MM529 E-timer
140226 og 140227

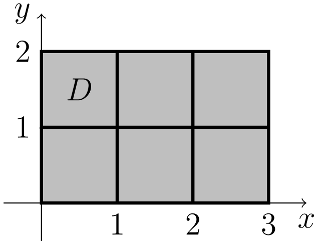
Kathja Fuglø

(1) Riemannsummer af dobbeltintegraler

Se på dobbeltintegralet

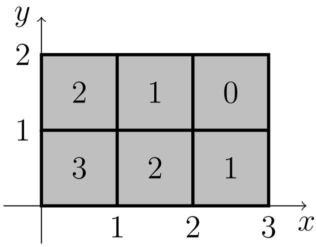
$$I = \iint_D (5 - x - y)dA,$$

hvor D er rektanglet $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$. P er inddelingen af D i seks kvadratiske felter:



Afsnit 14.1, opgave 2: Beregn riemannsummen, hvor $(x_{i,j}, y_{i,j})$ er det øverste højre hjørne af hvert felt.

Svar: Vi beregner funktionsværdierne og noterer i hvert felt:

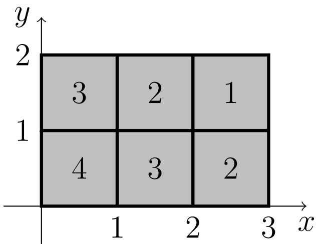


$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 5 - 1 - 1 = 3\\
f(2,1) &= 5 - 2 - 1 = 2\\
f(3,1) &= 5 - 3 - 1 = 1\\
f(1,2) &= 5 - 1 - 2 = 2\\
f(2,2) &= 5 - 2 - 2 = 1\\
f(3,2) &= 5 - 3 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Da arelalet af hvert felt er 1, bliver riemannsummen i dette tilfælde $3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 0 = 9$.

Afsnit 14.1, opgave 4: Beregn riemannsummen, hvor $(x_{i,j}, y_{i,j})$ er det nederste højre hjørne af hvert felt.

Svar: Vi noterer igen funktionsværdierne i hvert felt:

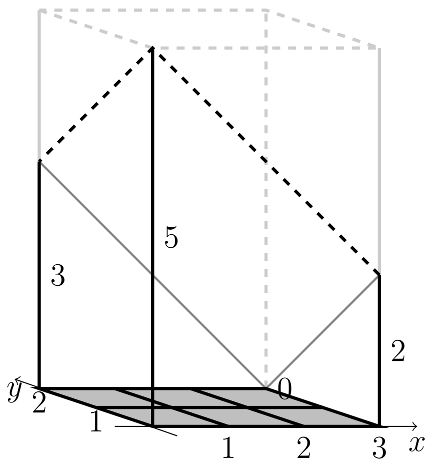


$$
\begin{aligned}
f(1,0) &= 5-1-0=4\\
f(2,0) &= 5-2-0=3\\
f(3,0) &= 5-3-0=2\\
f(1,1) &= 5-1-1=3\\
f(2,1) &= 5-2-1=2\\
f(2,1) &= 5-2-1=1
\end{aligned}
$$

Da arelalet af hvert felt er 1, bliver riemannsummen i dette tilfælde $4+3+2+3+2+1=15$.

Afsnit 14.1, opgave 6: Evaluer I ved at fortolke det som et rumfang.

Svar: For at fortolke integralet som et rumfang tegner vi det først i "3D", hvor højden i et givet punkte svarer til funktionsværdien i punktet. Den lysegrå del er ikke en del af integralet.



Vi kan se, at integralet ligner en kasse, der er skåret midt over. En sådan form har rumfang

$$\frac{1}{2} \cdot [\text{længde}] \cdot [\text{dybde}] \cdot [\text{højde}] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = \frac{30}{2} = 15.$$

(2) Iteration af dobbeltintegraler

Bemærk, at bogens notation for itererede integraler kan være misvisende! For at illustrere: Bogen skriver til tider

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy,$$

hvor det ville være mere korrekt at skrive

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\ dx.$$

Afsnit 14.2, opgave 2: Evaluer $\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2)\, dx\, dy$.

Svar: Først evalueres det indre integrale:

$$\int_0^y (xy + y^2)\, dx = \left[\frac{x^2 y}{2} + xy^2\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{y^3}{2} + y^3.$$

Derefter indsætter vi i det oprindelige integrale:

$$\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2)\, dx\ dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} + y^3\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{8} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Afsnit 14.2, opgave 6: Evaluer $\iint_R x^2y^2dA$, hvor R er rektanglet $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$.

Svar: Først omskriver vi til et itereret integrale:

$$\iint_R x^2y^2dA = \int_0^a \int_0^b x^2y^2dy\ dx.$$

Så evaluerer vi det indre integrale:

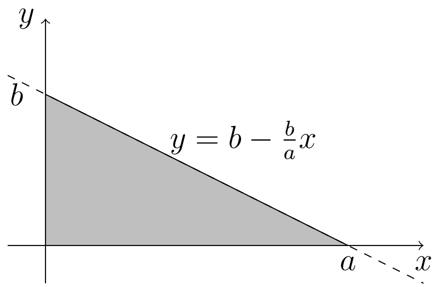
$$\int_0^b x^2y^2dy = \left[\frac{x^2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=b} = \frac{x^2b^3}{3}$$

og indsætter i det oprindelige integrale:

$$\iint_R x^2y^2dA = \int_0^a \frac{x^2b^3}{3}dx = \left[\frac{x^3b^3}{9}\right]_0^a = \frac{a^3b^3}{9}.$$

Afsnit 14.2, opgave 8: Evaluer $K = \iint_T (x-3y)dA$, hvor T er trekanten med hjørner $(0,0)$, $(a,0)$ og $(0,b)$.

Svar: For at få en idé til, hvordan vi opskriver grænserne, tegner vi trekanten:



Denne trekant kan opskrives som

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b - \frac{b}{a}x,$$

så vi får

$$K = \iint_T (x-3y)dA = \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} (x-3y)dy\ dx.$$

Igen evaluerer vi først det indre integrale:

$$\int_0^{b-\frac{b}{a}x} (x-3y)dy = \left[xy - \frac{3y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x}$$

$$= x\left(b - \frac{b}{a}x\right) - \frac{3\left(b-\frac{b}{a}x\right)^2}{2}$$

$$= bx - \frac{b}{a}x^2 - \frac{3b^2}{2} + \frac{3b^2}{a}x - \frac{3b^2}{2a^2}x^2$$

$$\Rightarrow K = \int_0^a \left(bx - \frac{b}{a}x^2 - \frac{3b^2}{2} + \frac{3b^2}{a}x - \frac{3b^2}{2a^2}x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{bx^3}{3a} - \frac{3b^2x}{2} + \frac{3b^2x^2}{2a} - \frac{b^2x^3}{2a^2}\right]_0^a$$

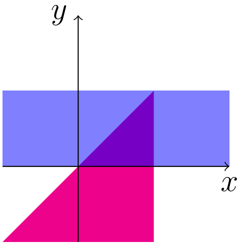
$$= \frac{a^2b}{2} - \frac{a^3b}{3a} - \frac{3ab^2}{2} + \frac{3a^2b^2}{2a} - \frac{a^3b^2}{2a^2}$$

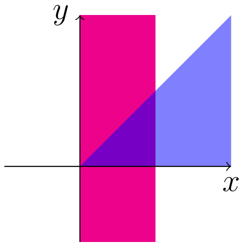
$$= \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2b}{3} - \frac{3ab^2}{2} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{ab^2}{2}$$

$$= \frac{a^2b}{6} - \frac{ab^2}{2}.$$

Afsnit 14.2, opgave 15: Skitser definitionsmængden for integralet $\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx\ dy$, og evaluer det.

Svar: Området, vi integrerer over, kan beskrives ved $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 1$, og vi kan skitsere det således:





hvor det rødlige område viser grænserne for x, og det blå indikerer grænserne for y. Det lilla område, hvor de overlapper, er det område, der integreres over. Den højre figur svarer til en omskrivning af gænserne til $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Vi kan nu i henhold til sætning 2 i afsnit 14.2 omskrive integralet, så vi får

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx\ dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy\ dx.$$

Vi evaluerer nu det indre integrale:

$$\int_0^x e^{-x^2} dy = \left[e^{-x^2} y \right]_{y=0}^{y=x} = e^{-x^2} x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy\ dx = \int_0^1 e^{-x^2} x\ dx$$

Dette integrale løser vi ved substitution. Vi sætter $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt = xdx$. Grænserne bliver så $0 \leq t \leq 1$, da $0^2 = 0$ og $1^2 = 1$, så vi får

$$\int_0^1 e^{-x^2} x\ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{1}{2} \left[-e^- t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(-e^{-1} + e^0\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$