MM529 E-timer
131127

Kathja Fuglø

(1) Substitutionsmetoden

Brug substitutionen $\ln t = x$ til at bestemme integralet

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$$

Svar: $x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$, $e^{2x} = e^{2\ln t} = e^{\ln\left(t^2\right)} = t^2$ og $e^x = e^{\ln t} = t$, så

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \int \frac{t^2}{t-1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t-1} dt$$

Da $\frac{t}{t-1} = \frac{t-1+1}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$, får vi

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \int 1 dt + \int \frac{1}{t-1} dt = t + \ln|t-1| + C$$

$$= e^x + \ln|e^x - 1| + C$$

(2) Længden af en graf

a) Bestem længden af de følgende to kurver:

Formlen for at beregne længden af grafen for $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er givet i bogen som

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Afsnit 7.3, opgave 2: $y = ax+b$ fra $x = A$ til $x = B$.

Svar: $y' = a \Rightarrow$

$$s = \int_A^B \sqrt{1 + a^2}dx = \sqrt{1 + a^2}x\Big|_A^B = \sqrt{1 + a^2}(A - B)$$

Afsnit 7.3, opgave 3: $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ fra $x = 0$ til $x = 8$.

Svar: $y' = \frac{3}{2}\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow$

$$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \sqrt{x}^2}dx = \int_0^8 \sqrt{1 + x}dx$$

Vi sætter $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$, så

$$s = \int_1^9 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}27 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

b) Beskriv kurven på enhedscirklen med $y \geq 0$ som grafen for en passende funktion, og beregn dens længde.

Svar: Enhedscirklen er beskrevet ved

$$x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1,$$

hvor den sidste ligning naturligvis kun holder, fordi vi har fået givet, at $y \geq 0$. Så har vi

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Det vil sige, at

$$\begin{aligned} s &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Vi sætter nu $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$, så

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}} \cos t dt =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 + \sin^2 t}{\cos^2 t}} \cos t dt =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cos t dt \stackrel{*}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

* Fordi $\cos t \geq 0$, når $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(3) Summation

a) Bestem ved integraltest, for hvilke værdier af $\alpha > 0$ rækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

er konvergent og divergent.

Svar: Integraltesten siger, at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergerer, hvis og kun hvis $\int_N^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_N^\infty x^{-\alpha} dx$ er endelig. Hvis vi sætter $N = 1$, får vi $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$. For $\alpha = 1$ giver det

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to \infty} \ln x \Big|_1^a = \infty.$$

Her konvergerer summen altså ikke. Sætter vi $\alpha \neq 1$, har vi

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-\alpha} dx = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{1 - \alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^a.$$

Da α og dermed $\frac{1}{1-\alpha}$ er en konstant, er dette integrale endeligt, når $\lim_{a \to \infty} x^{1-\alpha}$ er endelig. Dette er tilfældet, når $\alpha > 1$. Når $\alpha < 1$ findes en grænseværdi ikke. Konklusionen er, at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergerer, når $\alpha > 1$.

b) Bestem en øvre og nedre grænse for

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Hvordan kan man få bedre grænser, hvis det er nødvendigt?

Svar: Vi bruger igen integraltesten givet på Stephans slides fra forelæsning 11, der siger, at

$$\int_N^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)dx.$$

For at få en øvre og nedre grænse bestemmer vi først integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} a^{1-\frac{3}{2}} \Big|_1^a = \lim_{a \to \infty} -2a^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^a$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(-2a^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) = 2.$$

Det vil sige, at

$$2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{1^{\frac{3}{2}}} + 2 = 3.$$

En måde at opnå bedre grænser kunne være at dele summen op: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ for et $N > 1$ og så beregne den endelige del af summen og finde grænser for den uendelige del med den fremgangsmåde, vi lige har brugt.

Afsnit 9.3, opgave 35: Brug integraltesten til at vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

konvergerer. Vis, at summen af rækken er mindre end $\frac{\pi}{2}$.

Svar: Hvis summen konvergerer, er den højst lig med

$$\frac{1}{1+1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} + \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{a\to\infty} \tan^{-1} x\Big|_1^a = \frac{1}{2} + \lim_{a\to\infty} \tan^{-1} a - \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.\square$$

(4) Komplekse tal

a) For de komplekse tal $w = -2i$ og $z = 2 - 3i$, find dem i det komplekse plan og beregn $Re(w)$, $Im(w)$, $\overline{w}$, $\overline{z}$, w^2, z^2, $w + z$, $w \cdot z$, $\frac{w}{z}$, $\frac{z}{w}$.

Svar:

$$Re(w) = Re(-2i) = 0, \quad Im(w) = Im(-2i) = -2$$

$$\overline{w} = \overline{-2i} = 2i, \quad \overline{z} = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$$

$$w^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

$$z^2 = (2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i$$

$$w + z = -2i + 2 - 3i = 2 - 5i$$

$$w \cdot z = -2i(2 - 3i) = -4i + 6i^2 = -6 - 4i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

$$= \frac{-2i(2 + 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{-4i - 6i^2}{13} = \frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{(Re(w))^2 + (Im(w))^2}$$

$$= \frac{(2 - 3i)2i}{(-2)^2} = \frac{4i - 6i^2}{4} = \frac{3}{2} + i$$

b) Find alle komplekse løsninger til andengradsligningen $x^2+x+1=0$ ved at anvende standardalgoritmen for reelle tal. Skriv polynomiet x^2+x+1 som produktet af to førstegradspolynomier med komplekse koefficienter.

Svar: Løsningen til en andengradsligning på formen $ax^2+bx+c=0$ er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

hvilket i dette tilfælde er

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}. \end{aligned}$$

Det vil sige, at

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

c) Skriv polynomiet $x^2 + (1+i)x + \frac{i}{2}$ som produktet af to førstegradspolynomier.

Svar: Denne opgave kan løses på samme måde som den foregående. Vi løser derfor først ligningen

$$x^2 + (1+i)x + \frac{i}{2} = 0:$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1-i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{i}{2}}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1-i \pm \sqrt{1+2i+i^2-2i}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Det vil sige, at $x^2 + (1+i)x + \frac{i}{2} = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2$.

Appendix 1, opgave 44: Bevis, at $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$.

Svar: Vi definerer $w = a + bi$ og $z = x + yi$, så

$$w + z = a + x + (b+y)i \Rightarrow$$

$$\overline{w+z} = a + x - (b+y)i = a - bi + x - yi = \overline{w} + \overline{z}$$

som ønsket. $\square$