MM529 E-timer
130925

Kathja Fuglø

(5)

Se på følgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, hvor $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$.

a) Vis, at $a_n < \varepsilon$ holder for $\varepsilon > 0$, når $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Svar: Antag $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Det medfører $2^n > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$, hvilket igen medfører $a_n = 2^{-n} < \varepsilon$, som var det, vi skulle vise.

b) Brug del a) til at retfærdiggøre, at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Svar: Del a) sammen med det faktum, at a_n er positiv for alle n, gør, at det passer ind i definitionen af konvergens (Definition 2 i afsnit 9.1).

c) Vis, at grænseværdien for følgen $(0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$ er 1.

Svar: Følgen kan opskrives som $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n = 1-10^{-n}$. Grænseværdien kan så bestemmes som differensen af grænseværdierne. Det er klart, at $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$, og $\lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$ kan bestemmes på samme måde som i del a) og b). Dette viser, at grænseværdien for følgen er 1.

d) Bestem grænseværdien for nedenstående følger. Vi bruger blandt andet regnereglerne for følger (øverst side 499 i 7.-udgaven).

Afsnit 9.1, opgave 14: $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

Svar: Vi kan starte med at forkorte brøken med n: $\frac{5-2n}{3n-7} = \dfrac{\frac{5}{n}-2}{3-\frac{7}{n}}$. Vi kan nu bestemme grænseværdien som en funktion af fire simplere grænseværdier, hvor to af dem er åbenlyse, og de andre to er givet i eksempel 4, afsnit 9.1. Vi får så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-2n}{3n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}-2}{3-\frac{7}{n}} = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

Afsnit 9.1, opgave 16: $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$

Svar: Igen forkorter vi brøken, denne gang med n^3, og får $\frac{n^2}{n^3+1} =$. Vi bestemme nu grænseværdien på samme måde som før:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

(1)

Bestem nedenstående summer.

Til dette formål benytter vi formlerne givet i Stephans slides samt på tredje side af afsnit 9.2 i bogen (bemærk, at denne fremgangsmåde afviger fra fremgangsmåden brugt til timen). Den relevante formel i Stephans slides er:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} n+1 & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

a)

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{\infty} 3^i$$

Til den første af summerne bruger vi ovenstående formel med $x = 3$ og får:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Til den anden bruger vi kassen i bogen med $a = 1$ og $r = 3$. Det giver os, at den uendelige sum divergerer mod ∞.

Del b) og c) løses på tilsvarende måder.

b)

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

$x = \frac{1}{3}$ giver:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - 3}{1 - 3} = \frac{3 - 3^{-n}}{2}$$

$a = 1$ og $r = \frac{1}{3}$ giver:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

c)

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^i \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i$$

$x = -\frac{1}{3}$ giver:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^i = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + 3}{1 + 3} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + 3}{4}$$

$a = 1$ og $r = -\frac{1}{3}$ giver:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

(2)

Se på summen

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)$$

a) Beregn summen for små værdier af n for at gætte den korrekte sum for arbitrære n.

Svar: Husk, at $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n$.

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{1}(2i+1) = 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$\sum_{i=0}^{2}(2i+1) = 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$\sum_{i=0}^{3}(2i+1) = 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$$

et godt gæt på en generel formel ville være

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

b) Retfærdiggør dit gæt ved at vise, at hvis det holder for $n-1$, så holder det også for n.

Svar: Igen bruger vi $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n$ og antager $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$. Så får vi

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Det vil sige, at vores gæt holder.

(3)

a) Brug mellemværdisætningen til at vise, at polynomiet $p(x) = x^3 - 2x + 3$ har en rod x_0 i intervallet $(-3,-1)$. Mellemværdisætningen er givet som sætning 9 i afsnit 1.4 (side 84 i 7.-udgaven) og siger, at hvis en funktion f er kontinuert på intervallet $[a,b]$ og $f(a) < s < f(b)$, så er der et tal $c \in (a,b)$ sådan at $f(c) = s$.

Svar: For at benytte mellemværdisætningen skal vi bestemme $p(-3)$ og $p(-1)$:

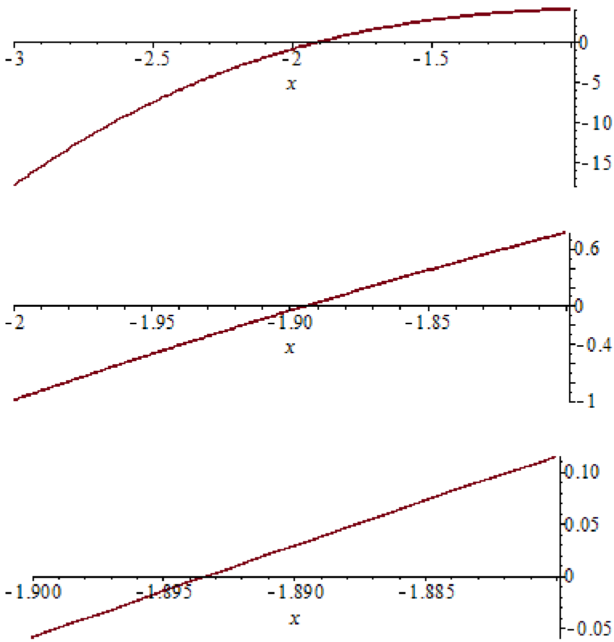
$$p(-3) = (-3)^3 - 2\cdot(-3) + 3 = -18$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1) + 3 = 4$$

Da $-18 < 0 < 4$ og $p(x)$ er kontinuert (det er polynomier generelt), findes der altså et $x_0 \in (-3,-1)$, sådan at $p(x_0) = 0$.

b) Find eksperimentelt et interval $(a, b), b - a \leq \frac{1}{100}$, sådan at $x_0 \in (a, b)$.

Svar: En måde at finde a og b kunne være at bruge principperne for binær søgning på intervallet $(-3, -1)$. En anden (nemmere og hurtigere) måde er at plotte funktionen for eksempel i maple. Det er den fremgangsmåde, vi vil bruge.



Ud fra figurerne kan vi se, at $x_0 \in (-1.895, -1.89)$

c) Har $p(x)$ andre rødder?

Svar: Hvis $p(x)$ har flere rødder, så vil det enten være x_1 eller x_2, hvor x_1 og x_2 er rødder i $p'(x)$, eller også vil $p(x_1)$ og $p(x_2)$ have forskellige fortegn. Derfor bestemmer vi $p'(x)$ og derefter x_1 og x_2 og til sidst $p(x_1)$ og $p(x_2)$.

$$p'(x) = 3x^2 - 2$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{-4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{6}}{6} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$p(x_1) \approx 4.09, \quad p(x_2) \approx 1.91$$

Da både x_1 og x_2 er positive, er x_0 den eneste rod.

(4)

a) Beregn differenskvotienten for $f(x) = x^2,\ x_0 = 0$ for $x = -2, -1, -\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, 1$. Differenskvotienten er givet ved $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Svar: Vi sætter $x_0 = 0$ og $f(x) = x^2$ ind i formlen:

$$D(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x$$

Det vil sige, at $D(-2) = -2,\ D(-1) = -1,$ $D\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{10},\ D\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100},\ D(1) = 1.$