Решения задач

М444, М445; Ф458-Ф461

Этот ответ у нас получился так:

	5-угольников	4-угольников	3-угольников
4 круга разбивают сферу на	0	6	8
5-й круг оставляет нетронутыми	0	2	4
разбивает 3-угольники на	0	2	4
разбивает 4-угольники на	2	$4 = 2 + 2$	2
Итого…	2	10	10

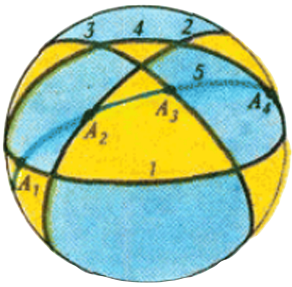

Рис. 5: Сфера

А теперь покажем. как этот же ответ получить намного проще.

В т о р о е р е ш е н и е. Спроектируем сферу из центра P на плоскость α, параллельную **экватору** O. Тогда пара симметричных n-угольников на сфере, не примыкающих к O, отобразится на n-угольник в плоскости α, а пара n-угольников, примыкающих к O — на $(n-2)$ угол; пользуясь результатом задачи а) — единственностью разбиения плоскости четырьмя прямыми и первой табличкой, — мы заключаем, что любые пять больших кругов разбивают сферу на два пятиугольника (их проекция — 3-угол), $2(1+4) = 10$ четырехугольников (из них восемь примыкает к данному большому кругу О, и эти четыре пары проектируются на 2-углы), и $2(2+3) = 10$ треугольников (из них шесть примыкают к большому кругу O). Те, кто знаком с понятием проективной плоскости (см. например. «Квант». 1974. № 3), заметят, конечно, что «проекция», о которой мы говорим, более естественно объясняется как отображение сферы на *проективную плоскость* (при этом отображении две диаметрально противоположные точки сферы склеиваются в одну, образы всех больших кругов — прямые, в том числе образ круга O—*бесконечно удаленная прямая*).

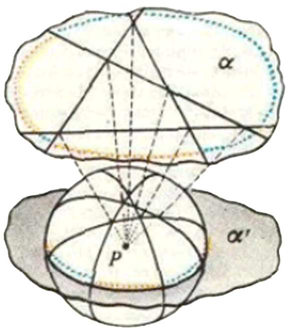

Рис. 6: Сфера с плоскостью α

Рисунок 6, иллюстрирующий второе решение, нужно пояснить. Поскольку «бесконечно удаленную прямую» нарисовать трудно, мы на рисунке 6 очень близко к большому кругу—экватору O — провели пунктиром параллель; ее образом при проекции будет окружность очень большого радиуса в плоскости α, содержащая внутри себя все точки пересечения четырех прямых; эти прямые разбивают возникающий на плоскости «очень большой круг» на 11 областей: «пятиугольник», пять «треугольников» и пять «четырехугольников»; возвращаясь с плоскости на сферу, получаем после удвоения ответ.

В заключение заметим, что во всех трех задачах не только вид частей разбиения (число сторон), но и их взаимное расположение определяются однозначно.

Предлагаем читателям «Кванта» в качестве задачи для исследования выяснить, какие бывают разбиения сферы шестью большими кругами или плоскости — пятью прямыми (здесь уже нет единственности). Самое трудное здесь, по-видимому, доказать то, что найдены все возможные варианты разбиения.

Н . Васильев

◇

М445. *Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных*

Заметим. что центры правильных шестиугольников находятся в вершинах ромбов (сторона ромба — удвоенная апофема шестиугольника, угол при вершине равен 60°). Таким образом, мы имеем *ромбическую решетку* на плоскости; вершины ромбов — узлы решетки (см. рис. 7). Далее, если многоугольник *шестиугольников, покрывающих плоскость так, как указано на рисунке 7. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или части (дуги), которые лежат внутри M. Покажите, что сумма градусных величин красных дуг равна $C \cdot 180°$, где $C = C(M)$ — целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.*

M с вершинами в узлах представлен в виде объединения многоугольников $A_1, \ldots, A_k$ (с вершинами в узлах): $M = \bigcup\limits_{i=l}^{k} A_i$, то

$$C(M) = C(A_1) + \ldots + C(A_k);$$

про такую функцию говорят, что она *аддитивна.* Отсюда следует, что если многоугольник M с вершинами в узлах представлен в виде объединения многоугольников $A_1, \ldots, A_k$, из которого удалено объединение многоугольников $B_1, \ldots, B_l$ (A_i и B_j — с вершинами в узлах) — см. рисунок 8; т. е. если

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_j, \text{ причем } \bigcup B_j \subset \bigcup A_i \qquad (*)$$

(здесь $\times$ — значок *разности множеств* или *дополнения*), то

$$C(M) = \sum_{i=1}^{k} C(A_i) - \sum_{j=1}^{l} C(B_j).$$