MM529 E-timer
131120

Kathja Fuglø

(1) Kombiner integrationsmetoder

a) Bestem integralet $\int \arcsin x dx = \int \sin^{-1} x dx$ ved at anvende først partiel integration og så substitution. Sammenlign resultatet med med det resultat, der er givet i bogen.

Svar: For at anvende partiel integration anser vi integranden for at være produktet af 1 og $\sin^{-1} x$. Vi sætter $U = \sin^{-1} x \Rightarrow dU = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ og $dV = dx \Rightarrow V = x$. Så får vi

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

I det nye integrale sætter vi nu $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$, så vi får

$$-\int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{1-x^2} + C.$$

så det samlede resultat er

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Bestem integralet $\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ved at anvende først substitution og så partiel integration.

Svar: Vi sætter $t = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow 2t = -x^2 \Rightarrow dt = -xdx$, så vi får

$$\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int 2te^t dt.$$

Så sætter vi $U = 2t \Rightarrow dU = 2dt$ og $dV = e^t \Rightarrow V = e^t$, så

$$\int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C.$$

Tilsidst substituerer vi tilbage og får det endelige resultat

$$\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -2e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

(2) Integration af rationelle funktioner

a) Evaluer følgende integraler. Vi anvender blandt andet metoderne givet på Stephans slides til forelæsning 10.

Afsnit 6.2, opgave 2: $\int \frac{1}{5-4x} dx$

Svar: Vi substituerer $t = 5 - 4x \Rightarrow dt = -4dx \Rightarrow -\frac{1}{4}dt = dx$, så

$$\int \frac{1}{5-4x} = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{4} \ln |t| + C$$

$$= -\frac{1}{4} \ln |5 - 4x| + C.$$

Afsnit 6.2, opgave 4: $\int \frac{x^2}{x-4} dx$

Svar: Vi omskriver

$$\frac{x^2}{x-4} = \frac{(x-4)^2 + 8x - 16}{x-4} = x - 4 + \frac{8x-16}{x-4}$$

$$= \frac{8(x-4)+16}{x-4} = x + 4 + \frac{16}{x-4}, \text{ så}$$

$$\int \frac{x^2}{x-4} dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{16}{x-4} dx.$$

De første to integraler er simple, og i det sidste bruger vi substitution med $t = x - 4 \Rightarrow dt = dx$, så

$$\int x dx + \int 4 dx + \int \frac{16}{x-4} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{16}{t} dt$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \ln|t| + C = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln|x-4| + C.$$

Afsnit 6.2, opgave 8: $\int \frac{1}{b^2-a^2x^2}dx$

Svar: Vi finder partialbrøksfremstillingen af integranden:

$$\frac{1}{b^2-a^2x^2} = \frac{1}{(b-ax)(b+ax)} = \frac{A}{b-ax} + \frac{B}{b+ax}$$

$$\Leftrightarrow A(b-ax) + B(b+ax) = 1$$

$$\Leftrightarrow Ab + Bb = 1 \text{ og } -Aax + Bax = 0$$

$$\Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2-a^2x^2} = \frac{1}{2b(b-ax)} + \frac{1}{2b(b+ax)}$$

$$\int \frac{1}{b^2-a^2x^2}dx = \int \left(\frac{1}{2b(b-ax)} + \frac{1}{2b(b+ax)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2b} \int \left(\frac{1}{b-ax} + \frac{1}{b+ax}\right) dx.$$

I den første brøk substituerer vi $t = b - ax \Rightarrow dt = -adx$, og i den anden $u = b + ax \Rightarrow du = adx$, så

$$\int \frac{1}{b^2-a^2x^2}dx = \frac{1}{2ab}\left(-\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{u}du\right)$$

$$= \frac{1}{2ab}\left(\ln|u| - \ln|t|\right) + C = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{u}{t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b+ax}{b-ax}\right| + C.$$

Afsnit 6.2, opgave 10: $\int \frac{x}{3x^2+8x-3}dx$

Svar: $\frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{x}{(3x-1)(x+3)}$, så

$$\frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow A(x+3) + B(3x-1) = x$$

$$\Leftrightarrow A + 3B = 1 \text{ og } 3A - B = 0$$

$$\Leftrightarrow B = 3A \text{ og } 10A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{10} \text{ og } B = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{3}}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{3x^2+8x-3}dx = \frac{1}{30}\int \frac{1}{x-\frac{1}{3}}dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{30}\ln\left|x-\frac{1}{3}\right| + \frac{3}{10}\ln|x+3| + C$$

b) Evaluer integralet $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x-3)}dx$

Svar: $\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}$, så

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1)$$

$$= A(x^2-2x-3) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-1) = x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C & = & 1 \\ -2A-4B & = & 1 \\ -3A+3B-C & = & 1 \end{cases}$$

Vi løser anden ligning med hensyn til A og sætter resultatet ind i første ligning:

$$A = -2B - \frac{1}{2} \Rightarrow -B + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = B + \frac{3}{2}$$

Dette resultat sættes ind i den nederste ligning, og hele systemet kan så løses:

$$-3\left(-2B - \frac{1}{2}\right) + 3B - \left(B + \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$6B + \frac{3}{2} + 3B - B - \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow 8B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \text{ og } C = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x-3)} = -\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{13}{8}\frac{1}{x-3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x-3)}dx =$$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{13}{8}\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{13}{8}\ln|x-3| + C$$

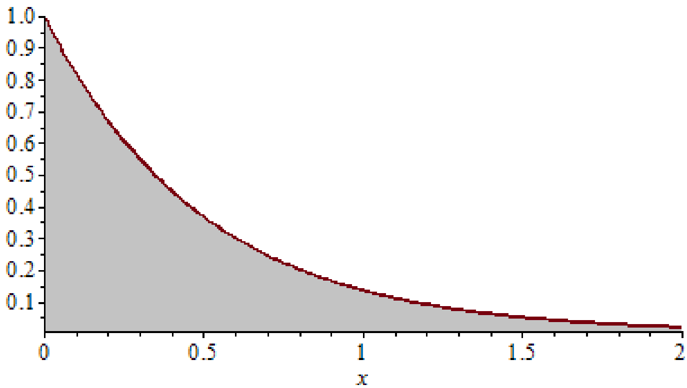
(3) Uegentlige integraler

Evaluer de følgende integraler, eller vis, at de divergerer. Skitsér for hvert integrale integranden og det område, hvis areal måles.

Afsnit 6.5, opgave 3: $\int_0^\infty e^{-2x} dx$

Svar: $\int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-2x} dx =$

$$\lim_{a \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^a \right) = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2a} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

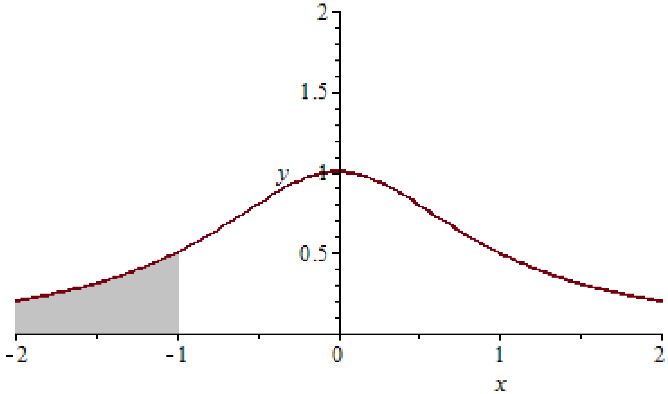


Afsnit 6.5, opgave 4: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx$

Svar: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx$. Vi kan finde stamfunktionen til integranden bag i bogen, så vi får

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{a\to-\infty} \left(\tan^{-1} x \Big|_{a}^{-1} \right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1} a \right) - \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$



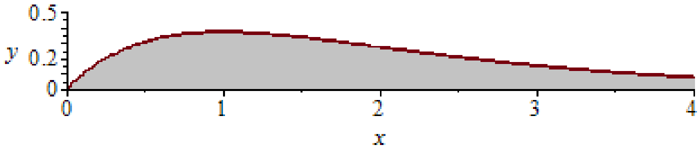
Afsnit 6.5, opgave 10: $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

Svar: $\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a xe^{-x}dx$. Vi løser integralet ved partiel integration med $U = x \Rightarrow dU = dx$ og $dV = e^{-x}dx \Rightarrow V = -e^{-x}$. Det vil sige, at

$$\int_0^a xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^a + \int_0^a e^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^a$$

$$= -ae^{-a} - e^{-x} + 0e^0 + e^0$$

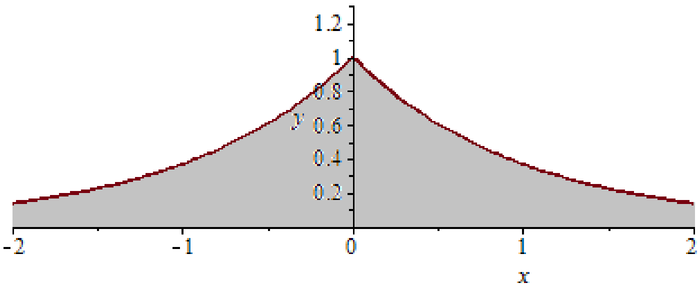
$$\Rightarrow \int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\left(-ae^{-a} - e^{-a} + 1\right) = 1$$



Afsnit 6.5, opgave 22: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty} 2\int_{0}^{a} e^{-x}dx$

$$= \lim_{a\to\infty} 2\left[-e^{-a}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty} 2\left(-e^{-a}+1\right) = 2$$



(4) Approximation af et integrale ved trapezmetoden

For $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, estimér $Si\left(\frac{\pi}{2}\right)$ via trapezsummen T_2 (antag, at funktionsfærdien af integranden er 1 for $t = 0$. Hvorfor?). Brug resultatet for T_2 til at beregne T_4. Skitser grafen for integranden og argumenter grafisk for, om den korrekte værdi er større eller mindre end de estimerede værdier.

Svar: Antagelsen kan vi gøre, fordi $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Til at approximere integralet bruger vi metoden givet på Stephans slides til forelæsning 10. Længden af hvert delinterval for T_2 er $h = \frac{\pi}{4}$

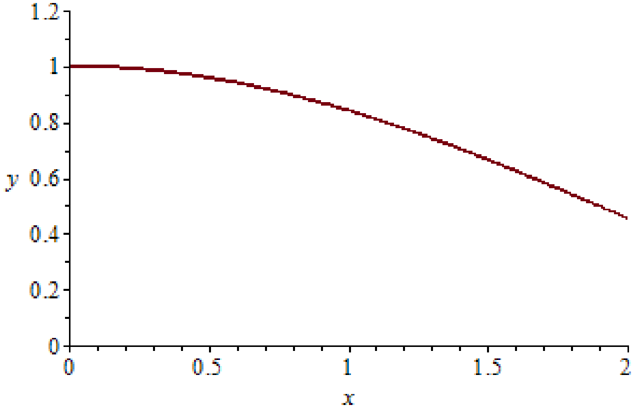
$$Si\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx T_2 = \frac{\pi}{8}\left(1 + 2\frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\pi} + \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \approx 1.3498$$

$$Si\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx T_4 = \frac{T_2}{2} + \frac{\pi}{8}\left(\frac{8\sin\frac{\pi}{8}}{\pi} + \frac{8\sin\frac{3\pi}{8}}{3\pi}\right)$$

$$\approx \frac{1.3498}{2} + \sin\frac{\pi}{8} + \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{3} \approx 1.36554$$

Som vi kan se af figuren på næste side, er integranden konkav. Derfor vil det faktiske integrale være større end den estimerede værdi. Ifølge WolframAlpha er den korrekte værdi $Si\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1.37$.



1.2
1
0.8
y 0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
x