MM529 E-timer
130918

Kathja Fuglø

(6) Lige og ulige funktioner (fra uge 37)

a) Diskuter udtrykkene ‘lige og ulige funktioner’

Lige funktion: f er lige, hvis $f(-x) = f(x)$, svarende til at grafen for f er symmetrisk omkring $x = 0$ (det vil sige y-aksen).

Ulige funktion: f er ulige, hvis $f(-x) = -f(x)$, svarende til at grafen for x er symmetrisk omkring $(0, 0)$.

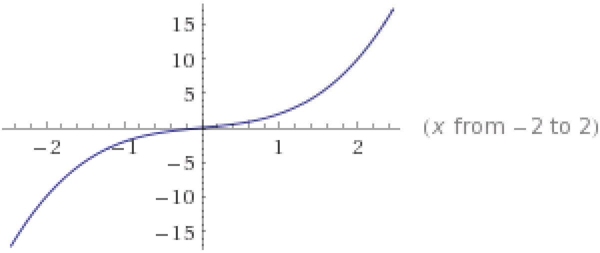
En funktion kan godt være hverken lige eller ulige. Der findes også en enkelt funktion, der er både lige og ulige ($f(x) = 0$). x^n, hvor n er et heltal, er ulige for ulige n og lige for lige n. Desuden er cosinus lige og sinus ulige.

Summen og differensen af to ulige funktioner er ulige, og tilsvarende er summen og differensen af lige funktioner lige. En ulige funktion ganget med en konstant er ulige, og en lige funktion ganget med en konstant er lige.

Afsnit P.4, side 33

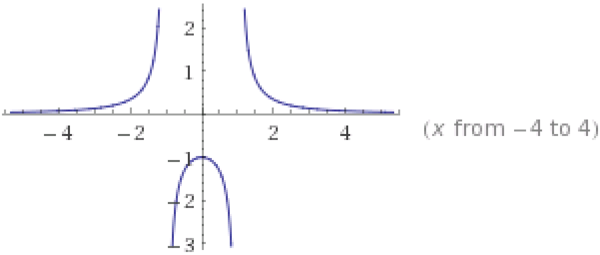
Hvilken symmetri (hvis nogen) besidder grafen for f i hver af de følgende funktioner f. Er f lige eller ulige?

Opgave 12: $f(x) = x^3 + x$



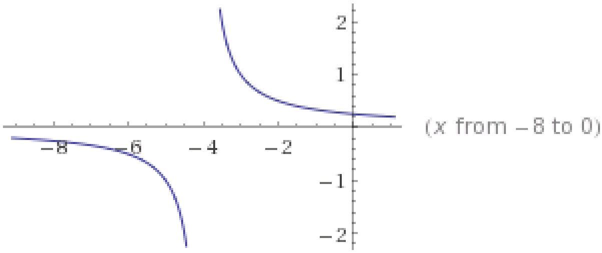
Svar: f er summen af de to ulige funktioner x^3 og x. Derfor er f ulige.

Opgave 14: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$



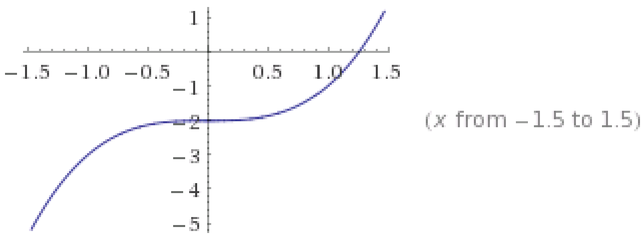
Svar: Funktionen er lige: $(-x)^2 = x^2$, så $f(-x) = f(x)$.

Opgave 16: $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$



Svar: Funktionen er symmetrisk ("ulige") omkring $(-4, 0)$: $f(-4-x) = -f(-4+x)$.

Opgave 18: $f(x) = x^3 - 2$



Svar: Funktionen er symmetrisk ("ulige") omkring $(0, -2)$: $f(-x) + 2 = -(f(x) + 2)$.

(1)

Definer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{3x}$.

a) Begræns sekundærmængden (codomain), sådan at f er bijektiv.

Svar: Hvis f skal være bijektiv, skal den være surjektiv (på) og injektiv (en-til-en). For at den kan være surjektiv, skal værdimængden og sekundærmængden være ens. Værdimængden for e^{3x} er den samme som værdimængden for e^x (den første af dem er blot "trykket sammen" langs x-aksen). Vi ved, at værdimængden for e^x er $(0, \infty)$. Vi begrænser derfor værdimængden for f sådan, at vi får $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, for at få en surjektiv funktion. Da f er injektiv (specifikt strengt voksende), har vi nu en bijektiv funktion.

b) Bestem den inverse funktion f^{-1} og skitser graferne for f og f^{-1}.

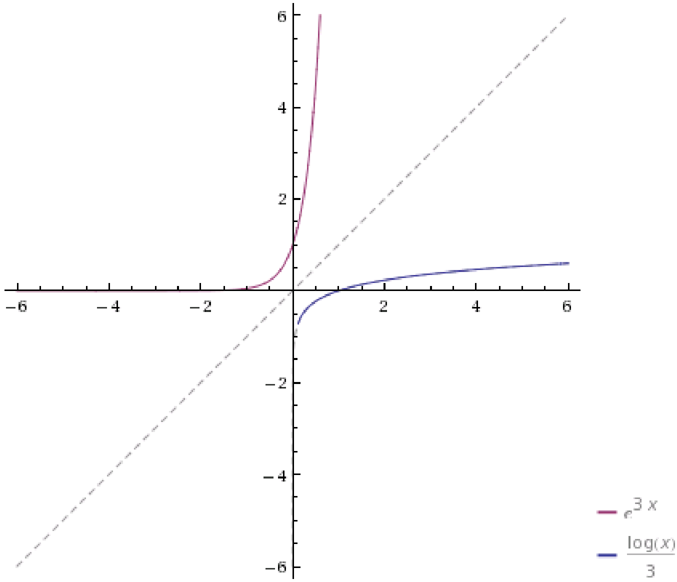
Svar: Definitionen af invers funktion siger, at

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Derfor løser vi denne ligning for den specifikke funktion, vi har fået givet:

$$e^{3x} = y \iff 3x = \ln y \iff x = \frac{\ln y}{3}$$

og får, at $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{3}$. Plot af f og f^{-1} på næste side.



c) Retfærdiggør valget af f^{-1} ved at bestemme sammensætningerne $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$.

Svar: Vi benytter her regneregler fra Stephans slides samt fra side 170 og 171 i bogen.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{\ln(e^{3x})}{3} = \frac{3x \ln e}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = e^{3\frac{\ln x}{3}} = e^{\ln x} = x$$

Da sammensætningen af funktionerne uanset rækkefølge er identitetsfunktionen, er valget af invers korrekt.

(2)

Følgende ulighed holder for alle $b, x \in \mathbb{R}, b > 0$:
$b^x = e^{x \cdot \ln b}$.

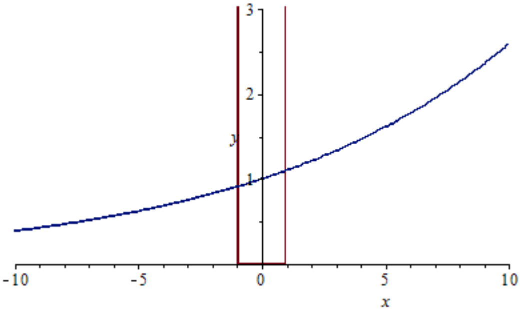
a) Verificer uligheden ved brug af logaritmereglerne samt definitionen af logaritmen (altså at $\ln x$ er invers til e^x).

Svar: $b^x = e^{x \cdot \ln b} \iff \ln(b^x) = \ln\left(e^{x \cdot \ln b}\right) \iff x \cdot \ln b = x \cdot \ln b$. Første omskrivning består i at tage logaritmen på begge sider. Til anden omskrivning benyttes en af reglerne givet på side 171 til at omskrive venstre side, mens det faktum, at logaritmen og eksponentialfunktionen er inverse benyttes på højre side. Da vi ender med, at venstre side og højre side er ens, kan vi konkludere, at ligheden holder.

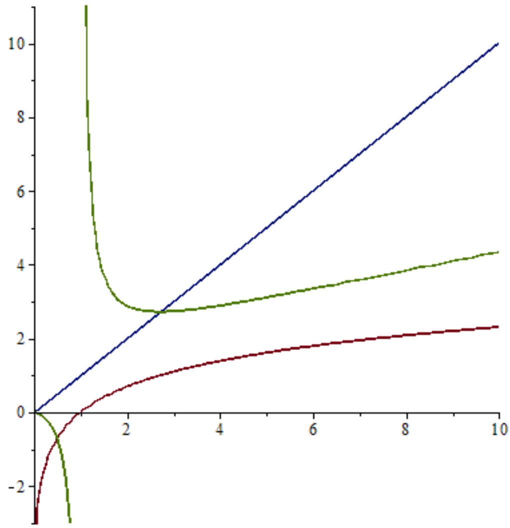
b) Skitser graferne for $f_1(x) = x^{1000}$ og $f_2(x) = 1.1^x$ og graferne for $g_1(x) = \ln x$, $g_2(x) = x$ og $h(x) = \frac{x}{\ln x}$. Hvilke af funktionerne er injektive, surjektive og bijektive?

Svar: For at svare her skal vi kende sekundærmængden for funktionerne. Da denne ikke er oplyst, antager vi, at den er $\mathbb{R}$.

Plot af f_1 (rød) og f_2 (blå):



Plot af g_1 (rød), g_2 (blå) og h (grøn):



Vi kan se, at f_1 hverken er surjektiv (den rammer kun positive værdier) eller injektiv.

f_2 er heller ikke surjektiv, men den er injektiv (det er den reelle eksponentialfunktion altid uanset base).

g_1 er både surjektiv og injektiv, men er kun defineret for positive tal.

g_2 er både surjektiv og injektiv (det er identitetsfunktionen).

h er hverken surjektiv eller injektiv, og den er kun defineret for intervallerne $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

c) Find et stort positivt tal k for hvilket $f_1(k) < f_2(k)$ og forklar, hvorfor $f_1(x) < f_2(x)$ for alle $x \geq k$ (eksponentiel vækst overhaler altid polynomiel vækst).

Svar: Ved at løse ligningen $f_1 = f_2$ i Maple eller Wolfram Alpha (eller andet) kan man komme frem til, at de to grafer skærer hinanden i $x \approx 122963$, så vi kan for eksempel vælge $k = 123000$. Grunden til, at eksponentiel vækst altid vil overhale polynomiel vækst, kan blandt andet forklares ved, at eksponentiel vækst har en fordoblingskonstant T_2, og for hver gang x vokser med T_2, fordobles funktionsværdien, mens et polynomium bruger længere og længere tid om at fordobles for større x-værdier:

$$x_2^{1000} = 2 \cdot x_1^{1000} \iff x_2 = \sqrt[1000]{2} \cdot x_1.$$

d) For hver af funktionerne, bestem en maksimal definitionsmængde og sekundærmængde, for hvilke funktionen er bijektiv, og skitser grafen for den inverse funktion. Hvilke funktioner er inverse til f_1, f_2, g_1, g_2? Bestem deres definitionsmængde og værdimængde.

Svar: $f_1(x) = x^{1000}$ er voksende for positiv x og aftagende for negativ x. Vi kan altså vælge enten $[0, \infty)$ eller $(-\infty, 0]$. Som værdimængde skal vi vælge $[0, \infty)$ for at få en bijektiv funktion. For den positive definitionsmængde får vi $f_1^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), f_1^{-1}(x) = \sqrt[1000]{x}$. Hvis vi vælger den negative definitionsmængde får vi $f_1^{-1} : [0, \infty) \to (-\infty, 0],\ f_1^{-1}(x) = -\sqrt[1000]{x}$.

$f_2(x) = 1.1^x = e^{x \cdot \ln b}$ er voksende over hele den reelle linje, så definitionsmængden vælger vi som $(-\infty, \infty)$. Værdimængden er $(0, \infty)$. Vi kan nu bestemme en invers: $y = e^{x \cdot \ln b} \iff \ln y = x \cdot \ln 1.1 \iff x = \frac{\ln y}{\ln 1.1}$. Vi får altså $f_2^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_2^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln 1.1}$.

$g_1(x) = \ln x$ er defineret på intervallet $(0, \infty)$, og vi kender allerede via definitionen dens inverse: $g_1^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ g_1^{-1}(x) = e^x$

$g_2 = x$ er identitetsfunktionen med både definitionsmængde og værdimængde $\mathbb{R}$. Den er yderligere sin egen invers.

(3)

Additionssætningerne for de trigonometriske funktioner er givet ved

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

a) Udled heraf de tilsvarende udtryk for $\sin(\theta - \phi)$ og $\cos(\theta - \phi)$.

Svar: Vi vil bruge, at sinus er ulige og cosinus lige. Vi får så

$$\begin{gathered}\sin(\theta - \phi) = \sin(\theta + (-\phi)) \\ = \sin\theta\cos(-\phi) + \sin(-\phi)\cos\theta \\ = \sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta\end{gathered}$$

og

$$\begin{gathered}\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta + (-\phi)) \\ = \cos\theta\cos(-\phi) - \sin\theta\sin(-\phi) \\ = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\end{gathered}$$

b) Omskriv følgende udtryk til funktioner af cosinus og sinus til x. Til disse opgaver fra bogen bruger vi de fire udtryk fra del a).

Afsnit P.7, opgave 8: $\sin(2\pi - x)$

Svar: $\sin(2\pi - x) = \sin(2\pi)\cos x - \sin x \cos(2\pi) = 0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1 = -\sin x$

Afsnit P.7, opgave 10: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

Svar: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos x - \sin\frac{3\pi}{2}\sin x$
$= 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \sin x = \sin x$

(4)

For følgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{10}, \frac{9}{17}, \frac{16}{26}, \frac{25}{37}, \ldots\right)$, find en generel beskrivelse af a_n og beregn det næste element.

Svar: $a_n = \frac{n^2}{(n+1)^2+1}$. Det næste element er så

$$a_6 = \frac{6^2}{7^2+1} = \frac{36}{50}.$$