1.2 Elementare Mengenlehre

Definition Menge (nach Cantor)

Eine **Menge** (engl. *set*) ist eine Zusammenfassung von bestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unsere Denkens zu einem Ganzen.

Def. Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Das bedeutet also, dass jedes Element von A auch in B enthalten ist. Man schreibt in diesem Fall: $A \subseteq B$.

Aus der Definition der leeren Menge folgt: $\subseteq A$ für jede Menge A.

Def. Potenzmenge

Die Potenzmenge einer endlichen Menge A besitzt $2^{|A|}$ Elemente.

Def. Durchschnitt

Die Menge

$$A \cap B = x | x \in A \wedge x \in B$$

nennt man **Durchschnitt** von A und B.

Def. Vereinigung

Die Menge

$$A \cup B = x | x \in A \vee x \in B$$

nennt man **Vereinigung** von A und B.

Rechengesetze für Mengen

Kommuntativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Def. Differenz

Die **Differenz** zweier Mengen

$$A \setminus B = x | x \in A \wedge x \notin B$$

ist die Menge der Elemente von A ohne die Elemente von B. Ist speziell B eine Teilmenge von A, so nennt man $A \setminus B$ auch das **Komplement** von B bezüglich A und schreibt dafür $\overline{B}$. In diesem Zusammenhang bezeichnet man A als die **Grundmenge**.

Satz von De Morgan

Sind A, B Teilmengen einer Menge M (Grundmenge), so gelten für die Komplemente die **De Morgan'schen Regeln**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Def. geordnetes Paar

Man bezeichnet (a,b) als **geordnetes Paar** (auch **Tupel**). Zwei geordnete Paare (a,b) und (a',b') sind genau dann **gleich**, wenn a = a' und b = b' ist.

Beispiel: Die Tupel $(1, 2) \neq (2, 1)$ und $(2, 2) \neq (2)$ sind verschieden. Im Fall von Mengen hätten wir Gleichheit.

Def. kartesisches Produkt von A und B

Die Menge aller geordneten Paare zweier Mengen A und B wird **kartesisches Produkt von A und B** genannt und als $A \times B$ geschrieben:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \, und \, b \in B\}$$

gelesen: "A kreuz B"

Def. Abbildung oder Funktion

Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von einer Menge D (Definitionsmenge) in eine Menge M (Zielmenge) ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in M$ zuordnet. Man schreibt dafür kurz:

$$f : D \to M, x \mapsto f(x)$$

und sagt: "x wird auf f(x) abgebildet".