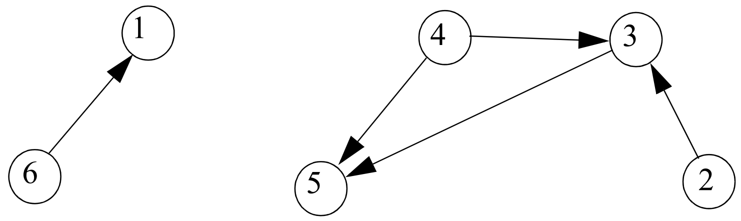
3.5 Graphen

Ein Graph ist ein Paar (**N, E**), wobei
N eine Menge von sogenannten **Knoten** und
E eine Menge von sogenannten **Kanten** mit $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Bsp.: ***N*** .... Teilmenge der ganzen Zahlen
E .... Menge aller reellen Zahlenpaare ***(x,y)*** , wobei ***x*** und ***y*** durch **Kante** verbunden

Gibt es nur endlich viele Knoten und Kanten im Graphen, dann kann dieser folgendermaßen graphisch dargestellt werden:
(a) Jedem Knoten wird ein Kreis zugeordnet.
(b) Jeder Kante *(x,y)* wird ein Pfeil vom Knoten *x* zum Knoten *y* zugeordnet.

Bsp.: ({**1, 2, 3, 4, 5, 6**}, { **(6, 1), (4, 5), (3, 5), (4, 3), (2, 3)** })

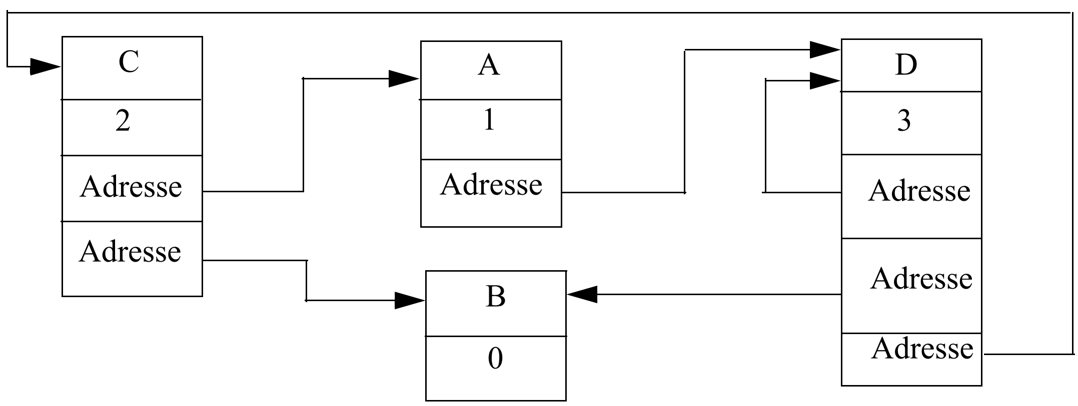


Häufige Anwendungen:
- Man verwendet Variable als **Knoten**.
- Man verwendet Folgen oder Mengen von Variablen als **Knoten**.
- Man markiert die **Kanten**, falls von einem Knoten mehrere **Kanten** ausgehen können.

Oft genutzte **Variante der Implementierung**:
Man ordnet jedem Knoten noch eine Liste von Speicherplätzen zu, in denen die Adressen derjenigen Knoten untergebracht werden, zu denen eine Kante hinführt.

Bsp.: Abspeicherung eines Graphen ({**A,B,C,D**},{**(A,D), (C,A), (C,B), (D,B), (D,C), (D,D)**}.

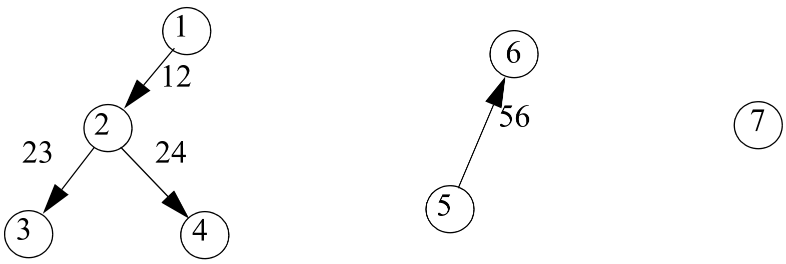
Jedem Knoten wird neben den **Adressen** noch deren **Anzahl** zugeordnet.



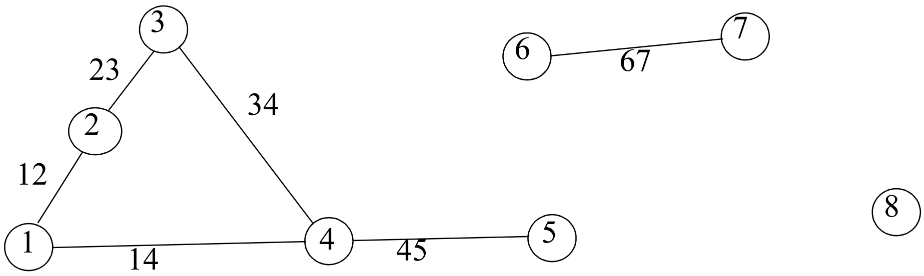
Definition
Ein Graph G besteht aus einer Menge **V** (Knoten, **vertices**) und einer Menge **E** (Kanten, **edges**) mit $\mathbf{E} \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ sowie einer auf **E** definierten Abbildung (**Inzidenz**), die jedem $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ eine Menge von zwei, möglicherweise identischen, Elementen $\mathbf{v}, \mathbf{v'} \in \mathbf{V}$ zuordnet.

Ist das jedem $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ zugeordnete Paar von Elementen aus **V** geordnet, so sind die Kanten gerichtet (Pfeile) und man spricht von einem **gerichteten Graphen**, anderenfalls handelt es sich um einen **ungerichteten Graphen**.

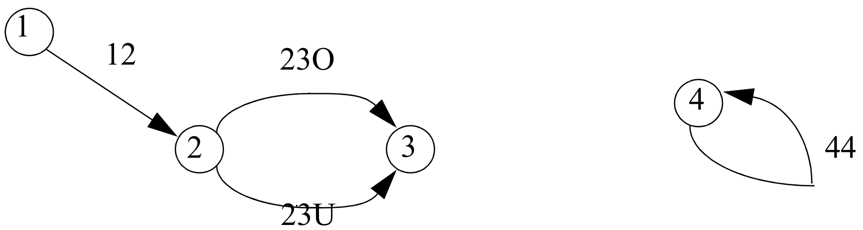
Beispiel für **gerichteten Graphen**: **V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, E = {12, 23, 24, 56}**
$\Psi(12)=(1,2)$, $\Psi(23)=(2,3)$, $\Psi(24)=(2,4)$, $\Psi(56)=(5,6)$



Beispiel für **ungerichteten Graphen**: **V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, E = {12, 14, 23, 34, 45, 67}**
$\Psi(12)=\{1,2\}$, $\Psi(14)=\{1,4\}$, $\Psi(23)=\{2,3\}$, $\Psi(34)=\{3,4\}$, $\Psi(45)=\{4,5\}$, $\Psi(67)=\{6,7\}$



Beispiel für Graphen mit **Schlingen** und **parallelen Kanten**:
V = {1, 2, 3, 4}, E={12, 23U, 23O, 44}, $\Psi(12)=(1,2)$, $\Psi(23Y)=\Psi(23O)=(2,3)$, $\Psi(44)=(4,4)$



Kanten sind normalerweise durch genau zwei Knoten begrenzt. Die Kante ist dann **inzident** zu diesen Knoten. Kanten, die einen gemeinsamen Knoten haben, nennt man dagegen **adjazent** zueinander. Auch zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen **adjazent** oder **benachbart** zueinander. Sind zwei Kanten **inzident** zu denselben zwei Knoten, so spricht man von **parallelen** Kanten.

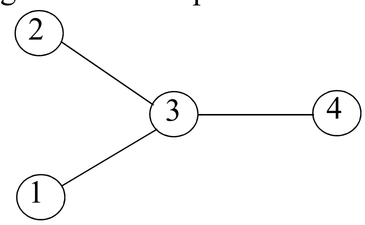
Um zwischen gerichteten und ungerichteten Kanten zu unterscheiden, seien gerichtete Kanten als Pfeil bezeichnet. Eine Kante, die mit einem einzigen Knoten inzidiert, wird als **Schlinge** bezeichnet.

Definition
Eine **alternierende Folge** von Knoten und Kanten eines Graphen, in der jede vorkommende Kante mit den beiden benachbarten Knoten inzidiert, heißt **Kantenfolge**. Tritt in einer solchen Kantenfolge jede Kante nur einmal auf, so spricht man von einem **Kantenzug**.

Definition
Unter dem **Grad** oder der **Valenz** eines Knotens in einem ungerichteten Graphen versteht man die Anzahl zu diesem Knoten inzidenten Kanten. Hierbei zählen **Schlingen** doppelt.

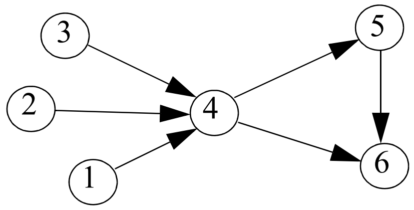
Bei **gerichteten Graphen** unterscheidet man entsprechend den **positiven Grad** oder **Ausgangsgrad** eines Knoten (Zahl der **ausgehenden** Pfeile) und den **negativen Grad** oder **Eingangsgrad** (Zahl der **eingehenden** Pfeile) eines Knoten voneinander.

Ungerichteter Graph



Knoten 3 mit Valenz 3

Gerichteter Graph



Knoten 4 mit positiver Valenz 2, negativer Valenz 3

Definition
Ein Graph **G** heist dann **zusammenhängend**, wenn jeweils zwei beliebige Knoten von **G** durch eine **Kantenfolge** zu verbinden sind. Andernfalls heitßt G **nichtzusammenhängend**.

Alle Knoten eines Graphen **G**, die durch eine **Kantenfolge** mit einem Knoten **v** verbunden sind, definieren mit **v** einen **Untergraphen**, der **Komponente von G** genannt wird. Jeder **nichtzusammenhängende** Graph **G** besteht aus mehreren derartigen (zusammenhängenden) Komponenten. Besteht eine solche Komponente aus einem einzigen Knoten, so bezeichnet man sie als **isolierten** Knoten.

Definition
Haben in einem Graphen **G** alle Knoten die gleiche Valenz **r**, so sprechen wir von einem **regulärem Graphen** vom **Grade r**.

Definition
Ein **vollständiger Graph** ist ein **regulärer Graph**, in dem je zwei Knoten entweder durch eine **Kante** (ungerichteter Graph) oder durch ein **Paar gegenläufiger Pfeile** (gerichteter Graph) verbunden sind.

Definition
Ein **schlichter Graph G** ist ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph **ohne parallele Kanten** (Pfeile) und **ohne Schlingen**.

Für (endliche) **vollständige schlichte** Graphen mit **n Knoten** liegt die Kantenzahl (Pfeilezahl) fest: ein ungerichteter vollständiger schlichter Graph mit **n** Knoten hat **n * (n-1) / 2** Kanten, ein ebensolcher gerichteter Graph **n * (n - 1)** Pfeile.

Definition
In einem **gerichteten Graphen G** heißt ein **Knoten v_j unmittelbar nachfolgender** Knoten von Knoten v_i, falls ein **Pfeil** (gerichtete Kante) von v_i nach v_j existiert.
Knoten v_i ist entsprechend **unmittelbar vorangehender Knoten** von Knoten v_j.

Definition
In einem **gerichteten Graphen G** heißt ein **Pfeil e** mit $\Psi(e) = (v_i, v_j)$ **unmittelbarer Vorgänger** des **Pfeils e'**, falls $\Psi(e') = (v_j, v_h)$ ist. Entsprechend ist **e' unmittelbarer Nachfolger** von **e**.

Definition
In einem **gerichteten Graphen G** heißt ein Knoten mit einem **negativem Grad** (Valenz) von 0 eine **Quelle** und ein Knoten mit einer **positiven Valenz** von 0 eine **Senke**.

Definition
In einem **gerichteten Graphen** bezeichnet man als **Schleife** einen gerichteten Kantenzug, bei dem der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist (geschlossene Pfeilfolge). Handelt es sich bei dem Kantenzug um einen Weg, d.h.werden die Kanten in Pfeilrichtung durchlaufen, spricht man von einem **Zykus**. Besteht ein solcher Zyklus nur aus zwei Pfeilen, so bezeichnet man ihn als **Masche**.

Um im folgenden einfacher zwischen **ungerichteten** und **gerichteten** Graphen unterscheiden zu können, wird der Begriff des **Digraphen** eingeführt:

Definition
Ein **endlicher**, **gerichteter**, **schlichter** Graph heißt **Digraph**.

Darstellung von Graphen

Die Darstellung eines Graphen kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Die bisherigen Abbildungen dieses Kapitels bedienten sich der graphischen Darstellung, die zweifellos den Vorteil der direkten Anschaulichkeit hat. Da Graphen jedoch oft nicht nur zur "Veranschaulichung" von Strukturen benutzt werden, ist in vielen Fällen eine andere Darstellungsart vorteilhafter. Insgesamt sind außer der graphischen folgende Darstellungsformen üblich:

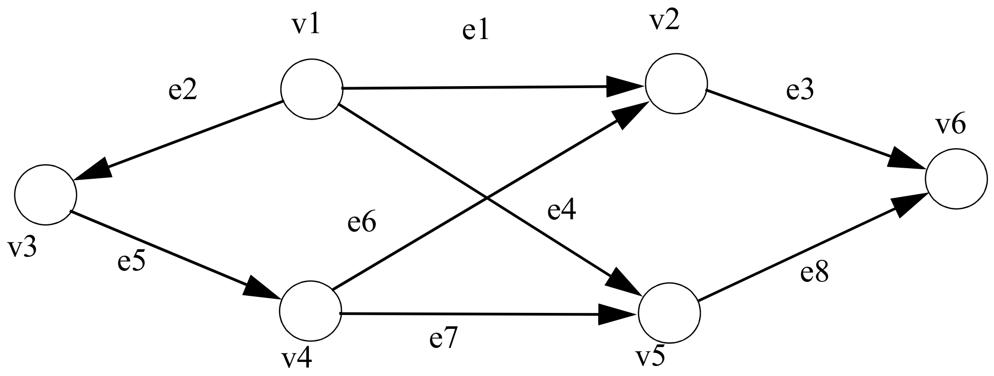
1. Die Darstellung durch **Abbildungen** (Funktionen).

2. Die Darstellung durch **Kanten- oder Pfeillisten**.

3. Die Darstellung mit Hilfe einer **Adjazenzmatrix**.

4. Die Darstellung mit Hilfe einer **Inzidenzmatrix**.

Diese Formen der Darstellung sollen anhand des fogenden **Digraphen** kurz erläutert werden:



Darstellung durch Abbildungen

Die Menge der **Knoten** wird mit **V**, die Menge der **Kanten** mit **E** und die (Inzidenz)-Abbildung mit **Ψ** bezeichnet. Ordnet eine Abbildung **Ψl** einem Pfeil seinen **Anfangsknoten** und **Ψ2** den entsprechenden **Endknoten** zu, so kann z. B. ein Digraph durch das Quadrupel (**V, E, Ψ1, Ψ2**) beschrieben werden. Für den oben abgebildeten Digraphen ergibt sich:

Anfangs-	$e_1 \to v_1$	End-	$e_1 \to v_2$
knoten	$e_2 \to v_1$	knoten	$e_2 \to v_3$
	$e_3 \to v_2$		$e_3 \to v_6$
Ψ1 :	$e_4 \to v_1$	Ψ2 :	$e_4 \to v_5$
	$e_5 \to v_3$		$e_5 \to v_4$
	$e_6 \to v_4$		$e_6 \to v_2$
	$e_7 \to v_4$		$e_7 \to v_5$
	$e_8 \to v_5$		$e_8 \to v_6$

Darstellung durch Kanten- oder Pfeillisten

e_1 : (v_1, v_2)
e_2 : (v_1, v_3)
e_3 : (v_2, v_6)
e_4 : (v_1, v_5)
e_5 : (v_3, v_4)
e_6 : (v_4, v_2)
e_7 : (v_4, v_5)
e_8 : (v_5, v_6)

Für Digraphen ist diese Darstellung durchaus akzeptabel. Hat ein Graph jedoch parallele Kanten oder Pfeile, so sind diese in einer Kanten- oder Pfeilliste nicht voneinander unterscheidbar.

Darstellung durch eine Adjazenzmatrix

Für einen **Digraphen** mit **m** Knoten ist die Adjazenzmatrix eine **m x m**-Matrix **A**, deren Elemente a_{ij} wie folgt definiert sind:

a_{ij} = 1, falls von $\mathbf{v_i}$ nach $\mathbf{v_j}$ ein Pfeil führt (i, j = 1 , . . . , m)

a_{ij} = 0, sonst

Für den oben angegebenen Digraphen ergibt sich:

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	**Zeilensummen**
	v_1	0	1	1	0	1	0	**3**
	v_2	0	0	0	0	0	1	**1**
A =	v_3	0	0	0	1	0	0	**1**
	v_4	0	1	0	0	1	0	**2**
	v_5	0	0	0	0	0	1	**1**
	v_6	0	0	0	0	0	0	**0**
Spaltensummen		**0**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**8**

Die **Zeilensummen** einer **Adjazenzmatrix** geben die positiven Grade (**Ausgangsgrade**) der Knoten und die **Spaltensumme** deren negative Grade (**Eingangsgrade**) an. Die **Summe** der **Spalten- oder Zeilensummen** ergibt die **Zahl der Pfeile** des Digraphen.

Darstellung durch Inzidenzmatrizen

Für einen Digraphen mit ***m*** Knoten und ***n*** Pfeilen ist die **Inzidenzmatrix** eine **m x n** - Matrix. Jeder **Zeile** ist ein **Knote**n und jeder **Spalte** ein **Pfeil** zugeordnet. Die Elemente h_{ij} dieser Matrix **H** sind wie folgt definiert:

h_{ij} = 1, falls der Pfeil $\mathbf{e_j}$ von Knoten $\mathbf{v_i}$ ausgeht (i=1, . . . , m; j=1 , . . . , n)

h_{ij} = -1, falls der Pfeil $\mathbf{e_j}$ im Knoten $\mathbf{v_i}$ mündet (i=1, . . . , m; j=1 , . . . , n)

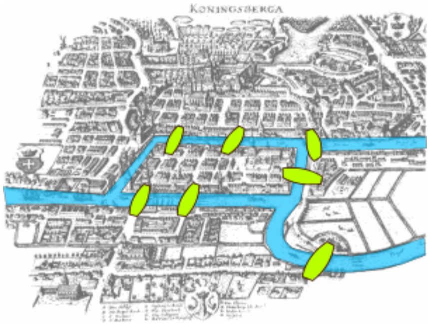
h_{ij} = 0, sonst

Für den oben angegebenen Digraphen ergibt sich:

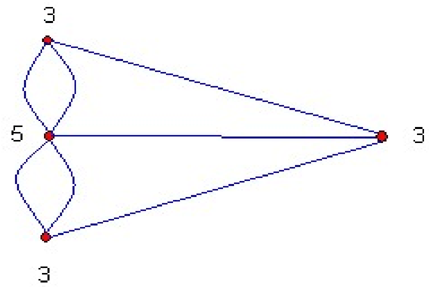
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
	v_1	1	1	0	1	0	0	0	0
	v_2	-1	0	1	0	0	-1	0	0
H =	v_3	0	-1	0	0	1	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	-1	1	1	0
	v_5	0	0	0	-1	0	0	-1	1
	v_6	0	0	-1	0	0	0	0	-1

Graphen

Mit dem "Königsberger Brückenproblem" beginnt die dokumentierte Geschichte der Graphentheorie im Jahre 1736. Die beiden Arme des Flusses Pregel umfließen eine Insel, den Kneiphof. Das Problem bestand darin, zu klären, ob es einen Weg gibt, bei dem man alle sieben Brücken über den Pregel genau einmal überquert, und wenn ja, ob auch ein Rundweg möglich ist, bei dem man wieder zum Ausgangspunkt gelangt.



Skizzierter Stadtplan zugehöriger Graph



Folgende Definitionen sind auf Euler zurückzuführen:

Def.: Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Ein Weg P in G heißt "Eulersch", wenn P jeden Pfeil (gerichtete Kante) aus G genau einmal durchläuft.
Def.: Ist P zusätzlich ein Kreis, so nennt man P "Eulerscher Kreis".
Def.: Graph G heißt "Eulersch", wenn er einen "Eulerschen Kreis" enthält

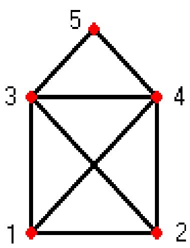
Die Lösung des Problems ergibt sich dem **Satz von Euler** für ungerichtete Graphen:

Ein endlicher, ungerichteter und zusammenhängender Graph ist genau dann "Eulersch", wenn alle Ecken **geraden Grad** haben. Er hat genau dann einen Eulerschen Weg, der kein Kreis ist, wenn **genau 2 Knoten ungeraden Grad** haben (diese bilden den Anfangs- und Endpunkt jedes Eulerschen Weges).

Wie Leonhard Euler 1736 bewies, war ein solcher Weg bzw. "Eulerscher Weg" in Königsberg nicht möglich, da zu allen vier Ufergebieten bzw. Inseln eine ungerade Zahl von Brücken führte.

Es dürfte maximal zwei Ufer (Knoten) mit einer ungeraden Zahl von angeschlossenen Brücken (Kanten) geben. Diese zwei Ufer könnten Ausgangs- bzw. Endpunkt sein. Die restlichen Ufer müssten eine gerade Anzahl von Brücken haben, um sie auch wieder verlassen zu können.

Das beliebte Kinderrätsel "Das-ist-das-Haus-vom-Ni-ko-laus" hingegen enthält einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis, da sein Graph zwei Knoten vom Grad 3 enthält:



Ein Eulerweg ist z.B. 1-2-4-3-1-4-5-3-2. Knoten 1 und 2 haben jeweils 3 Nachbarn, ihr Grad ist ungerade. Um das Haus in einem Zug zeichnen zu können muss man daher an einem dieser beiden Punkte beginnen.

Ein Quadrat mit Diagonalen enthält keinen Eulerweg, da alle seine Knoten den Grad 3 haben.