \quad \psi'(t) = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = e^{2t} \cdot 2$$

$$dl = \sqrt{2} e^t dt$$

Поскольку $p(x, y) = 1$. Легко заметить:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} (e^{t_2} - e^{t_1})$$

$$e^{t_1} = e^{\ln \sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad e^{t_2} = e^{\ln \sqrt{8}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$M = \sqrt{2} (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 2$$

Ответ: 97, 2

4 Задача

Дана пространственная кривая:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 2t + 1, \\ z = t - 1, \end{cases} \quad p(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{(z+1)^2}, \quad t_1 = \frac{1}{8}, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

Решение

Масса M дуги пространственной материальной кривой выражается криволинейным интегралом первого рода:

$$M = \int_{AB} p(x, y, z) \, dl$$

Если кривая задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, то:

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} \, dt.$$

$$M = \int_{t_1}^{t_2} p(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} \, dt.$$

В нашем случае:

$$x' = 2, \quad y' = 2, \quad z' = 1 \Rightarrow dl = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \, dt = \sqrt{9} \, dt = 3 \, dt.$$

Найдем массу ~~на~~ кривой:

$$z+1 = (t-1)+1 = t.$$

$$x^2 + y^2 = (2t-1)^2 + (2t+1)^2 = (4t^2 - 4t + 1) + (4t^2 + 4t + 1) = 8t^2 + 2$$

Получаем:

$$p(t) = \frac{8t^2 + 2}{t^2} = 8 + \frac{2}{t^2}$$

Итого: 45

$$M = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left(8 + \frac{2}{t^2}\right) \cdot 3 dt = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left(24 + \frac{6}{t^2}\right) dt = \left[24t - \frac{6}{t}\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(24 \cdot \frac{1}{2} - \frac{6}{\frac{1}{2}}\right) - \left(24 \cdot \frac{1}{8} - \frac{6}{\frac{1}{8}}\right) = (12 - 12) - (3 - 48) = 45$$

Ответ: 45.