MM529 E-timer
131009

Kathja Fuglø

(1)

a) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion med $f(0) = 1$ og $f(3) = 4$. Find en værdi, som f' nødvendigvis må antage, samt et interval, hvor den må forekomme.

Svar: Middelværdisætningen (givet som sætning 11 i afsnit 2.8 i bogen) siger, at hvis funktionen f er kontinuert på intervallet $[a, b]$ og differentiabel på intervallet (a, b). Så eksisterer der et $c \in (a, b)$, sådan at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Det vil for den givne funktion sige, at der eksisterer $c \in (0, 3)$, sådan at $f'(c) = \frac{4-1}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$.

b) Bestem en differentiabel funktion f med $f(0) = 1$ og $f(3) = 4$, hvor f' ikke antager andre værdier end denne.

Svar: De eneste funktioner, for hvilke den afledede er en konstant, er lineære funktioner ($f(x) = ax + b$). Denne har $a = f'(x) = 1$ og $b = f(0) = 1$, så

$$f(x) = x + 1.$$

(2)

Brug lineær approximation ved $a = 1$, $a = 0.1$ og $a = 0.01$ til at estimere funktionsværdien i $x = 0$ af

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

Sammenlign resultaterne med $f(0)$ og fortolk dem.

Svar: Først skal vi bestemme lineariseringen af f i hvert af de givne punkter. Lineariseringen omkring a er givet ved

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \frac{\sin a}{a} + \frac{a\cos a - \sin a}{a^2}(x-a)$$

For $a = 1$ og $x = 0$ er dette

$$L(x) = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{1^2} \cdot (-1) \approx 1.14263$$

For $a = 0.1$ er det

$$L(x) = \frac{\sin 0.1}{0.1} + \frac{0.1\cos 0.1 - \sin 0.1}{0.1^2} \cdot (-0.1) \approx 1.00166$$

For $a = 0.01$ er det

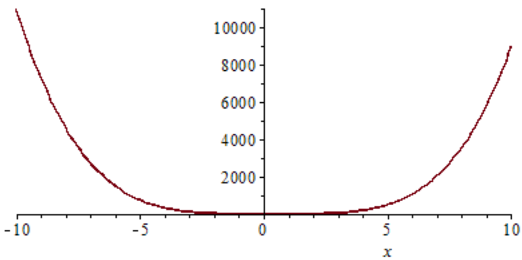
$$L(x) = \frac{\sin 0.01}{0.01} + \frac{0.01\cos 0.01 - \sin 0.01}{0.01^2} \cdot (-0.01)$$
$$\approx 1.00002$$

Alle approksimerede værdier er regnet ved hjælp af Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com). Vi kan se, at de approksimerede værdier kommer tættere og tættere på den faktiske funktionsværdi i $x = 0$. Dette kan tolkes på flere måder. For det første stemmer det godt overens med, at vi viste i sidste uge, at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$. For det andet er det et eksempel på, at approksimationer bliver bedre og bedre jo tættere på den x, man ønsker at approksimere for, man foretager dem, hvis funktionen er kontinuert omkring den x-værdi, man ønsker at approximere for.

(3)

a) Brug Newtons metode til til at approksimere den største rod af $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

Svar: Da der ikke er givet en nøjagtighed, vi skal approksimere til, vælger vi at approksimere ned til tre decimalers nøjagtighed. For at bruge Newtons metode skal vi først finde et godt x_0 at starte i. Dette gør vi ved at plotte funktionen i maple:



Ud fra plottet kan vi se, at alle nulpunkter må ligge mellem $x = -5$ og $x = 5$. Vi sætter derfor $x_0 = 5$. Derudover skal vi bruge $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$ og formlen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Da vi vil approksimere ned til tre decimaler, tager vi fire decimaler med i udregningerne, hvor det sidste er en slags kontrolciffer.

Så får vi $x_1 = 5 - \dfrac{5^4 - 5^3 - 5 - 1}{4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 1} \approx 3.8349$

$$x_2 = 3.8349 - \frac{3.8349^4 - 3.8349^3 - 3.8349 - 1}{4 \cdot 3.8349^3 - 3 \cdot 3.8349^2 - 1} \approx 2.9758$$

$$x_3 = 2.9758 - \frac{2.9758^4 - 2.9758^3 - 2.9758 - 1}{4 \cdot 2.9758^3 - 3 \cdot 2.9758^2 - 1} \approx 2.3580$$

$$x_4 = 2.3580 - \frac{2.3580^4 - 2.3580^3 - 2.3580 - 1}{4 \cdot 2.3580^3 - 3 \cdot 2.3580^2 - 1} \approx 1.9424$$

$$x_5 = 1.9424 - \frac{1.9424^4 - 1.9424^3 - 1.9424 - 1}{4 \cdot 1.9424^3 - 3 \cdot 1.9424^2 - 1} \approx 1.7092$$

$$x_6 = 1.7092 - \frac{1.7092^4 - 1.7092^3 - 1.7092 - 1}{4 \cdot 1.7092^3 - 3 \cdot 1.7092^2 - 1} \approx 1.6277$$

$$x_7 = 1.6277 - \frac{1.6277^4 - 1.6277^3 - 1.6277 - 1}{4 \cdot 1.6277^3 - 3 \cdot 1.6277^2 - 1} \approx 1.6182$$

$$x_8 = 1.6182 - \frac{1.6182^4 - 1.6182^3 - 1.6182 - 1}{4 \cdot 1.6182^3 - 3 \cdot 1.6182^2 - 1} \approx 1.6180$$

$$x_9 = 1.6180 - \frac{1.6180^4 - 1.6180^3 - 1.6180 - 1}{4 \cdot 1.6180^3 - 3 \cdot 1.6180^2 - 1} \approx 1.6180$$

Da det fjerde ciffer ikke ændres fra x_8 til x_9, er vores svar, at $f(x) = 0$ for $x \approx 1.618$.

b) Forklar relationen mellem Newtons metode og lineær approksimation.

Svar: Newtons metode fungerer ved hele tiden at finde nulpunktet for den lineære approksimation omkring x_n og bruge dette nulpunkt som x_{n+1}.

(4)

En ukendt funktion f har $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$ og $f'''(0) = -1$. Gør dit bedste for at approksimere $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$.

Svar: Til dette formål bruger vi maclaurinpolynomier. Maclaurinpolynomiet er et taylorpolynomiet af grad n omkring $a = 0$ for en funktion f og har formlen

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

Da vi kender op til den tredje afledede af f, kan vi approximere $f(1)$ med et tredjegrads maclaurinpolynomium:

$$f(x) \approx P_3(x) = \frac{1}{0!} + \frac{2}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = 1 + 2x - \frac{x^3}{6}$$

$$f(1) \approx P_3(1) = 1 + 2 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

$$f'(x) \approx P_3'(x) = 2 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(1) \approx P_3'(1) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) \approx P_3''(x) = x \Rightarrow f''(x) \approx P_3''(1) = 1$$

(5)

a) Bestem taylorpolynomierne $P_n(x)$ for $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$ i $a = 0$ for alle n.

Svar: For at finde maclaurinpolynomierne af alle grader skal vi først finde $f(0)$ samt alle afledede af f og deres værdier i $x = 0$:

$$f(0) = -1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 6 \Rightarrow f'''(0) = -6$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24$$

$$f^{(n)}(x) = 0,\ n \geq 5$$

$$P_0(x) = -1$$

$$P_1(x) = -1 + \frac{-1}{1!}x = -1 - x$$

$$P_2(x) = -1 - x + \frac{0}{2!}x^2 = -1 - x$$

$$P_3(x) = -1 - x + \frac{-6}{3!}x^3 = -1 - x - x^3$$

$$P_n(x) = -1 - x - x^3 + \frac{24}{4!}x^4 = -1 - x - x^3 + x^4,\ n \geq 4$$

Dette er et eksempel på, at taylorpolynomiet af grad n for et polynomium af grad n vil være lig med det oprindelige polynomium.

b) For $n = 2$, brug Lagranges restled til at bestemme grænserne for den fejl, du får, hvis du approksimerer $f(x)$ med $P_2(x)$ for $x = -\frac{1}{2}$ og $x = 2$.

Svar: Til dette bruger vi Lagranges restled, som er givet (sætning 12 i afsnit 4.10) ved

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1} \Rightarrow E_2(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{(3)!}x^3$$

for et eller andet s mellem a og x

Den fejl, vi har begået ved at approximere $f(x)$ ved $P_2(x)$, er altså

$$E_2(x) = \frac{24s-6}{3!}x^3 = (4s-1)x^3$$

For $x = -\frac{1}{2}$ er dette

$$E_2\left(-\frac{1}{2}\right) = (4s-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{s}{2}$$

så $\frac{1}{8} \leq E_2\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{8}$. For $x = 2$ er det

$$E_2(2) = (4s-1)\cdot 2^3 = 32s - 8$$

så $-8 \leq E_2(2) \leq 56$.

(6)

Beregn de følgende summer:

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Svar: Den beregnede vi til e-timen 130925.

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Svar: Maclaurinrækken for e^x er givet ved

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1^k = e^1 = e$$

c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \dots$$

Svar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (-1)^k = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(7)

a) Bestem taylorrækken for $f(x) = \cos x$ for $a = 0$.

Svar: Vi skal finde en generel formel for den n'te afledede til cosinus i nul. Vi starter med at differentiere ind til vi finder et mønster:

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

Generelt har vi, at for $n \in \mathbb{N}_0$ er $f^{(2n+1)}(0) = 0$ og $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Dette kan vi sætte ind i formlen for taylorrækken (hvor vi springer de ulige afledede over):

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

b) Brug Taylorrækken for $\sin x$ for $a = 0$ til at argumentere for, at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Svar: På samme måde som ovenfor kan maclaurinrækken for sinus bestemmes til

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

når $x \neq 0$. Grænseværdien for $x \to 0$ kan findes ved at sætte nul ind i ovenstående (hvis vi bruger konventionen, at $0^0 = 1$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 0^{2n} = \frac{(-1)^0}{1!} \cdot 0^0 = 1$$

Vi har altså igen vist, at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$