MM519 E-timer
131113

Kathja Fuglø

(5) Riemannsummer

a) Beregn riemannsummerne for funktionen $f(x) = x^3$ på intervallet $[0, 1]$ med fem jævnt fordelte punkter $x_0, \ldots, x_4$ til at danne partitionen, hvor du vælger hver c_i i henholdsvis venstre og højre ende og midten af hvert interval. Brug disse sammen med f's egenskaber til at give en øvre og nedre grænse for

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Svar: Riemannsummen, hvor vi vælger punkterne i venstre ende er

$$R_v = \frac{1}{4}\left(0^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64} + \frac{8}{64} + \frac{27}{64}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{36}{64} = \frac{9}{64}$$

Når vi vælger fra højre ende er det

$$R_r = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64} + \frac{8}{64} + \frac{27}{64} + \frac{64}{64}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{100}{64} = \frac{25}{64}$$

Når vi vælger fra midten er det

$$R_m = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \left(\frac{7}{8}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{512} + \frac{27}{512} + \frac{125}{512} + \frac{343}{512}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{496}{512} = \frac{31}{128}$$

Da f er voksende på hele intervallet $[0, 1]$, er

$$\frac{9}{64} = R_l \leq \int_0^1 x^3 dx \leq R_r = \frac{25}{64}$$

Da f yderligere er konveks, har vi, at

$$\frac{31}{128} = R_m \leq \int_0^1 x^3 dx \leq R_r = \frac{25}{64}$$

b) Bestem integralet

$$\int_0^1 (2x + 1) dx$$

ved hjælp af riemannsummer: Start med partitionen $P_0 = \{x_0, x_1\}$ med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$. Dan partitionen P_{k+1} ud fra P_k ved at tilføje nye partitionspunkter i midten af hvert delinterval. Vælg c_i i midten af hvert interval $[x_{i-1}, x_i]$. Retfærdiggør, at $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ og beregn grænseværdien for riemannsummerne, når $k \to \infty$.

Svar: Partitionen P_k vil bestå af punkterne

$$\left\{ i \cdot 2^{-k} \mid 0 \leq i \leq 2^k, i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Det vil sige, at længden af hvert delinterval er 2^{-k}, og da $\lim_{k\to\infty} 2^{-k} = 0$, har vi også, at $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$.

Riemannsummen svarende til P_k er:

$$R_k = 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \left(2 \frac{2i-1}{2} 2^{-k} + 1 \right)$$

$$= 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \left(2^{1-k} i - 2^{-k} + 1 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2^k} \left(2^{1-2k} i - 2^{-k} \cdot 2^{-k} + 2^{-k} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2^k} 2^{1-2k} i - 2^{-k} + 1 = 2^{1-2k} \sum_{i=1}^{2^k} i - 2^{-k} + 1$$

$$= 2^{1-2k} \frac{2^{2k} + 2^k}{2} - 2^{-k} + 1$$

$$= 1 + 2^{-k} - 2^{-k} + 1 = 2$$

så vi har

$$\int_0^1 (2x+1)dx = \lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} 2 = 2.$$

(1) Infinitesimalregningens hovedsætning[1]

a) Diskuter de to udsagn i hovedsætningen. Beskriv virkningen af forskellige valg af a i $F(x) = \int_a^x f(u)du$.

Svar: Sætningen siger: Hvis f er kontinuert på intervallet $I = [a, b]$, så (1) er $F(x) = \int_a^x f(u)du$ en stamfunktion til f på I, og (2) for alle stamfunktioner F til f er $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

En konsekvens af sætningen er, at

$$F(a) = \int_a^a f(u)du = F(a) - F(a) = 0.$$

Hvis vi vælger to forskellige a-værdier, således at

$$F_1(x) = \int_{a_1}^x f(u)du, \quad F_2(x) = \int_{a_2}^x f(u)du,$$

så får vi, at

$$F_2(x) = \int_{a_2}^x f(u)du = F_1(x) - F_1(a_2)$$

Her skyldes den første lighed definitionen af F_2, og den anden skyldes del 2 af hovedsætningen. Det vil sige, at vælger vi en anden værdi af a, bliver F forskudt med en konstant. Det er denne konstant, vi lægger til som C, når vi beregner ubestemte integraler.

[1] Det hedder den rent faktisk ifølge wikipedia

Afsnit 5.5, opgave 2: Evaluer $\int_0^4 \sqrt{x}dx$.

Svar: Bagerst i omslaget til bogen finder vi, at en stamfunktion til x^r er $\frac{1}{r+1}x^{r+1}$. Da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, vil det sige, at

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\bigg|_0^4 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^4$$

$$= \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

Afsnit 5.5, opgave 14: Evaluer $\int_{-2}^2 \left(e^x - e^{-x}\right)dx$.

Svar: Da en stamfunktion til e^x er e^x, og en stamfunktion til $-e^{-x}$ er e^{-x}, er

$$\int_{-2}^2 \left(e^x - e^{-x}\right)dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_{-2}^2$$

$$= e^2 + e^{-2} - e^{-2} - e^2 = 0$$

Afsnit 5.5, opgave 36: Find gennemsnitsværdien af $f(x) = e^{3x}$ over intervallet $[-2, 2]$.

Svar: Gennemsnitsværdien af en funktion over et interval er integralet over intervallet divideret med længden af intervallet, så gennemsnittet er givet ved

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^2 e^{3x}dx = \frac{1}{4}\frac{e^{3x}}{3}\bigg|_{-2}^2 = \frac{e^6 - e^{-6}}{12}$$

(2) Substitution

Evaluer de givne integraler.

Afsnit 5.6, opgave 4: $\int e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right) dx$

Svar: Substituer $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx$, så

$$\int e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right) dx = \int \frac{\sin t}{2} dt = -\frac{\cos t}{2} + C$$

$$= -\frac{\cos\left(e^{2x}\right)}{2} + C$$

Afsnit 5.6, opgave 6: $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Svar: Substituer $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, så

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \sin t dt = -2 \cos t + C$$

$$= -2 \cos \sqrt{x} + C$$

Afsnit 5.6, opgave 28: $\int \cos^4 x dx$

Svar: Vi bruger her en identitet givet i afsnit P.7: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, så:

$$\int \cos^4 x dx = \int \frac{(1+\cos(2x))^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx + \frac{1}{4} \int 2\cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos(4x)}{2} dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{8} \int 1 dx + \frac{1}{32} \int 4\cos(4x) dx$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin(4x)}{2} + C$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C$$

Afsnit 5.6, opgave 42: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^5 x dx$

Svar: Vi bruger $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ og får:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^5 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx$$

Dernæst substituerer vi $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Grænserne skal så ændres til $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\cos \pi = -1$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x dx = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-1} \left(1 - t^2\right)^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{20\sqrt{2}} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60\sqrt{2}} + \frac{8}{15}$$

Afsnit 5.6, opgave 43: $\int_{e}^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} = \int_{e}^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt$

Svar: Substituer $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$. Så bliver grænserne $\ln e = 1$ og $\ln\left(e^2\right) = 2 \ln e = 2$. Så får vi

$$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

(3) Partiel integration

Evaluer de givne integraler.

Formlen for partiel integration er givet ved

$$\int U dV = UV - \int V dU.$$

Afsnit 6.1, opgave 2: $\int (x+3)e^{2x} dx$

Svar: Vi sætter $U = x+3 \Rightarrow dU = dx$ og $dV = e^{2x} \Rightarrow V = \frac{e^{2x}}{2}$, så vi får

$$\int (x+3)e^{2x} dx = (x+3)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx$$

$$= (x+3)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{5e^{2x}}{4} + C$$

Afsnit 6.1, opgave 4: $\int \left(x^2 - 2x\right) e^{kx} dx$

Svar: Vi sætter $U = x^2 - 2x \Rightarrow dU = (2x - 2)dx$ og $dV = e^{kx}dx \Rightarrow V = \frac{e^{kx}}{k}$, så vi får

$$\int \left(x^2 - 2x\right) e^{kx} dx = (x^2 - 2x)\frac{e^{kx}}{k} - \int \frac{e^{kx}}{k}(2x - 2)dx$$

Vi sætter nu $U = 2x - 2 \Rightarrow dU = 2dx$ og $dV = \frac{e^{kx}}{k} \Rightarrow V = \frac{e^{kx}}{k^2}$, så vi får

$$(x^2 - 2x)\frac{e^{kx}}{k} - \int \frac{e^{kx}}{k}(2x - 2)dx =$$

$$\frac{(x^2 - 2x)e^{kx}}{k} - (2x - 2)\frac{e^{kx}}{k^2} + \int \frac{2e^{kx}}{k^2}dx$$

$$= \frac{(x^2 - 2x)e^{kx}}{k} - \frac{(2x - 2)e^{kx}}{k^2} + \frac{2e^{kx}}{k^3} + C$$

Afsnit 6.1, opgave 6: $\int x(\ln x)^3 dx$

Svar: Vi sætter $U = (\ln x)^3 \Rightarrow dU = \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$ og $dV = xdx \Rightarrow V = \frac{x^2}{2}$, så vi får

$$\int x(\ln x)^3 dx = (\ln x)^3 \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{3(\ln x)^2}{x}dx$$

$$= \frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \int \frac{3x(\ln x)^2}{2}dx$$

$U = \frac{(\ln x)^2}{2} \Rightarrow dU = \frac{\ln x}{x}dx$ og $dV = 3x \Rightarrow V = \frac{3x^2}{2}$:

$$\frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \int \frac{3x(\ln x)^2}{2}dx =$$

$$\frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{(\ln x)^2}{2}\frac{3x^2}{2} + \int \frac{3x^2}{2}\frac{\ln x}{x}dx$$

$$= \frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{3x^2(\ln x)^2}{4} + \int \frac{3x\ln x}{2}dx$$

$U = \ln x \Rightarrow dU = \frac{1}{x}dx$ og $dV = \frac{3x}{2} \Rightarrow V = \frac{3x^2}{4}$:

$$\frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{3x^2(\ln x)^2}{4} + \int \frac{3x\ln x}{2}dx =$$

$$\frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{3x^2(\ln x)^2}{4} + \ln x\frac{3x^2}{4} - \int \frac{3x^2}{4}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{3x^2(\ln x)^2}{4} + \frac{3x^2\ln x}{4} - \int \frac{3x}{4}dx$$

$$= \frac{x^2(\ln x)^3}{2} - \frac{3x^2(\ln x)^2}{4} + \frac{3x^2\ln x}{4} - \frac{3x^2}{8} + C$$

Afsnit 6.1, opgave 18: $\int x\sin^2 x dx$

Svar: Vi bruger først en trigonometrisk regneregel til at omskrive:

$$\int x\sin^2 x dx = \int x\frac{1-\cos(2x)}{2}dx$$

$$\int \frac{x}{2}dx - \int \frac{x\cos(2x)}{2}dx = \frac{x^2}{4} - \int \frac{x\cos(2x)}{2}dx$$

Så sætter vi $U = x \Rightarrow dU = dx$ og $dV = \frac{\cos(2x)}{2}dx \Rightarrow V = \frac{\sin(2x)}{4}$, så vi får

$$\frac{x^2}{4} - \int \frac{x\cos(2x)}{2}dx = \frac{x^2}{4} - x\frac{\sin(2x)}{4} + \int \frac{\sin(2x)}{4}dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + C$$

(4)

Beregn integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

ved at bruge substitutionen $x = \tan t$.

Svar: Ved at substituere $x = \tan t$ får vi $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, så

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t \left(1+\tan^2 t\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t \left(1+2\tan^2 t+\tan^4 t\right)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t+2\sin^2 t+\sin^2 t \tan^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 t+\sin^2 t \tan^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t+\cos^2 t \sin^2 t+\sin^4 t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t+\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$= \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$