MM529 E-timer
140219 og 140220

Kathja Fuglø

(3) sidste uge

Afsnit 9.5, eksempel 6: Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

ved først at finde summen af potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Svar: Fra eksempel 4(a) har vi, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vi differentierer:

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

$x = \frac{1}{2}$ giver den oprindelige række, så vi får

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 6.$$

Afsnit 9.5, opgave 32: Brug metoden fra eksempel 6 til at bestemme summen

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)$$

Svar: Vi tager udgangspunkt i rækken $\ln(1+x)$ med $x = -\frac{1}{2}$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}$$

(4) sidste uge

Se på Maclaurinrækken for sinusfunktionen:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

a) Bestem følgen af koefficienter for rækken.

Svar: De lige koefficienter er alle 0. De ulige er skiftevis 1 og -1 over $n!$, hvor n er et ulige tal:

$$(a_n) = \left(0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, -\frac{1}{7!}, 0, \ldots\right).$$

b) Udled Maclaurinrækkerne for (i) $\cos x$, (ii) $\sin(x^2)$, (iii) $x^2 \cos \frac{x}{2}$, (iv) $\sin x \cdot \cos x$ og bestem følgen af koefficienter.

i) $\cos x = (\sin x)'$. Koefficinterne bliver

$$(b_n) = \left(1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, -\frac{1}{6!}, 0, \frac{1}{8!}, \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

ii)

$$\sin\left(x^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(x^2\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{4k+2}.$$

Koefficienterne er

$$\left(0, 0, 1, 0, 0, 0, -\frac{1}{3!}, 0, 0, 0, \frac{1}{5!}, 0, 0, 0, -\frac{1}{7!}, 0, \dots\right).$$

iii)

$$x^2 \cos\frac{x}{2} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!}x^{2k+2}.$$

Koefficienterne er

$$\left(0, 0, 1, 0, -\frac{1}{2^2 \cdot 2!}, 0, \frac{1}{2^4 \cdot 4!}, 0, -\frac{1}{2^6 \cdot 6!}, 0, \frac{1}{2^8 \cdot 8!}, \dots\right)$$

iv) Vi bruger formlen for produktet af rækker i Stephans slides fra forelæsning 16. Koefficienterne er

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Rightarrow c_0 = 0, c_1 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$c_2 = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$c_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{3!}\right) \cdot 1 = -\frac{4}{3!},$$

(fra nu af vil alle 0-led blive udeladt, deriblandt alle de lige koefficienter.)

$$c_5 = 1 \cdot \frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{3!}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) + \frac{1}{5!} \cdot 1 = \frac{16}{5!}$$

$$\begin{aligned} c_7 &= -\frac{1}{6!} + \left(-\frac{1}{3!}\right) \cdot \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) - \frac{1}{7!} \\ &= -\frac{7 + 35 + 21 + 1}{7!} = -\frac{64}{7!} \end{aligned}$$

Vi kan nu begynde at se et mønster, så vi udleder, at for lige n er $c_n = 0$, og for ulige $n = 2k + 1$ er

$$c_n = \frac{(-4)^k}{(2k+1)!}$$

Hvis vi lige som for de andre rækker sætter $n = 2k$, får vi

$$\sin x \cdot \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(1)

Taylorrække for funktion defineret ved et integrale: Bestem maclaurinrækker for følgende to funktioner.

Afsnit 9.7, opgave 15: $I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Svar: Fra sidste uge ved vi, at

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}.$$

Vi kan nu integrere rækken som givet i afsnit 9.5, sætning 19:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Afsnit 9.7, opgave 16: $J(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$.

Svar: Vi ved, at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

hvor omskrivningen føler af, at $\frac{x^0}{0!} = 1$.

$$\Rightarrow \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

Afsnit 9.7, opgave 21: Bestem $I(1)$ med tre decimalers nøjagtighed.

Svar: Vi bruger det, der er givet i starten af afsnittet (og som vi brugte i semestrets første e-time): Vi har en alternerende række, hvor den absolutte værdi af leddene er aftagende og konvergerer mod 0. Derfor har vi, at størrelsen af fejlen er højst den absolutte værdi af det første udeladte led. Vi beregner derfor leddene af rækken for $I(x)$, ind til vi når et led, der er mindre end $\frac{1}{1000}$, og så lægger vi alle de beregnede led sammen. Det n'te led kalder vi $I_n(1)$. Dette gøres i WolframAlpha:

$$I_0(1) = 1, \quad I_1(1) = -\frac{1}{18},$$

$$I_2(1) = \frac{1}{600}, \quad I_3(1) = -\frac{1}{35280}$$

$$\Rightarrow I(1) \approx I_0(1)+I_1(1)+I_2(1)+I_3(1) = \frac{166889}{176400} \approx 0.946,$$

hvilket giver os en temmelig høj (for brøkens vedkommende højere end efterspurgt) nøjagtighed, da vi tager det første led mindre end $\frac{1}{1000}$ med (som også er mindre end $\frac{1}{10000}$).

(2)

Binomialrækken: Brug binomialrækken

$$f_r(x) = (1+x)^r =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n, \; x \in (-1,1)$$

til at bestemme maclaurinrækkerne for følgende to funktioner.

Afsnit 9.8, opgave 2: $g(x) = x\sqrt{1-x}$.

Svar: $g(x) = x f_{\frac{1}{2}}(-x)$

$$\Rightarrow g(x) = x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3-2n}{2}}{n!} (-x)^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3-2n}{2}}{n!} (-x)^n.$$

Da tælleren altid indeholder $n-1$ negative faktorer, og $(-x)^n$ indeholder n negative faktorer, indeholder hvert led altid et ulige antal negative faktorer, således at alle led er negative, så

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} - x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-3}{2}}{2n!} x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{n+1}.$$

Da $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) = 2^{n-1}(n-1)!$, får vi

$$1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n{-}3) = 1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n{-}3) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$\Rightarrow g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} x^{n+1}$$

$$= x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} x^{n+1}.$$

Da $-x \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1)$, har $g(x)$ samme konvergensinterval som $f(x)$.

Afsnit 9.8, opgave 4: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$.

Svar: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}f_{-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1-2n}{2}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{3n}n!}x^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2}x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2}x^{2n}.$$

Da $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-2,2)$, konvergerer denne række for $x \in (-2,2)$.

(3)

Binomialkoefficienter. Bemærk, at jeg til tider vil bruge notationen $C(n,k) = \binom{n}{k}$.

a) Bestem binomialkoefficienterne

$$\binom{7}{4}, \quad \binom{-1}{1}, \quad \binom{\pi}{3}.$$

Svar: Vi bruger formlerne i Stephans slides fra forelæsning 17:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35,$$

$$\binom{-1}{1} = \frac{-1}{1!} = -1,$$

$$\binom{\pi}{3} = \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{3!} \approx 1.2801.$$

b) Vis ligheden

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

for $n, k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n$.

Svar: Hvis n og k begge er naturlige tal med $k \leq n$, har vi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Dette kan man også se ved at se på Pascals trekant (findes under opgaverne til afnit 9.8), hvor $C(n, k)$ findes ved at finde række n, plads k (begge dele 0-indekseret), og konstatere, at den er symmetrisk.

c) Diagonal summation gennem Pascals trekant: Brug den binomielle rekursion til at bevise, at

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Svar: Den binomielle rekursion siger:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Vi viser ligheden ved induktion over n (denne bevismetode er beskrevet i margnen på side 109 i syvende udgave af bogen (109 eller 110 i ottende udgave)).

Først skal vi vise basistilfældet, hvilket er 0, da dette er det mindste tal i $\mathbb{N}_0$:

$$n = 0: \sum_{k=0}^{0} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0}.$$

Derefter viser vi induktionsskridtet, hvor vi viser, at hvis ligheden holder for $n-1,\ n > 0$, så holder den også for n. Antag derfor, at ligheden holder for $n-1$, så

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+(n-1)+1}{n-1} = \binom{m+n}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{n}$$

$$= \binom{m+n}{n} + \binom{m+n}{n-1} = \binom{m+n+1}{n},$$

hvor den sidste omskrivning følger af den binomielle rekursion. Vi har nu vist, at ligheden holder for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da vi ikke har antaget andet om m, end at det er et ikke-negativt heltal, følger det, at det holder for alle $m \in \mathbb{N}_0$.

d) Vis, at den binomielle rekursion holder for $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Svar: Siden beviset fra forelæsningen på intet tidspunkt bruger, at n er et naturligt tal, kan dette bevis bruges til at bevise den binomielle rekursion for $n \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ såvel som for $n, k \in \mathbb{N}$.

Vi vil vise, at

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Vi tager udgangspunkt i højre side af ligheden:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$= \left(\frac{n-k}{k} + 1\right)\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

e) Udvid Pascals trekant til de negative heltal ved at bruge den binomielle rekursion.

Svar: Vi omskriver den binomielle rekursion til

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}.$$

Det vil sige, at hvert felt i trekanten er differensen mellem feltet under og feltet til venstre (hvis vi ser på formen i Stephans slides fra forelæsning 17), hvor $C(n,0) = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
-5	1	-5	15	-35	70	-126
-4	1	-4	10	-20	35	-56
-3	1	-3	6	-10	15	-21
-2	1	-2	3	-4	5	-6
-1	1	-1	1	-1	1	-1
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1