MM529 E-timer
140319 og 140320

Kathja Fuglø

(1) Tripelintegraler

Evaluer de følgende integraler. Vær opmærksom på gavnlige omskrivninger og integrationsrækkefølger

Afsnit 14.5, opgave 6:

$$A = \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

hvor R er kuben $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

Svar:

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz\ dy\ dx.$$

Da integranden består af tre ens funktioner (blot af tre forskellige variable), og da grænserne er de samme for alle tre variable, kan integralet omskrives til

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3x^2 dz\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 3x^2 dx = \int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$$

Afsnit 14.5, opgave 9:

$$B = \iiint_R \sin\left(\pi y^3\right) dV,$$

hvor R er pyramiden med hjørner $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ og $(0,1,1)$.

Svar: Grænserne for integralet er

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq z \leq y.$$

Integralet er så

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^y \int_0^y \sin\left(\pi y^3\right) dz\ dx\ dy \\ &= \int_0^1 \sin\left(\pi y^3\right) \int_0^y \int_0^y dz\ dx\ dy. \end{aligned}$$

Vi starter med at evaluere det indre integrale:

$$\int_0^y dz = [z]_z^z = y \Rightarrow B = \int_0^1 \sin\left(\pi y^3\right) \int_0^y y dx\ dy.$$

Igen evalueres det indre integrale:

$$\int_0^y y dx = [yx]_{x=0}^{x=y} = y^2 \Rightarrow B = \int_0^1 \sin\left(\pi y^3\right) y^2 dy.$$

Dette integrale løses ved substitution, hvor vi sætter $t = \pi y^3 \Rightarrow dt = 3\pi y^2 dy \Leftrightarrow \frac{1}{3\pi} dt = y^2 dy$. Grænserne så $0^3 \pi = 0$ og $1^3 \pi = \pi$. Vi får derfor

$$B = \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{1}{3\pi} \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{1}{3\pi}(1+1) = \frac{2}{3\pi}.$$

(2) Vektorprodukt og projektion

Afsnit 10.2, opgave 2 (modificeret)**:** Givet vektorerne $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, beregn følgende:

a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ og $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

Svar: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -1+1 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2}u-3\boldsymbol{v} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -2-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

b) Længderne $|\boldsymbol{u}|$ og $|\boldsymbol{v}|$.

Svar: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

c) Enhedsvektorerne $\hat{\boldsymbol{u}}$ og $\hat{\boldsymbol{v}}$ i retning af $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

Svar: $\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

d) Det indre produkt $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$.

Svar: $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1.$

e) Vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

Svar: Sætning 1 i afsnit 10.2 siger, at

$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \theta.$$

Det vil sige, at vinklen θ mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ kan bestemmes ved

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right).$$

f) Vektorprodukterne $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.

Svar: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det er givet i afsnit 10.3, at $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, så

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

g) Vektorprojektionen $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}$ af $\boldsymbol{v}$ langs $\boldsymbol{u}$.

Svar: Det er givet, at projektionen af $\boldsymbol{v}$ langs $\boldsymbol{u}$ er

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = \frac{-1}{\sqrt{2}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Indre produkt og vektorprodukt

a) Bevis Grassmanns identitet og Lagranges identitet for vektorerne $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Grassmanns identitet:

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}.$$

Lagranges identitet:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{x}).$$

Svar: Vi starter med Grassmanns identitet og tager udgangspunkt i venstre side. Vi nøjes med at se på udregningerne for første koordinat af produktet, da de to andre koordinater udregnes på tilsvarende måder.

$$(\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}))_1 = u_2 \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_3 - u_3 \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})_2$$

$$= u_2(v_1 w_2 - v_2 w_1) - u_3(v_3 w_1 - v_1 w_3)$$

$$= u_2(v_1 w_2 - v_2 w_1) - u_3(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_1 v_1 w_1 - u_1 v_1 w_1$$

$$= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_1 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) w_1$$

$$= ((\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v})_1 - ((\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w})_1 . \square$$

Derefter ser vi på Lagranges identitet, hvor vi igen tager udgangspunkt i venstre side:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_2x_3 - w_3x_2 \\ w_3x_1 - w_1x_3 \\ w_1x_2 - w_2x_1 \end{pmatrix}$$

$$= u_2v_3w_2x_3 + u_3v_2w_3x_2 - u_2v_3w_3x_2 - u_3v_2w_2x_3$$

$$+u_3v_1w_3x_1 + u_1v_3w_1x_3 - u_3v_1w_1x_3 - u_1v_3w_3x_1$$

$$+u_1v_2w_1x_2 + u_2v_1w_2x_1 - u_1v_2w_2x_1 - u_2v_1w_1x_2$$

$$= u_1w_1(v_2x_2 + v_3x_3) + u_2w_2(v_1x_1 + v_3x_3)$$

$$+u_3w_3(v_1x_1 + v_2x_2) + u_1v_1w_1x_1 + u_2v_2w_2x_2 + u_3v_3w_3x_3$$

$$-v_1w_1(u_2x_2 + u_3x_3) - v_2w_2(u_1x_1 + u_3w_3)$$

$$-v_3w_3(u_1x_1 + u_2x_2) - u_1v_1w_1x_1 - u_2v_2w_2x_2 - u_3v_3w_3x_3$$

$$= u_1w_1(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) + u_2w_2(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$$

$$+u_3w_3(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) - v_1w_1(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$

$$-v_2w_2(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3w_3) - v_3w_3(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$

$$= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$$

$$-(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$

$$= (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{x}). \square$$

b) Udled den følgende identitet af Grassmanns identitet:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_v} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2} \cdot \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}),$$

hvor $\boldsymbol{u_v}$ er vektorprojektionen af $\boldsymbol{u}$ langs $\boldsymbol{v}$. ($\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_v}$ kaldes den ortogonale komponent.)

Svar: Vi tager udgangspunkt i vektorproduktet. θ er vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{u} - |\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{u}_v$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_v} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|^2} \cdot \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).$$

Til den første omskrivning anvendes Grassmanns identitet, og til den anden anvendes definitionen af indre produkt, længde af en vektor og vektorprojektion. Dette viser den ønskede identitet.□

c) For vektorerne $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, se på produktet

$$P = \boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}).$$

Diskuter geometrisk, hvorfor P er rumfanget af parallelepipedumet udspændt af $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$, og hvorfor $\frac{1}{6}P$ er rumfanget af tetraedret udspændt af $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$.

Svar: For det første observerer vi, at rumfanget af et tetraeder er $\frac{1}{3}A'h$, hvor A' er arealet af grundfladen, og h er højden. Arealet af et parallelepipedum er Ah, hvor A er arealet af grundfladen, og h er højden. Da tetraedret udspændt af de givne vektorer har en halvt så stor grundflade som parallelepipedumet (altså $A' = \frac{1}{2}A$), følger det, at hvis P er rumfanget af parallelepipedumet udspændt af $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$, så er $\frac{1}{6}P$ rumfanget af det tilsvarende tetraeder. Vi anvender nu nogle egenskaber for vektorprodukt og indre produkt. For det første er det givet i definition 5 (definitionen af vektorproduktet) i afsnit 10.3, at $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$, hvor θ er vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$. Yderligere siger sætning 1 i afsnit 10.2, at $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$, hvor θ igen er vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$. Vi kalder vinklen mellem $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ for θ, vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ for ϕ og vinklen mellem $\boldsymbol{u}$ og fladen udspændt af $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ kalder vi ψ. Desuden kalder vi arealet af grundfladen (parallelogrammet udspændt af $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$) for A og højden af parallelepipedumet for h. Vi får så

$$\begin{aligned} P &= \boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| \cos\phi \\ &= |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| \sin\theta \sin\psi = A|\boldsymbol{u}| \sin\psi = Ah. \square \end{aligned}$$