## Grenzwert einer Funktion.

**Definition.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt

$$\alpha = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \beta = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

der **linksseitige** bzw. **rechtsseitige Grenzwert von** $f$ an der Stelle $x_0$, falls für **jede** streng monoton wachsende (bzw. fallende) Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge

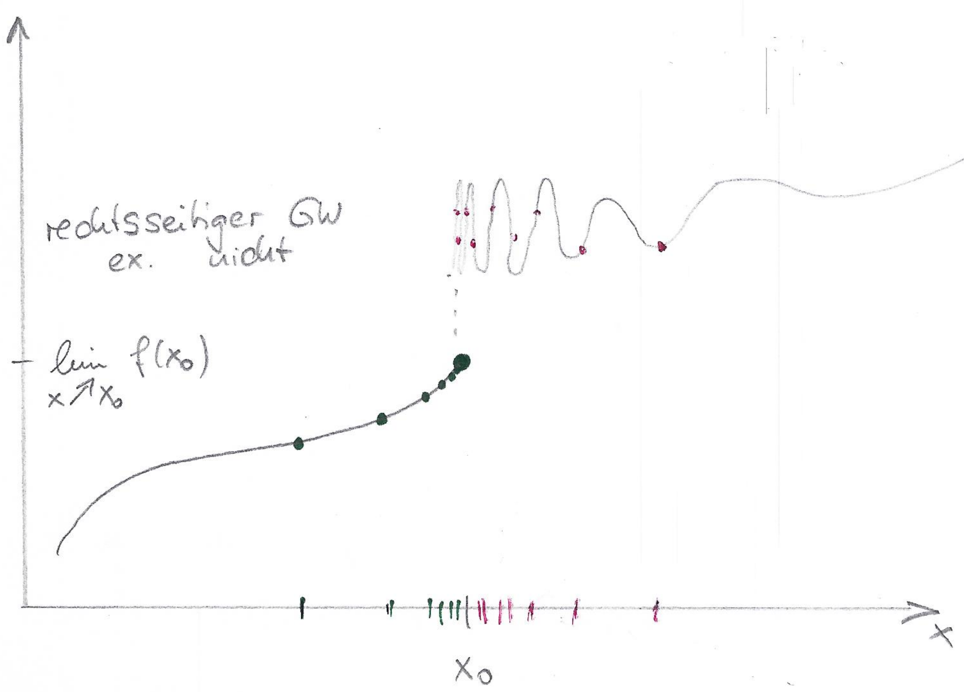
$$\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

konvergent ist mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$).

Ist $\alpha = \beta$, d. h. stimmen der links- und der rechtsseitige Grenzwert von $f$ an der Stelle $x = x_0$ überein, so heißt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

der **Grenzwert von** $f$ **an der Stelle** $x = x_0$.



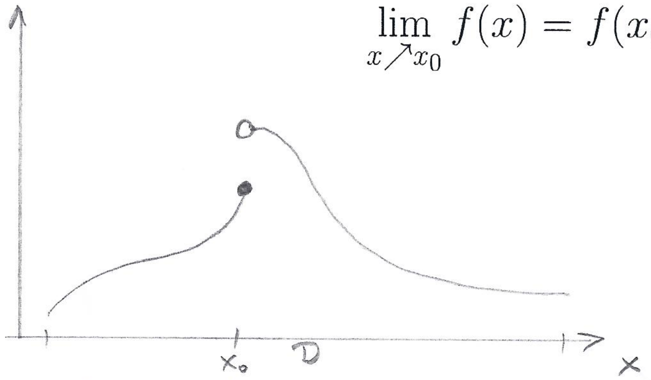
### Stetigkeit einer Funktion

**Definition.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(1) Die Funktion $f$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$

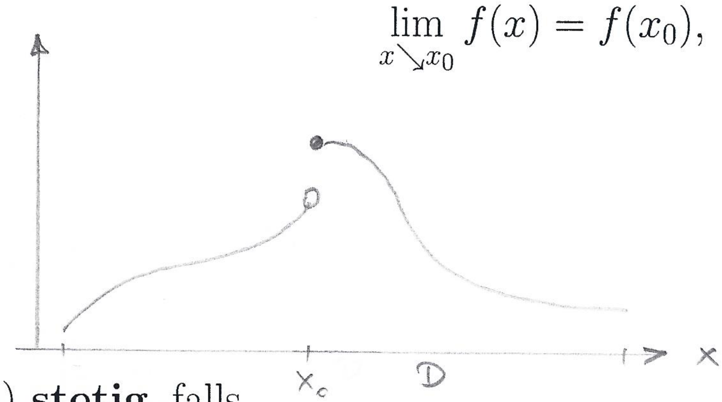
(i) **linkstetig**, falls

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0),$$




(ii) **rechtsstetig**, falls

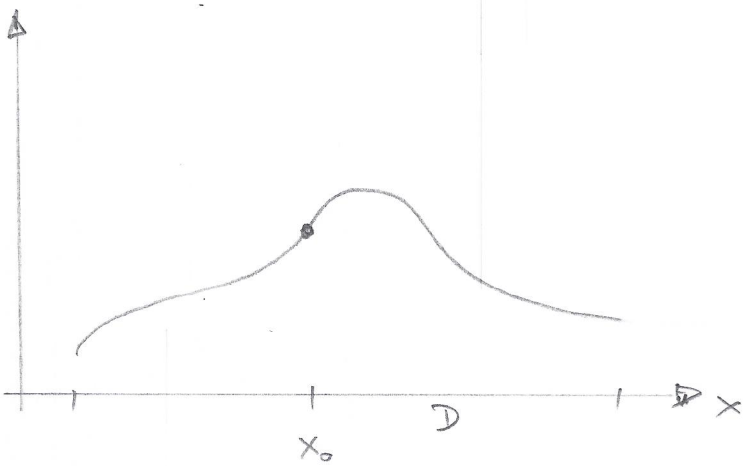
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0),$$




(iii) **stetig**, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

D. h. die Funktion $f$ ist bei $x = x_0$ stetig, falls sie bei $x = x_0$ links- und rechtsstetig ist.



(2) Ist $f$ an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, so heißt $x_0$ **Stetigkeitsstelle** von $f$.

(3) Ist $f$ an der Stelle $x_0 \in D$ nicht stetig, so heißt $f$ **unstetig** bei $x_0$, und $x_0$ heißt **Unstetigkeitsstelle** von $f$.

(4) Ist $f$ für alle $x_0 \in D$ stetig, so heißt $f$ eine **stetige Funktion**.