МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

по дисциплине

«ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

Вариант № **1**

Выполнили:
Рязанов Никита Сергеевич,
Тенькаев Артём Антонович,
Прокофьев Роман Алексеевич,
Федяев Михаил Дмитриевич

Проверил:
Беспалов Владимир Владимирович

г. Санкт-Петербург, 2025

Содержание

Задание 6. Дифференциал ФНП

Заменяя приращение функции дифференциалом приближенно вычислить:

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^2}}}$$

Обозначим переменные следующим образом:

- $x = 1.03$
- $y = 0.98$
- $z = 1.05$

Тогда исходная функция имеет вид:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{z^2}}} = \frac{x^2}{y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{6}}} = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{6}}$$

Можем представить переменные как

$$x = 1 + 0.03$$

$$y = 0 \text{ - } 0.02$$

$$z = 1 + 0.05$$

Значит,

$$dx = 0.03$$

$$dy = -0.02$$

$$dz = 0.05$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y^{-\frac{1}{3}} \cdot z^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot -\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} \cdot z^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 \cdot y^{-\frac{1}{3}} \cdot -\frac{1}{6} z^{-\frac{7}{6}}$$

Возьмем за точку разложения $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, тогда

$$f(M_0) = f(1,1,1) = 1^2 \cdot 1^{-\frac{1}{3}} \cdot 1^{-\frac{1}{6}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2 \cdot 1 \cdot 1^{-\frac{1}{3}} \cdot 1^{-\frac{1}{6}} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 1^2 \cdot -\frac{1}{3} \cdot 1^{-\frac{4}{3}} \cdot 1^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 1^2 \cdot 1^{-\frac{1}{3}} \cdot -\frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{7}{6}} = -\frac{1}{6}$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 2 \cdot 0.03 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-0.02) + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 0.05 =$$

$$= 0.06 + \frac{0.02}{3} - \frac{0.05}{6} \approx 0.0583$$

Получаем, что

$$(f + \Delta f)(1.03, 0.98, 1.05) \approx 1 + 0.0583 = 1.0583$$

Сравнивая с точным значением, вычисленным на калькуляторе, видим, что погрешность вычислений очень мала:

$$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^2}}} \approx 1.0594$$

$$\frac{|1.0594 \text{ - } 1.0583|}{1.0594} \approx 0.1\%$$

Наглядную разницу можно посмотреть на графике по ссылке:

https://www.desmos.com/calculator/6hmudi1oig

Задание 7. Производные ФНП

Проверить, удовлетворяет ли функция заданному уравнению:

$$z = f(x, y) = y\ln(x^2 - y^2)$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial(z)}{\partial(x)} + \frac{1}{y}\frac{\partial(z)}{\partial(y)} = \frac{z}{y^2}$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_x = y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y)'_y \cdot ln(x^2 - y^2) + y \cdot \left(ln(x^2 - y^2)\right)'_y =$$

$$= 1 \cdot \ln(x^2 - y^2) + y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

Подставим найденные производные в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial(z)}{\partial(x)} + \frac{1}{y}\frac{\partial(z)}{\partial(y)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right) =$$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y}$$

Преобразуем правую часть уравнения, подставит саму функцию z:

$$\frac{z}{y^2} = \frac{y\ln(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y}$$

Подставляем наши части и видим, что они совпадают:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial(z)}{\partial(x)} + \frac{1}{y}\frac{\partial(z)}{\partial(y)} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

Тем самым, функция удовлетворяет заданному уравнению.

Графики функции и уравнения можно посмотреть по ссылке:

https://www.desmos.com/3d/b8fmdadxwm

Задание 8. Непрерывность ФНП

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции:

$$z = f(x, y) = \frac{y}{x}$$

Область определения $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

Так как x и y сами по себе непрерывны, то по свойствам непрерывности $f(x, y)$ непрерывна на всей области определения.

Функция не определена во всех точках, где $x = 0$, то есть точки разрыва представляют собой множество $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- Рассмотрим $y = y_0 \neq 0$, тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{y_0}{x} = \pm\infty \Rightarrow \text{Предел равен бесконечности, разрыв 2-го рода}$$

- При $y = 0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому рассмотрим $y = kx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k \Rightarrow \text{Предел зависит от } k \Rightarrow \text{предел не существует, разрыв 2-го рода}$$

Получаем, что функция непрерывна при $x \neq 0$, а точки разрыва располагаются по всей оси OY и являются точками разрыва 2-го рода.

График функции можно посмотреть по ссылке:

https://www.desmos.com/3d/6utpydjyrc