Übung 10

Aufgabe 1: Man bringe $F = ((A \to B) \wedge C) \vee (B \to C)$ in konjuktive (KNF) und disjunktive Normalform (DNF). und mit dem Algorithmus von Folie 2.8 (Aussagenlogik.pdf) in eine konjunktive Form (KF)

Aufgabe 2: Die folgenden Formeln sind in konjunktive Normalform (KNF) zu bringen:

$F = \neg (A \wedge (B \to C)) \vee (A \to \neg B)$
$G = \neg ((A \wedge B) \to C) \vee \neg(A \vee \neg B)$

Aufgabe 3: Gegeben sei die aussagenlogische Formel

$F = ((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \wedge (\neg B \vee \neg C))) \vee \neg ((A \to B) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C))$

a.) Man bringe F in disjunktive Normalform (DNF).
b.) Man benutze das Ergebnis aus a), um die Unerfüllbarkeit von F zu zeigen.
c.) Man zeige die Unerfüllbarkeit von F mittels der Algemeingültigkeit von $\neg$**F** über Resolution
d.) Man zeige die Unerfüllbarkeit von F mittels des Erfüllbarkeitstest über $\mathbf{Res^n}$ (Folie 2.11

Aufgabe 4: Der Ausdruck $\mathbf{(A \wedge B \leftrightarrow C) \to \neg B}$ ist in konjunktiver und disjunktiver Normalform zu entwickeln und als konjunktive Form nach Folie 2.8 zu entwickeln.

Aufgabe 5: Durch eine äquivalente Umformung in eine konjunktive Normalform ist zu prüfen, ob der Ausdruck $\mathbf{(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \vee \neg C) \wedge (B \vee C)}$ allgemeingültig ist.
Anleitung: Man forme beide Seiten des Bijungats zunächst getrennt um !

Aufgabe 6: Man entwickle für den Ausdruck $\mathbf{(A \leftrightarrow B) \to (C \leftrightarrow D)}$ die konjunktive und disjunktive Normalform und die KF nach Folie 2.8

Aufgabe 7: Die dreistellige Aussageform **A(x1, x2, x3)** sei **unerfüllbar**, d.h. $\mathbf{A \Leftrightarrow 0}$.
Man formuliere die konjunktive Normalform.

Aufgabe 8: Die Erfüllungsmenge einer aussagenlogischen Aussageform **A(a, b, c, d)** laute
$\mathbf{E = \{ (1,0,1,1), (0,1,0,0), (0,0,0,0) \}}$ Wie heißt die disjunktive Normalform von **E** ?

Aufgabe 9: Man gebe die Erfüllungsmenge des Ausdrucks $(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$ an.

Aufgabe 10: Man ermittle die KNF, die DNF und die KF nach Folie 2.8 aus $\mathbf{(p3 \vee \neg p1) \to (p2 \leftrightarrow p3)}$

Aufgabe 11: Beweisen oder widerlegen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge mit Hilfe der Resolution: $\{A,B,C\},\{\neg A,\neg B\},\{\neg A,\neg C\},\{\neg B,\neg A\},\{\neg B,\neg C\},\{\neg C,\neg A\},\{\neg C,\neg B\},\{A,\neg B\},\{B,\neg C\}$

Aufgabe 12: Man verwende die Resolutionsmethode,
a.) um zu prüfen, ob $\mathbf{F = ((M \to A) \vee (\neg T \wedge H)) \wedge (M \vee A) \wedge (\neg((T \to H) \vee A))}$ erfüllbar ist;
b.) um zu zeigen, dass $\mathbf{F = (A \to B) \vee (A \wedge \neg(B \vee C)) \vee (A \wedge C)}$ eine Tautologie ist;
c.) um zu zeigen, dass **D** aus der Formel $\mathbf{F = (\neg A \to (B \vee C)) \wedge ((C \wedge \neg B) \to A) \wedge (\neg (A \wedge B) \vee D)}$ folgt, d.h. ist $\mathbf{F \to D}$ eine Tautologie ?

Aufgabe 13: Man bestimme die KNF, die DNF und die KF (Follie 2.8) zu folgenden Formeln:
a.) $((p1 \to p2) \wedge p3)$
b.) $((p2 \leftrightarrow p3) \vee (p1 \vee p3))$
c.) $((p1 \wedge p2) \vee (p3 \to p2)) \vee (p1 \leftrightarrow p3))$

Aufgabe 14: Man bestimme für $k \in \{0,1,2\}$ $res^k(\{\{p,\neg q,r\},\{q,r\},\{\neg p,r\},\{\neg q,r\},\{\neg r\}\})$

Aufgabe 15: Man bestimme res*(K) für **a.)** $K = \{\{p, q, r\},\{ \neg p \},\{ \neg q \},\{ \neg r \}\}$
b.) $K = \{\{p, q, r\},\{ \neg p, \neg q, \neg r\}\}$

Aufgabe 16: Der bisherige Resolutionskalkül soll um die folgende Resolutionsregel erweitert werden:
Aus $M1 \cup \{F, G\}, M2 \cup \{\neg F, \neg G\}$ folgt $M1 \cup M2$. Ist der resultierende Kalkül immer noch korrekt ?
Man begründe die Aussage am Beispiel mit $M1=M2=\{A\}$, $F=B$, $G= \neg C$

Aufgabe 17: Gegeben sei die Formel $\mathbf{F = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg B) \wedge (B \vee \neg C)}$, wobei **A**, **B**, **C** Aussagen sind. Offenbar ist **F** in KNF. Man weise die Erfüllbarkeit bzw. Nichterfüllbarkeit von **F** mit dem Algorithmus von Folie 2.11 (Aussagenlogik.pdf) nach.

Aufgabe 18: Die folgenden drei Aussagen werden mit F1, F2, F3 bezeichnet:
F1: Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates genau dann, wenn Sokrates kein großer Philosoph war.
F2: Wenn Sokrates ein großer Philosoph war, dann hatte Aristoteles Recht mit seiner Einschätzung des Platon.
F3: Aristoteles hatte nur dann Recht mit seiner Einschätzung des Platon, falls Platon Recht hatte mit seiner Einschätzung des Sokrates.

a.) Man übersetze F1 - F3 in aussagenlogische Formeln, wobei folgende Abkürzungen verwendet werden sollen:
S = "Sokrates war ein großer Philosoph."
A = "Aristoteles hatte Recht mit seiner Einschätzung des Platon."
P = "Platon hatte Recht mit seiner Einschätzung des Sokrates."
Man bilde die Formel F als die Konjunktion von F1, F2 und F3. Welche Kombinationen für A, S, P bilden ein Modell für F ? (man nutze eine Wahrheitstafel)

b.) Zusätzlich zu den Aussagen soll noch gelten, dass Platons Einschätzung des Sokrates stimmt. Folgt dann, dass Sokrates kein großer Philosoph war ? D.h. ist $\mathbf{(F \wedge P) \rightarrow \neg S}$ eine Tautologie ? Man löse das Problem mit der Resolution, wobei man die Unerfüllbarkeit der Negation **F'** von $\mathbf{(F \wedge P) \rightarrow \neg S}$ zeigt !
Es gelten F1:= $(P \leftrightarrow \neg S)$, F2:= $(S \rightarrow A) \leftrightarrow (\neg S \vee A)$, F3:= $(A \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg A \vee P)$ als Lösungen von a.)

c.) Man zeige die Unerfüllbarkeit von F' mittels des Resolutionskalküls nach Algorithmus 2.33 von Folie 2.11 (Aussagenlogik.pdf)

Aufgabe 19: Nachdem Hänsel und Gretel die Hexe in den Ofen gestossen haben, wollen sie sich über das Pulsnitzer Pfefferkuchenhäuschen hermachen. Das Pfefferkuchenhäuschen besitzt jedoch Instabilitäten und ist vom Einsturz bedroht. Die beiden wenden sich zunächst einer Wand zu, die aus drei Pfefferkuchen besteht. Da Hänsel das Fach Baustatik an der HTW Dresden belegt hat, erkennt er, dass folgende Regeln aus Sicherheitsgründen einzuhalten sind:

1.) Von den beiden ersten Pfefferkuchen darf höchstens einer entfernt werden.
2.) Wenn man den dritten entfernt, muss man auch den zweiten entfernen.
3.) Wenn man den zweiten entfernt und den ersten nicht, dann darf man den dritten nicht entfernen.

Da Gretel in Grundlagen Informatik I aufgepasst hat, weiß sie, dass man vom dritten Pfefferkuchen besser die Finger läßt.

a.) Man zeige, dass sich dies beweisen läss, indem man die Unerfüllbarkeit von folgender Formel zeigt:
$F := (\neg (A \wedge B)) \wedge (C \rightarrow B) \wedge ((\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C) \wedge C$

b.) Man bringe F in eine KNF und eine KF

c.) Man vereinfache F so, dass die Unerfüllbarkeit von F gezeigt wird.

d.) Man bringe F in die DNF und eine DF

Aufgabe 20: Emil möchte seinen Geburtstag feiern. Leider sind seine Freunde Anne, Bernd, Christine und Dirk total introvertiert und äußerst sensibel. Und zwar ist es so, dass Anne nur kommt, wenn auch Bernd kommt. Bernd kommt nur, wenn Christine kommt. Wenn wiederum Christine kommt, kommt auch Dirk. Wenn allerdings Bernd und Dirk kommen, kommt Christine nicht. Dirk kommt nur, wenn Anne oder Bernd kommen.

a.) Man stelle eine aussagenlogische Formel auf, die die obige Situation beschreibt.

b.) Man zeige, dass keiner dieser vier Freunde zu Emils Geburtstagsfeier kommt.