MM529 E-timer
140212 og 140213

Kathja Fuglø

(1)

Her ser vi på tre forskellige funktioner. Vi skal lave en potensrække for hver af dem på baggrund af

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

som vi kalder $f(x)$. Vi skal yderligere bestemme konvergensinterval for hver af disse rækker.

Afsnit 9.5, opgave 12:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Da rækken for $f(x)$ konvergerer for $x \in (-1, 1)$, vil rækken for $g(x)$ konvergere for

$$\frac{x}{2} \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-2, 2).$$

Afsnit 9.5, opgave 14:

$$h(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = f(-2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$$

konvergerer for $-2x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Afsnit 9.5, opgave 18:

$$k(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{x}{1-(-x)}$$

$$= f(-x) - xf(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + (-x)\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$$

konvergerer på samme interval som $f(x)$, da

$$-x \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1).$$

(2)

Her ser vi på tre potensrækker. Vi skal bestemme konvergensintervaller for hver af dem og bestemme, hvilken funktion de konvergerer imod. Vi kan finde i bogen, at en række af formen

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

har konvergenscentrum c og konvergensradius

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

hvis denne grænseværdi eksisterer (eller er ∞). Konvergensintervallet er så $(c-R, c+R)$.

Afsnit 9.5, opgave 22:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n.$$

$c = 0$ og

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+1)+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Det vil sige, at rækken konvergerer for $x \in (-1, 1)$. Bemærk, at den givne række kan omskrives til

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} nx^n}_{(1)} + 3\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(2)}.$$

Da vi kender rækken for $f(x) = \frac{1}{1-x}$, tager vi igen udgangspunkt i denne for at finde den funktion, som den givne række konvergerer imod. Vi starter med at differentiere (husk, at dette gøres ved at differentiere hvert led af rækken):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = (1).$$

Da (2) bare er $3f(x)$, får vi, at

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x}.$$

Afsnit 9.5, opgave 24:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n.$$

$c = 0$ og

$$\begin{aligned}R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{((n+1)+1)((n+1)+3)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 1} = 1.\end{aligned}$$

Det vil sige, at rækken konvergerer for $x \in (-1, 1)$. Vi kan igen tage udgangspunkt i rækken for $f(x)$. Først omskriver vi den givne række:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n^2(-x)^n}_{(1)} + \underbrace{4\sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n}_{(2)} + \underbrace{3\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n}_{3f(-x)}.$$

Vi kan se, at i hvert fald (2) ligner det, vi havde i forrige opgave, men denne gang tager vi udgangspunkt i $f(-x)$. Vi differentierer:

$$(f(-x))' = -f'(-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow x(f(-x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow (2) = -\frac{4x}{(1+x)^2}.$$

For at bestemme funktionen svarende til (1) differentierer vi (2):

$$\frac{1}{4} \cdot (2)' = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^{n-1} = -\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= -\frac{(1+x) - 2x}{(1+x)^3} = -\frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow (1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(-x)^n = -x\frac{1-x}{(1+x)^3} = \frac{x^2-x}{(1+x)^3}.$$

Vi kan nu samle det hele:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n = (1) + (2) + 3f(-x)$$

$$= \frac{x^2-x}{(1+x)^3} - \frac{4x}{(1+x)^2} + \frac{3}{1+x}$$

$$= \frac{x^2-x}{(1+x)^3} - \frac{4x(1+x)}{(1+x)^3} + \frac{3(1+x)^2}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{x^2-x}{(1+x)^3} - \frac{4x+4x^2}{(1+x)^3} + \frac{3+6x+3x^2}{(1+x)^3} = \frac{x+3}{(1+x)^3}$$

Afsnit 9.5, opgave 26:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}.$$

$c = 0$ og

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{-1}}{((n+1)+1)^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

så igen har vi konvergensinterval $(-1, 1)$. Denne gang tager vi udgangspunkt i rækken $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & \text{ellers} \end{cases}.$$