

**A1 Bayes - Klassifikation**

a) Eine Firma erhält von Zulieferern täglich Eschen- und Birkenbretter, die noch sortiert werden müssen. Das Verhältnis von Eschen- zu Birkenbretter sei dabei immer konstant. Die Bestimmung der Holzart soll nun mittels Bayes-Klassifikation automatisiert werden. Als Merkmal wird die Helligkeit  $x \in [0, 100]$  verwendet (eine Normalverteilung darf angenommen werden). Zur Bestimmung der benötigten Wahrscheinlichkeiten wurden die zu verarbeitenden Holzbretter eine Woche lang per Hand klassifiziert. Folgende Ergebnisse lagen vor:

Esche: Menge: 122 Stück mittlere Helligkeit: 45 Std-Abw. Helligkeit: 15	Birke: Menge: 61 Stück mittlere Helligkeit: 71 Std-Abw. Helligkeit: 20
---	--

Nun soll ein unbekanntes Brett klassifiziert werden. Welcher Klasse wird das Brett zugeteilt, wenn es eine Helligkeit von  $x = 65$  aufweist? Geben Sie dabei in Ihrer Rechnung an: (6)

- die A-priori-Wahrscheinlichkeit(en)
- die bedingte(n) Wahrscheinlichkeit(en) von  $x$  für eine Holzart
- die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit(en) !

(Berechnung mit Wolfram Alpha)

$$P_{\text{aPriori}}(\text{Esche}) = 122/183 = 0.666667$$

$$P_{\text{aPriori}}(\text{Birke}) = 61/183 = 0.333333$$

$$P_{\text{bed}}(x=65|\text{Esche}) = 0.010934$$

Berechnung der Normalverteilung mit gegebenen Parametern =

Setzen von  $x=65 \rightarrow 0.010934$

$$\frac{e^{-\frac{1}{450}(x-45)^2}}{15\sqrt{2\pi}}$$

$$P_{\text{bed}}(x=65|\text{Birke}) = 0.0190694$$

Berechnung der Normalverteilung mit gegebenen Parametern =

von  $x=65 \rightarrow 0.0190694$

$$\frac{e^{-\frac{1}{800}(x-71)^2}}{20\sqrt{2\pi}}$$

Es gilt die Bayes Regel (5.1-7):  $P(\omega_i | x) = \frac{p(x | \omega_i)P(\omega_i)}{p(x)}$  mit  $p(x) = \sum_{j=1}^2 p(x | \omega_j)P(\omega_j)$

$$\begin{aligned} p(x) &= P_{\text{bed}}(x=65|\text{Esche}) \cdot P_{\text{aPriori}}(\text{Esche}) + P_{\text{bed}}(x=65|\text{Birke}) \cdot P_{\text{aPriori}}(\text{Birke}) = \\ &= 0.010934 \cdot 0.666667 + 0.0190694 \cdot 0.333333 = \\ &= 0.007289336978 + 0.0063564603102 = 0.0136457972882 \end{aligned}$$

$$P_{\text{Post}}(\text{Esche}|x=65) = 0.007289336978 / 0.0136457972882 = 0.534182$$

$$P_{\text{Post}}(\text{Birke}|x=65) = 0.0063564603102 / 0.0136457972882 = 0.465818$$

Nach der Einfachen Bayes Entscheidungsregel wird, das Brett als Eschenbrett klassifiziert, da gilt  $P_{\text{Post}}(\text{Esche}|x=65) > P_{\text{Post}}(\text{Birke}|x=65)$ .

**b)** Sei der Verlust für eine Entscheidung für Esche statt Birke 150 Euro, der Verlust für Birke statt Esche aber nur 100 Euro. Klassifizieren Sie das unbekannte Brett mit Helligkeit 65 erneut unter Berücksichtigung der Verluste! Geben Sie dabei an: (4)

- die Aktion(en)
- den/die Verlust(e)  $\lambda(\alpha_i, \omega_j)$
- das/die (bedingten) Risiko / Risiken !  $R(\alpha_i, x = 65)$

Aktionen:  $\alpha_1$  = Klassifikation als Eschenbrett;  $\alpha_2$  = Klassifikation als Birkenbrett;

Verluste:  $\lambda(\alpha_1, \omega_2) = 150$  ;  $\lambda(\alpha_2, \omega_1) = 100$ ;  $\lambda(\alpha_1, \omega_1) = 0$ ;  $\lambda(\alpha_2, \omega_2) = 0$

$$\text{bedingtes Risiko} = R(\alpha_i | \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^s \lambda(\alpha_i, \omega_j) P(\omega_j | \mathbf{x}) :$$
$$R(\alpha_1 | x = 65) = 0 * 0.534182 + 150 * 0.465818 = 69,8727$$
$$R(\alpha_2 | x = 65) = 100 * 0.534182 + 0 * 0.465818 = 53.4182$$

Klassifikation als Birkenbrett, da  $R(\alpha_2 | x = 65)$  kleiner als  $R(\alpha_1 | x = 65)$ .

**A2 Entscheidungsfunktionen**

Gegeben sei ein zweidimensionaler Merkmalsraum-Vektor  $x = (x_1, x_2)$ , der mittels einer linearen Entscheidungsfunktion in zwei Regionen getrennt werden soll. Um den Gewichtsvektor der Entscheidungsfunktion zu berechnen, stehen folgende zehn vorklassifizierten Trainingsdaten zur Verfügung:

Klasse 1		Klasse 2	
x1	x2	x1	x2
-1	1	0	4
0	-1	-1	4
0	2	2	2
-1	0	-2	-3
		1	-3
		-3	1

a) Skizzieren Sie die Trainingsdaten. Sind die beiden Klassen linear separierbar (Begründung)? (1) **Siehe Beizettel**

b) Zeigen Sie graphisch, dass eine in  $y$  lineare Entscheidungsfunktion existiert, die beide Klassen trennt, wenn folgende Definition von  $\vec{y}(\vec{x})$  verwendet wird: (2)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

**Siehe Beizettel**

c) Homogenisieren und normalisieren Sie alle (in den  $y$ -Raum transformierten) Trainingsdaten. (2) **Siehe Beizettel**

d) Nun soll der Lösungsvektor  $\vec{a}$  mittels Gradientenabstieg und Perzeptron-Kriterienfunktion iterativ ermittelt werden. Die Lernrate sei  $\eta(k) = 0.3$ , der Rand sei

$b = 0$ . Der initiale Lösungsvektor sei  $\vec{a}_{k=0} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie zwei weitere Iterationen des Lösungsvektors, also  $\vec{a}_{k=1}$  und  $\vec{a}_{k=2}$ ! Sind nun alle Stichproben korrekt klassifiziert? (5)

Berechnung wurde mit dem Programm in der .zip Datei ausgeführt. Irgendwo muss aber ein Fehler vorliegen, da das Verfahren nur konvergiert, wenn  $\theta = -0.3$  statt  $\theta = 0.3$ . Eventuell liegt das daran, dass irgendwie die Werte aus c) nicht stimmen. Das ist jedenfalls der Output des Programms:

$\theta = 0.3$ :

[13.0, -3.0, -1.0]

[11.5, -8.399999999999999, -14.799999999999999]

[10.6, -13.799999999999997, -29.5]

we can NOT classify everything with the the 0th iterated value for a. the set of not classifiable indexes was: [4, 5, 6, 7, 9]

we can NOT classify everything with the the 1th iterated value for a. the set of not classifiable indexes was: [0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

we can NOT classify everything with the the 2th iterated value for a. the set of not classifiable indexes was: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

thetha = -0.3:

[13.0, -3.0, -1.0]

[14.5, 2.3999999999999995, 12.799999999999999]

[14.5, 2.3999999999999995, 12.799999999999999]

we can NOT classify everything with the the 0th iterated value for a. the set of not classifiable indexes was: [4, 5, 6, 7, 9]

we can classify everything with the 1th iterated value for a

we can classify everything with the 2th iterated value for a

Man beachte, wie bei thetha = -0.3 die Klassifikation funktioniert.