2.1 Die Zahlenmengen N, Z, Q, R und C

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Def. natrüliche Zahlen

Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ heißt Menge der **natürlichen Zahlen**. Nehmen wir die Zahl "0" hinzu, so schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Def. ganze Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ heißt die Menge der **ganzen Zahlen**.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Def. rationale Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | q \neq 0 \wedge p, q \in \mathbb{Z}\}$$

heißt Menge der **rationalen Zahlen** oder auch Menge der Bruchzahlen. man nennt *p* den **Zähler** und *q* den **Nenner** der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$.

Satz 2.4 (Euklid)

Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Def. reelle Zahlen

Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** besteht aus den rationalen Zahlen und aus Zahlen, die sich beliebig genau durch rationale Zahlen "approximieren" lassen.

Satz 2.6 (Rechenregeln für Ungleichungen)

Für

$$a, b, c \in \mathbb{R}:$$

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$
$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$
$$a < b \Leftrightarrow ac < bc \; falls \, c > 0$$
$$a < b \Leftrightarrow ac > bc \; falls \, c < 0$$

Die Regeln bleiben natürlich auch gültig, wenn man $<$ durch $\leq$ ersetzt.

Def. 2.7 (n-te Wurzel)

Seien $a \in \mathbb{R} \, mit \, a \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$. Die eindeutig bestimmte reelle Zahl $b \geq 0$ mit der Eigenschaft $b^n = a$ heißt die n **-te Wurzel** von a. Man schreibt

$$b = \sqrt[n]{a} \; oder \, auch \; b = a^{\frac{1}{n}}$$

Def. 2.8

Eine Potenz mit rationalem Exponenten ist definiert als

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (\sqrt[m]{a})^n$$
$$f\ddot{u}r \, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}.$$

Eine Potenz mit *irrationalem* Exponenten $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definiert man, indem man b je nach gewünschter Genauigkeit durch eine geeignete rationale Zahl annähert:

$$a^b \approx a^{b_i},$$

wobei b1, b2, b3, ... eine Folge von rationalen Zahlen ist, die b approximieren.

Satz 2.9 (Rechenregeln für Potzen)

Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Dann gilt:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \; a^x \cdot a^x = (a \cdot b)^x,$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}, \; a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Satz 2.10

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, x > 0$. Dann gilt:

$$a < b \Leftrightarrow a^x < b^x,$$
$$a < b \Leftrightarrow a^{-x} > b^{-x}$$

Satz 2.13 (Dreiecksungleichung)

Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Def. 2.14 obere Schranke

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen heißt **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x \leq K \; für \, alle \, x \in M.$$

Eine solche Zahl K wird als eine **obere Schranke** von M bezeichnet.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Def. 2.21 komplexe Zahlen

Die Menge $\mathbb{C} = \{x + i \cdot y | x, y \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der **komplexen Zahlen**. Die Zahl $i \in \mathbb{C}$ wird **imaginäre Einheit** genannt. Sie ist definiert durch: $i^2 = -1$. Man nennt x den **Realteil** beziehungsweise y den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ und schreibt

$$Re(z) = x, \; Im(z) = y.$$