1.1 Elementare Logik

Definition 1.1 (nach Aristoteles)

Eine **Aussage** (engl. *proposition*) ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Definition 1.3

Die **Verneinung** oder **Negation** einer Aussage a ist genau dann wahr, wenn a falsch ist. Die Verneinung von a wird als $\overline{a}$ oder $\neg a$ geschrieben (gelesen "nicht a").

Definition 1.5

Seien a und b beliebige Aussagen (in diesem Zusammenhang auch als **Eigenaussagen** bezeichnet).

- **UND**-Verknüpfung (**Konjunktion**): Die neue Aussage $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn sowohl a als auch b wahr ist.
- **ODER**-Verknüpfung, **OR**-Verknüpfung oder Disjunktion: Die neue Aussage $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen a bzw. b wahr ist. Hier handelt es sich um das *einschließende* "oder" im Sinn von "a oder b oder beide".
- **Entweder ... ODER**-Verknüpfung oder **XOR**-Verknüpfung: Die neue Aussage $a \oplus b$ ist genau dann wahr, wenn **entweder** a **oder** b wahr sind. Die Verknüpfung $a \oplus b$ entspricht also dem *ausschließenden* oder.

Definition 1.7

Zwei aussagenlogische Formeln werden als **gleich** (oder **logisch äquivalent**) bezeichnet, wenn für jede Kombination der Wahrheitswerte der Eigenaussagen die gleichen Wahrheitswerte annehmen. Wir verwenden in diesem Fall das übliche Gleichheitszeichen =.
Anstelle des Gleichheitszeichens werden auch die Symbole $\equiv$ oder $\leftrightarrow$ verwendet.

Definition 1.8 (Regeln von De Morgan)

Seien a und b beliebige Aussgaen. Dann gilt:

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$
$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

Die Verneinung einer UND-Aussage ist gleich einer ODER-Aussage und umgekehrt.

Definition 1.11

Ersetzt man in einer Aussage a irgendeine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine **Aussageform** a(x), auch (einstelliges) **Prädikat** genannt. Prädikate können auch mehr als eine Variable enthalten, sie heißen dann zwei- bzw. mehrstellig.

> Beispiel: a(x): x < 100 ist eine Aussageform, die die Variable x enthält. Sie wird zu einer Aussage, wenn man für x eine konkrete Zahl einsetzt. Für x = 3 entsteht etwa die wahre Aussage a(3): 3 < 100. Ein Beispiel für ein zweistelliges Prädikat ist a(x,y): x < y.

Definition 1.14 (All-Aussagen und Existenz-Aussagen)

Gegeben ist eine Aussageform a(x) und eine Menge M:
Die **All-Aussage**

$$\forall x \in M : a(x),$$

gelesen "Für alle x aus M gilt a(x)", ist wahr genau dann, wenn a(x) für jedes x aus M wahr ist. Das Symbol $\forall$ heißt **All-Quantor**.

Die **Existenz-Aussage**

$$\exists x \in M : a(x),$$

gelesen "Es existiert mindestens ein x aus M mit a(x)", ist wahr genau dann, wenn a(x) für *zumindest* ein x aus M wahr ist. Das Symbol $\exists$ heißt **Existenz-Quantor**.

Satz 1.18 (Verneinung von All- und Existenzaussagen)

Durch die Verneinung einer All-Aussage entsteht eine Existenz-Aussage. Analog entsteht durch die Verneinung einer Existenz-Aussage eine All-Aussage:

$$\overline{\forall x \in M : a(x)} = \exists x \in M : \overline{a(x)}$$
$$\overline{\exists x \in M : a(x)} = \forall x \in M : \overline{a(x)}$$

Definition 1.21

Die **WENN-DANN-Verknüpfung** oder **Subjunktion** $a \rightarrow b$ (gelesen "Wenn dann b") und die **GENAU-DANN-WENN-Verknüpfung** oder **Bijunktion** $a \leftrightarrow b$ (gelesen "a genau dann, wenn b") von zwei

Aussagen a bzw. b sind durch ihre Wahrheitstabelle folgendermaßen definiert:

a	b	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Satz 1.25 (Umkehrschluss, Kontraposition)

$a \Rightarrow b$ bedeutet dasselbe wie $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$.

Satz 1.27 (Äquivalenz)

$a \Leftrightarrow b$ bedeutet dasselbe wie ($a \Rightarrow b$ und $b \Rightarrow a$).

Beweis mathematischer Sätze

In der Mathematik muss jede Aussage, die dann meist als (mathematischer) Satz bezeichnet wird, als wahr bewiesen werden. Ein Satz hat in der Regel die Struktur $a \Rightarrow b$ oder manchmal auch $a \Leftrightarrow b$. Für den Beweis, dass ein Satz wahr ist, gibt es verschiedene Techniken. Hier sind einige angeführt:

- **Direkter Beweis:** Man möchte $a \Rightarrow b$ zeigen und geht dazu von der Wahrheit von a aus und schließt daraus, dass b wahr ist.
- Um $a \Rightarrow b$ zu zeigen, kann man auch die Kontraposition $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ zeigen. Diese Vorgehensweise wird auch **indirekter Beweis** genannt.
- Um $a \Rightarrow b$ zu zeigen, kann man aber auch den Fall "a wahr und b falsch" ausschließen (das ist ja der einzige Fall, für den $a \to b$ falsch ist.) Dies macht man, indem man die Annahme "a wahr und b falsch" zu einem Widerspruch führt (**Beweis durch Widerspruch**).
- Um $a \Leftrightarrow b$ zu zeigen, kann man zeigen, dass sowohl $a \Rightarrow b$ als auch $b \Rightarrow a$ gilt.
- Um zu zeigen, dass $a \Rightarrow b$ bzw. $a \Leftrightarrow b$ *nicht* gilt, genügt es, ein **Gegenbeispiel** zu finden.