MM529 E-timer
131211

Kathja Fuglø

(1) Løs separable "sædvanlige differentialligninger"

Dette gør vi, som beskrevet i bogen, ved at separere de variable og integrere begge sider af ligningen.

Afsnit 7.9, opgave 2: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-1}{x}$

Svar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-1}{x} \Leftrightarrow dy = \frac{3y-1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{3y-1}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{3y-1}dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y-\frac{1}{3}}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left|y-\frac{1}{3}\right| = \ln|x| + C \Leftrightarrow \ln\left|y-\frac{1}{3}\right| = 3\ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left|y-\frac{1}{3}\right|} = e^{3\ln|x|+C} = e^{3\ln|x|}e^{C} \Leftrightarrow y - \frac{1}{3} = e^{C}x^3$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{3} = e^{C}x^3 \Leftrightarrow y = e^{C}x^3 + \frac{1}{3}$$

Vi kan nu navngive konstanten $e^C = k$ for at gøre resultatet pænere, så vores løsning bliver

$$y = kx^3 + \frac{1}{3}$$

Afsnit 7.9, opgave 4: $\frac{dy}{dx} = x^2y^2$

Svar:

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^2 \Leftrightarrow y^{-2}dy = x^2dx$$
$$\Leftrightarrow \int y^{-2}dy = \int x^2dx$$
$$\Leftrightarrow -y^{-1} = \frac{x^3}{3}+C \Leftrightarrow y = -\left(\frac{x^3}{3}+C\right)^{-1} = -\frac{3}{x^3+3C}$$

Igen kan vi gøre resultatet lidt pænere, hvis vi navngiver konstanten $3C = k$, så vi får

$$y = -\frac{3}{x^3+k}$$

Afsnit 7.9, opgave 6: $\frac{dx}{dt} = e^x \sin t$

Svar:

$$\frac{dx}{dt} = e^x \sin t \Leftrightarrow e^{-x}dx = \sin t dt$$
$$\Leftrightarrow \int e^{-x}dx = \int \sin t dt$$
$$\Leftrightarrow -e^{-x} = -\cos t + C \Leftrightarrow e^{-x} = \cos t - C$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) = \ln(\cos t - C)$$
$$\Leftrightarrow -x = \ln(\cos t - C) \Leftrightarrow x = -\ln(\cos t - C)$$

Afsnit 7.9, opgave 8: $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

Svar:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$\Leftrightarrow \int dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$x + C = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan(x + C)$$

Eulers metode

Afsnit 18.3, opgave 1 (rettet til som beskrevet på ugesedlen)**:** Brug Eulers metode med trinstørrelse (a) $h = 1$ og (b) $h = \frac{1}{2}$ til at approksimere $y(2)$ givet, at $y' = x + y$ og $y(1) = 0$.

Svar: Vi bruger Iterationsformlen givet på side 1002 (949 i Seventh Edition):

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

hvor $f(x, y) = x + y$, og $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$, i vores tilfælde.

a)

$$x_1 = 1 + 1 = 2, \quad y_1 = 0 + 1(1 + 0) = 1$$

Det vil sige, at med $h = 1$ får vi, at $y(2) \approx 1$.

b)

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_1 = 0 + \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

(3) Heuns metode

Beskrevet i bogen som "improved Euler method" på side 1003-1004 (950-951 i Seventh Edition) samt på ugesedlen:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ u_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}, \end{aligned}$$

hvor $y' = f(x, y)$ og $y(x_0) = y_0$ er givet.

a) Estimer funktionsværdien $y(2)$ for løsningen y til $y' = y - x,\ y(0) = 0$ ved at bruge Heuns metode med intervallængde $h = \frac{1}{2}$. Sammenlign resultatet med resultatet af Eulers metode og med den korrekte løsning givet til forelæsningen.

Svar:

$$x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$u_1 = 0 + \frac{1}{2}(0 - 0) = 0,$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}\frac{(0-0) + \left(0 - \frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
$$u_2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{16},$$
$$y_2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{16} - 1\right)}{2} = -\frac{41}{64}.$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$u_3 = -\frac{41}{64} + \frac{1}{2}\left(-\frac{41}{64} - 1\right) = -\frac{187}{128},$$
$$y_3 = -\frac{41}{64} + \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{41}{64} - 1\right) + \left(-\frac{187}{128} - \frac{3}{2}\right)}{2} = -\frac{917}{512}.$$

$$x_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$
$$u_4 = -\frac{917}{512} + \frac{1}{2}\left(-\frac{917}{512} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3519}{1024},$$
$$y_4 = -\frac{917}{512} + \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{917}{512} - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3519}{1024} - 2\right)}{2} = -\frac{16273}{4096}$$
$$\approx -3.9729.$$

Værdien fundet ved brug af Eulers metode er $-\frac{33}{16} = -2,0625$, og den korrekte værdi er cirka $-4,389$. Vi kan altså se, at Heuns metode i dette tilfælde giver en langt bedre approksimering end Eulers metode.

b) Prøv at finde argumenter for, hvorfor Heuns metode for det meste giver bedre estimater end Eulers metode.

Svar: Kommer senere.

c) Diskuter, hvordan hældningen beregnes til et skridt af Runge-Kutta-metoden (side 1004-1005, side 951-952 i Seventh Edition). Lav en skitse.

Svar: Kommer senere.

(4)

For den lineære differentialligning $y'' - 2y' + y = \sin x$, find så mange løsninger, som du kan. *Hint:* Se på funktionerne $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = e^x$, $y = \sin x$ og $y = xe^x$, og tænk på løsningernes generelle struktur.

Svar: Løsninger til denne type ligninger (inhomogene lineære differentialligninger) er på formen $y = y_p + y_h$, hvor y_p er en specifik løsning til den inhomogene ligning, og y_h er en løsning til den tilsvarende homogene ligning, i dette tilfælde $y_h'' - 2y_h' + y_h = 0$.

Ud af de givne funktioner er $y_p = \frac{1}{2}\cos x$ en løsning til den givne inhomogene ligning, da

$$y_p = \frac{1}{2}\cos x \Rightarrow y_p' = -\frac{1}{2}\sin x, y_p'' = -\frac{1}{2}\cos x$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + y_p = -\frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \sin x.$$

Vi løser nu den tilsvarende homogene ligning ved at følge fremgangsmåden beskrevet på side 204-205 (203-204 i Seventh Edition). Vi skal først finde og løse dens karakteristiske ligning:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1.$$

Da vi har en karakteristisk ligning med kun en rod (eller to ens, alt efter hvordan man ser på det), er vi i case II, og løsningen til vores homogene ligning er

$$y_h = Ae^{rx} + Bxe^{rx} = Ae^{x} + Bxe^{x}.$$

Det vil sige, at generelle løsninger til ligningen vil være på formen

$$y + y_h = \frac{1}{2}\cos x + Ae^{x} + Bxe^{x}.$$

Her kan A og B bestemmes, hvis vi har et begyndelsesværdiproblem, hvor $y(x_0)$ og $y'(x_0)$ er givet (hvis kun $y(x_0)$ er givet, kan A skrives som funktion af B eller omvendt). I denne opgave har vi ikke nogen startværdier, så A og B er vilkårlige reelle tal.