Aussagenlogik

Aussage ist entweder **wahr** (true, 1, on, Strom fließt)
oder **falsch** (false, 0, off, kein Strom fließt)

Es gilt das Prinzip der **Zweiwertigkeit**, außer **wahr** und **falsch** gibt es keine weiteren Zustände.

Aussagenvariablen (logische Variablen, Boolesche Variablen), in **C++**: **bool b = true**;

George Boole, 1815 - 1869, ein Begründer der mathematischen Logik
Gottlob Frege, 1848 - 1925, Begründer der modernen formalen Logik. Frege entwickelte als erster eine formale Sprache und damit zusammenhängend formale Beweise. Er schuf dadurch eine wesentliche Grundlage für die heutige Computertechnik und Informatik.

Negation:

p	~ p
0	1
1	0

häufig wird auch ***not p***, $\bar{p}$, ***!p*** oder $\neg p$ verwendet.

Es gilt: **not not p ⇔ p** (doppelte Verneinung)

Konjunktion: (logisches und)

p	q	p and q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

alternativ p **&&** q, $p \wedge q$, sowohl p als auch q, p **und** q

Es gilt: (p and q) and r ⇔ p and (q and r)

Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: **~ (p and ~p)** ist immer wahr.

Alternative: (logisches oder)

p	q	p or q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

alternativ **p || q**, $p \vee q$, p **oder** q, wobei das Zusammenbestehen von p und q nicht ausgeschlossen wird.

Satz vom ausgeschlossenen Dritten: **p or ~ p** ist immer wahr.

es gilt:

(p or q) or r ⇔ p or (q or r)	**Assoziativität**
~ (p and q) ⇔ ~ p or ~ q	**DE MORGAN Gesetz**
~ (p or q) ⇔ ~ p and ~ q	**DE MORGAN Gesetz**
a and (p or q) ⇔ (a and p) or (a and q)	**Distributivität**
p and q ⇔ ~ (~ p or ~ q)	
p or q ⇔ ~(~ p and ~ q)	

Antivalenz: (entweder oder, exclusives oder)

p	q	p xor q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

alternativ **p >--< q** bzw. **p <-/-> q**

es gilt:
p xor q ⇔ (p or q) and ~ (p and q)
p xor q ⇔ (p and ~ q) or (~ p and q)
p xor q ⇔ ~ (p ↔ q)

Das ausschließende Oder (Kontravalenz oder Antivalenz), „entweder A oder B“, besagt, dass genau eine der beiden von ihm verknüpften Aussagen wahr ist. Entsprechend ist ein ausschließendes Oder nicht nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind, sondern auch, wenn beide wahr sind. Mit **xor** lassen sich alle restlichen 15 logischen Verknüpfungen ersetzen.

Implikation:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Replikation: $q \leftarrow p$

$q \leftarrow p$
1
1
0
1

es gilt: $p \to q \Leftrightarrow \sim(p \text{ and } \sim q)$

$p \to q \Leftrightarrow \sim p \text{ or } q$

$p \text{ xor } q \Leftrightarrow (p \to q) \to (q \to p)$

$\sim p \to q \Leftrightarrow p \text{ or } q$

$p \to q \Leftrightarrow q \leftarrow p$

Umkehrschluß: $\mathbf{p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p}$

Es wird **nichts** über das **Bestehen** der Sachverhalte **p** und **q** ausgesagt. Die **Gültigkeit** von **p** wird **nicht** behauptet.
Die materiale **Implikation**, auch **Konditional** oder **Subjunktion** genannt, drückt die **hinreichende** Bedingung aus: Sie sagt, dass die Wahrheit des einen Satzes eine **hinreichende** Bedingung für die Wahrheit des anderen Satzes ist. Man schreibt $A \to B$ oder auch $A \subset B$
und liest

- A ist eine **hinreichende Bedingung** für B.
- Schon wenn A, dann B.
- A setzt voraus, dass B.
- B ist eine **notwendige Bedingung** für A.

Dass B genau dann eine notwendige Bedingung für A ist, wenn A eine hinreichende Bedingung für B ist, ist eine auf den ersten Blick überraschende und vielleicht kontraintuitive, jedoch zutreffende Feststellung.

- Nur wenn B, dann A.
- Wenn A, dann B.

Beispiele:
- Dass es regnet, ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Straße nass ist.
- Dass die Straße nass ist, ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es regnet.
- Schon wenn es regnet, ist die Straße nass.
- Wenn es regnet, ist die Straße nass.
- Nur wenn die Straße nass ist, regnet es.
- Wenn Person x einen Wagen der Marke BMW hat, hat x ein Auto.
- Wenn eine Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist die Zahl n durch 3 teilbar.

Die Lesart „wenn … dann“ ist insofern problematisch, als mit dem natürlichsprachlichen „wenn … dann“ vor allem inhaltliche Zusammenhänge wie Kausalität oder zeitliche Nähe ausgedrückt werden. All das macht die materiale Implikation nicht, sie nennt nur den formalen Zusammenhang: „Dass es regnet, ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Straße nass ist“.

Achtung: Die Aussage "Immer wenn ich dich besuchen will, bist du nicht zu Hause" hat die Struktur einer Implikation, obwohl die erste Aussage dieser Verbindung keine Bedingung oder Ursache für den der zweiten Aussage entsprechenden Sachverhalt widerspiegelt.

Zur Frage, warum das eine hinreichende Bedingung ist – ob auf Grund eines kausalen Zusammenhangs oder auch nur rein zufällig –, nimmt die materiale Implikation nicht Stellung.

Als **Umkehrschluss (Kontraposition)** bezeichnet man den Schluss von **A → B** auf
not B → not A .

Für die **Beispiele** bedeutet das:

- Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht.
- Nur wenn es nicht regnet ist die Straße nicht nass.
- Wenn Person x kein Auto hat, dann hat x keinen Wagen der Marke BMW.
- Wenn die Zahl n nicht durch 3 teilbar ist, dann ist n nicht durch 6 teilbar.
- Nur wenn n nicht durch 6 teilbar ist, ist n nicht durch 3 teilbar.

Achtung: Aus **A → B** kann **nicht** **~A → ~B** abgeleitet werden !

Umgangssprachlich lässt man sich gelegentlich zu weiteren – **falschen** – Aussagen verleiten:

Weil es nicht regnete, kann die Straße nicht nass sein.
Diese Folgerung ist **falsch**, da die Straße auch aus anderen Gründen nass werden kann (Rohrbruch, Übung der Feuerwehr ...). korrekt: Wenn es regnet, wird die Straße nass.

x hat keinen Wagen der Marke BMW, also hat x kein Auto.
Diese Folgerung ist **falsch**, denn er könnte ja einen Mercedes haben

n ist nicht durch 6 teilbar, also ist n auch nicht durch 3 teilbar.
Auch diese Folgerung ist **falsch**. Die Zahl 15 ist nicht durch 6 teilbar und sehr wohl durch 3.

Das bedeutet: Wenn die Folgerung **wahr** ist, dann erhält man aus der Aussage **¬A** keine Aussage über **B**; **B** kann wahr oder falsch sein. („**Ex falso sequitur quodlibet**" – „**Aus Falschem folgt Beliebiges**") (Umgangssprachlich wird häufig aus Falschem etwas Richtiges gefolgert, dadurch wird die falsche Prämisse jedoch **nicht** wahr.)

Die Implikation ist ein wichtiges Mittel in der Mathematik. Die meisten mathematischen Sätze sind als Implikationen formuliert.

Eine zweite Art von Aussagenverbindung, die wie die Implikationen mit Hilfe von "wenn - so" formuliert werden können, trägt den Namen **Replikation** oder **Gegenimplikation**. Eine aus den Aussagen p, q bestehende Replikation wird "p repliziert q" gelesen oder "nur wenn p, so q" und symbolisch $p \leftarrow q$ geschrieben.

Replikation

p	q	$p \leftarrow q$	**Implikation** $q \rightarrow p$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

es gilt: $p \rightarrow q \Leftrightarrow q \leftarrow p$

Nur wenn der **p** entsprechende Sachverhalt besteht, besteht auch der **q** entsprechende Sachverhalt.
Beispiel: p entspricht "Schalter betätigt" , **q** entspricht "Lampe leuchtet auf"
Nur wenn der Schalter betätigt worden ist (**notwendige Bedingung**), leuchtet die Lampe auf (**hinreichende Bedingung**).
Wurde der Schalter betätigt, ohne, dass Lampe aufleuchtet, so ist Aussagenverbindung ebenfalls wahr. Es wurde nicht gesagt, dass die Lampe unter den genannten Bedingungen tatsächlich aufleuchtet. Falsch ist die Aussage, wenn die Lampe aufleuchtet, ohne dass der Schalter betätigt wurde.

Äquivalenz:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

es gilt: $\mathbf{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q)}$ **and** $\mathbf{(q \rightarrow p)}$

$p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \sim p$ or $\sim q \Leftrightarrow \sim(p$ and $\sim q)$

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Das **Bikonditional**, oft auch objektsprachliche **Äquivalenz** oder materiale Äquivalenz genannt, drückt die **hinreichende und notwendige Bedingung** aus, sagt also, dass eine Aussage A genau dann zutrifft, wenn eine Aussage B zutrifft.

Man schreibt: $A \leftrightarrow B$ und liest $(A \rightarrow B)$ and $(B \rightarrow A)$

- A ist genau dann der Fall, wenn B der Fall ist.
- A genau dann wenn B.
- A ist dann und nur dann der Fall, wenn B der Fall ist.

Auch beim Bikonditional wird eine rein formale Aussage getroffen, die nichts über einen allfälligen inhaltlichen Zusammenhang von A und B aussagt.

Statt $A \leftrightarrow B$ zu sagen, kann man auch sagen, dass A eine hinreichende Bedingung für B und dass B eine hinreichende Bedingung für A ist, also $(A \rightarrow B)$ and $(B \rightarrow A)$. Tatsächlich sind diese beiden Aussagen **logisch äquivalent**.

Beispiele:
- Die ganze Zahl n ist genau dann durch 6 teilbar, wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist.
- Wenn n durch 6 teilbar ist, dann folgt daraus, dass n durch 2 und durch 3 teilbar ist.
- Umgekehrt gilt aber auch: Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist n durch 6 teilbar.
- Heute ist genau dann Dienstag, wenn morgen Mittwoch ist.
- Die Erde ist genau dann eine Scheibe, wenn man bei einer ausgedehnten Segelpartie in den Weltraum stürzen kann.

Verneinung einer Konjunktion

Die Verneinung der Konjunktion "A and B" bzw. not(A and B) lautet "Es ist **nicht** der Fall, dass **A und B** zutreffen".

Diese ist logisch **äquivalent** mit der Aussage "**A ist nicht** der Fall **oder B ist nicht** der Fall (oder beides)".

Scheffer-Strich: auch als **NAND** verwendet.

p	q	not (p and q)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beispiel:
Wenn man die Aussage "Es regnet, und die Erde ist eine Scheibe" verneinen möchte, dann kann man entweder sagen "Es ist nicht der Fall, dass es regnet und die Erde eine Scheibe ist." oder man sagt "Es regnet nicht oder die Erde ist keine Scheibe (oder beides)".

In der Schaltalgebra wird sehr oft der Junktor **NAND** verwendet, wobei „A NAND B" denselben Wahrheitswertverlauf hat wie der Ausdruck **not (A and B)** .

Die **NAND**-Verknüpfung (engl. not and ⇔ nicht und) wird auch als **Sheffer stroke**, **Sheffer-Strich**, **Sheffer-Funktion** oder **Sheffer-Operator** nach Henry Maurice Sheffer genannt.

Die **NAND**-Verknüpfung sowie alle anderen logischen Verknüpfungen können durch **NAND**-Gatter respektive deren Verschaltung umgesetzt werden und gelten in der Digitaltechnik daher als **Standardbaustein**. Zudem werden **NAND**-Bausteine häufig benutzt, da sie die günstigsten digitalen Bausteine sind. So werden sehr platzsparend etwa Speicherbausteine wie NAND-Flashes aus NAND-Bausteinen aufgebaut.

Mit dem **Scheffer-Strich** lassen sich **alle restlichen 15** booleschen Verknüpfungen ersetzen.

Beispiele für das Ersetzen logischer Operatoren durch den **Sheffer-Strich** :

Negation (Komplement-Gatter) **not p** , durch NAND ausgedrückt: **P | P**
Konjunktion (Und-Gatter): **p and q**, durch NAND ausgedrückt: **(P | Q) | (P | Q)**
Disjunktion (Oder-Gatter): **p or q**, durch NAND ausgedrückt: **(P | P) | (Q | Q)**
Implikation, Konditional: **p → q** , durch NAND ausgedrückt: **P | (Q | Q)**
Äquivalenz, Bikonditional: **p ↔ q** (XNOR-Gatter): **(P | Q) | ((P | P) | (Q | Q))**
Kontravalenz, Antivalenz, Alternative: **p xor q** (XOR-Gatter): **(P | (P | Q)) | (Q | (P | Q))**

Bemerkung: Aussagen entstehen in der Algorithmierung u.a. durch die Nutzung von Vergleichsoperatoren **< , <= , == , != , >= , >** bei Tests:

3 > 5 , 1 < 10 , 5 == 5 , x == 3 , a != b , ...
(x >= 3) and (x < 5) ⇔ not (x < 3) and not (x >= 5)
not ((x >= 3) and (x < 5)) ⇔ (x < 3) or (x >= 5)
(x <= 2) or (x > 8) ⇔ not (x > 2) or not (x <= 8)
not((x <= 2) or (x > 8)) ⇔ (x > 2) and (x <= 8)

Verneinung einer Disjunktion (NOR)

Die Verneinung der Disjunktion "A or B" bzw. **not(A or B)** lautet "Es ist **nicht** der Fall, dass **A oder B** zutreffen".

Diese ist logisch **äquivalent** mit der Aussage "**A ist nicht** der Fall **und B ist nicht** der Fall.

NOR auch als **NOR** verwendet.

p	q	not (p or q)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Die **NOR**-Verknüpfung sowie alle anderen logischen Verknüpfungen können durch **NOR**-Gatter respektive deren Verschaltung umgesetzt werden und gelten in der Digitaltechnik daher als **Standardbaustein**. Zudem werden **NOR**-Bausteine häufig benutzt, da sie günstigste digitale Bausteine sind.

Mit **NOR** lassen sich **alle restlichen 15** booleschen Verknüpfungen ersetzen.

Das Prüfen von Schlußregeln

F |= G gilt genau dann, wenn **F → G** allgemeingültig

d.h. zu jeder **Schlußregel** gibt es eine **Implikation**, die genau dann **allgemeingültig** ist, wenn die **Schlußregel gültig** ist.

Wenn diese Behauptung **wahr** ist, dann kann man von **jeder Schlußregel** feststellen, ob sie **gültig** oder **nicht gültig** ist, indem man einfach die ihr entsprechende **Implikation** mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** untersucht.

Schließen ist das **Gewinnen von Aussagen**.

Regel für deduktives Schließen: Falls die **Prämissen wahr** sind, ist auch die **Conclusio wahr**.

Bemerkung: **F** kann **mehrere durch Konjunktion verknüpfte Prämissen** darstellen.
Da diese wegen der **Konjunktion** alle **wahr** sein müssen, können diese zu einer Prämisse **F** zusammengefaßt werden.

Beweis von "**F |= G** gilt genau dann, wenn **F → G** allgemeingültig" :

Voraussetzung **F |= G**, wir bilden Implikation **F → G**, daraus ergeben sich zwei Möglichkeiten:

1. Prämisse **F** ist wahr. Dann ist auch **G** wahr, das folgt aus der Voraussetzung, wonach die Schlußregel **F |= G** gültig sein soll. Damit ist die Implikation **F → G** selbst auch wahr, wie jede Implikation mit wahrem Vorderglied und wahrem Hinterglied.

2. Prämisse **F** ist falsch. Dieser Fall muß deshalb einbezogen werden, weil die Schlußregel nicht besagt, dass die Prämisse **F** wahr ist, sondern wenn F wahr ist, so ist auch G wahr (jedes Modell von F ist auch ein Modell für G). Unter diesen Umständen ist der Wahrheitswert der Conclusio bzw. des Hintergliedes gleichgültig, denn eine Implikation mit falschem Vorderglied ist auf jeden Fall wahr.

Die betrachtete Implikation ist also allgemeingültig. Damit ist bewiesen, dass, wenn eine Schlußregel gültig ist, die ihr entsprechende Implikation allgemeingültig ist.

Vorraussetzung **F → G** sei **allgemeingültig**. D.h. bei wahrem **F** muß **F → G** wahr sein.
Das kann **F → G** aber nach Definition der Implikation nur dann sein, wenn mit ihrem Vorderglied **F** immer ihr Hinterglied **G** wahr ist.

Eine Implikation, deren Vorderglied **F** wahr und deren Hinterglied **G** falsch ist, wäre selbst falsch. Das stünde im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Eine Schlußregel, die besagt, dass aus der Wahrheit einer Prämisse in Gestalt des Vordergliedes der vorausgesetzten Implikation die Wahrheit einer Conclusio in Gestalt des entsprechenden Hintergliedes folgt, ist demnach gültig.

Damit sind beide Richtungen der Behauptung bewiesen.

Schlußregeln gehören zum Bereich der **Metatheorie**, $\models$ bzw. $\Rightarrow$ kann im folgenden wegen des vorhergehenden Satzes durch die Implikation $\rightarrow$ ersetzt werden:

Abtrennungsregel (**Modus Ponens**): Sind **F** und **F → G** **Tautologien**, so ist auch **G** eine **Tautologie** (allgemeingültige Formel)

F
<u>F → G</u>
G

Beweis:

F	G	(F and (F → G))			⇒	G
0	0	0	0	1	**1**	0
0	1	0	0	1	**1**	1
1	0	1	0	0	**1**	0
1	1	1	1	1	**1**	1

<u>oder:</u> **(F and (F → G)) ⇒ G** ⇔ (F and (not F or G)) → G ⇔ not (F and (not F or G)) or G
⇔ not F or not(not F or G) or G ⇔ not F or (F and not G) or G
⇔ (not F or F) and (not F or not G) or G ⇔ 1 and (not F or not G) or G
⇔ (not F or not G) or G ⇔ not F or 1 ⇔ **1**

Widerlegungsregel (Modus Tollens): (P → Q) and not Q ⇒ not P

P → Q
<u>not Q</u>
not P

Beweis: ((P → Q) and not Q) ⇒ not P ⇔ not ((P → Q) and not Q) or not P
⇔ not **(**notP or Q**)** or not not Q) or not P ⇔ (P and not Q) or Q or not P
⇔ (P or Q) and (not Q or Q)) or not P ⇔ (P or Q) and 1 or not P
⇔ P or Q or not P ⇔ P or not P or Q ⇔ 1 or Q ⇔ 1

Satz vom ausgeschlossenen Dritten: **p or not p**

Satz vom Widerspruch: **not(p and not p)**

Satz von der doppelten Verneinung: **not not p ⇔ p**

p ⇒ (p or q)

q ⇒ (p or q)

Schluß aus Alternative: **(A or B) and (A→C) and (B→C) ⇒ C**

Schluß auf Implikation: **A and ((A and B) → C) ⇒ (B → C)**

Indirekter Schluß: **(not A → B) and (not A → not B) ⇒ A**

Reductio ad absurdum: **(A → B) and (A → not B) ⇒ not A**

(P and Q) ⇒ (P and Q)

(P and not Q) ⇒ (P and not Q)

(P or Q) and not P ⇒ Q

(P or Q) and not Q ⇒ P

Schluß aus Exklusion: **((P | Q) and P $\Rightarrow$ not Q) $\Leftrightarrow$ (not(P and Q) and P $\Rightarrow$ not Q)**

Schluß aus Exklusion: **((P | Q) and Q $\Rightarrow$ not P) $\Leftrightarrow$ (not(P and Q) and Q $\Rightarrow$ not P)**

Schluß auf Konjunktion: **A and (A$\rightarrow$ B) and (A$\rightarrow$ C) $\Rightarrow$ (B and C)**

Satz von der Prämissenvertauschung: **(P $\rightarrow$ (Q $\rightarrow$ R)) $\Leftrightarrow$ (Q $\rightarrow$ (P $\rightarrow$R))**

B and (not A $\rightarrow$ not B) $\Rightarrow$ A

(P xor Q) and P $\Rightarrow$ not Q
(P xor Q) and Q $\Rightarrow$ not P
(P xor Q) and not P $\Rightarrow$ Q
(P xor Q) and not Q $\Rightarrow$ P

(P $\rightarrow$ Q) and P $\Rightarrow$ Q

(P $\rightarrow$ Q) and Q $\Rightarrow$ P

(P $\rightarrow$ Q) and not P $\Rightarrow$ notQ

(P $\rightarrow$ Q) and not Q $\Rightarrow$ not P

((P and Q) $\rightarrow$ R) $\Rightarrow$ ((not R and Q) $\rightarrow$ not P)

Beweis durch Widerspruch: **(not F $\Rightarrow$ 0) $\Leftrightarrow$ (F = 1)**

Gesetz der Fallunterscheidung: **(A or B) and ((A $\rightarrow$ C) and (B $\rightarrow$ C)) $\Rightarrow$ C**

Äquivalenz in einer Aussagenvariablen

Reflexivität der Äquivalenz: **A $\Leftrightarrow$ A**
Doppelte Verneinung: **not not A $\Leftrightarrow$** A
Idempotenz der Konjunktion: **A and A $\Leftrightarrow$** A
Idempotenz der Disjunktion: **A or A $\Leftrightarrow$** A
Gesetz des Widerspruchs: **A and not A $\Leftrightarrow$** 0
Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: **A or not A $\Leftrightarrow$** 1
Reflexivität der Implikation: **A $\rightarrow$ A $\Leftrightarrow$** 1
Neutralelement der Konjunktion: **1 and A $\Leftrightarrow$** A
Disjunktion mit 1: **1 or A $\Leftrightarrow$ 1**
Neutralelement der Disjunktion: **0 or A $\Leftrightarrow$** A
Konjunktion mit 0: **0 and A $\Leftrightarrow$ 0**

Disjunktionsgesetze

Kommutativität der Disjunktion: **A or B $\Leftrightarrow$ B or A**
Assoziativität der Disjunktion: **A or (B or C) $\Leftrightarrow$ (A or B) or C**
Distributivgesetz von or über and: **A or (B and C) $\Leftrightarrow$ (A or B) and (A or C)**
Absorbtionsgesetz für or: **A or (A and B) $\Leftrightarrow$ A**
DE MORGAN-Gesetz: **not(A or B) $\Leftrightarrow$ notA and not B**
Umwandlung Disjunktion in Implik.: **A or B $\Leftrightarrow$ notA $\rightarrow$ B**

Konjunktionsgesetze

Kommutativität von and:	$A \text{ and } B \Leftrightarrow B \text{ and } A$
Assoziativität von and:	$A \text{ and } (B \text{ and } C) \Leftrightarrow (A \text{ and } B) \text{ and } C$
Distributivität von and über or:	$A \text{ and } (B \text{ or } C) \Leftrightarrow (A \text{ and } B) \text{ or } (A \text{ and } C)$
Absorptionsgesetz für and:	$A \text{ and } (A \text{ or } B) \Leftrightarrow A$
DE MORGAN-Gesetz:	$\text{not}(A \text{ and } B) \Leftrightarrow \text{not } A \text{ or not } B$
Umwandlung Konjunktion in Implik.:	$A \text{ and } B \Leftrightarrow \text{not}(A \rightarrow \text{not } B)$

Subjunktionsgesetze

Kontrapositionsgesetz:	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{ not } q \rightarrow \text{not } p)$
Umwandlung von $\rightarrow$ in **or** :	$a \rightarrow b \Leftrightarrow \text{not } a \text{ or } b$
Distributivität von $\rightarrow$ über **and** :	$a \rightarrow (b \text{ and } c) \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \text{ and } (a \rightarrow c)$
Distributivität von $\rightarrow$ über **or** :	$a \rightarrow (b \text{ or } c) \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \text{ or } (a \rightarrow c)$
Modifiziertes Distributivgesetz:	$(a \text{ or } b) \rightarrow c \quad (a \rightarrow c) \text{ and } (b \rightarrow c)$
Modifiziertes Distributivgesetz:	$(a \text{ and } b) \rightarrow c \quad (a \rightarrow c) \text{ or } (b \rightarrow c)$
Tauschgesetz für Vorderglieder:	$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow b \rightarrow (a \rightarrow c)$
Klammer-Änderungsgesetz für $\rightarrow$:	$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow (a \text{ and } b) \rightarrow c$

Bijunktionsgesetze

Kommutativität von $\leftrightarrow$:	$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \leftrightarrow a$
Assoziativität von $\leftrightarrow$:	$a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \Leftrightarrow (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c$
Umwandlung von $\leftrightarrow$ in **or** :	$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \text{ and } b) \text{ or } (\text{not } a \text{ and not } b)$
Umwandlung von $\leftrightarrow$ in **and** :	$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (\text{not } a \text{ or } b) \text{ and } (a \text{ or not } b)$
Darstellung von $\leftrightarrow$ mit $\rightarrow$:	$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \text{ and } (b \rightarrow a)$
Kontrapositionsgesetz für $\leftrightarrow$:	$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow \text{not } a \leftrightarrow \text{not } b$

Implikationen

ex falso quodlibet:	$0 \Rightarrow G$
ex quodlibet verum:	$G \Rightarrow 1$
Abschwächung der Konjunktion:	$(P \text{ and } Q) \Rightarrow P$
Abschwächung der Konjunktion:	$(P \text{ and } Q) \Rightarrow Q$
Schluß aus Disjunktion:	$P \Rightarrow (P \text{ or } Q)$
Schluß aus Disjunktion:	$Q \Rightarrow (P \text{ or } Q)$
Satz vom negierten Vorderglied:	$\text{not } A \Rightarrow (A \rightarrow B)$
Satz vom Hinterglied:	$B \Rightarrow (A \rightarrow B)$
Konjunktion impliziert Disjunktion:	$(A \text{ and } B) \Rightarrow (A \text{ or } B)$
Transitivität:	$(P \rightarrow Q) \text{ and } (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$
Gesetz der Fallunterscheidung:	$(A \text{ or } B) \text{ and } ((A \rightarrow C) \text{ and } (B \rightarrow C)) \Rightarrow C$