

Домашнее задание 2. Преобразование Лапласа

Функция вещественной переменной $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям

- $f(t)$ непрерывна для любого $t \geq 0$;
- $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- существуют числа C_1 и C_2 такие, что $|f(t)| < C_1 e^{C_2 t}$.

Прямое преобразование Лапласа

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (1)$$

где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная переменная,

$F(s)$ – изображение (образ) Лапласа функции $f(t)$.

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{st} F(s) ds, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$,

σ – вещественная постоянная, абсцисса абсолютной сходимости (все полюсы $F(s)$ лежат слева от прямой $\Re(\sigma)$).

Некоторые свойства преобразования Лапласа:

- Линейность

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s).$$

- Дифференцирование оригинала

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0).$$

- Теорема о смещении

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t).$$

- Теорема подобия

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0.$$

Вариант 1

Вариант 2

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = te^{-3t} + 2\cos(4t) - 5.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 4t^3 - \sin(2t) + e^t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2-4s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 3

Вариант 4

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t-1)^2 e^{-t} + 3\cos t.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 2te^{2t} - \sin(3t) + 4.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3}{s^2+6s+10}.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-2}{s^2-2s+2}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1.$$

Вариант 5

Вариант 6

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^2 \cos t + e^{4t}.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (2t+1) - 3\sin(4t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{4s+3}{s^2+8s+20}.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{5}{s^2+4s+8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 1, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 4y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Вариант 7

Вариант 8

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t \sin(2t) 2e^{3t}.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+6s+8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 3t^2 e^{-2t} + \cos(5t) - 1.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2-6s+10}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = \cos(3t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 9

Вариант 10

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t^2 - 2t) e^t + 4 \sin t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{6}{s^2 + 10s + 29}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = t^2, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 5 \cos(2t) - te^{-4t} + 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 11

Вариант 12

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^2 e^{-t} + 3 \sin(3t) - 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-6s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t+2)^2 e^{2t} - 4 \cos t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{5}{s^2+8s+25}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 6y(t) = t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 13

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 2t \sin(2t) + e^{-3t} + 1.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = \cos(2t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 14

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 3t^2 \cos t - 2e^t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{4s - 5}{s^2 - 10s + 29}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 5\dot{y}(t) + 6y(t) = e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Вариант 15

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t^2 + t)e^{-2t} + 5 \sin t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{6}{s^2 + 12s + 40}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 16

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 4 \cos(3t) - t^2 e^{-t} + 3.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 10s + 34}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 17

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = te^{3t} + 2 \sin(4t) - \cos(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s - 2}{s^2 - 4s + 13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 18

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (2t^2 - t)e^{-t} + \sin(5t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{7}{s^2 + 6s + 18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t \cos(3t) + 3e^{-4t} - 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-4}{s^2-8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 5te^{-2t} + \cos(4t) - 3\sin t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{8}{s^2 + 14s + 53}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^3 e^{-t} + 2\sin(4t) - 3\cos t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t^2 - 2t + 1)e^{2t} + 5\sin(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 4y(t) = t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 3t \cos(3t) - e^{-t} + 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2-2s+5}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 4t^2 \sin t + 3e^t - 1.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s+4}{s^2+8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Вариант 25

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t^3 + t)e^{-3t} + \sin(5t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{7}{s^2 + 10s + 34}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 26

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 6 \cos(4t) - te^{-2t} + 4.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s - 2}{s^2 - 4s + 8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 27

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = te^{4t} + 3 \sin(6t) - 2 \cos(3t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{5s - 3}{s^2 - 6s + 18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16y(t) = \cos(2t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 28

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (3t^2 - 4t)e^{-t} + \cos(7t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{9}{s^2 + 12s + 45}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 29

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t \sin(4t) + 4e^{-5t} - 3.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 12s + 40}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 30

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 7te^{-3t} + 2 \cos(5t) - \sin(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{10}{s^2 + 16s + 73}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 12y(t) = \cos(3t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -2.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^2 e^{-t} + 2 \cos(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s + 1}{s^2 - s + 11}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = \cos(5t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t^2 - 4) e^{2t} + 2 \cos(3t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 15}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 3y(t) = te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$