MM529 E-timer
140312 og 140313

Kathja Fuglø

Gamma-funktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0,\ y > 0$$

a) Vis ligningen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ for alle $x > 0$.

Svar: Vi vil udregne $\Gamma(x+1)$ som en grænseværdi:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_r^R t^x e^{-t}dt$$

Vi bruger partiel integration med

$$U = t^x \Rightarrow dU = xt^{x-1}dt, \quad dV = e^{-t}dt \Rightarrow V = -e^{-t},$$

så

$$\Gamma(x+1) = \lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\left[-t^x e^{-t}\right]_{t=r}^{t=R} - \int_r^R -xt^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

$$= \lim_{r\to 0} r^x e^{-r} - \lim_{R\to\infty} R^x e^{-R} + \int_{-\infty}^\infty xt^{x-1}e^{-t}dt$$

$$= x\int_{-\infty}^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).\Box$$

b) Udled, at $\Gamma(n+1) = n!$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Svar: Vi vil her bruge et induktionsbevis. Først viser vi, at $\Gamma(1) = 0!$:

$$\gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^a = 1 - \lim_{a\to\infty} e^{-a} = 1 = 0!.$$

Dette er basisskridtet. Induktionsantagelsen er, at for $n < N \in \mathbb{N}_0$ er $\Gamma(n+1) = n!$. Vi udfører nu induktionsskridtet, hvor vi viser, at $\Gamma(N+1) = N!$:

$$\Gamma(N+1) = N\Gamma(N) = N(N-1)! = N!.$$

Dette afslutter beviset, og vi har vist den ønskede egenskab.$\square$

c) Afsnit 14.4, opgave 38, a: Udled, at

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds.$$

Svar: Vi bruger substitution med $t = s^2 \Rightarrow dt = 2sds$. Grænserne er så stadig de samme. Så får vi

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty 2\left(s^2\right)^{x-1}e^{-s^2}sds$$

$$= 2\int_0^\infty s^{2x-2}e^{-s^2}sds = 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds.\square$$

d) Afsnit 14.4, opgave 38, b: Udled, at

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Svar: Vi bruger omskrivningen fra delopgave c. Desuden bruger vi oversigten over bestemte integraler bag i bogen.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty s^{2\cdot\frac{1}{2}-1}e^{s^2}\,ds$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Vi bruger nu resultatet fra første delopgave:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

e) Afsnit 14.4, opgave 38, c: Udled, at

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

Svar: Vi substituerer $t = \cos^2\theta \Rightarrow dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$. Grænserne bliver $t = \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ og $t = \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} 1 = 0$. Det giver

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos^2\theta\right)^{x-1}\left(1-\cos^2\theta\right)^{y-1}\cos\theta\sin\theta \; d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\right)^{x-1}\left(\sin^2\theta\right)^{y-1}\cos\theta\sin\theta \; d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-2}\theta \sin^{2y-2}\theta \cos\theta\sin\theta \; d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \; d\theta. \square$$

f) Afsnit 14.4, opgave 38, d: Udled, at

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Svar: Da

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \Leftrightarrow \Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y),$$

vil vi vise dette. De forskellige omskrivninger forklares på næste side:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &\overset{1}{=} 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}\,ds \cdot 2\int_0^\infty t^{2y-1}e^{-t^2}\,dt \\
&\overset{2}{=} 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}t^{2y-1}e^{-t^2}\,dt\ ds \\
&\overset{3}{=} 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1}t^{2y-1}e^{-\left(s^2+t^2\right)}\,dt\ ds \\
&\overset{4}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1}e^{-r^2}r\ dr\ d\theta \\
&\overset{5}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2(x+y)-1}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta e^{-r^2}\,dr\ d\theta \\
&\overset{6}{=} 2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\,dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\ d\theta \\
&\overset{7}{=} \Gamma(x+y)B(x,y).\square
\end{aligned}$$

1. Her anvendes definitionen af Γ udledt i delopgave c. Yderligere tildeles integrationsvariablen i de to integraler to forskellige navne. Dette kan vi gøre, fordi integralerne er uafhængige af hinanden.

2. De to integraler skrives sammen til et dobbeltintegrale.

3. Simpel matematisk omskrivning.

4. Vi omskriver til polære koordinater i henhold til omskrivningsreglerne, der blev introduceret i sidste uge.

5. Mere simpel matematisk omskrivning.

6. Dobbeltintegralet splittes op til to enkeltintegraler. Dette kan vi gøre, fordi integranden er produktet af en funktion af r og en funktion af θ, og fordi grænserne for r ikke afhænger af θ eller omvendt.

7. Vi anvender definitionerne udledt i delopgave c og e.