MM529 E-timer
130911

Kathja Fuglø

Fra ugeseddel (1)

a)Diskuter, hvorfor der kun findes én tom mængde (se på definitionen af lighed mellem mængder).

Svar: Lighed mellem mængder er defineret ved, at to mængder er ens, når de indeholder de samme elementer. To tomme mængder indeholder de samme elementer (ingen) og er altså ens – det vil sige den samme mængde.

b) Udtryk lighed mellem mængder ved hjælp af delmængderelationen '$\subseteq$'.

Svar: Delmængderelationen er defineret ved, at $A \subseteq B$, hvis B indeholder alle elementer i A. Lighed kan omformuleres til, at B indeholder alle elementer i A og A indeholder alle elementer i B. Altså svarer lighed til, at $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (det betyder $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$).

c) For mængderne $A = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ og $B = \{1, a, \spadesuit\}$, bestem mængderne $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$.

Svar: $A \cup B = B \cup A = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, 1, a\}$

$A \cap B = B \cap A = \{\spadesuit\}$

$A \setminus B = \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ og $B \setminus A = \{1, a\}$

$A \times B = \{(\clubsuit, 1), (\clubsuit, a), (\clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, 1), (\spadesuit, a), (\spadesuit, \spadesuit), (\heartsuit, 1), (\heartsuit, a), (\heartsuit, \spadesuit), (\diamondsuit, 1), (\diamondsuit, a), (\diamondsuit, \spadesuit)\}$

$B \times A = \{(1, \clubsuit), (1, \spadesuit), (1, \heartsuit), (1, \diamondsuit), (a, \clubsuit), (a, \spadesuit), (a, \heartsuit), (a, \diamondsuit), (\spadesuit, \clubsuit), (\spadesuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit), (\spadesuit, \diamondsuit)\}$

d) Diskuter, hvorfor grafen for en funktion $f : A \to B$ er en delmængde af $A \times B$.

Svar: Det cartesiske produkt $A \times B$ tildeler så at sige alle elementer i B til hvert element i A, mens en funktion $f : A \to B$ tildeler et unikt element i B til hvert element i A.

Tag som eksempel A og B som ovenfor, og definer f ved $f(\clubsuit) = 1$, $f(\spadesuit) = \spadesuit$, $f(\heartsuit) = \spadesuit$, $f(\diamondsuit) = a$. Grafen for funktionen er

$$\{(\clubsuit, 1), (\spadesuit, \spadesuit), (\heartsuit, \spadesuit), (\diamondsuit, a)\}$$

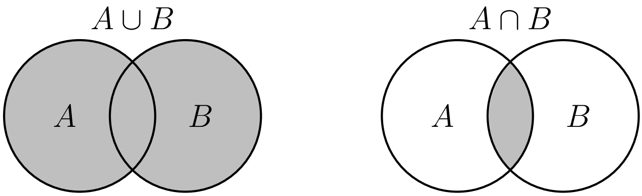
som er en delmængde af $A \times B$.

Fra ugeseddel (2)

Kardinaliteten af en mængde A (skrives $|A|$) beskriver antallet af elementer i en mængde. Brug et venndiagram til at forklare ligheden

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

for endelige mængder.



Svar: Ud fra ovenstående figur (ved at lade arealet af et gråt område svare til kardinaliteten af en mængde) kan vi se, at

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

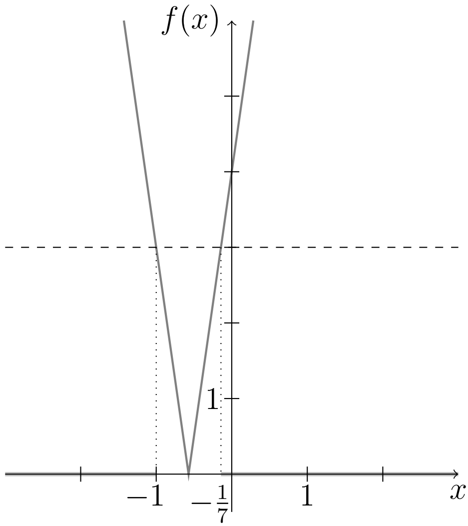
hvilket kan omskrives til det ønskede resultat (hvis de to mængder er endelige!)

Intervaller på den reelle akse

a) Bestem værdimængden for funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |7x + 4|$$

Svar: Værdimængden for f er $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.



b) Beskriv mængden $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |7x + 4| \geq 3\}$ som foreningen af intervaller, og visualiser løsningen på den reelle linje.

Svar: Løsningen er allerede skitseret på figuren ovenfor. Beskrivelse som intervaller: $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{7}, \infty\right)$.

Afsnit P.1, side 10

Løs de følgende uligheder, og beskriv svaret ved hjælp af (foreninger af) intervaller.

Opgave 18: $x^2 < 9$

Svar: $x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$

Opgave 20: $\frac{x+1}{x} \geq 2$

Svar: Der er to cases: $x < 0$ eller $x > 0$.

I det første tilfælde har vi $\frac{x+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \leq 2x \Leftrightarrow 1 \leq x$, men da x er negativ, giver dette ikke mening!

I det andet tilfælde har vi $\frac{x+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2x \Leftrightarrow 1 \geq x$

Løsningen er altså $x \in (0, 1]$.

Opgave 22: $6x^2 - 5x \leq -1$

Svar: $6x^2 - 5x \leq -1 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \leq 0$

Løsningen vil altså være $x \in (x_1, x_2)$, hvor x_1 og x_2 er løsninger til ligningen $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{(-5)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{(-5)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Så løsningen er $6x^2 - 5x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

1 (4) Afsnit P.4, side 32

Opgave 7: Hvilken af graferne på figur P.56 er grafer for funktioner $y = f(x)$? Hvorfor?

Svar: Da en funktion pr. definition tildeler præcis én værdi til hvert element i definitionsmængden, kan graferne (a), (c) og (d) ikke være grafer for funktioner $y = f(x)$ (dog kunne graf (a) godt være grafen for en funktion $x = f(y)$). Graf (b) kan dog godt være graf for en funktion, da der netop er én y-værdi for hver x-værdi (lodrette linje skærer grafen højst en gang).

Opgave 8 (ikke gennemgået i timen): Hvilke grafer på figur P.57 svarer til hvilke af følgende funktioner? (i) $x - x^4$, (ii) $x^3 - x^4$, (iii) $x(1-x)^2$, (iv) $x^2 - x^3$.

Svar: Alle funktionerne er kontinuerte og har nulpunkter i 0 og 1, så vi ser på, hvordan de opfører sig mellem og omkring de to punkter.

(i) $x - x^4$ er positiv i intervallet $(0, 1)$ (og kun der) og opfører sig som x omkring 0. Dette svarer til graf (c).

(ii) $x^3 - x^4$ er positiv i intervallet $(0, 1)$ og opfører sig som x^3 omkring 0. Dette svarer til graf (d).

(iii) $x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$ er positiv i intervallet $(0, 1)$ og for $x > 1$. Dette svarer til graf (a).

(iv) $x^2 - x^3$ svarer til graf (b).

(5) Polynomier

Lad $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være polynomier med

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

a) og b) Bestem polynomierne $f \circ g$ og $g \circ f$, find deres simpleste repræsentation, og bestem deres grad.

Svar: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1 = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 = x^4 - x^2 + 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x^2 + x + 1)^2 - 1 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x$

$f \circ g$ og $g \circ f$ er altså begge fjerdegradspolynomier.

c) Bestem summen $f + g$, differensen $f - g$ og produktet $f \cdot g$, og bestem deres grad.

Svar: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + 1 + x^2 - 1 = 2x^2 + x$ er et andengradspolynomium.

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x + 1 - x^2 + 1 = x + 2$ er et førstegradspolynomium.

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 1) = x^4 - x^2 + x^3 - x + x^2 - 1 = x^4 + x^3 - x - 1$ er et fjerdegradspolynomium.