MM529 E-timer 140305 og 140306

Kathja Fuglø

(1) Uegentlige dobbeltintegraler

Afgør, hvorvidt de givne integraler konvergerer eller divergerer. Evaluer dem, der konvergerer.

Afsnit 14.3, opgave 2:

$$\iint_Q \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dA,$$

hvor Q er den første kvadrant af xy-planet.

Svar: Den nemmeste måde at finde ud af, om integralet konvergerer, er at forsøge at evaluere det. Derfor vil vi for dette og de to følgende integraler først antage, at de konvergerer. Vi omskriver integralet:

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dA \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy\ dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} dy\ dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} dy \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \right)^2 = \left(\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx \right)^2.
\end{aligned}$$

Vi evaluerer integralet:

$$\int_0^a \frac{1}{(1+x^2)} dx = \left[\tan^{-1} x\right]_0^a = \tan^{-1} a$$

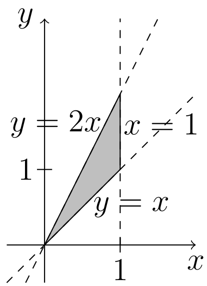
$$\Rightarrow \iint_Q \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dA = \lim_{a\to\infty} \left(\tan^{-1} a\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Afsnit 14.3, opgave 4:

$$\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}} dA,$$

hvor T er trekanten med hjørner $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,2)$.

Svar: For at bestemme grænserne tegner vi en figur til hjælp:



Vores grænser er altså $x \le y \le 2x$, $0 \le x \le 1$. Vi omskriver integralet:

$$\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}} dA = \int_0^1 \int_x^{2x} \frac{1}{x\sqrt{y}} dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \ dx.$$

Vi evaluerer det indre integrale:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = [2\sqrt{y}]_x^{2x} = 2\sqrt{2x} - \sqrt{x}) = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}} dA = \int_0^1 \frac{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x}}{x} dx$$

$$= 2(\sqrt{2}-1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2}-1) \left[2\sqrt{x}\right]_0^1$$

$$= 2(\sqrt{2}-1) \cdot 2 = 4\sqrt{2} - 4.$$

Afsnit 14.3, opgave 8:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|} dA.$$

Svar: Her er vi nødt til at skelne mellem tilfældet, hvor $x+y$ er positivt, og hvor det er negativt: $x+y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$. Vi kan yderligere konstatere, at integranden er symmetrisk omkring $x+y=0$. Dette giver os omskrivningen:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|} dA = 2 \iint_{x+y<0} e^{x+y} dA$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-x} e^{x+y} dy\ dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} \int_{-\infty}^{-x} e^{y} dy\ dx$$

Vi evaluerer det indre integrale:

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{y} dy = \lim_{a \to -\infty} [e^{y}]_{-\infty}^{-x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|} dA = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} e^{-x} dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \infty.$$

Dette integrale konvergerer altså ikke.

(2) Gennemsnitsværdi over et område

Afsnit 14.3, opgave 22: Find gennemsnitsværdien af x^2 over rektanglet $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$.

Svar: For at finde gennemsnitsværdien skal vi dele integralet af funktionen over området med arealet af området, hvor vi antager, at $a \neq b$ og $c \neq d$:

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d x^2 dy\ dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b x^2 \int_c^d dy\ dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b (d-c)x^2 dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + a^2 + ab)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 + a^2 + ab}{3}.$$

Afsnit 14.3, opgave 24: Find gennemsnitsværdien af $\frac{1}{x}$ over området $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Svar: Da grænserne for området er en funktion af x, bruger vi en anden fremgangsmåde end før. Først bestemmer vi integralet af funktionen over området:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x} dy\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - x^2}{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Derefter bestemmer vi arealet af området. Dette kan vi gøre ved at integrere funktionen $f(x, y) = 1$ over området:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\ dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Det vil sige, at gennemsnitsværdien af $\frac{1}{x}$ over området $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ er

$$3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

(3) Dobbeltintegraler i polære koordinater

Når vi omskriver et integrale til polære koordinater, har vi forskellige omskrivningsregler. Disse er som følger (hvor vi som udgangspunkt antager, at $r \geq 0$):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\theta,$$

$$dx\ dy = dA = r\ dr\ d\theta.$$

Afsnit 14.4, opgave 2: Evaluer integralet

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA,$$

hvor D er disken $x^2 + y^2 \leq a^2,\ a > 0$.

Svar: Vi bruger ovenstående regler til at omskrive. Som grænser får vi $x^2 + y^2 \leq a^2 \Leftrightarrow r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$, da vi vil rundt på hele disken (men kun en gang). vores integrand bliver $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$, da $r \geq 0$. Vi kan nu omskrive integralet:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \cdot r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r^2\ dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

Afsnit 14.4, opgave 8: Evaluer integralet

$$\iint_Q (x+y)dA,$$

hvor Q er kvart-disken

$$x^2+y^2 \leq a^2,\ a>0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Svar: Vi omskriver grænserne og integranden. For grænserne får vi $0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, og integranden er $r(\cos\theta + \sin\theta)$, så vi får

$$\iint_Q (x+y)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r(\cos\theta + \sin\theta)r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^a r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\ d\theta$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \cdot [\sin\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3} \cdot (1+1) = \frac{2a^3}{3}$$

Afsnit 14.4, opgave 16: Find gennemsnitsværdien af $e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ over det ringformede område

$$0 < a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b.$$

Svar: Vi omskriver: Funktionen bliver $e^{-\left(x^2+y^2\right)} = e^{-r^2}$, og grænserne bliver $a \leq r \leq b$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Arealet af området er $\pi\left(b^2-a^2\right)$, så funktionens gennemsnitsværdi er

$$\frac{1}{\pi\left(b^2-a^2\right)} \int_0^{2\pi} \int_a^b e^{-r^2} r \; dr \; d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi\left(b^2-a^2\right)} \cdot 2\pi \int_a^b e^{-r^2} r \; dr = \frac{1}{b^2-a^2} \int_a^b 2re^{-r^2} dr$$

Vi bruger nu substitution, hvor vi sætter $t = r^2 \Rightarrow dt = 2rdr$, og $r = a \Rightarrow r^2 = a^2$ og $r = b \Rightarrow r^2 = b^2$, så

$$\frac{1}{b^2-a^2} \int_a^b 2re^{-r^2} dr = \frac{1}{b^2-a^2} \int_{a^2}^{b^2} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2} \left[-e^{-t}\right]_{a^2}^{b^2} = \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{b^2-a^2}$$