Übung 1

Aufgabe 1: Es sei $x = (6, 1, 3, 4, 1)$. Berechnen Sie:

a) $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} x_k$

b) $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 3)^2$

c) $\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_{6-i}$

d) $\prod_{i=1}^{5}(-1)^{x_i}$

Aufgabe 2: Die Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ ist als die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, definiert. Es sei $n = 8$. Geben Sie $\lfloor \alpha n \rfloor$ für $\alpha = 0.1, 0.4, 0.7$ an.

Aufgabe 3: Berechnen Sie $\binom{8}{3}$.

Aufgabe 4: Gelten die folgenden Rechenregeln?

a) $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$

b) $(x + y)^a = x^a + y^a$

c) $e^{(x^2)} = (e^x)^2$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$

e) $\log(x + y) = \log(x) + \log(y)$

f) $\log(x \cdot y) = \log(x) \cdot \log(y)$

g) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

h) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$

Aufgabe 5: Vereinfachen Sie:

a) $3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4$

b) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$

b) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$

Aufgabe 6: Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \log(x)$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = e^{-x^2}$

f) $f(x) = e^{-(x-1)^2}$

g) $f(x) = e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}$

Übung 1 Statistik 12.10.2016

①

A1 $x = (6, 1, 3, 4, 1)$ $x_1 = 6$ $x_2 = 1$ $x_3 = 3$ $x_4 = 4$ $x_5 = 1$

a) $\frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} x_k$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

b) $$\sum_{j=1}^{5} (x_j - 3)^2 = (6-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (1-3)^2$$
$$= 9 + 4 + 0 + 1 + 4 = 18$$

c) $$\sum_{m=2}^{4} m \cdot x_{6-m} = (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 1) = 8 + 9 + 4 = 21$$

d) $$\prod_{j=1}^{5} (-1)^{x_j} = (-1)^6 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 (-1)^1 =$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \, (-1) = -1$$

Produkt

A2 $n = 8$ $\lfloor \alpha n \rfloor \Rightarrow$ für $\alpha = 0.1;\ 0.4;\ 0.7$

$\lfloor x \rfloor$ = „x abgerundet" (Gaußklammer)

a) $\alpha = 0.1$ $\lfloor 0{,}1 \cdot 8 \rfloor = 0$

b) $\alpha = 0{,}7$ $\lfloor 0{,}7 \cdot 8 \rfloor = \lfloor 5{,}6 \rfloor = 5$

c) $\alpha = 0{,}9$ $\lfloor 0{,}9 \cdot 8 \rfloor = \lfloor 7{,}2 \rfloor = 7$

A3 $$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 15$$

→ immer eine ganze Zahl

Binomische Regeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\vdots$$

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^n + \binom{m}{1} a^{n-1} b + \binom{m}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{m}{n} b^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Taschenrechner

$\boxed{C_k^n}$

$\boxed{C_{n,k}}$

A4

a) $(x \cdot y)^b = x^b \cdot y^b$ ✓

b) $(x+y)^b = x^b + y^b$ ✗

c) $e^{(x^2)} = (e^x)^2$ ✗ $\quad (e^x)^2 = e^{2x}$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$ ✓

e) $\log(x+y) = \log(x) + \log(y)$ ✗

f) $\log(x \cdot y) = \log(x) \cdot \log(y)$ ✗

g) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ ✓

Wie kann man einfacher ableiten?

* $f(x) \cdot g(x)$

$\ln(f(x) \cdot g(x)) = \underline{\ln(f(x)) + \ln(g(x))}$,

* $\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

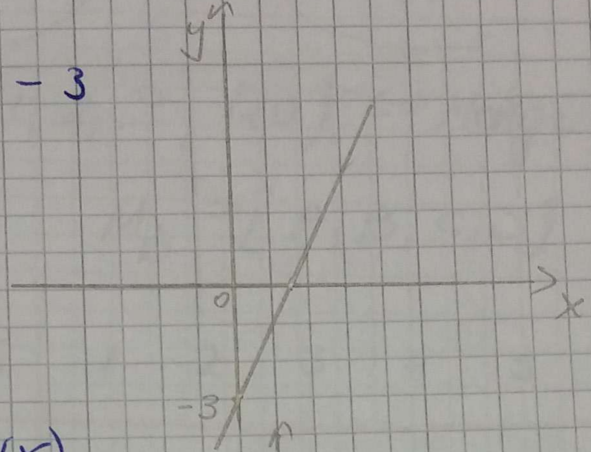
A5

a) $3^a \cdot 3^b \cdot 3^c = 3^{(a+b+c)}$

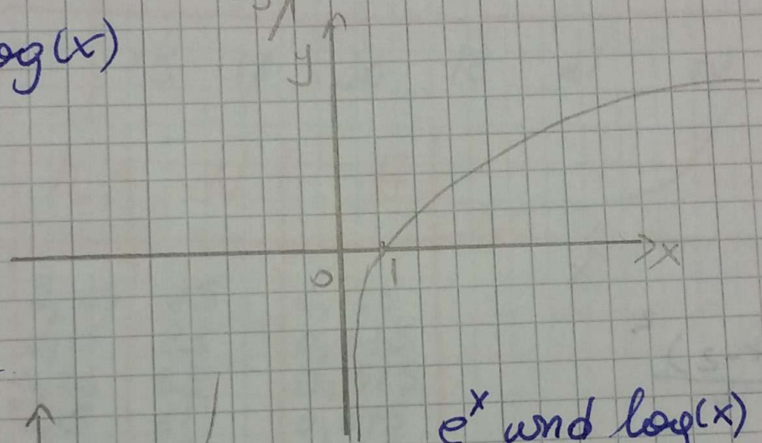
b) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (abc)^3$

A6

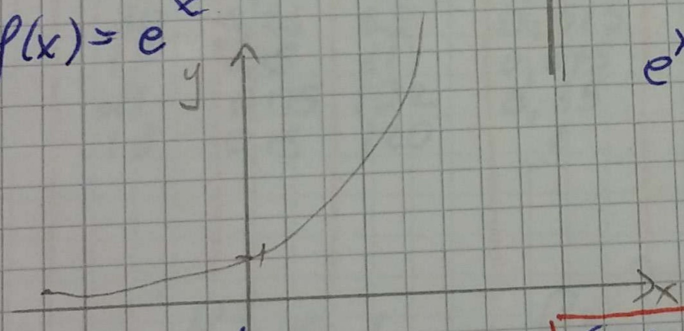
a) $f(x) = 2x - 3$



b) $f(x) = \log(x)$



oder $f(x) = e^x$



e^x und $\log(x)$ sind Umkehrfunktionen

$$\begin{cases} e^{-x} = x \\ -x = \ln(x) \end{cases}$$

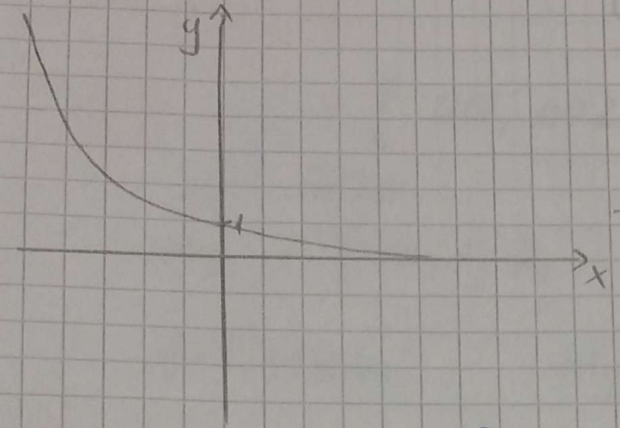
$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \;(n \to \infty)}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2{,}44$$

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714$$

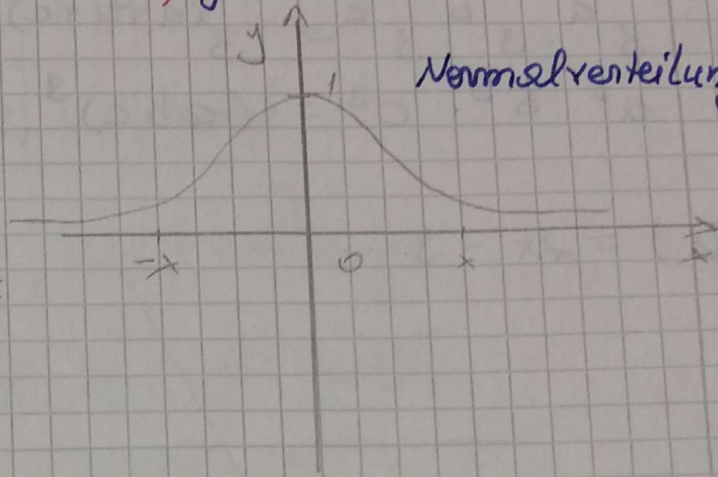
$\longrightarrow$

d) $f(x) = e^{-x}$

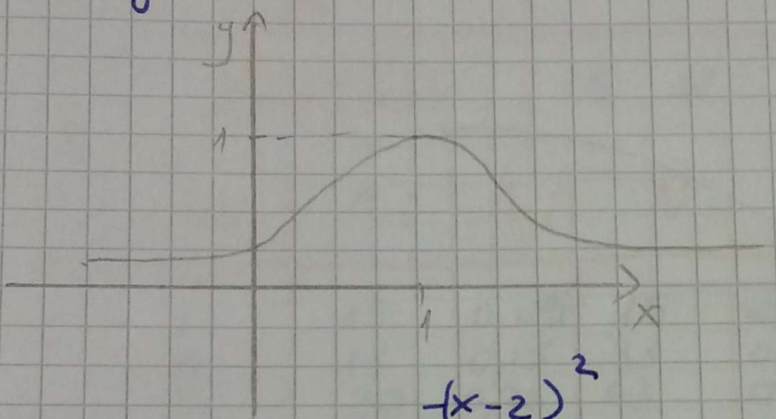


e) $f(x) = e^{-x^2}$

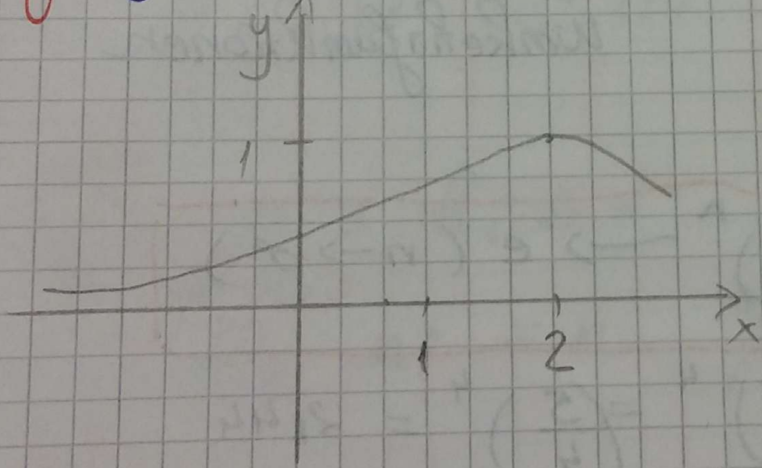
Normalverteilung



f) $f(x) = e^{-(x-1)^2}$



g) $f(x) = e^{\frac{-(x-2)^2}{4}}$



Übung 2

Aufgabe 7: Im Rahmen einer Wahlumfrage wird für 700 am Telefon Befragte das Alter und die bevorzugte Partei (A,B,C oder D) ermittelt. Geben Sie ein passendes Ω an und beschreiben Sie die Merkmale mathematisch durch Angabe der Merkmalsausprägungen.

Aufgabe 8: Geben Sie für das Beispiel B1.1 eine Tabelle an, die die relativen und absoluten Häufigkeiten, sowie die kumulativen relativen und kumulativen absoluten Häufigkeiten enthält.

Aufgabe 9: Warum gelten die Gleichungen 2.1–2.3? **Aufgabe 10:** Geben Sie jeweils ein weiteres Beispiel für die besprochenen vier Merkmalsskalen an.

Aufgabe 11: Auf der Straße werden 20 erwachsene Passanten im Rahmen einer Umfrage befragt. Eines der erfassten Merkmale ist die Kinderzahl K. Folgende Beobachtungen werden notiert:

$$1, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1$$

a) Geben Sie die Menge der Merkmalsausprägungen für das Merkmal K an.

b) Stellen Sie eine Tabelle auf, die die relativen und absoluten Häufigkeiten, sowie die kumulativen relativen und kumulativen absoluten Häufigkeiten enthält.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

18.10.2016

①

Übung 2

A7 $\Omega = \{001, 002, \dots, 700\}$

$A \triangleq$ Alter

$M_A = \{0, 1, 2, \dots, 120\} \Leftrightarrow$ Menge

$B \triangleq$ Partei $\quad M_B = \{A, B, C, D\}$

A8

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	15	18	30	18	21	18

$n = 120$

M_X	n_i	h_i	N	H
1	15	0,125	15	0,125
2	18	0,15	33	0,275
3	30	0,25	63	0,525
4	18	0,15	81	0,675
5	21	0,175	102	0,85
6	18	0,15	120	1

$h_1 = \frac{n_i}{n} = \frac{x}{120}$

z.B. $= \frac{15}{120} = 0{,}125$

N und H → kumulativ

A9

$0 \leq h_i \leq 1$, $h_i = \frac{n_i}{n}$, weil $n_i \leq n$

$\sum_{i=1}^{\# M_X} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^{\# M_X} h_i = 1$

Anzahl aller Werte

A10 NOMINALSKALA: Geschlecht, Wohnort, „gut, schlecht", Farben

ORDINALSKALA: Rang, Bewertungen

INTERVALLSKALA: Temperatur (°C), Datum (Daten), (IQ)

VERHÄLTNISSKALA: Gewicht, Lieferzeit, Mischungsverhältnisse

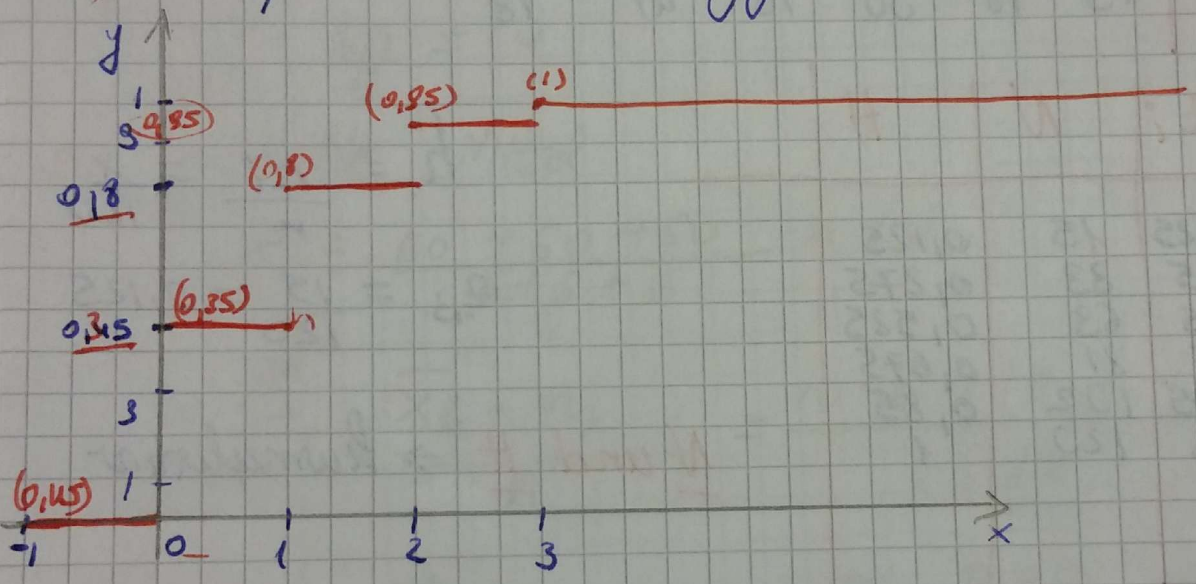
A11 20 Passanten werden gefragt
Kinderzahl ≙ K

a) Menge der Merkmalausprägungen
$M_K = \{ 0, 1, 2, \ldots, 100 \}$

b)

M_X	n	h	N	H
0	9	0,45	9	0,45
1	7	0,35	16	0,8
2	3	0,15	19	0,95
3	1	0,05	20	1

c) Empirische Verteilungsfunktion



Übung 3

Aufgabe 12:

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der folgenden drei Datenreihen.

(i) 1, 4, 6, 9, 10, 13, 18 (ii) 0, 2, 2, 3, 3, 50 (iii) 1, 2, 3, 17, 18, 19

b) Berechnen Sie das gepoolte Mittel mit Hilfe der drei Mittelwerte aus a).

c) Worin unterscheiden sich die Datensätze hinsichtlich der Lage der Datenwerte in Bezug auf ihren Mittelwert?

Aufgabe 13: Zeichnen Sie ein Histogramm für das Beispiel B2.20.

Aufgabe 14: Für 200 Hotels in Sachsen werden die monatlichen Übernachtungszahlen in klassierter Form betrachtet:

Klasse:	0-100	100-500	500-2000	2000-5000
Anzahl Hotels:	20	90	40	50

a) Zeichnen Sie ein Histogramm.

b) Zeichnen Sie ein Diagramm, das die zugehörige empirische Dichte zeigt.

c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel für die klassiert vorliegenden Übernachtungszahlen.

Aufgabe 15: Wann wird das arithmetische Mittel bei Hinzunahme eines weiteren Datenpunktes großer? Argumentieren Sie unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.5).

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Daten aus Aufgabe 11.

a) Zeichnen Sie ein Balkendiagramm und ein Kreisdiagramm.

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Kinderzahl.

c) Geben Sie die Ordnungsstatistik an.

d) Berechnen Sie den Median.

e) Berechnen Sie das α-getrimmte Mittel für $\alpha = 0.1$.

f) Geben Sie das obere Quartil an.

Aufgabe 17: Zeigen Sie, dass die Formel $\overline{ax+b} = a\overline{x} + b$ für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt (Linearität des arithmetischen Mittels).

Übung 3

26.10.2016

1

A12

a) Datenreihen

(i) 4, 6, 9, 10, 13, 18 → Median $\tilde{x} = \frac{9+10}{2} = 9{,}5$

$\bar{x} = \frac{60}{6} = 10$

(ii) 0, 2, 2, 3, 3, 50 $\quad \tilde{x} = 2{,}5$

$\bar{x} = \frac{60}{6} = 10$

(iii) 1, 2, 3, 17, 18, 19 $\quad \tilde{x} = 10$

$\bar{x} = \frac{60}{6} = 10$

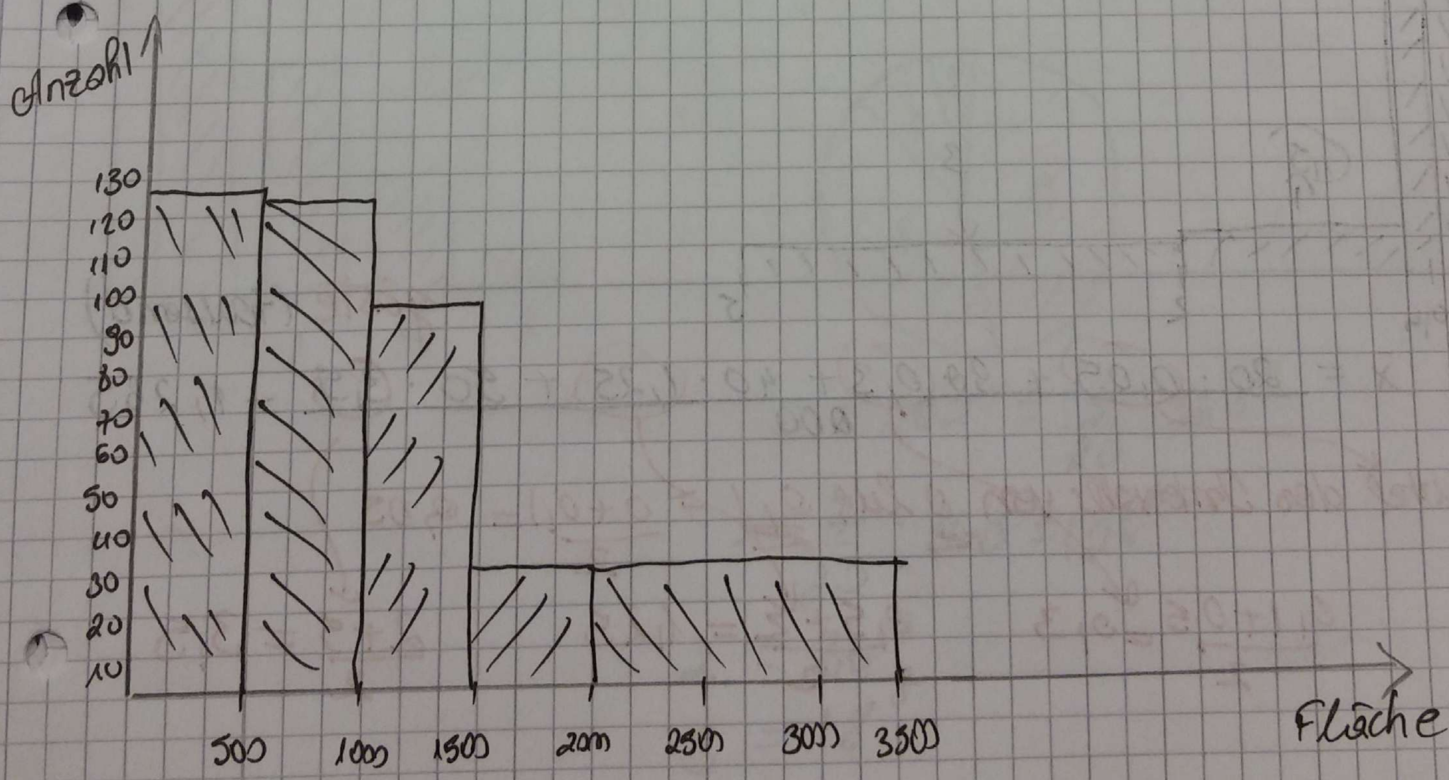
b) gepoolte Mittel

$$\bar{x} = \frac{60+60+60}{6+6+6} = 10$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k \cdot n_k}{n} = \frac{10\cdot 6 + 10\cdot 6 + 10\cdot 6}{18} = 10$$

c)

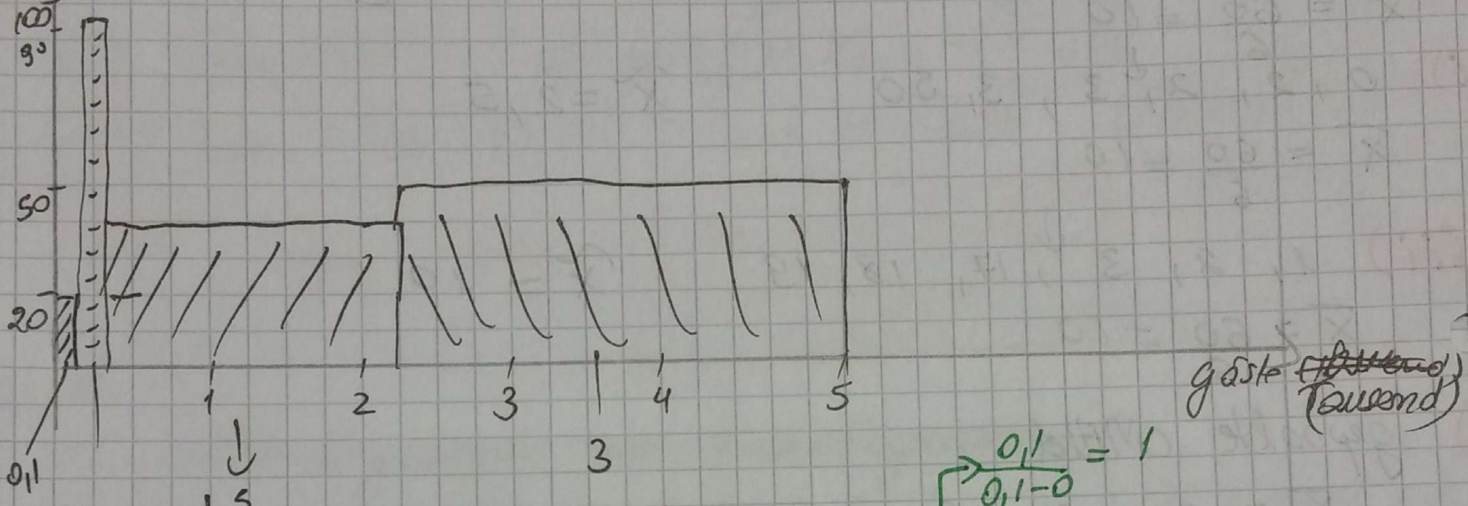
A13 Histogramm für BSP B2.20 (Seite 24)



A14 a) Histogramm

n 200 Hotels

Klasse	0-100	100-500	500-2000	2000-5000
von-bis	0-0,1	0,1-0,5	0,5-2	2 -3



b)

i	von	bis	hi	fi
1	0	0,1	0,1	1
2	0,1	0,5	0,45	1,125
3	0,5	2	0,2	0,13
4	2	5	0,25	0,083

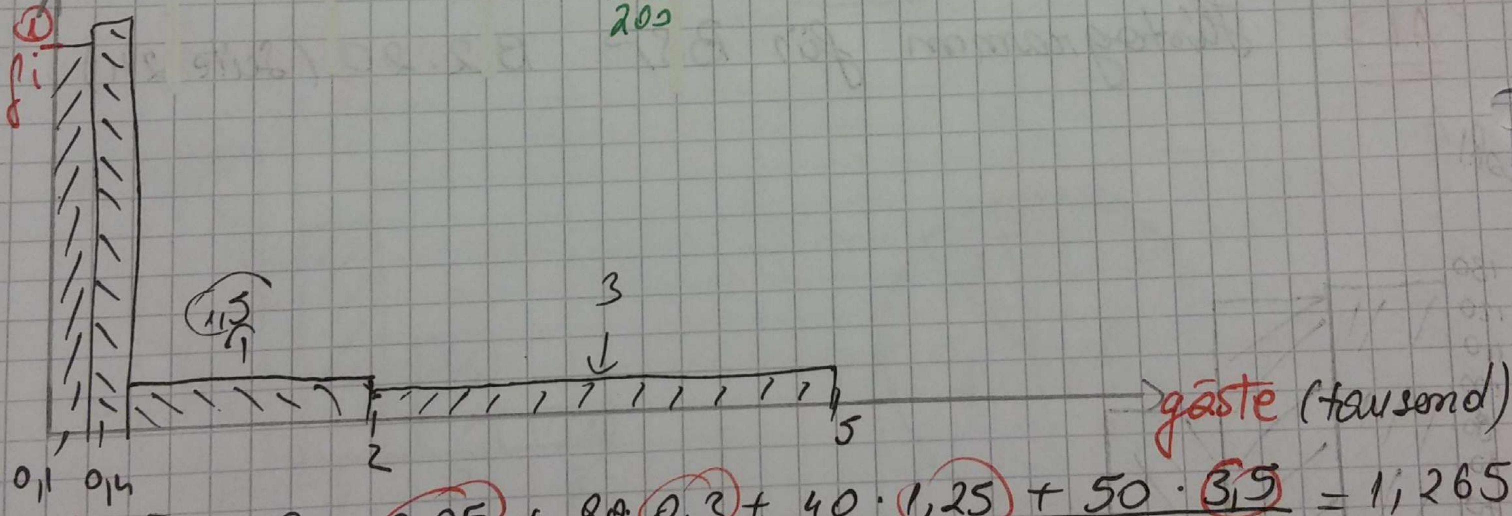
$\frac{90}{200}$

$\frac{0,1}{0,1-0} = 1$

$\frac{0,45}{0,5-0,1}$

$\frac{0,2}{2-0,5}$

$\frac{0,25}{5-2}$



c) $\bar{x} = \frac{20 \cdot 0,05 + 90 \cdot 0,3 + 40 \cdot 1,25 + 50 \cdot 3,5}{200} = 1,265$

Mittel des Intervalls von 0 bis 0,1 = $\frac{0+0,1}{2} = 0,05$

$\frac{0,1+0,5}{2} = 0,3$ $\frac{0,5+2}{2} = 1,25$ $\frac{2+5}{2} = 3,5$

2

A15 $\bar{x}_{neu} = \dfrac{\bar{x}_{alt} \cdot n + x_{n+1}}{n+1} \quad \Big| \cdot (n+1)$

$\Leftrightarrow \bar{x}_{neu} \cdot (n+1) = \bar{x}_{alt} \cdot n + x_{n+1}$

$\Leftrightarrow \bar{x}_{neu} \cdot (n+1) - \bar{x}_{alt} \cdot n = x_{n+1}$

$\Leftrightarrow \bar{x}_{neu} (n+1) - \bar{x}_{alt} (n+1) = x_{n+1} - \bar{x}_{alt}$

$\Leftrightarrow (\bar{x}_{neu} - \bar{x}_{alt})(n+1) = x_{n+1} - \bar{x}_{alt} \quad | : (n+1)$

$\Leftrightarrow \bar{x}_{neu} - \bar{x}_{alt} = \boxed{\dfrac{x_{n+1} - \bar{x}_{alt}}{n+1}}$

A16

a) Balkendiagramm und Kreisdiagramm

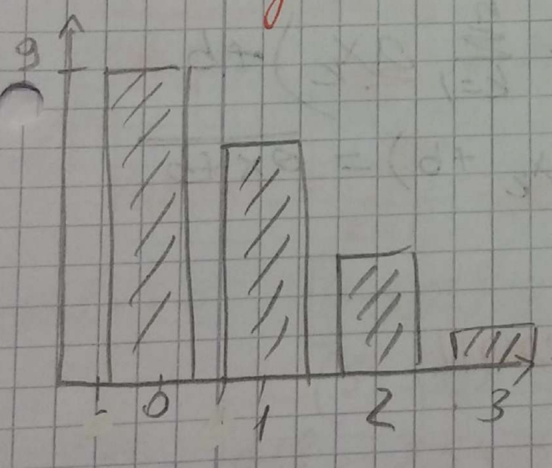
$x = (1, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$

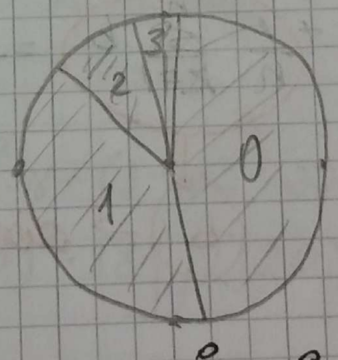
Ordnungsstatistik

$(\underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}_{9}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$

$n = 20$

Balkendiagramm





$0 = 162^\circ = \dfrac{9}{20} \cdot 360^\circ$

$1 = \dfrac{7}{20} \cdot 360^\circ = 126^\circ$

$2 = 36^\circ$

$3 = 18^\circ$

A1.6

b) $\overline{x} = \frac{0\cdot 9 + 1\cdot 7 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3}{20} = 0{,}8$

c) Ordnungsstatistik

$x_{(\cdot)} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,3)$

$\tilde{x}$ $\tilde{x}_{0{,}75}$

$x_{(3)} = 0 \quad x_{(20)} = 3$

d) Median

$\tilde{x} = \frac{1+1}{1} = 1$

e) α-getrimmte Mittel für $\alpha = 0{,}1$

$$\boxed{\overline{x}_{(\alpha)} = \frac{1}{n - 2(n\cdot\alpha)} \sum_{k=n\cdot\alpha+1}^{n-\lfloor n\cdot\alpha\rfloor} x_{(k)}}$$

$n - \lfloor n\cdot\alpha \rfloor = 20 - \lfloor 20\cdot 0{,}1 \rfloor = 18$

$k = n\cdot\alpha + 1 = 3$

$\Leftrightarrow \quad \overline{x}_{(0{,}1)} = \frac{1}{20-2(20\cdot 0{,}1)} \sum_{3}^{18} x_{(k)} = \frac{1}{16}\cdot(1+1+1+1+1+1+1+2+2)$

$= \frac{11}{16} = 0{,}688$

f) obere Quantil $\quad \tilde{x}_{0{,}75} = 1$

A1.7 $\quad \overline{ax+b} = a\overline{x} + b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$a\cdot\overline{x} + b = a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + b = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a x_k\right) + b$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a\cdot x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a x_k + b) = \overline{ax+b}$

b → damit bewiesen!

Übung 4

Aufgabe 18: Auf einer Insel werden drei Jahre lang Erdbeben und ihre Stärke registriert. Dabei werden folgende Jahresmittelwerte und Varianzen beobachtet.

Jahr	♯ Beben	$\overline{x}$	Var (x)
2012	6	2	1
2013	3	4	4
2014	7	3	2

Berechnen Sie den gepoolten Mittelwert und die gepoolte Varianz der Erdbebenstärken.

Aufgabe 19: Betrachten Sie die Daten aus dem Beispiel B1.1.

a) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung des beobachteten Merkmals Augenzahl.

b) Wieviele Daten liegen im Intervall $[\overline{x} - \sigma(x), \overline{x} + \sigma(x)]$?

c) Berechnen Sie den Median, die Quartile und den IQR.

Aufgabe 20: Entwerfen Sie eine Stichprobe von $n = 6$ Daten mit folgenden Anforderungen:

a) $\overline{x} = 0$,

b) $\overline{x} = 5$, $\sigma(x) = 1$,

c) $\tilde{x}_{25} = -3$, $\tilde{x}_{75} = 4$

c) Berechnen Sie den Median, die Quartile und den IQR.

Aufgabe 20: Entwerfen Sie eine Stichprobe von $n = 6$ Daten mit folgenden Anforderungen:

a) $\overline{x} = 0$,

b) $\overline{x} = 5$, $\sigma(x) = 1$,

c) $\widetilde{x}_{.25} = -3$, $\widetilde{x}_{.75} = 4$

d) $\widetilde{x} = 7$, $R_x = 10$.

Aufgabe 21: Gegeben seien die folgenden Schlusskurse des DAX an sieben aufeinander folgenden Tagen.

Tag	Schlusskurs
2016-10-26	10710
2016-10-25	10757
2016-10-24	10761
2016-10-21	10711
2016-10-20	10701

a) Berechnen Sie die Stichprobenvarianz und die Stichprobenstandardabweichung der Schlusskurse.

b) Geben Die die Spannweite, den IQR, sowie den Variationskoeffizienten an.

c) Berechnen Sie den MAD

Übung 4

01.11.2016

1

A18

3 Jahre lang

Jahr	# Beben	$\bar{x}$	Var(x)
2012	6	2	1
2013	3	4	4
2014	7	3	2
	$\Sigma = 16$		

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{16} = \frac{45}{16} = \boxed{2,8125} \rightarrow \text{gepoolter Mittelwert}$$

$$Var(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{Var(x_k) \cdot n_k}{n}}_{\text{interne}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{(\bar{x}_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n}}_{\text{externe}} \quad \text{gepoolte Varianz}$$

$$= \underbrace{\frac{6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 2}{16}}_{2} + \underbrace{\frac{6 \cdot \left(2 - \frac{45}{16}\right)^2 + 3 \cdot \left(4 - \frac{45}{16}\right)^2 + 7 \left(3 - \frac{45}{16}\right)^2}{16}}_{0,527}$$

$$= \underline{\underline{2,527}}$$

A19

	1	2	3	4	5	6
#	15	18	30	18	21	18

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 18}{120}$$

$$\bar{x} = \frac{426}{120} = 3,55$$

a) $$Var(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$Var(x) = \left[(1-3,55)^2 \cdot 15 + (2-3,55)^2 \cdot 18 + (3-3,55)^2 \cdot 30 + (4-3,55)^2 \cdot 18 + (5-3,55)^2 \cdot 21 + (6-3,55)^2 \cdot 18\right] / (120)$$

$$Var(x) = \frac{1019}{400} = 2,5475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{2,5475} = 1,5961 \text{ (Standardabweichung)}$$

b) Wie viele Daten liegen im Intervall

$I = [\bar{x} - \sigma(x) \; ; \; \bar{x} + \sigma(x)]$?

$I = [3{,}55 - 1{,}5961 \; ; \; 3{,}55 + 1{,}5961]$

$I = [1{,}953 \; ; \; 5{,}146]$

↳ hier drinn liegen $\underset{18}{2}, \underset{30}{3}, \underset{18}{4}, \underset{21}{5}$

$\frac{(\overset{2}{18} + \overset{3}{30} + \overset{4}{18} + \overset{5}{21})}{120} \cdot 100\% = 75{,}5\%$

Im Intervall I liegen 75,5 % der Daten

c) Median $\tilde{x} = (x_{(60)} + x_{(61)}) / 2 = \frac{3+3}{2} = 3$

$\frac{n}{2} = 60$

Quantile $\tilde{x}_{0,25} = \tilde{x}_u = \frac{\tilde{x}_{(30)} + \tilde{x}_{(31)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

$\frac{n}{4} = 30$ untere

$\tilde{x}_{0,75} = \tilde{x}_o = \frac{\tilde{x}_{(90)} + \tilde{x}_{(91)}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$

$3 \cdot \frac{n}{4}$ obere

$IQR = \tilde{x}_o - \tilde{x}_u = 5 - 2 = 3$

A20 $\quad n=6$

a) $\bar{x}=0 \quad x=(0,0,2,2,-2,-2)$

b) $\bar{x}=5 \quad \sigma(x)=1$

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{16}{9}}=y=1{,}6333$$

$$x^*=\left(0,0,\frac{2}{1{,}633},\frac{2}{1{,}633},\frac{-2}{1{,}633},\frac{-2}{1{,}633}\right)$$

$\bar{x}^*=0, \quad \sigma(x)=1$

$$z=x^*+5=\left(5,5,5+\frac{2}{1{,}1633},\dots\right)$$

$\bar{z}=5, \quad \sigma=1$

c) $\tilde{x}_{0{,}25}=-3 \quad \tilde{x}_{0{,}75}=4$

$\left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor = 1{,}5 \approx 2 \qquad x=(-3,-3,1,4,4,5)$

aufsteigende Zahlen

d) $\tilde{x}=7 \quad \boxed{R_x}=10=\boxed{x_{(n)}-x_{(1)}}$

$x=(0,1,7,7,9,10)$

$$\tilde{x}=\frac{x_{(3)}+x_{(4)}}{2}=7$$

$\Rightarrow R_x=10-0=10$

$\longrightarrow$

A 21)

Tag			
5	10710	10761	3
4	10757	10757	4
3	10761	10711	2
2	10711	10710	5
1	10701	10701	1

$$\bar{x} = \frac{10710 + 10757 + 10761 + 10711 + 10701}{5} = 10728$$

a) Stichprobenvarianz

$$\widehat{Var}(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \left[(10710 - 10728)^2 + (10757 - 10728)^2 + (10761 - 10728)^2 + (10711 - 10728)^2 + (10701 - 10728)^2\right] / 4 = 818$$

oder $\widehat{Var}(x) = \left[(10-28)^2 + (57-28)^2 + (61-28)^2 + \ldots (1-28)^2\right] / 4$

Stichprobenstandardabweichung

$$\widehat{G}(x) = \sqrt{\widehat{Var}(x)} = \sqrt{818} = 28,6007$$

b) Spannweite

$$R_x = x'_{(n)} - x_{(1)} = 10761 - 10701 = 60$$

$$IQR = x_{(o)} - x_{(u)}$$

$$\tilde{x}_o = x_4 = 10757$$

$$IQR = x_{(4)} - x_{(2)} = 10757 - 10710 = \underline{47}$$

$$\tilde{x}_u = x_2 = 10710$$

Variationskoeffizienten

$$Var(x) = \frac{G(x)}{\bar{x}}$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot 818} = \sqrt{\frac{4}{5} Var(x)} = 25,58$$

$$Var(x) = \frac{25,58}{10728} = 0,0023$$

$$G(x) = \sqrt{\widehat{Var}(x)} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot Var(x)}$$

c) MAD

$MAD = med(|x - \tilde{x}|)$

$\tilde{x} = 10711$

$MAD = med(|x - \tilde{x}|)$

$MAD = med(1; 46; 50; 0; 10) \rightarrow (0; 1; 4; 10; 46; 50)$

$MAD = 10$

Übung 5

Aufgabe 22: Sind alle Werte in einer Kontingenztafel eindeutig bestimmt, wenn nur die absoluten Randhäufigkeiten angegeben sind?

Aufgabe 23: Geben Sie fiktive absolute Häufigkeiten für eine 3×2-Kontingenztabelle für zwei unabhängige Merkmale an.

Aufgabe 24: Ein neues Produkt kommt in drei Versionen I,II und III auf den Markt. Es ergeben sich an einem Tag an drei verschiedenen Standorten A,B und C in Deutschland folgende Verkaufszahlen:

	I	II	III
A	8	8	4
B	10	20	5
C	22	32	11

a) Geben Sie die relativen Häufigkeiten und die Randhäufigkeiten an.

b) Sind die beiden Merkmale Version und Standort unabhängig?

c) Berechnen Sie χ^2 und beide Varianten des Pearsonschen Kontingenzkoeffizienten.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 25: In einem Land besitzen die fünf größten Städte 3 000 000, 1 000 000, 500 000, 250 000 und 250 000 Einwohner. Zeichnen Sie eine Lorenz-Kurve und geben Sie den Gini-Koeffizienten an.

Aufgabe 26: Warum ist der größtmögliche Wert des Gini-Maßes $\frac{n-1}{n}$?

08.11.2016

1

Übung 5

A22

		c	d	y	
x	a		140 / 145	10 / 5	150
	b		30 / 25	0 / 5	30
			170	10	180

Nein

		L	R	y
x		6%	54%	60%
		4%	36%	40%
		10%	90%	

$h_{ij} = h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}$

Zeile Spalte

A23

		d	e	y
x	a	0,1	0,2	0,3 ← $h_{1\bullet}$
	b	0,2	0,05	0,25
	c	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	0,1
		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1,0

← $h_{i\bullet}$

$n_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$

$\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}\right)^2$

A24

a) Relative Häufigkeiten und Randhäufigkeiten

	I	II	III	
A	8 0,067	8 0,067	4 0,033	20 0,167
B	10 0,083	20 0,167	5 0,042	35 0,292
C	22 0,183	32 0,267	11 0,092	65 0,542
	40 0,333	60 0,5	20 0,167	120 1,0

$= \frac{4}{120} = 0,033$

$= \frac{20}{120} = 0,167$

b) Nein, denn $\frac{20}{120} \cdot \frac{40}{120} = \frac{1}{8} \neq \frac{8}{120}$

c) χ^2 und beide Varianten des Pearsonschen Kontingenzkoeffizienten

$$\chi^2 = n\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{h_{ij}^2}{h_{i\cdot}\cdot h_{\cdot j}}\right)-1\right) = n\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}\right)-1\right)$$

$$= 120\left(\frac{8\cdot 8}{20\cdot 40}+\frac{8\cdot 8}{20\cdot 60}+\ldots+\frac{11\cdot 11}{65\cdot 20}-1\right) = 1,53$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2+n}} = 0,1122$$

$$C = \sqrt{\frac{\min(\overset{3}{k},\overset{3}{l})-1}{\min(k,l)}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$$

BSP
$\min(2,3) = 2$
$\min(3,3) = 3$

min von Anzahl (i, j)
oder (k, l) → (Zeilen, Spalten)

$\min(3,3) = 3$

$$C^* = \frac{0,1122}{0,816} = 0,1375 = \frac{C}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Scanned by CamScanner

2

		X		
		a	b	
X	a	5	0	5
	b	0	5	5
		5	5	10

$\chi^2 = 10(1+1-1) = 10$

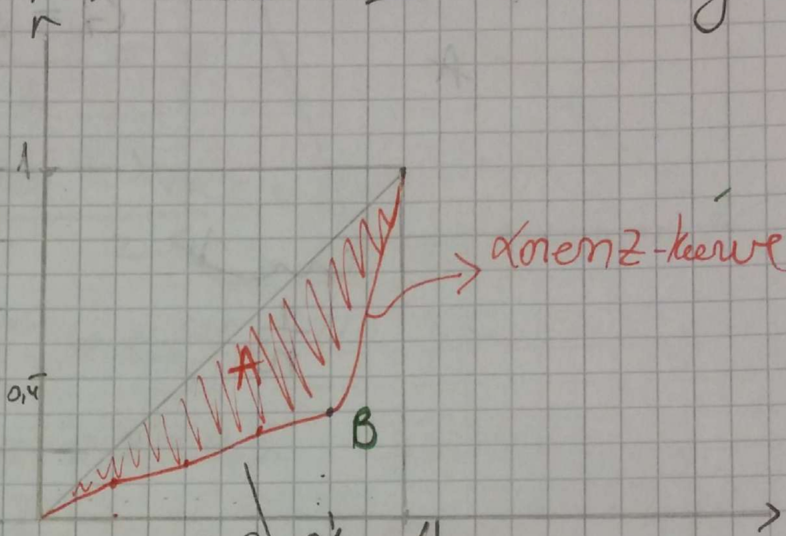
$C = \sqrt{\frac{10}{20}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\min(k,l)-1}{\min(k,l)}}$

$C^* = 1$

d) Es besteht höchstens ein schwacherer Zusammenhang

A 25

i/n	i	$x_{(i)}$	Σx	L_i
0,2	1	250	250	0,05 → $\frac{250}{5000}$
0,4	2	250	500	0,1 → $\frac{500}{5000}$
0,6	3	500	1000	0,2
0,8	4	1000	2000	0,4
1	5	3000	5000	1,0



$L_i = \frac{\text{Summe der kleinsten Einwohnerzahl kumuliert}}{\text{Gesamtsumme}}$

$G = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2n-i)x_{(i)}}{n^2 \cdot \bar{x}} - 1$

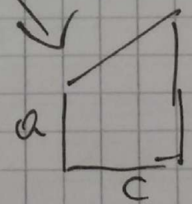
$G = 2 \cdot A$

$B = \left[0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}05+0}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}05+0{,}1}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}1+0{,}2}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}2+0{,}4}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}4+1}{2}\right)\right] =$

$(0{,}2 \cdot 0{,}025 + 0{,}2 \cdot 0{,}075 + 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7) = \underline{\underline{0{,}25}}$

$A = \frac{1}{2} - B = 0{,}25$

$G = 2 \cdot A = 0{,}5$



$\rightarrow S = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot c$

FORMEL

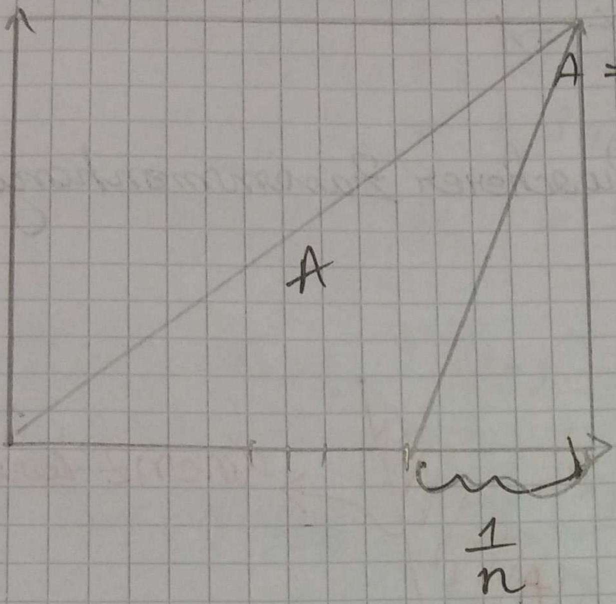
$G = \frac{1 \cdot 250 + 3 \cdot 250 + 5 \cdot 500 + \ldots + 9 \cdot 3000}{25 \cdot 1000} = 0{,}5$

n^2 $\quad \bar{x}$

1+2 $\quad$ 3+2 $\quad$ 5+2 $\quad$ 7+2

A26

größtmöglichen Wert des Gini-Maßes $\frac{n-1}{n}$



$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$

$G = \frac{n-1}{n}$

Übung 6

Aufgabe 27: 14 Tage lang werden die Verkaufszahlen für ein Buch in einer Buchhandlung notiert: 7, 11, 12, 8, 10, 9, 9, 8, 0, 6, 13, 18, 5 und 11. Zeichnen Sie einen Boxplot für die Daten.

Aufgabe 28: Für 6 Straßen werden die Durchschnittsgeschwindigkeit und die Anzahl der Unfälle in einem Jahr angegeben:

Geschw.:	50	60	100	70	50	40
Unfälle:	2	2	7	4	2	1

Geben Sie die für die beiden Merkmale die empirische Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten an un interpretieren Sie das Resultat.

Aufgabe 29: An zwei Hochschulen setzt man unterschiedliche Benotungssysteme ein. Während die Hochschule A die Benotungsskala $I \to II \to III \to IV$ verwendet, mit I als bester Note, ist an der Hochschule B die Skala $a \to b \to c$, mit a als bester Note, in Gebrauch.

Für 20 Studierende, die von A nach B wechselten, wird die letzte Note an der Hochschule A mit der ersten Note an der Hochschule B verglichen:

A	I	I	I	I	I	I	I	II	II	II
B	a	a	a	a	a	b	b	a	a	a

A	II	II	II	III	III	III	III	IV	IV	IV
B	a	b	b	a	b	b	c	b	b	c

Berechnen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten und interpretieren Sie das Ergebnis.

15.11.2016 ①

Übung 6

A27 Boxplot

14 Tage – Verkaufszahlen

7, 11, 12, 8, 10, 9, 9, 8, 0, 6, 13, 18, 5, 11

0, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 13, 18

$$\tilde{x} = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$$

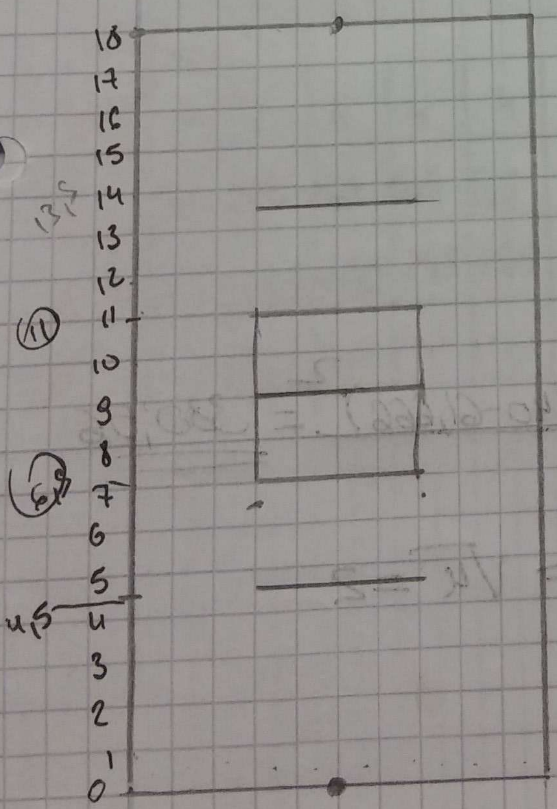
$$\tilde{x}_u = x_{(0{,}25)} = x_{(3{,}5)} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = 6{,}5$$

$$\tilde{x}_o = x_{(0{,}75)} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{11+11}{2} = 11$$

$$IQR = \tilde{x}_o - \tilde{x}_u = 11 - 6{,}5 = 4{,}5$$

$$R_x = 11 - 0 = 18$$

| whiskers ⇒ $1{,}5 \cdot IQR = 6{,}75$



A28

Geschwindigkeit	50	60	100	70	50	40
# Unfälle	2	2	7	4	2	1

$u \triangleq$ Anzahl Unfälle $\quad \bar{G} = 61,\bar{6}$ (Mittelwerte)

$\bar{u} = 3 \qquad$ Geschwindigkeit

$\mathrm{cov}(u, G) \triangleq S_{uG} = 38,\bar{3}$

empirische Kovarianz

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$S_{uG} = \frac{1}{6} \Big[(50-61,\bar{6})(2-3) + (60-61,\bar{6})(2-3) + (100-61,\bar{6})(7-3) + (70-61,\bar{6})(4-3) + (50-61,\bar{6})(2-3) + (40-61,\bar{6})(1-3) \Big]$$

$S_{uG} = 38,\bar{3}$

Korrelationskoeffizienten (empirische)

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma(x)\,\sigma(y)}$$

$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$

$$Var(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$Var(u) = \frac{(50-61,666)^2 + (60-61,666)^2 + \ldots + (40-61,666)^2}{6} = \underline{\underline{380,56}}$$

$$Var(G) = \frac{(2-3)^2 + \ldots + (1-3)^2}{6} = \underline{4}$$

$\sigma(u) = \sqrt{380,56} = 19,507 \qquad \sigma(G) = \sqrt{4} = 2$

$$r_{xy} = \frac{38,\bar{3}}{19,507 \cdot 2} = 0,9825$$

$-1 \leq r_{xy} \leq 1$

Es liegt ein sehr starker positiver Zusammenhang vor

A29

A	I	I	I	I	I	I	I	II	II	II		
B	a	a	a	a	a	b	b	a	a	a		
A	II	II	II	III	III	III	III	IV	IV	IV		
B	a	b	b	a	b	b	c	b	b	c		

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{7+1}{2} = \frac{n+1}{2} = 4$$

$$\frac{8+9+10+11+12+13}{6} = \frac{63}{6} = 10{,}5$$

$$\frac{14+15+16+17}{4} = \frac{62}{4} = 15{,}5$$

$$\frac{18+19+20}{3} = 19$$

a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

5,5 14,5 19,5

R_A	4	4	4	4	4	4	4	10,5	10,5	10,5
R_B	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5
R_A	10,5	10,5	10,5	15,5	15,5	15,5	15,5	19	19	19
R_B	14,5	14,5	14,5	14,5	14,5	14,5	14,5	14,5	19,5	19,5

Übung 7

Aufgabe 30: Ein Würfel wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,. . .

a) . . . , dass keine Sechs fällt,

b) . . . , dass die Augenzahlen gleich sind,

c) . . . , dass die Augensumme 8 ist,

d) . . . , dass die Augensumme 8 ist, gegeben, dass keine Sechs fällt.

e) . . . , dass zwei Sechsen fallen.

Aufgabe 31: In einem Raum befinden sich 12 Stühle. Fünf Personen kommen in den Raum, wählen sich zufällig einen Stuhl aus und setzen sich.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass fünf vorher ausgewählte Stühle besetzt sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vorher ausgewählten Stühle mit vorher genau benannten Personen besetzt sind?

Aufgabe 32: Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte -2,-1,0,1 und 2 mit den Wahrscheinlichkeiten 0.2,0.1,0.4,0.1,0.2 an. Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und berechnen Sie $\mathrm{P}(X \leq 0.7)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{E}(|X|)$.

Aufgabe 33: Eine Zufallsvariable hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

a) Geben Sie die zugehörige Dichtefunktion an.

b) Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeiten.

(i) $\mathrm{P}(X \leq 1)$,

(ii) $\mathrm{P}(X > 1)$,

(iii) $\mathrm{P}(1 < X \leq 2)$,

(iv) $\mathrm{P}(X > \mathrm{E}(X))$.

23.11.2016

①

übung 7

A30 ... wird 3mal geworfen

a) $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5787$

$A_i \hat{=}$ im i-tem Wurf keine 6

(UND) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \underset{\text{Unabhängigkeit}}{=} P(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5787$

b) $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

2. 3.

ersten Wurf ist egal!

6mal weil ich 6 Zahlen habe

$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$

ODER → unvereinbarkeit, dann kann ich Wahrscheinlichkeiten addieren

c) ...

(1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (1,4,3), (1,5,2), (1,6,1),
(2,1,5), (2,2,4), (2,3,3), (2,4,2) (2,5,1),
(3,1,4), (3,2,3), (3,3,2), (3,4,1),
(4,1,3), (4,2,2), (4,3,1),
(5,1,2), (5,2,1)
(6,1,1)

$\Sigma = \underline{\underline{21}}$ Fälle

$P = \frac{21}{6^3} = 0{,}097\overline{2}$

$21 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

→ Gaussche Formel

d) $P = \frac{18}{5^3} = \frac{(21-3)}{5^3} = 0{,}144$

ein 6 fällt

→ 5^3 → weil die 6 ausfällt.

$A \mathrel{\hat=}$ Augensumme 8

$B \mathrel{\hat=}$ keine 6

es gilt keine Bedingung hier

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap \vec{B})}{P(B)} = \frac{18/216}{125/216} = \frac{18}{125}$$

wie Aufgabe a)

a) ..., dass 2 Sechsen fallen

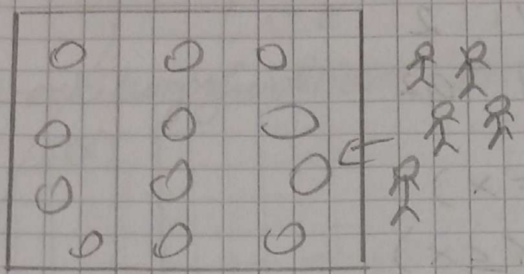
$$p = \frac{15}{216} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 0{,}069\overline{4} \quad \Big| \quad \underline{216 = 6^3}$$

2mal 6 1mal keine 6

$$p = \frac{15}{216} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$\frac{3!}{2! \cdot 1!}$$

12 Stühle u. 5 Personen



a) $p = ?$ keine Wiederholung
keine Reihenfolge

2 Methoden

$$P = \frac{1}{\text{\# Kombination ohne Wiederholung} \rightarrow \binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{12}{5}} = \frac{1}{\frac{12!}{5! \cdot 4!}} = \frac{1}{792}$$

oder $p = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{792}$

b) $$p = \frac{1}{\text{\# Variation ohne Wiederholung}}$$ → jetzt ist die Reihenfolge wichtig

$$p = \frac{1}{\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)} = \frac{7!}{12!} = \frac{1}{95040}$$

oder $p = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{95040}$

Übung 7

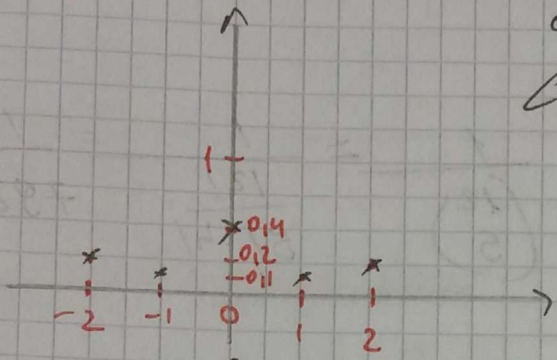
A 32

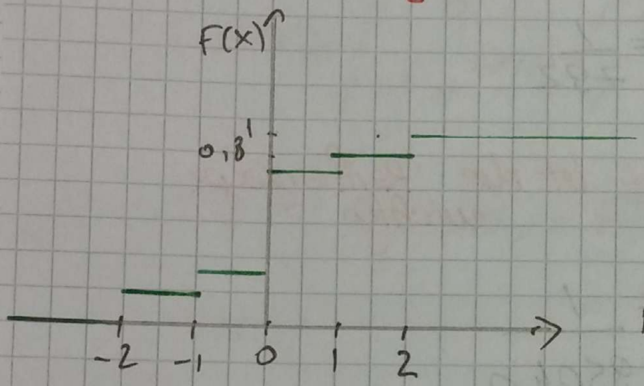
x_i	-2	-1	0	1	2
$p(x_i)$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}1$	$0{,}2$

$$p(x) = P(X = x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

die Funktion





$$P(X \leq -1) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$

$$P(X \leq 0) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7$$

$$P(X \leq 1) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}8$$

$$P(X < 2) = 1$$

$$P(X \leq 0{,}7) = F(0{,}7) = 0{,}7$$

$$P(-1 < X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 0{,}8 - 0{,}3 = \underline{\underline{0{,}5}}$$

$$P(X > -0{,}5) = 1 - F(-0{,}5) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Erwartungswert bestimmen.

* $E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p(x_i) = (-2)\cdot 0{,}2 + (-1)(0{,}1) + 0\cdot 0{,}4 + (1\cdot 0{,}1) + (2\cdot 0{,}2) = \underline{\underline{0}}$

* $Var(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{=0} = E(X^2)$

$$= E(X^2) = \underbrace{4}_{(-2)^2 \text{ und } (2)^2}\cdot 0{,}4 + \underbrace{1}_{(-1)^2 \text{ und } (1)^2}\cdot 0{,}2 + \underbrace{0}_{0^2}\cdot 0{,}4 = 1{,}8$$

oder beste Variante $E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p(x_i) = (4\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2) = 1{,}8$

* $E(|X|) = |-2|\cdot 0{,}2 + |-1|\cdot 0{,}1 + |0|\cdot 0{,}4 + |1|\cdot 0{,}1 + |2|\cdot 0{,}2$

$$E|X| = 1$$

Übung 8

Aufgabe 33: Die Zufallsvariable X beschreibe die Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ankünften von Kunden in einer Bank (Einheit: Minuten). X besitze die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

b) Geben Sie die zugehörige Dichtefunktion an und zeichnen Sie sie.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Kundenankünften weniger als fünf Minuten vergehen?

d) Ein Kunde erreicht die Bank um 12 Uhr. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Kunde nach 12:01 Uhr, aber vor 12:03 ankommt?

e) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zwischenankunftszeiten.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Zwischenankunftszeit länger als der oben berechnete Erwartungswert?

Aufgabe 34: Angenommen zehn Prozent aller Autos seien weiß, 60 Prozent schwarz und 30 Prozent besäßen eine andere Lackierung.

a) Auf einem Parkplatz stehen 30 Autos. Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl weißer Autos?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den Wagen auf dem Parkplatz weniger als drei weiße Autos sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einer Kreuzung erst 15 nicht-weiße Autos vorbeifahren, bevor schließlich ein weißes Auto vorbeikommt?

d) Wie lange muss man im Durchschnitt auf ein weißes Auto warten?

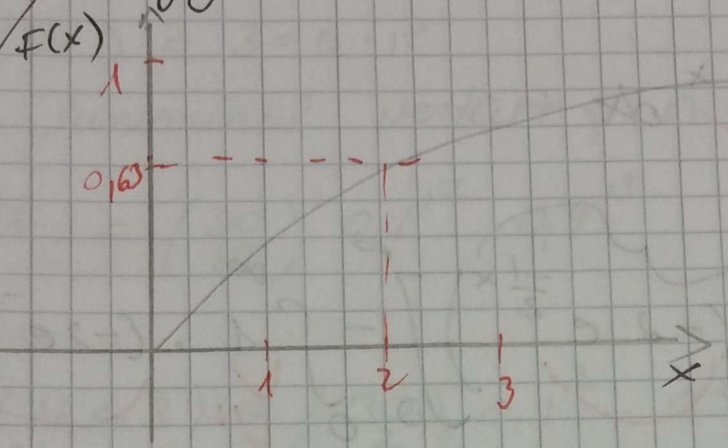
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter zehn Autos zwei weiße, fünf schwarze und drei andersfarbige Wagen zu finden?

Übung 8 29. 11. 2016

①

A33 $F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$

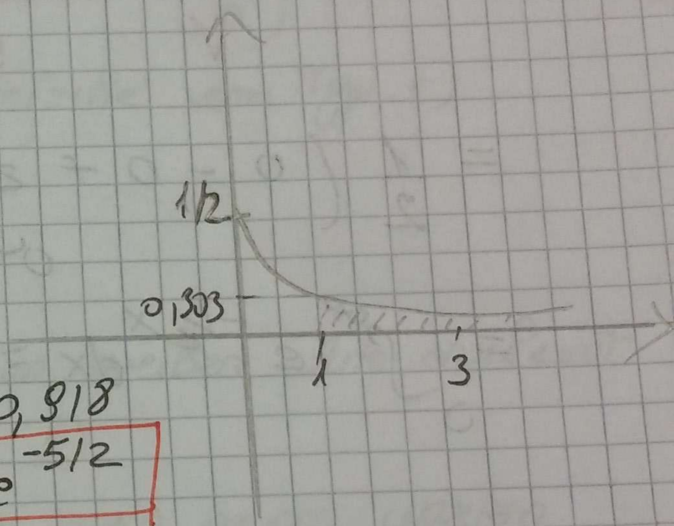
a) Verteilungsfunktion zeichnen



Ableiten

b) Dichtefunktion

$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x/2} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$



c) $P(x < 5) = P(x \leq 5) = F(5) = 0{,}918$

$= \boxed{1 - e^{-5/2}}$

↑ stetig

d) $P(1 < x \leq 3) = F(3) - F(1) = 1 - e^{-3/2} - (1 - e^{-1/2})$

$= 0{,}383$

$= \int_1^3 \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = \left[(F(x)) \right]_1^3 = F(3) - F(1) = 0{,}383$

e) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, F(x) \, dx$

$$= \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2 x} \, dx$$

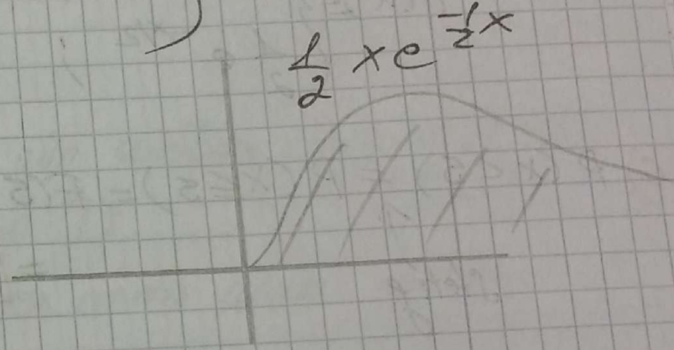
$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \underbrace{x}_{v} \, \underbrace{e^{-1/2 x}}_{u'} \, dx$$

die e-Funktion dominiert; geht sehr schnell weiter

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\underbrace{x}_{v} \cdot \left(\underbrace{-2 e^{-\frac{1}{2} x}}_{u} \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{1}_{v'} \cdot \left(\underbrace{-2 e^{-\frac{1}{2} x}}_{u} \right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 - 0 + 2 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} x} \, dx \right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-1/2 x} \, dx = 2$$



f) $P(X > 2) = 1 - \overbrace{P(X \leq 2)}^{F(2)}$

$$= 1 - (1 - e^{-2/2}) = 0,3678$$

②

A34 10 % weiß
60 % schwarz
30 % andere Farben

a) $W \hat{=}$ Anz. weißen Autos

$E(W) = 3 = n \cdot p$

W ist binomial verteilt ; $n = 30\%$ $p = 10\%$

$P(W=17) = \binom{30}{17} 0{,}1^{17} \; 0{,}9^{13}$

$(17+13) = 30$

b) $P(W<3) = \binom{30}{2} 0{,}1^{2} \cdot 0{,}9^{28} + \binom{30}{0} 0{,}1^{0} \cdot 0{,}9^{29} = 41{,}14\%$

c) $P = 0{,}9^{15} \cdot 0{,}1$ (geometrische vom Typ 1)

kein 15 Autos weiß

ein weißes Auto

d) $X \hat{=}$ Anzahl von Autos bis ein weißes Auto erscheint

X geometrisch verteilt (Typ I)

$\boxed{E(X)} = \boxed{\frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}1}} = 10$ Autos muss man warten

e) $p = 0{,}1^{2} \cdot 0{,}6^{5} \cdot 0{,}3^{3} \cdot \binom{10}{2 \;\; 3 \;\; 5} = \text{„} \ldots \text{"} \cdot \frac{10!}{(2! \cdot 5! \cdot 3!)}$

$= 5{,}291$

2 weiße Autos direkt zu Beginn hintereinander

multinomial Verteilung

Übung 9

Aufgabe 35: Angenommen X besitze eine Standardnormalverteilung. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathrm{P}(X \leq 1)$,
b) $\mathrm{P}(-1 \leq X \leq 1)$,
c) $\mathrm{P}(X > 2)$,
d) $\mathrm{P}(X > 2 \text{ oder } X < -2)$.

Welche Verteilung besitzen die folgenden Zufallsvariablen?

e) $-X/10$,
f) $3 \cdot X + 2$,
g) $5 \cdot (X - 6)$.

Aufgabe 36: Der jährliche Gewinn X einer Firma sei normalverteilt mit Erwartungswert 70 Mill. Euro und Standardabweichung 12 Mill. Euro.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn

a) größer als 80 Millionen Euro ist,
b) kleiner als 50 Millionen Euro ist,
c) zwischen 50 und 80 Millionen liegt.

Eine zweite Firma macht $Y \sim N(40, 5)$ Millionen Euro Gewinn.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Gewinne beider Firmen die 100-Millionen-Euro-Marke überschreitet?

Aufgabe 37: Es gelte $X \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\;})$. Wie groß sind folgende Wahrscheinlichkeiten?

a) $\mathrm{P}\left(X > \mu + \frac{\sigma}{\;}\right)$,
b) $\mathrm{P}\left(X \leq \mu - \frac{\sigma}{\;}\right)$,
c) $\mathrm{P}\left(X \in [\mu - \frac{\sigma}{\;}, \mu + \frac{\sigma}{\;}]\right)$,
d) $\mathrm{P}\left(X > \mu + 2\frac{\sigma}{\;}\right)$,
e) $\mathrm{P}\left(X \leq \mu - 2\frac{\sigma}{\;}\right)$,
f) $\mathrm{P}\left(X \in [\mu - 2\frac{\sigma}{\;}, \mu + 2\frac{\sigma}{\;}]\right)$.

Für welchen Wert x gilt

g) $\mathrm{P}\left(X > \mu + x\frac{\sigma}{\;}\right) = 0.9$,
h) $\mathrm{P}\left(X \leq \mu - x\frac{\sigma}{\;}\right) = 0.9$,
i) $\mathrm{P}\left(X \in [\mu - x\frac{\sigma}{\;}, \mu + x\frac{\sigma}{\;}]\right) = 0.9$?

Aufgabe 38: Ein Würfel wird 120 mal gewürfelt. Geben Sie ein (approximatives) Intervall an, in dem die Augensumme mit 90% Wahrscheinlichkeit liegt.

Fehlerhafte Formeln auf dem Skript 07.12.2016

$X \sim N(\mu, \sigma)$, $Y \sim N(\nu, \tau)$

$aX + b \sim N(a\mu + b, |a| \sigma)$

(176)
(177) → Folien Nummer

$X + Y \sim N(\mu + \nu, \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})$

Übung 9

A 35 Standardnormalverteilung

$X \sim N(0,1)$

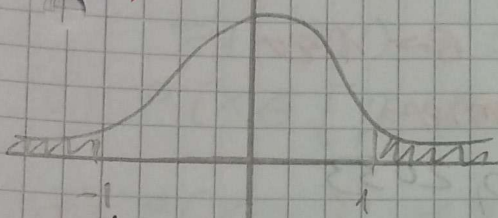
a) $P(X < 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$ (auf der Tabelle finden)

b) $P(-1 \leq X \leq 1) = 1 - 2(1 - \Phi(1))$

$= 2\Phi(1) - 1$ → klappt nur bei Normalverteilung

$= \Phi(1) - \Phi(-1)$

$= 0{,}6827$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

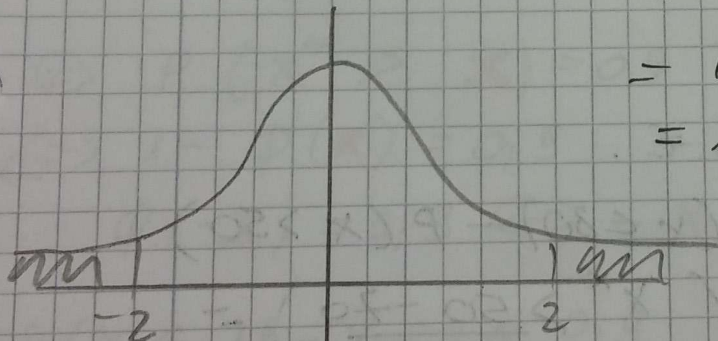
c) $P(X > 2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}02275$

d) $P(X > 2 \text{ oder } X < -2) = 2 \cdot (1 - \Phi(2)) = 0{,}0455$

$= 1 - P(X \geq -2 \text{ oder } X \leq 2)$

$= 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2))$

$= 1 \cdot (\Phi(2) + (1 - \Phi(-2))$



e) $-X/10 \to -\frac{X}{10} = -\frac{1}{10} X \sim N(0, \frac{1}{10})$

$ax + b \sim N(a\mu + b, |a| \sigma)$

$a = \frac{1}{10}$

f) $3 \cdot X + 2 \sim N(2, 3)$

g) $5 \cdot (X - 6) \sim N(-30, 5$

$\Rightarrow 5x - 30$

A 36 normalverteilt | Erwartungswert = 70 Mio.

Standardabweichung = 12 Mio. $\boxed{X \sim (70, 12)}$
σ

Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn ...

a) > 80 Mio. € ist

$P(X > 80) = P\left(\frac{X - 70}{12} > \frac{80 - 70}{12}\right)$ man muss das gleiche auf beiden Seiten machen.

in der Klausur auch so schreiben

Erwartungswert jetzt 0 um die $\sigma = 1$ zu bekommen

$= P\left(X^* > \frac{5}{6}\right) = 1 - \varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0{,}2033$

b) < 50 Mio. €

$P(X < 50) = P\left(\frac{X - 70}{12} < \frac{50 - 70}{12}\right) = P\left(X^* < -\frac{5}{3}\right)$

$\boxed{\varphi\left(-\frac{5}{3}\right)} = \boxed{1 - \varphi\left(\frac{5}{3}\right)} = 0{,}0478.$

c) zwischen 50 u. 80 Mio. €.

$P(\qquad) = P(X < 80) - P(X > 50)$

$P\left(X^* < \frac{80 - 70}{12}\right) - P\left(X^* > \frac{50 - 70}{12}\right) =$

$\varphi\left(\frac{5}{6}\right) - \varphi\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}74988 = 0{,}75.$

d) $Y \sim N(40, 5)$ Mio. €. $X \sim (70, 12)$

$X + Y \sim N(110, \sqrt{12^2 + 5^2})$

$P(X + Y) > 100$ $X + Y \sim N(110, 13)$

FORMEL

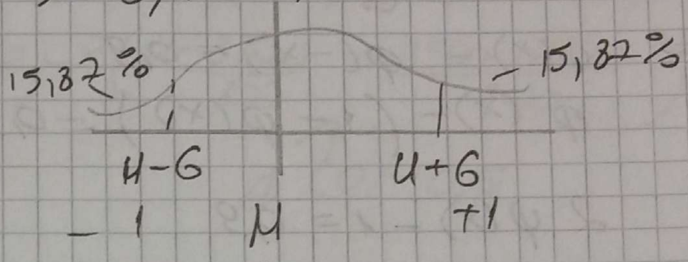
$P(X + Y > 100) = P\left(\frac{X + Y - 110}{13} > \frac{100 - 110}{13}\right)$

$= 1 - \varphi\left(-\frac{10}{13}\right) = \varphi\left(\frac{10}{13}\right) = 0{,}7791.$

A37 $X \sim N(\mu, \sigma)$ (2)

a) $P(X>\mu+\sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \underbrace{\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}}_{1}\right) =$

$= P(X^*>1) = 1-\Phi(1) = 0{,}1587$



b) $P(X\le\mu - \sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -1\right) = \Phi(-1) =$

$= 1-\Phi(1) = 0{,}1587$

c) $P(X\in[\mu-\sigma,\mu+\sigma]) = 1-2\cdot 0{,}1587 = 0{,}6827$.

d) $P(X>\mu+2\sigma =$ gleich wie c

g) $P(X>\mu+x\sigma) = 0{,}9$ $\quad x=?$ unbekannt

$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{\mu+x\sigma-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9$

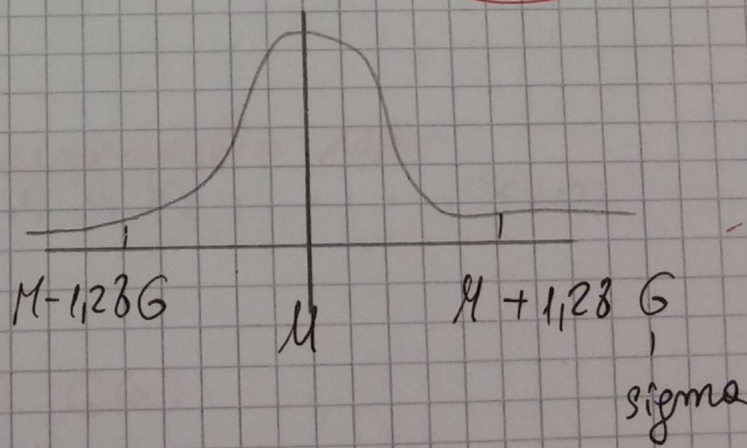
$\Leftrightarrow P(X^* > x) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 1-\Phi(x) = 0{,}9$ -- Bei (>) rechnen wir $1-\Phi()$

$\Phi(-x) = 0{,}9 \Leftrightarrow -x = 1{,}28$ $\quad x = -1{,}28$

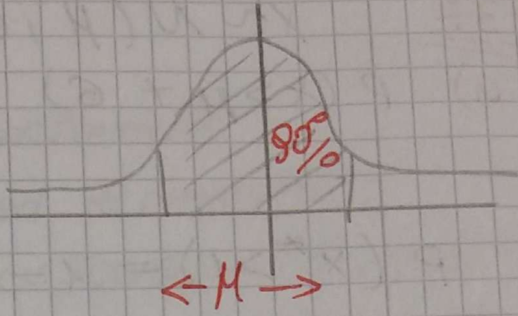
h) $P(X\le\mu - x\sigma) = 0{,}9$

$\Rightarrow x = -1{,}28$



i) $P(X \in [\mu - x\sigma ; \mu + x\sigma]) = 0{,}9$

$P(\mu - x \cdot \sigma < X < \mu + x \cdot \sigma) = 0{,}9$



$\Leftrightarrow P\left(-x < \frac{X-\mu}{\sigma} < x\right) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow \quad \Phi(x) - \Phi(-x) = 0{,}9$

$\Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 0{,}9$

$2\Phi(x) - 1 = 0{,}9$

$\Phi(x) = \frac{0{,}9 + 1}{2} = 0{,}95$

$x = 1{,}64$

Übung 10

Aufgabe 38: Das Einkommen von Arbeitern in einem Land sei normalverteilt mit $\mu = 3.5$ und $\sigma = 0.8$ (tsd.Euro monatlich).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Arbeiter mehr 3500, aber weniger als 5000 Euro verdient?

b) Ein Arbeiter sagt, 80% seiner Kollegen verdienten mehr als er. Wieviel zusätzliches Gehalt müsste er bekommen, damit nur noch 50% der Kollegen mehr verdienten?

c) Wie groß ist der Erwartungswert und die Standardabweichung des arithmetischen Mittels von 100 zufällig ausgewählten Arbeitern?

Aufgabe 39: Ein Würfel werde 120 Mal gewürfelt.

a) Geben Sie ein genähertes Intervall an, in dem die Augensumme mit 90% Wahrscheinlichkeit liegt.

b) Wir betrachten das konkrete Beispiel B1.1. Geben Sie Schätzer für den Erwartungswert und die Varianz der Augenzahlen an.

c) Schätzen Sie die Standardabweichung des Schätzers für den Erwartungswert.

Aufgabe 40: Wir betrachten das Beispiel B4.1. Stellen Sie einen geeigneten Schätzer auf und überlegen Sie, ob der Schätzer erwartungstreu und konsistent ist.

Übung 10 13.12.2016

(1)

A 38 Das Einkommen sei normalverteilt

$\mu = 3.5 \quad \sigma = 0{,}8$ (Tsd. € monatlich)

a) $P(3500 < x < 5000) = P(x < 5000) - P(x > 3500)$

$= P\left(\frac{x-3500}{800} < \frac{5000-3500}{800}\right) - P\left(\frac{x-3500}{800} < \frac{3500-3500}{800}\right)$

$\Phi(0) = 0{,}5$

$\Phi(1{,}875) = 0{,}9696$

$= 0{,}9696 - 0{,}5 = 0{,}4696$ (gesamten Wert)

b) $1 - P(x \leq 0{,}85) = 0{,}2$

$P(x \leq -0{,}85) = 0{,}2$

$\frac{x-3500}{800} = -0{,}85$

$\alpha = 3500 - \underline{2820}$

$\alpha = \underline{680}$

$x\ (-0{,}85 \cdot 800) + 3500$

$= \underline{2820}$

b) $P(X > x) = 0{,}8$ was gefragt ist

$\Leftrightarrow P\left(\frac{x-3500}{800} > \underbrace{\frac{x-3500}{800}}_{z_{0,2}}\right) = 0{,}8$

die Größe die wir suchen

c) Erwartungswert 100 ausgewählte MA

$x_1, x_2, \ldots, x_{100}$

$\sigma(\bar{x}) = \boxed{\frac{800}{\sqrt{100}}} = 80$

$\sigma(x)$

A 39 120 Mal gewürfelt

a) $S = X_1 + \dots + X_{120}$ (Augensumme)

$E(S) = E(X_1) \cdot n = 420$

$S \approx N\left(420, \sqrt{\frac{35}{12} \cdot 120}\right)$

Varianz bei allen Würfen

Varianz bei einem Wurf

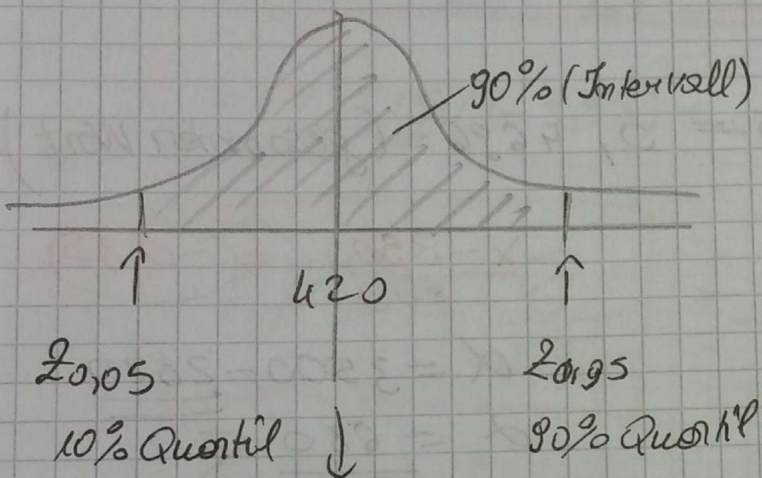
$\sigma^2(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$

$= \frac{35}{12} = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$E(X_1^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6}$

$= \frac{91}{6}$

$\approx N(420, \sqrt{350})$



Angenommen wir sind bei P

$$\frac{X - 420}{\sqrt{350}} = z_{0,95}$$

ist immer die Standardabweichung aus der Tabelle

$$\Leftrightarrow X_o = z_{0,95} \cdot \sqrt{350} + 420$$

$$= 1,65 \cdot \sqrt{350} + 420 = \underline{450,78}$$

$$X_u = -z_{0,95} \cdot \sqrt{350} + 420 = \underline{\underline{389,22}}$$

$I\ [389,22 ; 450,78]$

$P(X_u < S < X_o) = 0,9$

Scanned by CamScanner

b) BSP B1.1.

2

1	2	3	4	5	6	x_i
15	18	30	18	21	18	

$n = 120$

Schätzer für Erwartungswert

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{x}} = 3{,}55 = \frac{(15 \cdot 1 + 2 \cdot 18 + \ldots + 6 \cdot 18)}{120}$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 2{,}5689$$

$$= \frac{1}{119} \left(15 \cdot (1 - 3{,}55)^2 + \ldots + 18 (6 - 3{,}55)^2 \right) = 2{,}5689$$

c) $\boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{120}}} = \frac{\sqrt{25\,689}}{\sqrt{120}} = 0{,}1463$

Nochmal geschätzt.

A40 20 Spiele, 5 Erfolge

BSP B4.1

$\hat{p} = \frac{1}{4}$ ist die P für Erfolg? NEIN

$\longrightarrow$ nur Schätzer!

Ist der Schätzer erwartungstreu?

$$E(\overbrace{\text{Anzahl Erfolge}}^{X}) = 20 \cdot p$$

$$p = \frac{E(X)}{20} \qquad E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{20}\right)$$

$$\hat{p} = \frac{X}{20}$$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{20}\right) = \frac{1}{20} E(X) = \frac{20 \cdot p}{20} = p$$

Egal wie groß p ist, der Erwartungswert ist immer p.

T = Anzahl Spiele bis zum Gewinn

$$E(T) = \frac{1}{p}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{T}$$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{1}{T}\right) \neq \frac{1}{E(T)} = p \rightarrow \text{FALSCH}$$

Konsistente

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{X}{20}\right) = \frac{1}{20^2} Var(X) = \frac{n \cdot p(1-p)}{n^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n} \rightarrow 0$$