MM529 E-timer
140205 og 140206

Kathja Fuglø

(1) Afsnit 18.6 (17.6 i 7. udgave)

Løs de følgende differentialligninger ved variation af parametre (for de sidste to på intervallet $(0, \infty)$). For at løse de inhomogene ligninger bruger vi metoden beskrevet i Stephans slides fra forelæsning 15. Her er det givet, at for at løse en ligning på formen $y'' + ay' + by = g(x)$, skal vi først finde løsningen til den tilsvarende homogene ligning på formen $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. For at finde en specifik løsning til den inhomogene ligning erstatter vi konstanterne med (endnu ukendte) funktioner af x, så vi har en løsning på formen $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Efter en lang række udregninger og antagelser får vi så, at

$$c_1(x) = \int \frac{-g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx,$$

$$c_2(x) = \int \frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx.$$

Opgave 14: $y'' + y' - 2y = e^x$.

Svar: Vi løser først ligningen $y'' + y' - 2y = 0$. Karakteristisk ligning:

$$r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Det vil sige, at

$$c_1(x) = \int \frac{-e^x e^{-2x}}{e^x\left(-2e^{-2x}\right) - e^x e^{-2x}} dx$$

$$= \int \frac{-e^{-x}}{-3e^{-x}} xd = \int \frac{1}{3} dx = \frac{x}{3} + c_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^x e^x}{e^x\left(-2e^{-2x}\right) - e^x e^{-2x}} dx$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{-3e^{-x}} dx = \int -\frac{e^{3x}}{3} = -\frac{e^{3x}}{9} + c_2$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x}{3} e^x - \frac{e^{3x}}{9} e^{-2x} = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^x$$

$$y = y_p + y_h = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Opgave 18: $x^2y'' + xy' - y = x$.

Svar: (Husk, at vi hele tiden antager $x > 0$). Den tilsvarende homogene ligning, $x^2y'' + xy' - y = 0$, er en eulerligning. Vi bruger metoden variabelskift beskrevet i bogen (under opgaverne til afsnit 18.5 – og godt nok kun beskrevet for homogene ligninger), hvor vi sætter $x = e^t \Rightarrow z(t) = y\left(e^t\right)$, så $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x) \Leftrightarrow az'' + (b-a)z' + cz = g\left(e^t\right)$.

Vi får så ligningen $z'' - z = e^t$. Så opstiller vi den karakteristiske ligning for dennes tilsvarende homogene ligning:

$$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \vee r = 1.$$

$$\Rightarrow y_h = C_1e^{-t} + C_2e^t = C_1x^{-1} + C_2x$$

Vi bruger samme metode som i forrige opgave til at finde løsningen til den inhomogene ligning:

$$c_1(t) = \int \frac{-e^te^t}{e^{-t}e^t - \left(-e^{-t}\right)e^t}dt = -\int \frac{e^{2t}}{2}dt = -\frac{e^{2t}}{4} + C_1,$$

$$c_2(t) = \int \frac{e^te^{-t}}{e^{-t}e^t - \left(-e^{-t}\right)e^t}dt = \int \frac{1}{2}dx = \frac{t}{2} + C_2$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{e^{2t}}{4}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t = \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4} + C_1x^{-1} - C_2x.$$

Opgave 20: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

Svar: (Husk, at vi hele tiden antager $x > 0$). Vi løser denne på samme måde som opgave 16. Først løser vi den homogene ligning $y'' + 4y' + 4y = 0$. Karakteristisk ligning:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2.$$

Vi er derfor i **CASE II** i afsnit 3.7, og vores løsning er på formen $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$. Vi finder nu $c_1(x)$ og $c_2(x)$:

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \frac{-\frac{e^{-2x}}{x^2} x e^{-2x}}{e^{-2x}\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) - \left(-2e^{-2x}\right) xe^{-2x}} dx \\
&= \int \frac{-x^{-1} e^{-4x}}{e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x}} dx \\
&= \int -x^{-1} dx = -\ln x + c_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2(x) &= \int \frac{\frac{e^{-2x}}{x^2} e^{-2x}}{e^{-2x}\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) - \left(-2e^{-2x}\right) xe^{-2x}} dx \\
&= \int \frac{x^{-2} e^{-4x}}{e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x}} dx \\
&= \int x^{-2} dx = -x^{-1} + c2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_p = -e^{-2x} \ln x - x^{-1} x e^{-2x} = -e^{-2x} \ln x - e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y = -e^{-2x} \ln x - e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

(2) Afsnit 9.4

Vi skal i de følgende to opgaver bestemme det mindste positive heltal n, for hvilket delsummen s_n er inden for $\frac{1}{1000}$ af s, hvor $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Det er givet i Stephans slides, at $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$. Vi skal derfor finde det mindste positive heltal n, for hvilket $|a_{n+1}| < \frac{1}{1000}$.

Opgave 14: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

Svar: $|a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (2n+2)! > 1000$. Vi kan løse denne ligning ved brug af WolframAlpha (eller ved at prøve os frem ved at sætte værdier ind) og får så, at $n = 3$ er det mindste n, der opfylder, at $|a_{n+1}| < 0.001$, og dermed, at s_n er inden for $\frac{1}{1000}$ af s.

Opgave 16: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

Svar: $|a_{n+1}| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \geq 12$. Her giver WolframAlpha løsningen $n = 84$, men hvis man prøver sig frem ved at sætte værdier ind, finder man, at løsningen er 12.

Betinget konvergens

Se på den alternerende harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

a) Estimer summen med en fejl mindre end $\frac{1}{10}$.

Svar: Vi finder først et n, for hvilket $|a_{n+1}| < \frac{1}{10}$. Da $|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$, er det mindste n, vi kan bruge, $n = 10$. Vi får så

$$s \approx s_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520}$$

b) Omarranger leddene i følgen til den følgende rækkefølge:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots$$

og overbevis dig selv om, at alle leddene fra den oprindelige række forekommer med det korrekte fortegn.

Svar: I den oprindelige sum har alle led med lige nævner negativt fortegn, og leddene med ulige nævner har positivt fortegn. Dette er også tilfældet her. Yderligere har vi alle led med ulige nævner parret med leddet med den dobbelte nævner. Det eneste, der så mangler, er alle leddene med en nævner, der er delelig med fire, og disse led findes uden for parenteserne.

c) Relater summen opnået ved at udregne leddene i parentes til summen af den harmoniske række. Hvad ville denne relation medføre for summen af den alternerende harmoniske række?

Svar: Hvis vi udregner leddene i parenteserne, får vi

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+\dots=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Hvis vi altså sætter summen fra (b) lig med den oprindeligt givne alternerende række, ville vi få, at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0,$$

men da $\frac{1627}{2520}-\frac{1}{10}>0$, kan dette ikke være tilfældet.

d) Hvorfor er identifikationen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\dots$$

ukorrekt, selv om alle de samme led forekommer med samme fortegn?

Svar: Sætning 16 i afsnit 9.4 siger, at hvis en række konvergerer absolut, kan leddene omarrangeres, som man har lyst, uden at summen ændres. Hvis derimod rækken kun konvergerer betinget, kan leddene omarrangeres til at frembringe en række, der konvergerer mod en hvilken som helst grænseværdi eller divergerer. Der er ikke givet et bevis, men følgende eksempel illustrerer resultatet:

Afsnit 9.4, eksempel 7 Illustrer, hvordan leddene i rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ kan omarrangeres således, at summen bliver 8.

Svar: Start med at lægge så mange af de positive led sammen, at delsummen netop overstiger 8. Læg derefter det første negative led, $-\frac{1}{2}$, til. Summen vil nu igen være under 8. Læg nu igen så mange positive led til, at summen netop overstiger 8, og læg det næste negative led, $-\frac{1}{4}$, til. Fortsæt denne procedure i det uendelige, og du vil opnå en række, der oscillerer svagere og svagere omkring grænseværdien 8. Yderligere vil samtlige led fra den oprindelige række komme til at indgå på et tidspunkt. Tilsvarende trick kan naturligvis udføres for et vilkårligt andet reelt tal.