MM529 W51 2013

(1) Løs inhom. 1. ordens DE.

Inhom 1. ordens DE:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

har løsning

$$y = e^{-\mu(x)} \cdot \int e^{\mu(x)} \cdot q(x)\,dx$$

hvor $\mu(x) = \int p(x)\,dx$

7.9.12 Løs $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$

Vi har $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^2} \neq 0$

Dvs. $\mu(x) = \int p(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2 \cdot \ln|x| = \ln(x^2)$

Dvs. løsningen er:

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \cdot \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$$

$$= e^{-\ln x^2} \int e^{\ln x^2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= x^{-2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= x^{-2} \int dx$$

$$= x^{-2}(x + C)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}}}$$

7.9.14 Løs $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

$p(x) = 1$, $q(x) = e^x \neq 0$

$\mu(x) = \int 1\,dx = x$

Dvs: $y(x) = e^{-\mu(x)} \cdot \int e^{\mu(x)} \cdot q(x)\,dx$

$= e^{-x} \int e^x e^x\,dx$

$= e^{-x} \int e^{2x}\,dx$

$= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}}$

7.9.16 $\frac{dy}{dx} + 2e^x y = e^x$

$p(x) = 2e^x$, $q(x) = e^x \neq 0$

$\mu(x) = \int p(x)\,dx = \int 2e^x\,dx = 2e^x$

Dvs: $y(x) = e^{-\mu(x)} \cdot \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$

$= e^{-2e^x} \int e^{2e^x} e^x\,dx$

Subst: $t = 2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt = e^x dx$

$\Rightarrow y(x) = e^{-2e^x} \int e^{2e^x} e^x\,dx$

$= e^{-2e^x} \int e^t \frac{1}{2}\,dt$

$= e^{-2e^x}\left(\frac{1}{2}e^t + C\right)$

$= e^{-2e^x} \cdot \frac{1}{2}e^{2e^x} + Ce^{-2e^x}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + Ce^{-2e^x}}}$

7.9.18 Løs beg. værdi problemet:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$$
$$y(0) = 1$$

Vi har $p(x) = 3x^2$, $q(x) = x^2 \neq 0$

Dvs. $\mu(x) = \int 3x^2 dx = x^3$

og generel løsning er:

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x) dx$$
$$= e^{-x^3} \int e^{x^3} x^2 dx$$
$$\overset{\star}{=} e^{-x^3}\left(\frac{1}{3}e^{x^3} + C\right)$$
$$= \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$$

$\star$: Da $\frac{d}{dx} e^{x^3} = e^{x^3} \cdot 3x^2 \iff \int \frac{d}{dx} e^{x^3} dx = 3\int e^{x^3} x^2 dx$

$$\iff e^{x^3} = 3 \cdot \int e^{x^3} x^2 dx$$
$$\iff \frac{1}{3} e^{x^3} = \int e^{x^3} \cdot x^2 dx$$

Vi skal nu bestemme C:

$$y(0) = 1 \iff \frac{1}{3} + Ce^{-0^3} = 1$$
$$\iff \frac{1}{3} + C = 1$$
$$\iff C = \frac{2}{3}$$

Dvs løsningen er:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3}}}$$

(2) 2. ordens lin. inhom. equ.

Generel formel: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \neq 0$

Tilsvarende hom ligning: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

Lad y_1, y_2 være løsn. til den tilsvarende hom. ligning og $y_1 \neq cy_2$, $c \in \mathbb{R}$.

Lad y_3 være løsning til inhom. ligning.

Hvilke udsagn er sande?

a) $y_1 + y_2$ er løsn. til hom DE:

Tjek ved differentiation og sæt ind:

$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y' = y_1' + y_2' \Rightarrow y'' = y_1'' + y_2''$

Sæt ind:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = a(x)(y_1'' + y_2'') + b(x)(y_1' + y_2') + c(x)(y_1 + y_2)$$

$$= \underbrace{a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1}_{=0 \text{ da } y_1 \text{ er løsn. til hom DE}} + \underbrace{a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2}_{=0 \text{ da } y_2 \text{ er løsn til hom DE}}$$

$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2$ <u>er</u> løsning til hom DE.

b) $y_3 + y_3$ er løsn. til inhom DE:

$y = y_3 + y_3 = 2y_3 \Rightarrow y' = 2y_3' \Rightarrow y'' = 2y_3''$

Sæt ind:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = a(x)2y_3'' + b(x)2y_3' + c(x)2y_3$$

$$= 2\underbrace{(a(x)y_3'' + b(x)y_3' + c(x)y_3)}_{=g(x) \text{ da } y_3 \text{ er løsn. til inhom DE}} = 2g(x) \neq g(x)$$

Da vi ikke får $g(x)$ er $y_3 + y_3$ <u>ikke</u> løsn. til inhom DE.

(2) fortsat

c) $y_3 - y_3$ er løsn. til hom. DE:

$y = y_3 - y_3 = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y'' = 0$

Dvs: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = a(x)\cdot 0 + b(x)\cdot 0 + c(x)\cdot 0 = 0$

Så ja, $y_3 - y_3$ er løsn. til hom DE.

(OBS: $y=0$ er den trivielle løsn. til alle homogene DE'er)

d) Find undtagelsen til at $y = y_3 + C_1 y_1 + C_2 y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ er generel løsning til inhom DE.

For at dette y skal være generel løsning til den inhom. DE skal y_1 og y_2 være 'væsensforskellige', dvs. $y_1 \neq c y_2$, $c \in \mathbb{R}$.

Lad $y_1 = 0$ da vil $y_1 = 0 \cdot y_2$ lige meget hvad y_2 er og de er ikke væsensforskellige. Derfor vil $y = y_3 + C_1 \cdot 0 + C_2 y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ikke være generel løsning til inhom DE.

e) Find generel sol til tilsvarende hom DE.

Når $y = y_3 + C_1 y_1 + C_2 y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ er generel løsning til den inhom DE og y_1, y_2, y_3 er som beskrevet i opgaven, er

$$y_{hom} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

generel løsn. til den tilsvarende hom. DE.

(3) Løs de hom. 2ord. ODE's.

2. orden lin. DE m. konstante koeff. (s. 204-206)

(0) $ay'' + by' + cy = 0$

Karakteristisk ligning / auxiliary equ / char. pol:

(1) $ar^2 + br + c = 0$

Case I: $D = b^2 - 4ac > 0$

(1) har to løsn: r_1, r_2 og generel løsn. til (0) er

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Case II: $D = b^2 - 4ac = 0$

(1) har én løsn. r og generel løsn. til (0) er:

$$y(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Case III: $D = b^2 - 4ac < 0$

(1) har to komplekse løsninger $r = k \pm i\omega$, $k = \frac{-b}{2a}$, $\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$

og generel løsn. til (0) er:

$$y(t) = Ae^{kt}\cos\omega t + Be^{kt}\sin\omega t$$

(3) fortsat

3.7.2 $y'' - 2y' - 3y = 0$

Karakteristisk ligning: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

$\Rightarrow$ CASE I: $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{y(t) = Ae^{3t} + Be^{-t}, \ A, B \in \mathbb{R}}$

3.7.4 $4y'' - 4y' - 3y = 0$

Kar. lign: $4r^2 - 4r - 3 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64 > 0$

$\Rightarrow$ CASE I:

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8} = \frac{1}{2} \pm 1 = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{y(t) = Ae^{3t/2} + Be^{-t/2}, \ A, B \in \mathbb{R}}$

3.7.6 $y'' - 2y' + y = 0$

Kar lign: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ CASE II

$$r = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

$\Rightarrow \underline{y = Ae^t + Bte^t, \ A, B \in \mathbb{R}}$

(3) fortsat

<u>3.7.10</u> : $y''-4y'+5y=0$

Kar ligni: $r^2-4r+5=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4<0$

$\Rightarrow$ CASE III:

$r=k\pm i\omega$: $k=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$

$\omega=\frac{\sqrt{-D}}{2a}=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(t)=Ae^{2t}\cos t+Be^{2t}\sin t \quad ,A,B\in\mathbb{R}}}$

<u>3.7.12</u> $y''+y'+y=0$

Kar ligni: $r^2+r+1=0$

$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

$\Rightarrow$ CASE III:

$k=\frac{-1}{2\cdot1}=-\frac{1}{2}$

$\omega=\frac{\sqrt{+3}}{2\cdot1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(t)=Ae^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+Be^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \quad ,A,B\in\mathbb{R}}}$

(4) Find hom. lin. DE med følgende generelle løsninger:

a) ce^{-x^2}, $c \in \mathbb{R}$

Gen. løsn. har en konstant ganget på, så lad $y = e^{-x^2}$, dvs:

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2} = -2xy$$

Dvs vores hom. lin. DE er:

$$\underline{\underline{y' + 2xy = 0}}$$

b) $C_1 e^{-x} + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ligner løsning fra CASE I:

$C_1 e^{-x} + C_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{0 \cdot x}$, så rødderne til kar pol er $r_1 = -1$, $r_2 = 0$.

Faktorisering af kar. pol: $(r+1)r = r^2 + r = 0$.

Nu kan den korr. DE opskrives:

$$\underline{\underline{y'' + y' = 0}}$$

c) $C_1 e^{2x}\cos(-x) + C_2 e^{2x}\sin(-x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ligner løsn. fra case III med $k=2$, $w=-1$.

Dvs: $k = \frac{-b}{2a} = 2$, $w = \frac{\sqrt{-D}}{2a} = -1$

to lign. 3 ubekendte: vælg $a=-1$ (minus pga w)

Da har vi:

$$k = \frac{-b}{2\cdot(-1)} = 2 \Leftrightarrow -b = -4 \Leftrightarrow b = 4$$

$$w = \frac{\sqrt{-D}}{2\cdot(-1)} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-D} = 2 \Leftrightarrow D = -4$$

Vi kan nu finde c: $D = b^2 - 4ac = -4$

$$\Updownarrow \quad 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot c = -4$$

$$\Updownarrow \quad c = -5$$

Generel 2ordens hom. lin. DE m. konst koeff:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Indsæt værdier:

$$\underline{\underline{-y'' + 4y' - 5y = 0}}$$

d) $Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Ligner meget løsn. fra delopg c), eneste forskel er at vi har cosx og sinx her istedet for cos(-x) og sin(-x). Hvis vi kan omskrive denne løsning til den fra delopg c) har vi allerede den ønskede DE.

Husk: • cosx er lige, dvs: $\cos x = \cos(-x)$
• sinx er ulige, dvs: $-\sin(x) = \sin(-x)$
$\Updownarrow$ $\sin x = -\sin(-x)$

Det indsætter vi i vores løsning:

$$Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x = Ae^{2x}\cos(-x) + Be^{2x}(-\sin(-x))$$

$$= Ae^{2x}\cos(-x) - Be^{2x}\sin(-x)..$$

Lad nu $c_1 = A$, $c_2 = -B$. da har vi:

$$Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$$
$$= Ae^{2x}\cos(-x) - Be^{2x}\sin(-x)$$
$$= c_1 e^{2x}\cos(-x) + c_2 e^{2x}\sin(-x)$$

som er løsningen i c).

Vores DE er da: $-y'' + 4y' - 5y = 0$

(kunne også løses som delopg c)).