MM529 E-timer
131106

Kathja Fuglø

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

a) Bestem gradienten for f, og find en simpel repræsentation af funktionerne $g(x) = f(x,0)$ og $h(y) = f(0,y)$.

Svar: Gradienten er defineret ved:

$$\nabla f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

For at finde en simpel repræsentation af $g(x)$, sætter vi $y = 0$ i f:

$$g(x) = f(x,0) = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

På samme måde får vi $h(y) = |y|$.

b) Bestem alle retningsafledede i $\boldsymbol{a} = (0,0)$. Forklar, hvorfor det ikke virker at bruge gradienten.

Svar: Vi kan ikke bruge gradienten til at finde de retningsafledede i $(0,0)$ ved hjælp af gradienten, fordi gradienten for f ganske simpelt ikke er defineret i dette punkt: Det ville resultere i division med nul!

For en enhedsvektor $\boldsymbol{v}$, er den retningsafledede i et punkt er defineret som

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(\boldsymbol{a} + hv) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

Ved at indsætte vores f og a får vi

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\sqrt{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} - \sqrt{0^2 + 0^2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{\sqrt{h^2(v_1^2 + v_2^2)}}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{h\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{h}{h} = 1$$

hvor den næstsidste lighed skyldes, at $\boldsymbol{v}$ er en enhedsvektor.

c) For $\boldsymbol{a} = (1,2)$ find den retningsafledede i retning mod $(1,-1)$, og bestem den stejleste stigning i $\boldsymbol{a}$ og dens retning.

Svar: Vi starter med at finde den stejleste stigning og dennes retning, da disse er givet ved henholdsvis gradientens længde og retning, og vi skal bruge gradienten til den første del af denne delopgave.

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f(1,2)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1 \end{aligned}$$

Det vil sige, at den stejleste stigning er 1, og at den tilsvarende retning er direkte væk fra $(0,0)$ (da $\nabla f(1,2)$ har samme retning som punktet $(1,2)$). Dette er, hvad vi burde forvente, da den givne funktion $f(x,y)$ måler afstanden fra $(0,0)$ til (x,y), og afstanden til $(0,0)$ åbenlyst stiger hurtigst i retning direkte væk fra $(0,0)$, og den altid vil stige så hurtigt, som man bevæger sig væk.

Til første del af opgaven skal vi bruge gradienten og en enhedsvektor $\boldsymbol{v}$ i retning mod $(1, -1)$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-3)^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

For at finde den retningsafledede bruger vi den definition der siger, at dette er prikproduktet mellem gradienten og en retningsvektor i den ønskede retning:

$$D_{\boldsymbol{v}} f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2)

a) For funktionen $f(w,x,y,z) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ og punktet $\boldsymbol{a} = (1,1,3,5)$, bestem retningen og størrelsen af den største stigning af f i $\boldsymbol{a}$.

Svar: Svaret på denne opgave består blot i at bestemme gradienten i $(1,1,3,5)$ og dennes længde:

$$\nabla f(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 2w \\ 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(1,1,3,5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(\boldsymbol{a})\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4 + 36 + 100} = \sqrt{144} = 12$$

Det vil sige, at den største stigning forekommer i retning direkte væk fra $\mathbf{0}$, og at størrelsen af stigningen i den retning for punktet $\boldsymbol{a}$ er 12.

Afsnit 12.7, opgave 17: I hvilke retninger er den retningsafledede til funktionen $f(x,y) = xy$ i punktet $(2,0)$ -1? Er der retninger, hvor den retningsafledede er -3? Hvad med -2?

Svar: For at finde en retning, hvor den retningsafledede er -1, skal vi finde en enhedsvektor $\boldsymbol{v}$, sådan at $\nabla f(2,0) \cdot \boldsymbol{v} = -1$. Derfor starter vi med at bestemme gradienten til $f(2,0)$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nu kan vi sætte de ligninger op, som vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ skal overholde. For det første skal prikproduktet være -1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -1 \Leftrightarrow 2v_2 = -1 \Leftrightarrow v_2 = -\frac{1}{2}$$

Desuden skal $\boldsymbol{v}$ være en enhedsvektor:

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow v_1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow v_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Det vil sige, at den retningsafledede $D_{\boldsymbol{v}}f$ er -1 for $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{4}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Den retningsafledede i en given retning $\boldsymbol{v}$ i et punkt $\boldsymbol{a}$ overholder altid $|D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})| \leq \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.

Da $\|\nabla f(2,0)\| = 2 < |-3|$, kan der ikke være nogen retning, hvor den retningsafledede er -3.

Da gradienten angiver retningen for den største stigning, og dens længde angiver denne stigning, vil den retningsafledede i retning af gradienten for denne funktion være 2, hvilket betyder, at i retning stik modsat af gradienten vil den retningsafledede være -2.

Afsnit 12.7, opgave 18 I hvilke retninger vokser $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ halvt så hurtigt som den største stigning i punktet (a,b,c)?

Svar: Givet en enhedsvektor $\boldsymbol{v}$ med vinkel θ til ∇f, er den retningsafledede i retning $D_{\boldsymbol{v}} f = |\nabla f| \cdot \cos\theta$. Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, har vi halvdelen af den maksimale stigning i alle de retninger, der danner en vinkel på 60° med gradienten. Nu mangler vi bare at bestemme gradienten:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(a,b,c) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ -2c \end{pmatrix}$$

Det vil sige, at $f(x,y,z)$ vokser halvt så hurtigt som sin største stigning i punktet (a,b,c) i alle de retninger, der danner en vinkel på 60° med vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix}$.

(3)

Find de kritiske punkter, klassificer dem som ekstrema eller saddelpunkter, og i tilfælde af kritiske punkter, afgør, om de er minima eller maksima.

Generelt svar: Kritiske punkter er de punkter, hvor $\nabla f = \mathbf{0}$. Første punkt er derfor at finde gradienten, og løse ligningen $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$. Dernæst bruger vi, at $\boldsymbol{a}$ er et saddelpunkt, hvis $f_{xx}(\boldsymbol{a})f_{yy}(\boldsymbol{a}) - (f_{xy}(\boldsymbol{a}))^2 < 0$; $\boldsymbol{a}$ er et ekstremum, hvis $f_{xx}(\boldsymbol{a})f_{yy}(\boldsymbol{a}) - (f_{xy}(\boldsymbol{a}))^2 > 0$; ekstrema er lokale minima, hvis $f_{xx}(\boldsymbol{a}) > 0$ og lokale maksima, hvis og $f_{xx}(\boldsymbol{a}) < 0$.

Afsnit 13.1, opgave 4: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Svar: Først bestemmer vi gradienten og sætter den lig med $\mathbf{0}$:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x^3 = y \wedge y^3 = x$$

Hvis vi sætter den første ligning ind i den anden, får vi $x^9 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$. Når vi så sætter $y = x^3$, får vi $\boldsymbol{a} = (-1, -1) \vee \boldsymbol{a} = (0, 0) \vee \boldsymbol{a} = (1, 1)$.

Så bestemmer vi de partielle afledede af anden orden:

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = -4$$

Nu kan vi klassificere de kritiske punkter:

$$f_{xx}(-1, -1) = f_{yy}(-1, -1) = 12, \quad f_{xy}(-1, -1) = -4$$

$$\Rightarrow f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - (f_{xy}(-1,-1))^2$$
$$= 12^2 - (-4)^2 = 128$$

så $(-1,-1)$ er et lokalt minimum.

$$f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = 12, \quad f_{xy}(1,1) = -4$$

$$\Rightarrow f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - (f_{xy}(1,1))^2 = 12^2 - (-4)^2 = 128$$

så $(1,1)$ er også et lokalt minimum.

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = -4$$

$$\Rightarrow f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = -(-4)^2 = -16$$

så $(0,0)$ er et lokalt maksimum.

Afsnit 13.1, opgave 6: $f(x, y) = \cos(x + y)$

Svar: Først bestemmer vi gradienten og sætter den lig med $\mathbf{0}$:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y = n\pi$$

Vi bestemmer de partielle afledede af anden orden:

$$f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = -\cos(x + y)$$

Det vil sige, at $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ overalt. Vi må altså bruge en anden metode til at klassificere de kritiske punkter. Vi ved, at cosinus til et reelt tal altid er mellem -1 og 1. For n lige har vi $\cos(n\pi) = 1$ så her er der globale (og dermed også lokale) maksima. For n ulige har vi $\cos(n\pi) = -1$, så her har vi globale (og lokale) minima.

Afsnit 13.1, opgave 8: $f(x,y) = \cos x + \cos y$

Svar: Først bestemmer vi gradienten og sætter den lig med $\mathbf{0}$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\sin y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\pi \\ m\pi \end{pmatrix}$$

Vi bestemmer de partielle afledede af anden orden:

$$f_{xx}(x,y) = -\cos x, \quad f_{yy}(x,y) = -\cos y, \quad f_{xy}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow f_{xx}(n\pi, m\pi) f_{yy}(n\pi, m\pi) - (f_{xy}(n\pi, m\pi))^2$$
$$= (-\cos(n\pi))(-\cos(m\pi)) = \cos(n\pi)\cos(m\pi)$$

er positiv, når n og m er begge lige eller ulige, og negativ, når den ene er lige og den anden ulige. I det sidste tilfælde er der altså tale om et saddelpunkt. I det første tilfælde vil der være tale om et maksimum, når de er lige, og et minimum, når de er ulige.

Afsnit 13.1, opgave 10: $f(x,y) = \frac{xy}{2+x^4+y^4}$

Svar: Først bestemmer vi gradienten og sætter den lig med $\mathbf{0}$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y(2+x^4+y^4)-4x^3xy}{(2+x^4+y^4)^2} \\ \frac{x(2+x^4+y^4)-4y^3xy}{(2+x^4+y^4)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y(2-3x^4+y^4)}{(2+x^4+y^4)^2} \\ \frac{x(2+x^4-3y^4)}{(2+x^4+y^4)^2} \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y) = 0$, når $x = y = 0$. Hvis vi kigger på forskriften for f, kan vi se, at $f(x,y) = 0$, når $x = 0$ eller $y = 0$, og at den er positiv, når x og y har samme fortegn, og negativ, når de har modsat fortegn. $(0,0)$ er altså et saddelpunkt. Desuden har vi, at $\nabla f(x,y) = 0$, når $2 - 3x^4 + y^4 = 2 + x^4 - 3y^4 = 0$. Hvis vi tager den første lighed i den ligning, får vi

$$2 - 3x^4 + y^4 = 2 + x^4 - 3y^4 \Leftrightarrow 4y^4 = 4x^4 \Leftrightarrow y = \pm x$$

Hvis vi sætter det ind i den anden lighed, får vi

$$2 + x^4 - 3(\pm x)^4 = 2 - 2x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Det vil sige, at der også er kritiske punkter i $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ og $(1,-1)$. Da $f(x,y)$ går mod nul, når afstanden fra $(0,0)$ til (x,y) går mod uendelig, er $(1,1)$ og $(-1,-1)$ lokale (og globale) maksima, mens $(-1,1)$ og $(1,-1)$ er minima.

(4)

Afsnit 13.1, opgave 20 Find maksimum og minimum for

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

Svar: f har samme fortegn som x, og f går mod nul, når afstanden fra $(0,0)$ til (x,y) går mod uendelig. Maksimum og minimum vil altså forekomme, når x er henholdsvis positiv og negativ. Yderligere vil den absolutte værdi af f være størst for en given x-værdi, når $y=0$. Vi kan derfor finde maksimum og minimum for $f(x,y)$ ved at finde dem for $g(x)=f(x,0)$. Dette gør vi ved først at differentiere g:

$$g'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Det vil sige, at minimum for f ligger i $(-1,0)$ og er $f(-1,0) = \frac{-1}{1+(-1)^2+0^2} = -\frac{1}{2}$, og maksimum ligger i $(1,0)$ og er $f(1,0) = \frac{1}{2}$.

Afsnit 13.1, opgave 22 Find minimum for $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ i første kvadrant. Hvordan kan vi vide, at der findes et minimum?

Svar: f går mod uendelig, når x eller y går mod nul eller uendelig. Yderligere er funktionen positiv på hele første kvadrant. Der må altså findes et minimum. For at finde dette minimum bestemmer vi gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x^2 y} \\ 8 - \frac{1}{xy^2} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} \\ \frac{1}{xy^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Det vil sige, at $y = x^{-2}$ og $8y^2 = x^{-1}$, så $8x^{-4} = x^{-1} \Leftrightarrow 8 = x^3 \Leftrightarrow x = 2$ (vi husker, at x skal være positiv). Så får vi, at $y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. Minimum for f er altså

$$f\left(2, \frac{1}{4}\right) = 2 + 8 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 + 2 + 2 = 6$$