# MM529 E-timer
# 131002

Kathja Fuglø

# (1)

**a)** Opgaver fra bogen

**Afsnit 2.4 opgave 4:** Differentier $f(x) = \sqrt{1-3x^2}$.

**Svar:** Vi bruger kædereglen med $f(x) = g(h(x))$, hvor

$$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$h(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow h'(x) = -6x$$

Så får vi

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1-3x^2}} \cdot (-6x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$$

**Afsnit 2.4 opgave 23** Beregn den afledede til

$$h(x) = f\left(5x - x^2\right)$$

som en funktion af $f'$, hvor $f$ er differentiabel.

**Svar:** Vi sætter

$$g(x) = 5x - x^2 \Rightarrow g'(x) = 5 - 2x$$

Vi kan nu bruge kædereglen, så vi får

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'\left(5x - x^2\right) \cdot (5 - 2x)$$

**Afsnit 2.5 opgave 14** Differentier $f(x) = \sin(2\cos x)$.

**Svar:** Vi bruger igen kædereglenmed $f(x) = g(h(x))$, hvor

$$g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$$

$$h(x) = 2\cos x \Rightarrow h'(x) = -2\sin x$$

Så får vi

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos(2\cos x) \cdot (-2\sin x)$$

$$= -2\cos(2\cos x)\sin x$$

**Afsnit 2.5 opgave 30** Differentier $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

**Svar:** Vi bruger brøkreglen med $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, hvor

$$g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$$

$$h(x) = 1 + \sin x \Rightarrow h'(x) = \cos x$$

Vi får så

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x + \sin x^2 + \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x + 1}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x}$$

**b)** Brug kædereglen til at bevise, at hvis $f(x) > 0$ er differentiabel, så

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

**Svar:** Vi definerer $h(x) = g(f(x))$ med $g(x) = \sqrt{x}$. Så er $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dette sætter vi ind i kædereglen:

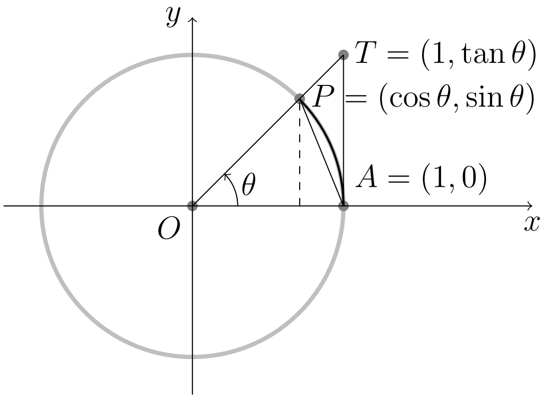
$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

og får det ønskede resultat.$\square$

# (2)

**a)** Bevis, at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (Sætning 8 i afsnit 2.5). Følg argumentationen på side 121-122 i bogen (beviset for samme sætning).

**Svar:** Lad $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, og repræsenter $\theta$ som på nedenstående figur:




Vi kan se, at arealet af cirkeludsnittet $OAP$ ligger mellem arealerne af trekanterne $OAP$ og $OAT$. Arealet af et cirkeludsnit med radius 1 og vinkel $\theta$ er $\frac{\theta}{2}$. Arealet af en trekant er $\frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$, så

$$\text{Arealet af } \triangle\, OAP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\theta = \frac{\sin\theta}{2}$$

$$\text{Arealet af } \triangle\, OAT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan\theta = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

Det vil sige, at

$$\frac{\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} \iff 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\iff 1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Da $\lim_{\theta\to 0_+}\cos\theta = 1$, har vi via sandwichsætningen, at

$$\lim_{\theta\to 0_+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Da $\sin\theta$ og $\theta$ begge er ulige funktioner af $\theta$, er $\frac{\sin\theta}{\theta}$ en lige funktion. Derfor er

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0_-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0_+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

som vi ønskede at vise. $\square$

**b)** Find $a$, sådan at

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{hvis} \quad x \neq 0 \\ a & \text{hvis} \quad x = 0 \end{cases}$$

**Svar:** Definitionen af kontinuitet af en funktion $f$ i et punkt $c$ er, at $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$. Derfor skal

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**c)** Brug a) til at finde den afledede af funktionen $g(x) = \sin x$ som grænseværdi af differenskvotienten.

**Svar:** Differenskvotienten for $g(x) = \sin x$ i $x_0 = 0$ er

$$D(g(x)) = \frac{sinx - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

så den afledede er

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Afsnit 9.1, opgave 20:** (fra sidste uge) $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

**Svar:** Vi kan nu løse denne denne opgave ved at definere $x = \frac{1}{n}$, så vi får

$$\lim_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

# (3)

**a)** Bestem den afledede af functionen

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$$

**Svar:** Vi bruger kædereglen og produktreglen samt oversigten "elementary derivatives" i bogens omslag og får

$$f(x) = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} - x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x}$$

**b)** Brug resultatet til at vise, at funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

ikke er differentiabel i $x = 0$.

**Svar:** $g$ er differentiabel i $x = 0$, hvis $\lim_{x \to 0} f'(x)$ eksisterer (og er endelig) i $x = 0$. Derfor vil vi se vi på denne grænseværdi. Først kan vi konstatere, ved at sætte $t = \frac{1}{x}$, at $\lim_{x \to 0_+} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to \infty} \sin t$ ikke eksisterer, men også at $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$. På samme måde kan vi konstatere, at $\lim_{x \to 0_+} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{t \to \infty} t \cos t$ heller ikke eksisterer. Sidstnævnte får endda større og større udsving i nærheden af $x = 0$. $g'$ er altså i nærheden af nul differensen mellem noget, der har begrænsede udsving, og noget, der har ubegrænsede udsving, og har derfor ikke en grænseværdi for $x \to 0$. $g$ kan derfor ikke være differentiabel i $x = 0$.

**c)** Brug sandwichsætningen til at vise, at $g$ er kontinuert i $x = 0$.

**Svar:** For at bruge sandwichsætningen, skal vi finde to funktioner $h_1(x)$ og $h_2(x)$, der overholder

$$h_1(x) \leq g(x) \leq h_2(x) \text{ og } \lim_{x \to 0} h_1(x) = \lim_{x \to 0} h_2(x) = 0$$

Da $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ for alle $x$, hvor funktionen er defineret (det vil sige $x \neq 0$), har vi $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$, og vi ved, at $\lim_{x \to 0} -|x| = \lim_{x \to 0} |x| = 0$. Derfor får vi også $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$, så $g(x)$ er kotinuert i $x = 0$.

# (4) Den afledede af den inverse

**a)** Bestem den afledede af den inverse $f^{-1}$ til $f(x) = \sin x$.

**b)** Diskuter definitionsmængden og værdimængden for den inverse og dennes afledede.

**Svar:** Da sinus ikke er bijektiv og derfor teknisk set ikke har en invers, antager vi, at vi skal bestemme den afledede af $\sin^{-1} x$ som den sædvanligvis er defineret. Vi bruger formlen for afledede af inverse:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

Da Værdimængden for $\sin^{-1}$ er $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, og cosinus er positiv på dette interval, kan cos erstattes med $|\cos| = \sqrt{\cos^2}$, så vi får

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\sin^{-1} x)}}$$

Desuden har vi $\cos^2 + \sin^2 = 1$, så vi får

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

defineret på intervallet $(-1, 1)$, mens $\sin^{-1}$ er defineret på intervallet $[-1, 1]$. Værdimængden for $(f^{-1})'$ er $[1, \infty)$: Nævneren er størst i $x = 0$, hvor $\sqrt{1 - x^2} = 1$. Når $x$ nærmer sig 1, vil nævneren nærme sig 0.

# (5)

**a)** Find alle kandidater til ekstrema for funktionen $f(x) = 4(x-2)^5 + 2$.

**Svar:** For at finde ekstrema skal vi først bestemme den afledede $f'(x)$. For at undgå at gange parentesen ud bruger vi kædereglen:

$$f'(x) = 4 \cdot 5(x - 2^4) \cdot 1 = 20(x-2)^4$$

Da $x = 2$ er den eneste rod i $f'$, er dette også den eneste kandidat til et ekstremum for $f$.

**b)** Afgør, om disse kandidater er ekstrema eller vendepunkter.

**Svar:** Hvis $x = 2$ er et ekstremum, skifter den afledede fortegn i punktet. Ellers har den samme fortegn på begge sider. Vi bestemmer derfor $f'(1)$ og $f'(3)$:

$$f'(1) = 20(1-2)^4 = 20, \quad f'(3) = 20(3-2)^4 = 20$$

Det vil sige, at $x = 2$ er et vendepunkt for $f(x)$.

**c)** Find ekstrema, vendepunkter og intervaller, hvor $f$ er konveks og konkav for funktionen $f(x) = \sin(2x+\pi)$.

**Svar:** Først kan vi gøre $f$ lidt pænere ved at bruge additionssætningen for sinus:

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(2x + \pi) = \sin(2x)\cos\pi + \sin\pi\cos(2x)$$
$$= \sin(2x)\cdot(-1) + 0\cdot\cos(2x) = -\sin(2x)$$

For at finde extrema og vendepunkter skal vi bruge $f'$ og $f''$ og deres nulpunkter, samt fortegn for $f''$ (i resten af besvarelsen er $n$ et vilkårligt heltal):

$$f'(x) = -2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(2n+1)\pi}{4}$$

$$f''(x) = 4\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x = n\pi \Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi\right)$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

Ud fra alle disse ligninger samt nogle oplysninger fra Stephans slides kan vi finde det ønskede. Fra Stephans slides bruger vi, at et minimum findes, hvor $f' = 0$ og $f'' > 0$, og et maximum, hvor $f' = 0$ og $f'' < 0$, så minima findes ved $x = \frac{(4n+1)\pi}{4}$ og maxima ved $x = \frac{(4n+3)\pi}{4}$.

Vendepunkter findes, hvor $f'' = 0$ og $f''' \neq 0$ (sidstnævnte er altid tilfældet, når $f'' = 0$ for denne funktion), så disse findes ved $x = \frac{n\pi}{2}$.

Til sidst har vi, at $f$ er konveks, når $f'' > 0$, hvilket er tilfældet for $x \in \left(n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$, og konkav, når $f'' < 0$, hvilket er tilfældet for $x \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi\right)$.

## (6)

**a)** Bestem de følgende grænser, og brug l'Hôpitals regel, hvis det er nødvendigt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-12x+16},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$$

**Svar: i)** Vi ved allerede, at $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

**ii)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x}=0$, da $2^2-4=0$ og $2\cdot 2=4$.

**iii)** Da $2^2-4\cdot 2+4=0$ og $2^3-12\cdot 2+16=0$, kan vi bruge l'Hôpitals regel her:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-12x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{3x^2-12}$$

Da $2\cdot 2-4=0$ og $3\cdot 2^2-12=0$, bruger vi l'Hôpitals regel igen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{6x}=\frac{1}{6}$$

**iv)** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}$ kan vi også bestemme ved hjælp af l'Hôpitals regel, da $\tan^2 0=0$ og $0^2=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sec^2 x}{2x}$$

Da tæller og nævner stadig er nul i $x = 0$, bruger vi l'Hôpitals regel igen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x \sec^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(2-\cos(2x))\sec^4 x}{2} = 1$$

**v)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \infty$, da tælleren er positiv og nævneren er nul i $x = 0$.

**b)** Diskuter de tilfælde, hvor der ikke er brug for l'Hôpitals regel. Hvad ville der ske, hvis vi alligevel anvendte den de steder?

**Svar:** De steder, vi ikke har brugt l'Hôpitals regel, er i), ii) og v). Vi vil nu se, hvad der sker, hvis vi alligevel anvender den:

**i)** Da $\sin 0 = 0$, kan l'Hôpitals regel faktisk bruges her, og vi får $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

**ii)** Vi prøver at bruge l'Hôpitals regel ved at differentiere tæller og nævner og får:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} = 2 \neq 0$$

Vi får altså her en forkert grænseværdi.

**v)** Vi prøver igen at differentiere tæller og nævner:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} - \frac{1}{2}$$

**c)** For funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{hvis } x \le 0 \\ e^x & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

bestem grænseværdien fra højre for differenskvotienten i $x = 0$, og sammenlign med grænseværdien fra venstre. Er $f$ kontinuert og/eller differentiabel i $x = 0$? Skitser grafen for $f$.

**Svar:** Da både $1 + x$ og $e^x$ er definerede i $x = 0$, og $1 + 0 = 1 = e^0$, er $f(x)$ kontinuert i $x = 0$. Da begge funktioner yderligere er differentiable i $x = 0$ og $(e^x)' = e^x$ og $(1 + x)' = 1$ og $e^0 = 1$ (stadig), og da grænseværdien for differenskvotienten per definition er den afledede er $f$ også differentiabel i $x = 0$.

Plot af $f$