
Группа 1.4

К работе допущен _____

Студенты Рязанов Н. С., Ткачев Д. В.

Работа выполнена _____

Преподаватель Хвастунов Н. Н.

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.04

Исследование равноускоренного вращательного движения
(маятник Обербека)

1. Цель работы:

- 1) Проверка основного закона динамики вращения.
- 2) Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы:

- 1) Измерение времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине.
- 2) Расчёт ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити.
- 3) Расчёт момента инерции крестовины с утяжелителями и момента силы трения.
- 4) Исследование зависимости момента силы натяжения нити от углового ускорения. Проверка основного закона динамики вращения.
- 5) Исследование зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Проверка теоремы Штейнера.

3. Рабочие формулы и исходные данные:

- $I\varepsilon = M - M_{\text{тр}}$ – основной закон динамики вращения для крестовины
- $ma = mg - T$ – второй закон Ньютона
- $h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}$ – зависимость пройденного пути от времени при постоянном ускорении
- $\varepsilon = \frac{2a}{d}$ – связь между угловым ускорением крестовины и линейным ускорением груза
- $M = \frac{md}{2}(g - a)$ – момент силы натяжения нити
- $I = I_0 + 4m_{\text{ут}}R^2$ – момент инерции крестовины в соответствии с теоремой Штейнера

4. Измерительные приборы:

Таблица 0. Измерительные приборы

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	Цифровой	0–10 с	0,005 с
2	Линейка	-	0–700 мм	0,5 мм

5. Схема установки:

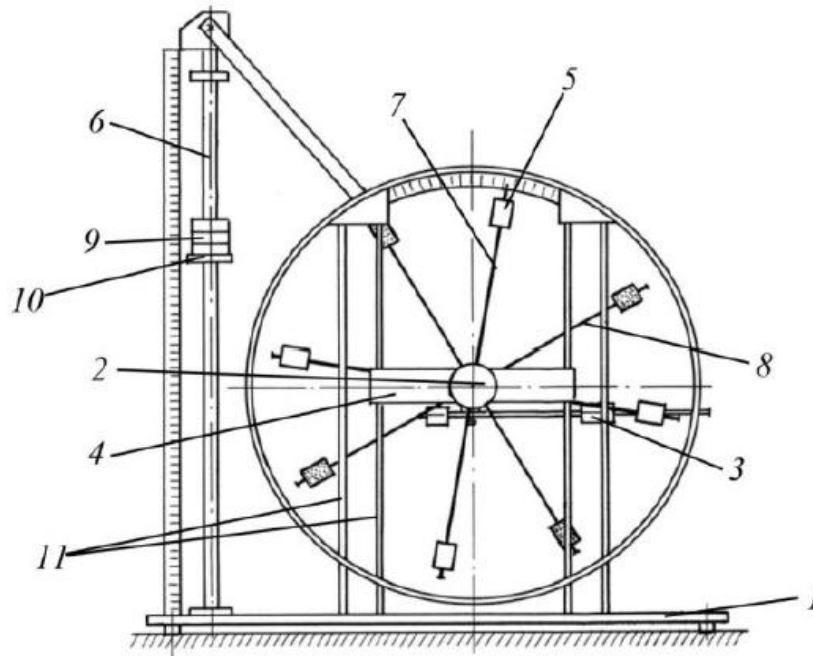


Рисунок 1. Схема установки

- 1) Основание
- 2) Рукоятка сцепления крестовин
- 3) Устройства принудительного трения
- 4) Поперечина
- 5) Груз крестовины
- 6) Трубчатая направляющая
- 7) Передняя крестовина
- 8) Задняя крестовина
- 9) Шайбы каретки
- 10) Каретка
- 11) Система передних стоек

6. Результаты прямых измерений и их обработки:

Таблица 1. Протокол измерений времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине

Масса груза, г		Положение утяжелителей					
		1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1 = 267$	$t_{\text{падения}}, \text{с}$	4,54	5,05	6,20	6,95	8,44	9,55
		4,38	5,23	5,81	7,17	8,15	8,99
		4,45	5,33	6,10	6,90	7,98	9,33
	$\bar{t}, \text{с}$	4,46	5,20	6,04	7,01	8,19	9,29
$m_2 = 487$	$t_{\text{падения}}, \text{с}$	3,41	4,23	4,61	5,17	6,16	6,44
		3,48	4,19	4,70	4,90	6,21	6,72
		3,49	4,16	4,77	5,02	6,06	6,66
	$\bar{t}, \text{с}$	3,46	4,19	4,69	5,03	6,14	6,61
$m_3 = 707$	$t_{\text{падения}}, \text{с}$	2,88	3,39	3,83	4,24	4,78	5,51
		2,98	3,30	4,06	4,20	4,99	5,43
		2,79	3,35	3,88	4,40	5,01	5,41
	$\bar{t}, \text{с}$	2,88	3,35	3,92	4,28	4,93	5,45
$m_4 = 927$	$t_{\text{падения}}, \text{с}$	2,13	2,83	3,55	3,83	4,34	4,95
		2,38	3,05	3,33	3,69	4,23	4,84
		2,31	2,86	3,27	3,77	4,50	4,85
	$\bar{t}, \text{с}$	2,27	2,91	3,38	3,76	4,36	4,88

7. Расчет результатов косвенных измерений:

Таблица 2. Результаты расчетов среднего времени падения гири, ускорения груза, углового ускорения крестовины и момента силы натяжения нити

Масса груза, г	Риска	$\bar{t}, \text{с}$	$a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\varepsilon, \text{с}^{-2}$	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$
$m_1 = 267$	1	4,46	0,07	3,06	0,06
	2	5,20	0,05	2,25	0,06
	3	6,04	0,04	1,67	0,06
	4	7,01	0,03	1,24	0,06
	5	8,19	0,02	0,91	0,06
	6	9,29	0,02	0,71	0,06
$m_2 = 487$	1	3,46	0,12	5,08	0,11
	2	4,19	0,08	3,46	0,11
	3	4,69	0,06	2,76	0,11
	4	5,03	0,06	2,41	0,11
	5	6,14	0,04	1,61	0,11
	6	6,61	0,03	1,39	0,11
$m_3 = 707$	1	2,88	0,17	7,32	0,16
	2	3,35	0,12	5,43	0,16
	3	3,92	0,09	3,95	0,16
	4	4,28	0,08	3,32	0,16
	5	4,93	0,06	2,51	0,16
	6	5,45	0,05	2,05	0,16
$m_4 = 927$	1	2,27	0,27	11,78	0,20
	2	2,91	0,16	7,17	0,21
	3	3,38	0,12	5,32	0,21
	4	3,76	0,10	4,30	0,21
	5	4,36	0,07	3,21	0,21
	6	4,88	0,06	2,56	0,21

Расчет среднего времени падения гири для массы гири $m_1 = 267$ г и положения утяжелителя на крестовине на первой риске (для остальных аналогично):

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 0,7}{4,46^2} = 0,07 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon = \frac{2a}{d} = \frac{2 \cdot 0,07}{0,046} = 3,06 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$M = \frac{md}{2}(g - a) = \frac{0,267 \cdot 0,046}{2}(9,81 - 0,07) = 0,06 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Расчет погрешности и соответствующих доверительных интервалов для первых значений:

$$M = M_{\text{тр}} + I\varepsilon$$

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{4} = \frac{0,06 + 0,11 + 0,16 + 0,20}{4} = 0,13 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4} = \frac{3,06 + 5,08 + 7,32 + 11,78}{4} = 6,81 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$I_1 = \frac{\sum(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})(M_i - \bar{M})}{\sum(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2} = \frac{\sum(\varepsilon_i - 6,81)(M_i - 0,13)}{\sum(\varepsilon_i - 6,81)^2} = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$M_{\text{тр}} = \bar{M} - I_1 \cdot \bar{\varepsilon} = 0,13 - 0,016 \cdot 6,81 = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Таблица 3. Результаты расчетов момента инерции и момента силы трения

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08
$M_{\text{тр}}, \text{Н} \cdot \text{м}$	0,01	-0,001	-0,01	-0,004	0,003	0,0005
$\bar{M}, \text{Н} \cdot \text{м}$	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
$\bar{\varepsilon}, \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$	6,81	4,58	3,43	2,82	2,06	1,67

Таблица 4. Результаты расчетов расстояния между осью вращения и центром утяжелителя

	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$R, \text{м}$	0,077	0,102	0,127	0,152	0,177	0,202
$R^2 \text{ м}^2$	0,005929	0,010404	0,016129	0,023104	0,031329	0,040804
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08

$$I = I_0 + 4m_{\text{yr}}R^2$$

$$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{6} = \frac{0,02 + 0,03 + 0,04 + 0,05 + 0,06 + 0,08}{6} = 0,046 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\overline{R^2} = \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2 + R_6^2}{6} = 0,0213 \text{ м}^2$$

$$m_{\text{yr}} = \frac{\sum(R_i^2 - \overline{R^2})(I_i - \bar{I})}{\sum(R_i^2 - \overline{R^2})^2} = \frac{\sum(R_i^2 - 0,0213)(I_i - 0,046)}{\sum(R_i^2 - 0,0213)^2} = 1,635 \text{ кг}$$

$$I_0 = I - 4 \cdot m_{\text{yr}}R^2 = 0,046 - 4 \cdot 1,635 \cdot 0,0213^2 = 0,0430 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

8. Расчет погрешностей измерений:

- Время t :

$$\bar{t} = 4,46 \text{ с}$$

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} = 0,0463 \text{ с}$$

$$\alpha = 0,95, N = 3, t_{\alpha, N} = 4,30$$

$$\Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha, N} \cdot S_{\bar{t}} = 0,1994 \text{ с}$$

$$\delta_{\bar{t}} = \frac{\Delta_{\bar{t}}}{\bar{t}} \cdot 100\% = \frac{0,1994}{4,68} \cdot 100\% = 4,47\%$$

- Ускорение a :

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

$$\bar{a} = 0,07 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\Delta_a = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \Delta_h\right)^2 + \left(\frac{6h}{t^3} \cdot \Delta_t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{4,46^2} \cdot 0,001\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 0,7}{4,46^3} \cdot 0,2\right)^2} = 0,008 \text{ м/с}^2$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{\bar{a}} \cdot 100\% = \frac{0,008}{0,07} \cdot 100\% = 11,43\%$$

- Момент силы натяжения нити M :

$$M = \frac{md}{2}(g - a)$$

$$\bar{M} = 0,13 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \sqrt{\left(\frac{md}{2} \cdot \Delta_a\right)^2 + \left(\frac{d}{2}(g - a)\Delta_m\right)^2 + \left(\frac{m}{2}(g - a)\Delta_d\right)^2} \\ &= \sqrt{(0,22 \cdot 0,046/2 \cdot 0,008)^2 + (0,046/2 \cdot 9,74 \cdot 0,001)^2 + (0,22/2 \cdot 9,74 \cdot 0,001)^2} \\ &= 0,001 \text{ Н} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

$$\delta_M = \frac{\Delta_M}{\bar{M}} \cdot 100\% = \frac{0,001}{0,13} \cdot 100\% = 0,77\%$$

- Угловое ускорение крестовины ε :

$$\varepsilon = \frac{2a}{d}$$

$$\bar{\varepsilon} = 2,61 \text{ с}^{-2}$$

$$\Delta_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{2}{d} \Delta_a\right)^2 + \left(\frac{4a}{d^2} \Delta_d\right)^2} = \sqrt{(2/0,046 \cdot 0,01)^2 + (4 \cdot 0,06/0,046^2 \cdot 0,001)^2} = 0,36$$

$$\delta_\varepsilon = \frac{\Delta_\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100\% = \frac{0,36}{2,61} \cdot 100\% = 12,79\%$$

9. Графики:

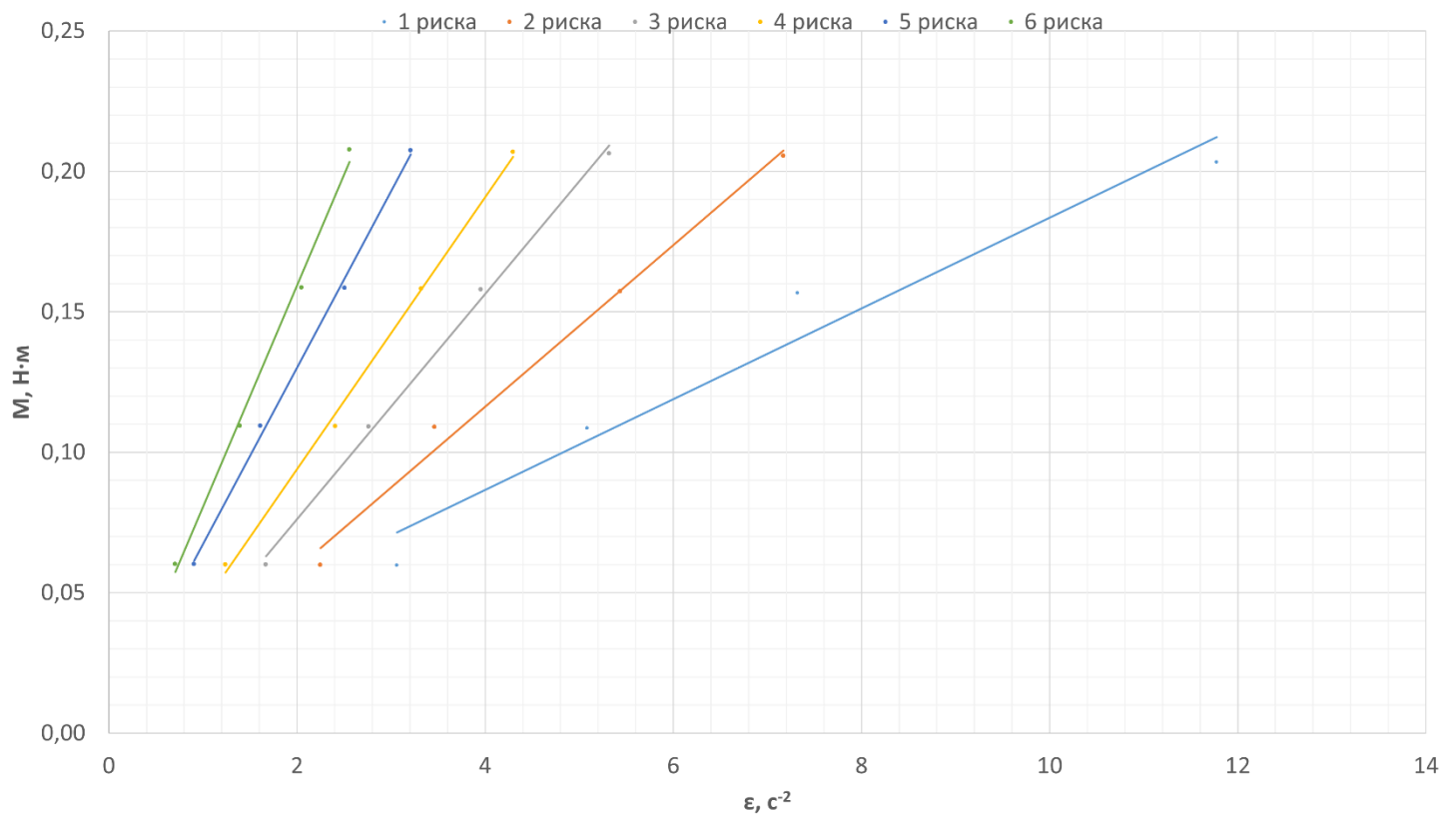


Рисунок 2. График зависимости M от ε для разных положений утяжелителей

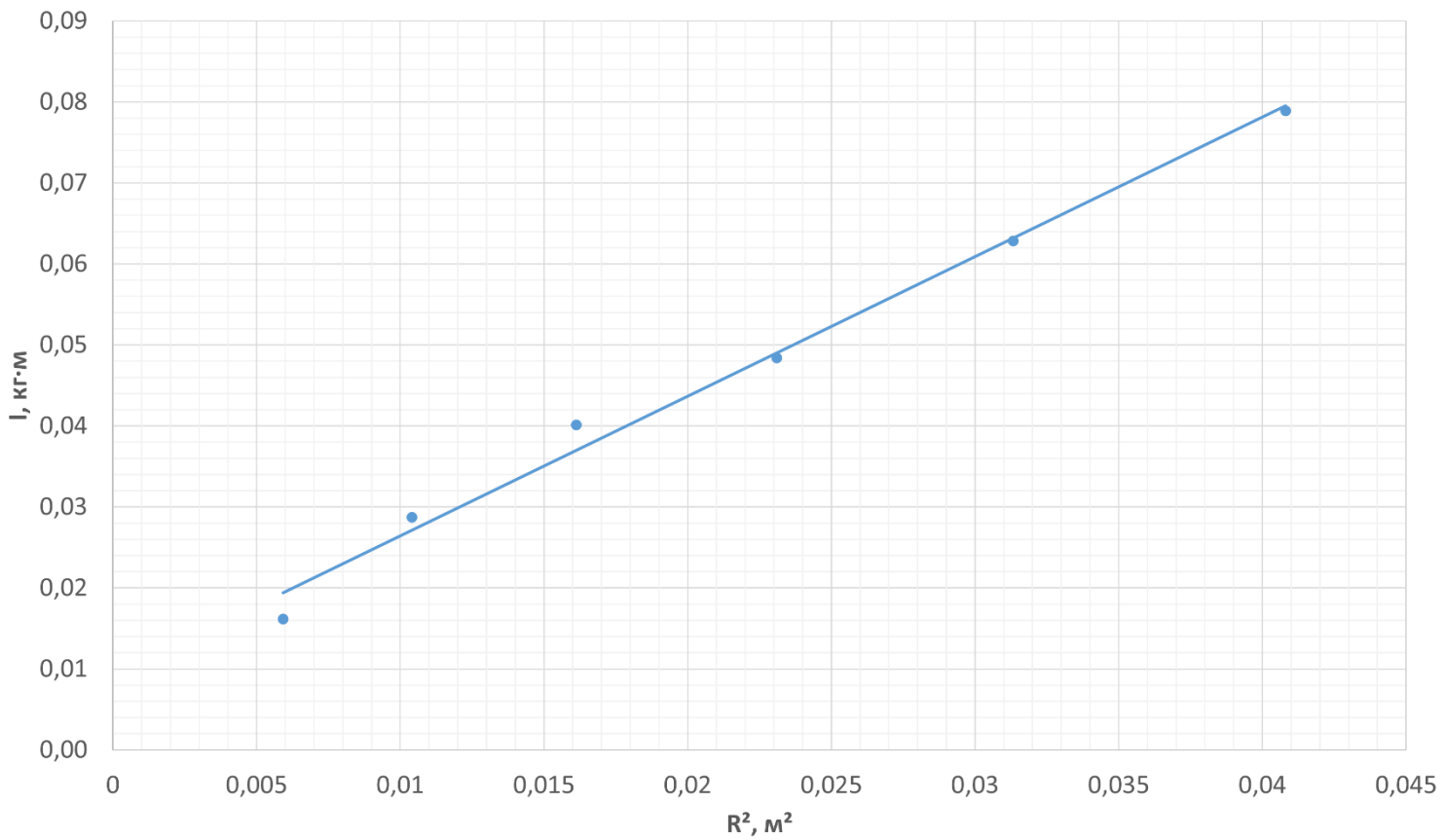


Рисунок 3. График зависимости момента инерции от положения утяжелителей

10. Окончательные результаты:

$$\bar{t} = (4,46 \pm 0,20) \text{ с} \quad \delta_{\bar{t}} = 4\% \quad \alpha = 0,95$$

$$a = (7,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \delta_a = 11\% \quad \alpha = 0,95$$

$$\varepsilon = (2,61 \pm 0,36) \text{ с}^{-2} \quad \delta_{\varepsilon} = 13\% \quad \alpha = 0,95$$

$$M = (13,00 \pm 0,10) \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad \delta_M = 0,8\% \quad \alpha = 0,95$$

11. Выводы и анализ результатов работы:

В ходе работы была исследована зависимость момента силы натяжения нити M от углового ускорения ε для различных положений утяжелителей на крестовине. Полученные графики демонстрируют линейную зависимость $M(\varepsilon)$, что согласуется с основным законом динамики вращения. Также была исследована зависимость момента инерции I от квадрата расстояния R^2 между осью вращения и центрами утяжелителей. График $I(R^2)$ имеет линейный характер, что соответствует теореме Штейнера. Погрешности измерений времени, ускорения, углового ускорения и момента силы находятся в допустимых пределах, за исключением углового ускорения, где относительная погрешность составила около 13%. Это могли произойти из-за человеческого фактора в процессе замеров и вычислений.