MM529 E-timer
131204

Kathja Fuglø

(1) Komplekse tal, andre repræsentationer

a) Bestem den komplekst konjugerede til $z = re^{\phi i}$.

Svar: I den anvendte repræsentation (polær eller eksponentiel – begge ord anvendes om denne repræsentation) af z er ϕ argumentet. Da en måde at bevare realdelen og skifte fortegn på imaginærdelen af et komplekst tal er at bevare modulus og skifte fortegn på argumentet, er $\overline{z} = re^{-\phi i}$.

b) For de komplekse tal $z = e^{\frac{3\pi i}{2}}$ og $w = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{6}}$, bestem deres sum og differens.

Svar: Hvis vi skal følge Stephans slides, skal vi omskrive til algebraisk repræsentation, som er givet ved $re^{\phi i} = r\cos\phi + ri\sin\phi$, så

$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

$$w = \sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z + w = -i + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

$$z - w = -i - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{3}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

(2) Potenser af komplekse tal

a) Find den polære form af $z = -1 + \sqrt{3}i$, og beregn z^8.

Svar: Først finder vi modulus og argument:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Rightarrow z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i},\ z^8 = 2^8 e^{8\cdot\frac{2\pi}{3}i} = 256e^{\frac{16\pi}{3}i}$$

b) Hvad er argumentet af z^{999} for $z = ai$, hvis $a > 0$, og hvis $a < 0$? Skriv argumentet ϕ på formen $0 \leq \phi < 2\pi$, og lav en skitse i det komplekse plan.

Svar: $z = ai \Rightarrow z^{999} = a^{999}i^{999} = a^{999}i^{996}i^3 = -ai$, så hvis $a > 0$, er argumentet $-\frac{\pi}{2}$ svarende til $\frac{3\pi}{2}$, og hvis $a < 0$, er argumentet $\frac{\pi}{2}$.

(3) Rødder af komplekse tal

Appendix 1, opgave 54: Find alle fjerde rødder af 4.

Svar: Vi bruger fremgangsmåden nederst på side A-9. Vi skal først bruge modulus og argument af 4: $|4| = 4$, $arg(4) = 0$. Så kan vi indsætte i formlen for at finde tal w, der opfylder $w^4 = 4$:

$$w_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{2(k-1)\pi}{4} + i\sin\frac{2(k-1)\pi}{4}\right),$$

hvor k er et heltal mellem 1 og 4, så

$$w_1 = \sqrt{2}\,(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{2},$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i,$$

$$w_2 = \sqrt{2}\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{2},$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i,$$

Appendix 1, opgave 56: Find alle løsninger til

$$z^5 + a^5 = 0,$$

hvor a er et positivt reelt tal.

Svar: $z^5+a^5 = 0 \Leftrightarrow z^5 = -a^5$, så z er alle tal med modulus a, hvis femte potens er et negativt heltal (det vil sige et tal med argument π). Sætter vi de oplysninger ind i formlen for rødder, får vi

$$z_k = a\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{5}\right),$$

hvor k er et heltal mellem 1 og 5. (k kan være et hvilket som helst heltal, men da $z_k = z_{k+5}$, da cosinus og sinus er 2π-periodiske, vil heltal mellem 1 og 5 være nok til at give alle løsninger.)

(4) Uendelige rækker

Afsnit 9.3, opgave 42: Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ konvergerer. *Hint:* Følg fremgangsmåden i opgave 41. Vis, at $a_n \geq \frac{1}{2n}$.

Svar: Hvis vi viser, at $a_n \geq \frac{1}{2n}$, har vi vist, at rækken ikke konvergerer, da vi ved fra sidste uge, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ikke konvergerer.

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)^2}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$= \frac{1 \cdot (2n-1)(2n-3)\cdots 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2n}$$

som ønsket. Rækken konvergerer altså ikke.

Afsnit 9.4, opgave 4: I denne og de næste to opgaver, bestem, om den givne række konvergerer absolut, konvergerer betinget eller divergerer. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$.

Svar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}.$$

Løsningen til denne sum er givet i Stephans slides til forelæsning 3:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1.$$

Det vil sige, at summen konvergerer absolut, da den konvergerer, og alle led er positive.

Afsnit 9.4, opgave 6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$.

Svar: Den givne række konvergerer, hvis og kun hvis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ gør. Det er givet i afsnit 9.6, at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Det vil sige, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2} \text{ og } \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n!} \right| = e^2.$$

Rækken konvergerer altså absolut.

Afsnit 9.4, opgave 8: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$.

Svar: Da $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{-n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$, konvergerer summen, hvis og kun hvis den konvergerer absolut. Yderligere konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, hvis og kun hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ gør (da den eneste forskel på de to er, om det nulte led er med, og da dette er et endeligt tal, ændrer det ikke på, om rækken konvergerer). Vi kan nu omskrive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Vi ved fra sidste uge, at denne række divergerer. Altså divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$.

(5) Førsteordens differentialligninger

Afsnit 18.1, opgave 12: Verificer, at $y = e^x$ og $y = e^{-x}$ er løsninger til differentialligningen $y'' - y = 0$. Er nogle af $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\cos x$, x^e også løsninger?

Svar: Da $y'' - y = 0 \Leftrightarrow y'' = y$, kan vi løse opgaven ved at finde den anden afledede af hver af de givne funktioner og finde ud af, om den er lig med den oprindelige funktion.

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}, \quad \left(e^{-x}\right)'' = e^{-x}.$$

Vi kan altså se, at $y = e^{-x}$ er en løsning.

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^x)'' = e^x.$$

Vi kan altså se, at $y = e^x$ er en løsning. Det er givet i afsnit 3.6 i bogen, at $(\cosh x)' = \sinh x$ og $(\sinh x)' = \cosh x$, så

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\cosh x)'' = \cosh x.$$

Vi kan altså se, at $y = \cosh x$ er en løsning.

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos x)'' = -\cos x.$$

Vi kan altså se, at $y = \cos x$ ikke er en løsning.

$$(x^e)' = e x^{e-1}, \quad (x^e)'' = e(e-1)x^{e-2}.$$

Vi kan altså se, at $y = x^e$ ikke er en løsning.

b) På figuren på side 1000 (side 947 i seventh edition), find løsningen til begyndelsesværdiproblemet $y' = x - y,\ y(0) = 1$. Hvordan ville grafen for begyndelsesværdiproblemet $y' = x - y,\ y(1) = 4$ cirka se ud? Diskuter betydningen af figuren.

Betydning af figuren: Hvis man får givet et begyndelsesværdiproblem $y' = x - y,\ y(a) = b$, kan man finde punktet (a, b) på figuren og følge linjesegmenterne for at få en grov idé om, hvordan grafen for dette begyndelsesværdiproblem ser ud.