Komplexe Zahlen

Definition. Ein geordnetes Paar (x, y) aus zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ heißt **komplexe Zahl**.

Symbolische Schreibweise: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{iy}$

... **algebraische, kartesische** bzw. **Normalform** von z

Bezeichnungen:

i ... **imaginäre Einheit**

$x = \mathrm{Re}(z)$ ... **Realteil** von z

$y = \mathrm{Im}(z)$ ... **Imaginärteil** von z

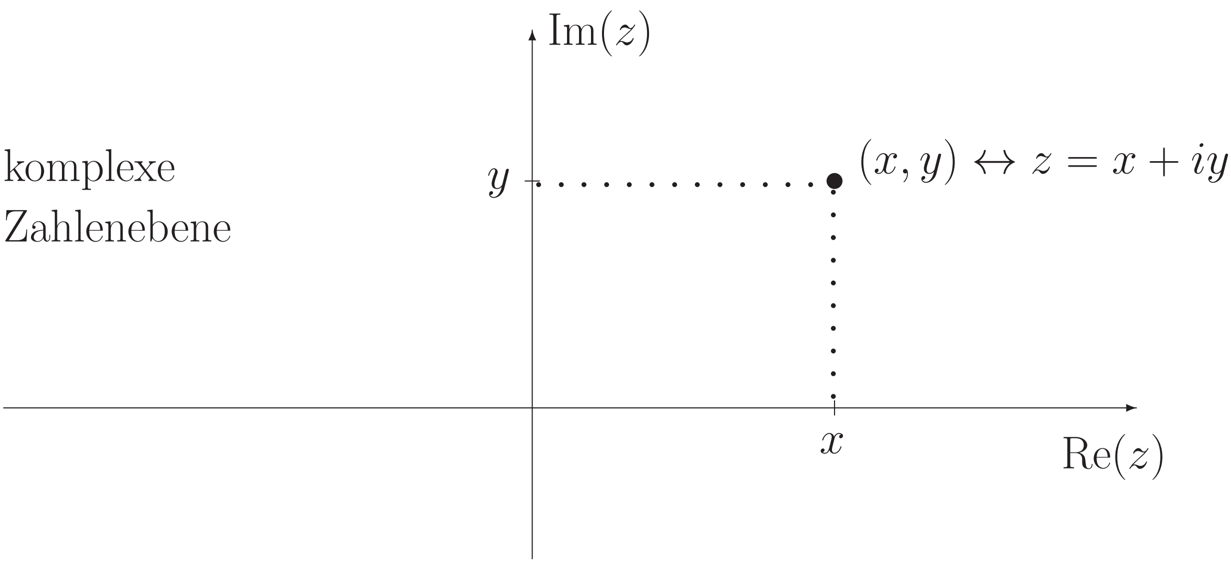
$\mathbb{C} := \{z | z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

... **Menge der komplexen Zahlen**

$z = x + i \cdot 0 = x$ ... **reelle Zahle**n

$z = 0 + iy = iy$ ... **imaginäre Zahlen**

komplexe
Zahlenebene



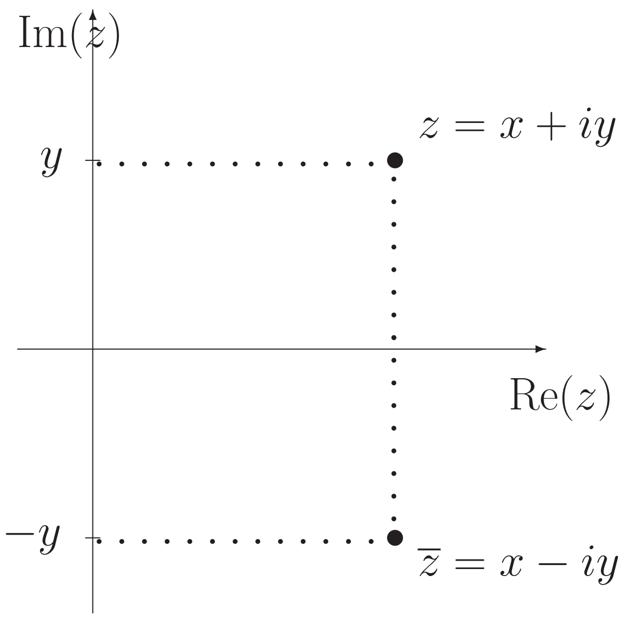
Die konjugiert-komplexe Zahl

Definition. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

die zu $z = x + iy$ **konjugiert-komplexe Zahl**.

Bemerkung: Die Konjugation entspricht in der komplexen Zahlenebene einer **Spiegelung an der reellen Achse:**



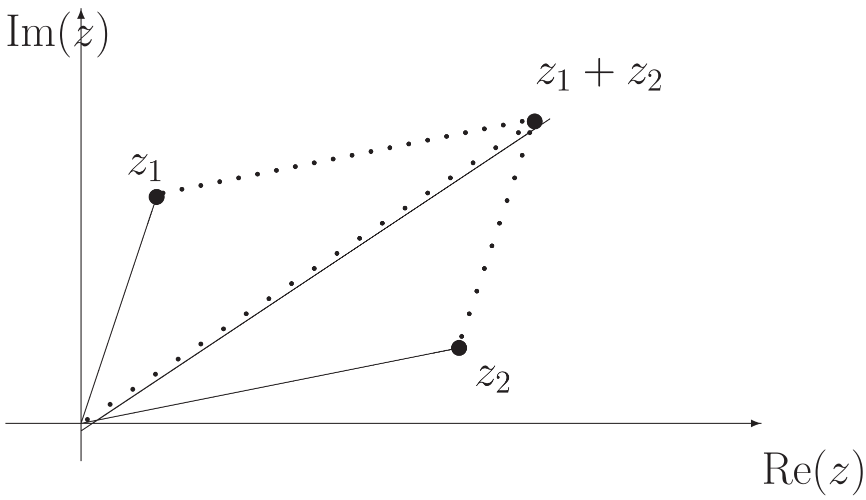
Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben: $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$

Addition und Subtraktion.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$$

... **Summe / Differenz** von z_1 und z_2



Multiplikation.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

... **Produkt** von z_1 und z_2.

Merkhilfe: Das Produkt von z_1 und z_2 ergibt sich durch klassisches Ausmultiplizieren, Einsetzen der Beziehung

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

und Zusammenfassen.

Wichtig:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}!$$

Division.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

... **Quotient** von z_1 und z_2.

Merkhilfe: Bruch mit konjugiert-komplexen Nenner $\overline{z}_2$ erweitern, damit Nenner reell wird. Dann Ausmultiplizieren und Zusammenfassen.

Insbesondere gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) **Kommutativgesetze:**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

(2) **Assoziativgesetze:**

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

(3) **Distributivgesetze:**

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Der Betrag einer komplexen Zahl

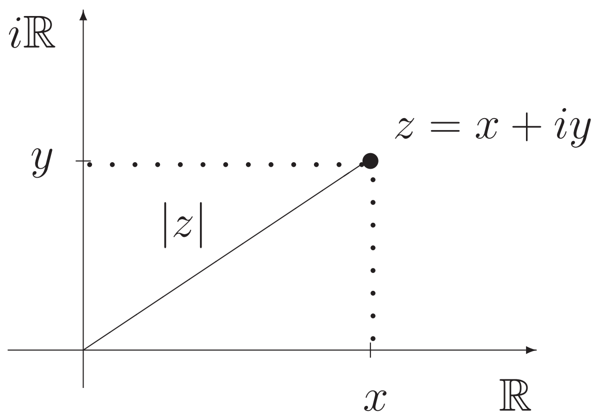
Definition. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

der **Betrag von** z.

Es gilt

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \quad \text{bzw.} \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$



Eigenschaften des Betrages

(1) $|z| \geq 0$

(2) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Zur Dreiecksungleichung