# 3. Aussagenlogik

## 3.1 Grundbegriffe

- Wahrheitswerte: 0 (F, falsch, false, fail)
  1 (T, wahr, true)

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Eine dritten Wahrheitswert gibt es nicht.

- Einige Operatoren/Funktoren der Art $f:\{0,1\}\times\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$ bzw. $f:\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$

| a | b | Konjunktion $a \wedge b$ | Disjunktion $a \vee b$ | Negation $\neg a$ | Implikation $a \rightarrow b$ | Äquivalenz $a \leftrightarrow b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 |

- Sprechweisen

| | |
|---|---|
| $a$ | es gilt *a*<br>*a* ist wahr |
| $\overline{a}$ | *a* gilt nicht<br>*a* ist nicht wahr<br>es gilt die Negation von *a*<br>es gilt das Gegenteil von *a*<br>es ist nicht so, daß *a* gilt<br>es gilt das Gegenteil von a |
| $a \wedge b$ | es gelten *a* und *b*<br>es gilt sowohl *a* als auch *b*<br>*a* und *b* gelten zugleich |
| $a \vee b$ | es gilt *a* oder *b*<br>es gilt *a* und/oder *b*<br>es gilt (wenigstens) eines von *a* und *b* |
| $a\overline{b} \vee \overline{a}b$ | es gilt entweder *a* oder *b*<br>es gilt genau eines von *a* und *b*<br>es gilt *a* exklusiv-oder *b*<br>*a* ist antivalent zu *b* |

| | |
|---|---|
| $a \to b$ | es gilt *b*, wenn *a* gilt<br>wenn *a* gilt, dann gilt auch *b*<br>wenn *a* gilt, so gilt auch *b*<br>aus a folgt b<br>a ist hinreichend für b<br>b ist notwendig für a<br>*a* impliziert *b* |
| $a \leftrightarrow b$ | *a* ist äquivalent zu *b*<br>*a* gilt genau dann, wenn *b* gilt<br>*a* gilt nur dann, wenn *b* gilt<br>*a* gilt dann und nur dann, wenn *b* gilt<br>wenn *a* gilt, dann gilt auch *b*, sonst (gilt *b*) nicht<br>*a* ist hinreichend und notwendig für *b* |

- Formeln/Ausdrücke der Aussagenlogik

$V = \{a,b,c, ...\}$ …. Menge der **Variablen**

Eine Variable steht nur für einen Wahrheitswert.

Eine **Belegung** $b$ ist eine Abbildung $b: V \to \{0,1\}$

Zeichenketten aus Wahrheitswerten, Variablen, Funktoren und Klammern, die gewissen Regeln genügen, gelten als **Formeln** (Ausdrücke) der Aussagenlogik.

Schreibweisen:

- Klammern dürfen unter Beachtung der Prioritäten der Funktoren weggelassen werden.

| Funktor | Priorität | Bem. | Trennung |
|---|---|---|---|
| Negation | 5 | Höchste Priorität | Schwächste Trennung |
| Konjunktion | 4 | | |
| Disjunktion | 3 | | |
| Implikation | 2 | | |
| Äquivalenz | 1 | Niedrigste Priorität | Stärkste Trennung |

- Sei *x* eine Formel: anstelle $\neg(x)$ darf $\overline{x}$ geschrieben werden

- Der Konjunktionsfunktor kann weggelassen werden, falls Missverständnisse ausgeschlossen sind.

- Interpretation einer Formel

  Bei gegebener Formel und Belegung kann der Formel ein Wahrheitswert zugeordnet werden. Die Zuordnung erfolgt anhand der Definition der Funktoren unter Beachtung der Klammerung bzw. Prioritäten.

  $Wert\text{: } Menge\_der\_Formeln \times Menge\_der\_Belegungen \rightarrow \{0,1\}$

| Begriff | Definition, Erläuterung |
|---|---|
| Formel *z* ist **erfüllbar** | Es gibt eine Belegung *b*, so dass *Wert(z,b)* wahr ist. |
| Formel *z* ist **allgemeingültig** (**Tautologie**, **Identität, Satz**) | Für jede Belegung *b* gilt, dass *Wert(z,b)* wahr ist. |
| Formel *z* heisst **Widerspruch** (**Kontradiktion**) | *z* ist nicht erfüllbar |

- Einige allgemeingültige Formeln

| | |
|---|---|
| $a(a \rightarrow b) \rightarrow b$ | Abtrennregel, Modus ponens |
| $(a \rightarrow b)\overline{b} \rightarrow \overline{a}$ | |
| $b(\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow a$ | Indirekte Beweismethode |
| $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$ | Kettenschluß |
| $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\overline{b} \rightarrow \overline{a})$ | Kontraposition |
| $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ | regula versi |
| $\overline{a} \rightarrow (a \rightarrow b)$ | regula falsi |
| $(a \rightarrow b)(\overline{a} \rightarrow b) \rightarrow b$ | Exhaustionseffekt |
| $(a \rightarrow b)(a \rightarrow \overline{b}) \rightarrow \overline{a}$ | reductiv ad absurdum |

- Konstruktionsregeln für allgemeingültige Formeln

(1) Es sei eine Menge von allgemeingültigen Formeln gegeben. Diese Menge nennt man Axiomensystem.

(2) Sei *z* eine allgemeingültige Formel, die die Variable *v* enthält. Weiterhin sei *x* eine beliebige Formel.

Ersetzt man die Variable *v* an **allen** Stellen in *z* durch die Formel *(x)*, dann entsteht eine allgemeingültige Formel.

(Einsetzungsregel)

(3) Sei $x \leftrightarrow y$ eine allgemeingültige Formel und *z* eine beliebige Formel.

Kommt in *z* die Teilformel *(x)* vor und man ersetzt diese an **einer** Stelle durch die Teilformel *(y)*, dann entsteht eine Formel *z'*. Folgende Formel ist dann auch allgemeingültig: $z \leftrightarrow z'$

(Ersetzungsregel)

- Beispiel eines Axiomensystems (Umformungsdregeln)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{0} = 1$ | $\overline{1} = 0$ | | |
| $\overline{\overline{a}} = a$ | | | |
| $0a = 0$ | $1a = a$ | $aa = a$ | $\overline{a}a = 0$ |
| $0 \vee a = a$ | $1 \vee a = 1$ | $a \vee a = a$ | $\overline{a} \vee a = 1$ |
| $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$ | $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a)$ | | |
| $ab = ba$ | $a \vee b = b \vee a$ | $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a$ | |
| $(ab)c = a(bc)$ | $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ | | |
| $(a \vee b)c = ac \vee bc$ | $(ab) \vee c = (a \vee c)(b \vee c)$ | | |
| $\overline{a \vee b} = \overline{a}\overline{b}$ | $\overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$ | | |

Hinweis: Anstelle des Gleichheitszeichens ist der Äquivalenzoperator zu lesen.

- Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit.

  Mit Hilfe der obigen Konstruktionsregeln können **nur** allgemeingültige Formeln abgeleitet werden (**Widerspruchsfreiheit** des Aussagenkalküls).

  Mit Hilfe des obigen Axiomensystems können **alle** allgemeingültigen Formeln mit Hilfe der Konstruktionsregeln abgeleitet werden (**Vollständigkeit** des Aussagenkalküls).

  Hinweis: Falls eine allgemeingültige Formel $z$ nicht die Gestalt $x \leftrightarrow y$ hat, dann ist die Formel $z \leftrightarrow 1$ ableitbar.

- Entwicklungssatz

  $$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \overline{x_1} \wedge f(0, x_2, x_3, \cdots x_n) \vee x_1 \wedge f(1, x_2, x_3, \cdots x_n)$$

  *(n>0)*

### 3.2 Normalformen

Eine aussagenlogische Formel $A$ heißt **verneinungstechnische Normalform** genau dann, wenn

(1) A=0 oder A=1 oder
(2) Die Wahrheitswerte und die Funktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ kommen in A nicht vor und der Funktor $\neg$ steht höchstens unmittelbar vor Variablen.

Bsp.: $(a \vee b) \wedge \left(b \wedge \overline{d} \vee (a \vee c) \wedge \overline{b}\right)$

Eine aussagenlogische Formel $A$ heißt **Fundamentalkonjunktion** genau dann, wenn sie nur eine Konjunktion von paarweise verschiedenen negierten oder nichtnegierten Variablen besteht.

Bsp.: $a \wedge \overline{b} \wedge c$

Eine aussagenlogische Formel $A$ heißt **Disjunktive Normalform** (DNF) genau dann, wenn
(1) $A= 0$ oder $A=1$ oder
(2) $A$ ist nur eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Fundamentalkonjunktionen

Bsp.: $\overline{a} \wedge b \wedge d \vee \overline{b} \wedge c \vee a \wedge \overline{c} \wedge \overline{d}$

Sei *V* eine endliche Menge von Variablen und *R* eine totale Ordnung über *V*.
Eine aussagenlogische Formel *A* heißt **Elementarkonjunktion zu einer Menge *V* von Variablen** genau dann, wenn sie eine Konjunktion aller dieser Variablen (negiert oder unnegiert) ist und die Variablen genau in der von der Ordnung R gegebenen Reihenfolge notiert sind.

Bsp.: *V={a,b,c}* .... Menge von Variablen
*R* .... alphabetische Ordnung in *V* (a<b<c)
$a \wedge \overline{b} \wedge c$ .... Elementarkonjunktion zu *V*

**Bemerkung**: Eine Elementarkonjunktion ist nur für genau eine Belegung wahr.

**Beispiel einer totalen Ordnung in der Menge von Elementarkonjunktionen über einer Menge von Variablen**:

(1) Man ordnet jeder negierten Variable die Ziffer 0 und jeder nichtnegierten variable die Ziffer 1 zu. Diese Ziffern zu einer Elementarkonjunktion *z* werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Dualzahl *dual(z)* zusammengefasst.

Bsp.: $dual(a \wedge \overline{b} \wedge c)=101$

(2) S= $\{(x, y) : (dual(x) \leq dual(y)\}$ ist eine Totale Ordnungsrelation in der Menge der Elementarkonjunktionen.

Sei *V* eine endliche Menge von Variablen und *S* eine totale Ordnung über der Menge aller Elementarkonjunktionen über *V*.
Eine aussagenlogische Formel *A* heißt **Kanonisch Disjunktive Normalform** (KDNF) genau dann, wenn

(3) *A= 0* oder *A=1* oder
(4) *A* ist nur eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Elementarkonjunktionen über *V*, wobei diese genau in der von der Ordnung *S* gegebenen Reihenfolge notiert sind.

Bsp.: .: $V=\{a, b, c\}$ .... Menge von Variablen
*R* .... alphabetische Ordnung in *V* (a<b<c)

$S$ .... Beispielsordnung in der Menge der Elementarkonjunktionen (s.o.)

$\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c} \vee \overline{a} \wedge b \wedge c \vee a \wedge b \wedge \overline{c}$ .... Kanonisch disjunktive Normalform

Analog seien definiert:

**Fundamentaldisjunktion**,
Bsp.: $\left(a \vee \overline{c}\right)$

**konjunktive Normalform (KNF)**,
Bsp.: $\left(a \vee \overline{c}\right) \wedge \left(a \vee \overline{b} \vee \overline{d}\right)$

**Elementardisjunktion über einer Menge von Variablen**,
Bsp.: $V=\{a,b,c\}$,
$\left(a \vee \overline{b} \vee c\right)$
Bemerkung: Eine Elementardisjunktion ist nur für genau eine Belegung falsch.

**Totale Ordnung in der Menge der Elementardisjunktionen**
Bsp.: $\left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right) \leq \left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c\right)$

**Kanonisch konjunktive Normalform (KKNF)**
Bsp.: $\left(a \vee \overline{b} \vee c\right) \wedge \left(a \vee b \vee c\right)$

**Satz**
Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine (semantisch) äquivalente
- verneinungstechnische Normalform
- disjunktive Normalform
- kanonisch disjunktive Normalform
- konjunktive Normalform
- kanonisch konjunktive Normalform

**Satz**
Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es genau eine kanonisch disjunktive Normalform und genau eine kanonisch konjunktive Normalform.

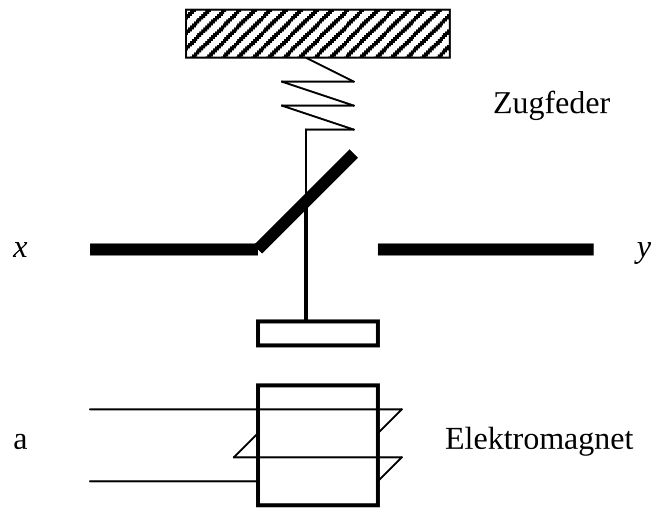
## 3.3 Anwendungen der Aussagenlogik

Repräsentantentheorem
Jede Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit n>0 kann mit einer aussagenlogischen Formel dargestellt werden, die nur die Funktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthält.

### 3.3.1 Kontaktschaltungen

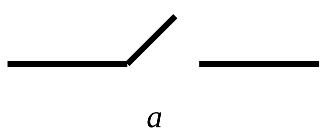
Eine (elektrische) **Kontaktschaltung** besteht aus Ruhe- oder Arbeitskontakten oder (elektrisch) leitenden Verbindungen.

**Arbeitskontakt:**

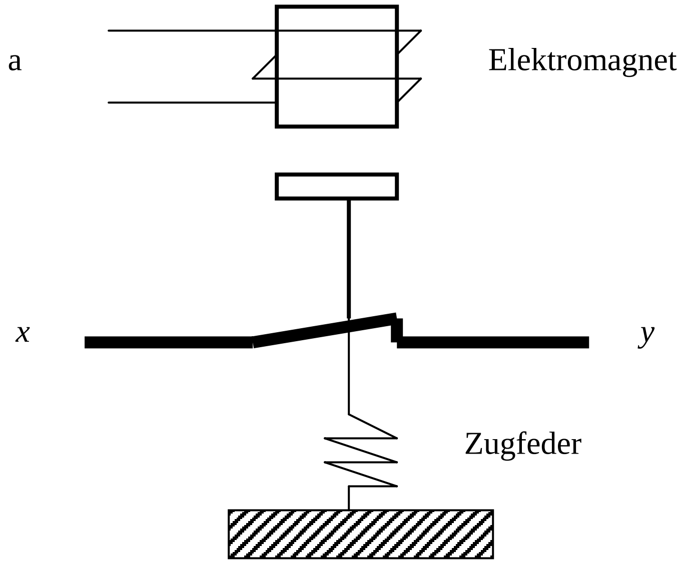



Nur solange der Elektromagnet eingeschaltet ist (d.h. $a=1$ gilt), ist die Verbindung zwischen $x$ und $y$ elektrisch leitend (sonst: nicht leitend).

Symbol:

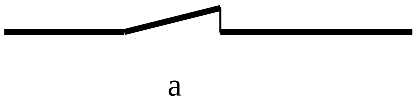


**Ruhekontakt**



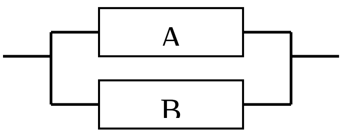

Nur solange der Elektromagnet eingeschaltet ist (d.h. $a=1$ gilt), ist die Verbindung zwischen $x$ und $y$ elektrisch nicht leitend (sonst: leitend).

Symbol:

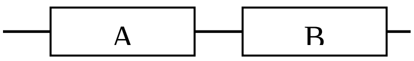



Definition der **Reihenparallelschaltungen (RPS)**:

(0) Leitende und nichtleitende Verbindungen sind (triviale) RPS.
(1) Ruhe- und Arbeitskontakte sind RPS.
(2) Wenn $A$ und $B$ RPS sind, dann sind es auch die Schaltungen




und




(3) Eine Schaltung heißt genau dann Reihenparallelschaltung, wenn sie dies auf grund von (0) oder (1) oder (2) ist.

Satz

> Zu jeder Reihenparallelschaltung gibt es eine verneinungstechnische Normalform, die genau dann wahr ist, wenn die Reihenparallelschaltung elektrisch leitend ist. Zu jeder verneinungstechnischen Normalform gibt es eine Reihenparallelschaltung, die genau dann elektrisch leitend ist, wenn die verneinungstechnische Normalform wahr ist.

### 3.3.2 Halbleiterschaltungen

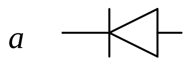
Ein Halbleiterschaltung setzt sich aus sogenannten Grundelementen zusammen , die aus Dioden, Transistoren und elektrischen Widerständen bestehen.

Ausgewählte Spannungen werden den logischen Werten zugeordnet:

Beispiel:

| Spannung in Volt | Spannungssymbol | Wahrheitswert |
|---|---|---|
| 0 | + | 1 |
| -1 | - | 0 |

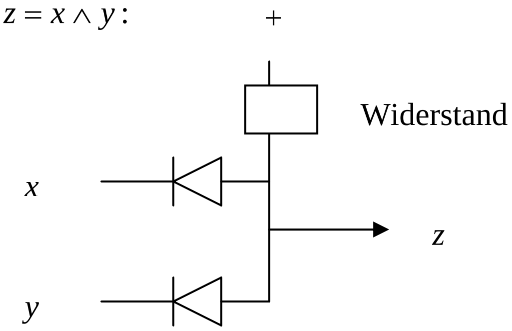
Diode:




Diode ist nur elektrisch leitend, wenn bei *a* negative Spannung anliegt.

<u>Einige wichtige Grundelemente:</u>

- **Konjunktion** $z = x \wedge y$:

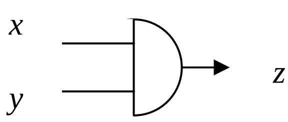


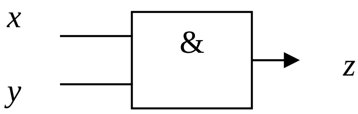

Dioden

Wertetafel zur Konjunktionsschaltung :

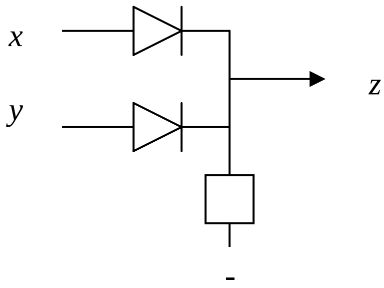
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $z$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | - | - | 0 |
| 0 | 1 | - | + | - | 0 |
| 1 | 0 | + | - | - | 0 |
| 1 | 1 | + | + | + | 1 |

Schaltungssymbole:

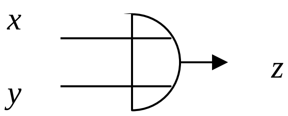


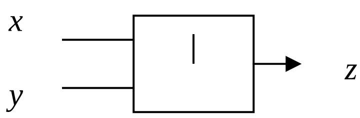




- **Disjunktion** $z = x \vee y$:

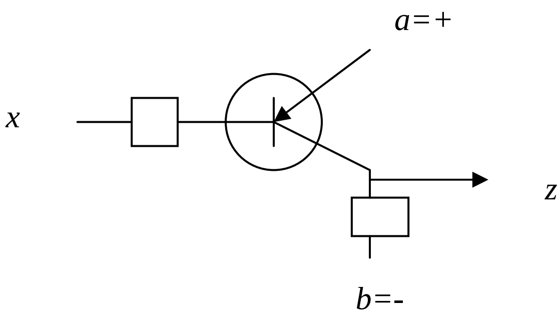



Schaltungssymbole :



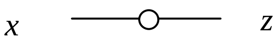




- **Negation** $z = \overline{x}$:

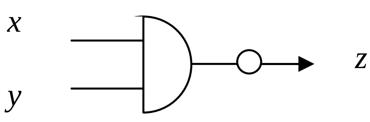



Transistor ist nur elektrisch leitend zwischen *a* und *b*, wenn bei *x* eine negative Spannung anliegt

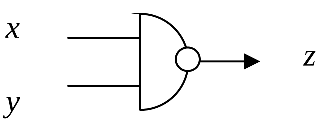
Schaltungssymbol:



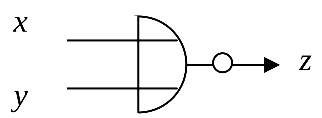

- **Nand** $z = \overline{x \wedge y}$:



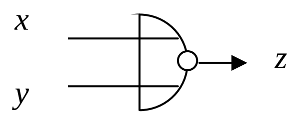

Schaltungssymbol:



- **Nor** $z = \overline{x \vee y}$ :




Schaltungssymbol:




Hinweis: Es gibt noch weitere Grundelemente und weitere Schaltungssymbole.

Satz

Jeder Halbleiterschaltung (aus obigen Grundelementen) kann eine verneinungstechnische Normalform zugeordnet werden, die genau dann wahr ist, wenn die Halbleiterschaltung elektrisch leitend ist. Jeder verneinungstechnischen Normalform kann eine Halbleiterschaltung (aus obigen Elementen) zugeordnet werden, die genau dann elektrisch leitend ist, wenn die Normalform wahr ist.

### 3.3.3 Morphologische Operationen für Binärbilder

Sei $B = \{0,1,2,\cdots 511\} \times \{0,1,2,\cdots 511\}$ ein **Bildbereich** und *G={0,1}* eine Menge von **Farben**. Die Farbe *schwarz* sei mit *0* und *weiß* mit *1* codiert.
Eine Abbildung $s : B \to \{0,1\}$ nennt man **Binärbild** über *B*.
Mit *U(b)* sei eine Menge aller **Nachbarpunkte** zum Punkt *b* gemeint. Dies kann z.B. die Menge aller unmittelbar neben *b* liegenden Bildpunkte sein ($U(b) \subseteq B$).

Zur Bildverbesserung im Sinne von z.B.

- Elimination von isolierten weißen oder schwarzen Punkten
- Schließen von zerklüfteten Linien
- Verdünnen von Linien

werden häufig Operatoren zur Dilatation und Erosion eingesetzt. Diese können mittels logischer Operatoren definiert werden:

- **Dilatation/Ausdehnung**

$$s'(b) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } b \in B \textit{ und wenigstens ein Nachbarpunkt weiß ist} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad (b \in B)$$

Es gilt

$$\boxed{s'(b) = \bigvee_{c \in U(b)} s(c)} \quad \text{für jedes } b \in B.$$

- **Erosion**

$$s'(b) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } b \in B \textit{ und alle Nachbarpunkte weiß} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad (b \in B)$$

Es gilt

$$\boxed{s'(b) = \bigwedge_{c \in U(b)} s(c)} \text{ für jedes } b \in B.$$

### 3.4 Vereinfachen von aussagenlogischen Formeln

Eine disjunktive Normalform heißt **minimale disjunktive Normalform** genau dann, wenn es nicht möglich ist, die Formel auf folgende Weise (ohne Bedeutungsänderung) zu vereinfachen:

- Weglassen einer Fundamentalkonjunktionen oder
- Weglassen einer Variablen in einer Fundamentalkonjunktion oder
- Ersetzen einer Variablen durch einen Wahrheitswert.

Eine Fundamentalkonjunktion *p* heißt **Primimplikand** einer aussagenlogischen Formel *y* genau dann, wenn

(1) die Implikation $p \to y$ gilt und

(2) in *p* kann keine Variable (negiert oder unnegiert) entfernt werden, ohne die Eigenschaft (1) zu verletzen.

Bsp.: $y = a \vee \overline{a} \wedge \overline{b}$

$\overline{a} \wedge \overline{b}$ .... kein Primimplikand

$a$ .... Primimplikand

Minimale disjunktive Normalform: $a \vee \overline{b}$

<u>**Verfahren zur Ermittlung der Primimplikanden und minimaler Normalformen:**</u>

Es gibt mehrere Verfahren zur Ermittlung der Primimplikanden und damit zur Konstruktion der minimalen disjunktiven Normalformen (Bspe):

- Aiken'sche Normalisierungstabelle,
- Schablonenmethode
- McCluskey-Verfahren
- **Karnaugh-Tafel**

**Verfahren mit der Karnaugh-Tafel**

(1) Die Wertetabelle zur gegebenen Formel *y* wird als 2D-Tabelle dargestellt, wobei (entsprechend den zyklischen Gray-Codes) sich jeweils nur eine Dualziffer beim Übergang von einer Belegung zu einer unmittelbar benachbarten Belegung ändert.
Bsp.:

0000
0001
0011
0010
0110
0111
0101
0100
1100
1101
1111
1110
1010
1011
1001
1000

| | c | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | d \ b | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | | | | |

(2) Ablesen der Primimplikanden aus der Wertetabelle:
- Bilden von maximalen rechteckigen Bereichen in denen nur *1*en stehen, wobei aber nur die Seitenlängen 1,2, 4, 8, 16 zugelassen sind. Man beachte, dass gegenüberliegende Seiten der Wertetabelle als benachbart zu betrachten sind.
- Zu jedem dieser Rechtecke wird eine Fundamentalkonjunktion gebildet, die nur für die zugehörigen Belegungen wahr ist. Diese Fundamentalkonjunktionen sind Primimplikanden.

(3) Man verknüpft disjunktiv nur soviel der Primimplikanden, so dass gerade alle *1*en der Wertetabelle durch die zugehörigen Rechtecke überdeckt werden. (Es können mehrere disjunktive Normalformen existieren, auch wenn man die Reihenfolge der Primimplikanden nicht beachtet.)

Bsp.: $y = a \vee \overline{a} \wedge \overline{b}$

(1) Spezielle Wertetabelle aufstellen:

| a \ b | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

(2) Rechtecke von *1*en bilden und Primimplikanden zuordnen:

| a \ b | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Zugehöriger Primimplikand: $\overline{b}$

| a \ b | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Zugehöriger Primimplikand: $a$

(2) Minimale disjunktive Normalform: $a \vee \overline{b}$

Bsp.: $y = \overline{a}\left(\overline{b}d \vee c\overline{d} \vee \overline{c}d\right) \vee b\left(c\overline{d} \vee \overline{c}d\right) = \overline{a}\,\overline{b}d \vee \overline{a}c\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{c}d \vee bc\overline{d} \vee b\overline{c}d$

Primimplikanden:
$\overline{a}\,\overline{c}d$
$\overline{a}\,\overline{b}c$
$\overline{a}\,\overline{b}d$
$\overline{a}c\overline{d}$
$b\overline{c}d$
$bc\overline{d}$

Minimale disjunktive Normalformen:

$$y = b\overline{c}d \vee \overline{a}\,\overline{b}d \vee \overline{a}c\overline{d} \vee bc\overline{d}$$

$$y = b\overline{c}d \vee \overline{a}\,\overline{b}d \vee \overline{a}\,\overline{b}c \vee bc\overline{d}$$

$$y = b\overline{c}d \vee \overline{a}\,\overline{c}d \vee \overline{a}\,\overline{b}c \vee bc\overline{d}$$

Weitere Vereinfachungen/Umformungen führen z.B. zu:

$$y = b\left(\bar{c}d \vee c\bar{d}\right) \vee \bar{a}\bar{b}(c \vee d)$$

$$y = b\left(\overline{c \leftrightarrow d}\right) \vee \overline{(a \vee b)}(c \vee d)$$

## 3.5 Weitere logische Operatoren

Definition aller logischer Funktionen der Art $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$:

| a | b | f0 | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 | f6 | f7 | f8 | f9 | f10 | f11 | f12 | f13 | f14 | f15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Es gelten:

$$f_1(a,b) = a \wedge b$$
$$f_3(a,b) = a$$
$$f_6(a,b) = \bar{a} \wedge b \vee a \vee \bar{b} = \overline{a \leftrightarrow b} = a \text{ exclusivoder } b = xor(a,b) = a \text{ xor } b = a \text{ antivalent } b$$
$$f_7(a,b) = a \vee b$$
$$f_8(a,b) = \overline{a \vee b} = nor(a,b) = a \text{ nor } b$$
$$f_9(a,b) = a \leftrightarrow b$$
$$f_{12}(a,b) = \bar{a}$$
$$f_{13}(a,b) = a \to b$$
$$f_{14}(a,b) = \overline{a \wedge b} = nand(a,b) = a \text{ nand } b$$

Weitere nützliche Äquivalenzen/Umformungsregeln:

$$a = (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$$
$$a = (a \wedge b) \vee (a \vee \bar{b})$$
$$a \vee \bar{a} \wedge b = a \vee b$$
$$\bar{a} \vee a \wedge b = \bar{a} \vee b$$
$$a \to b = \bar{b} \to \bar{a}$$
$$\bar{a} = a \to 0$$
$$a = 1 \to b$$
$$a \to b \vee c = (a \to b) \vee c$$

Weitere nützliche allgemeingültige Formeln:

$$a \to a \vee b$$
$$a \wedge b \to a$$
$$a \wedge b \vee c \to a \vee c$$
$$a \wedge b \to (a \vee c) \wedge b$$

Man beachte evtl. Unterschiede zwischen Umgangssprache und Logik (vgl. auch Prädikatenlogik, z. B.):

| Umgangssprache | Gegenteil in der Umgangssprache | logisches Gegenteil, Negation |
|---|---|---|
| immer | niemals | manchmal nicht,<br>nicht in jedem Falle |
| jeder | keiner | nicht jeder, |
| alle | niemand | nicht alle,<br>mindestens ein |

# 4. Prädikatenlogik

## 4.1 Formeln der Prädikatenlogik (1. Stufe)

- **Erweiterungen gegenüber der Aussagenlogik**:

$I$ .... Menge von **Individuen** (**Individuenbereich**)
$K$ .... Menge von Symbolen für die Individuen
$V$ .... Menge von **Variablen**
$F$ .... Menge von Symbolen für **Operatoren** in $I$, d.h. es gibt für jedes dieser Symbole $f$ eine natürliche Zahl $n$ und eine Abbildung $f : I^n \rightarrow I$ .
$P$ .... Menge von Symbolen für die **Prädikate** in $I$, d.h. für jedes dieser Symbole $p$ gibt es eine natürliche Zahl $n$ und einen Abbildung $p : I^n \rightarrow \{0,1\}$.

Eine Variable steht für ein Individuum.
Es gibt auch **Quantoren** (s. u.)

- **Basisterme**

(1) Jede Variable und jede Konstante $k \in K$ ist ein Basisterm.
(2) Sind $z_1, z_2, \cdots z_n$ Basisterme und ein $f$ ein Operationssymbol mit der zugeordneten natürlichen Zahl $n$ , dann ist die Zeichenkette $f( z_1, z_2, \cdots z_n )$ auch ein Basisterm.
(3) Eine Zeichenkette ist nur dann ein Basisterm, wenn sie dies auf grund von (1) oder (2) ist.

- **Formeln der Prädikatenlogik**

(1) Ist $p$ ein Symbol für ein Prädikat und $n$ die zugeordnete natürliche Zahl und $z_1, z_2, \cdots z_n$ sind Basisterme, dann ist $p( z_1, z_2, \cdots z_n )$ eine prädikatenlogische Formel.
(2) Sind $z_1, z_2$ Basisterme, so ist $z_1 = z_2$ eine prädikatenlogische Formel.
(3) Sind $x$ und $y$ prädikatenlogische Formeln, dann sind es auch die Zeichenketten $\neg(x), (\mathrm{x} \wedge y), (x \vee y), (x \rightarrow y), (x \leftrightarrow y)$ .
(4) Sei $x$ eine prädikatenlogische Formel und $v$ eine Variable. Falls in $x$ keine der Teilzeichenketten $\exists v$ und $\forall v$ vorkommt, dann sind die Zeichenketten $\exists v\ (x)$ und $\forall v\ (x)$ prädikatenlogische Formeln.
(5) Eine Zeichenkette ist nur dann eine prädikatenlogische Formel, wenn sie dies auf grund von (1), (2), (3) oder (4) ist.

Bei der **Schreibweise** sind die gleichen Vereinfachungen bzw. Abkürzungen bzw. Prioritäten wie bei den aussagenlogischen Formeln zulässig und üblich.

## 4.2 Eigenschaften prädikatenlogischer Formeln

- **Bezeichnungen der Quantoren**
  $\forall$ …. Allquantor, Generalisator
  $\exists$ …. Existenzquantor, Partikularisator

- **Belegung**, **Erfüllbarkeit** und **Allgemeingültigkeit** (**Identität**, **Tautologie**) sind analog zur Aussagenlogik definiert.

- **Zusätzlich:**

  (1) Eine Formel der Gestalt $\forall x(H)$ heißt genau dann allgemeingültig, wenn *H* allgemeingültig ist.

  (2) Eine Formel der Gestalt $\exists x(H)$ heißt genau dann allgemeingültig, wenn es für *x* ein Individuum gibt, so dass *H ’* allgemeingültig ist. *H’* entsteht aus *H*, indem an allen Stellen *x* durch das betreffende Individuum ersetzt wird.

- **Sprechweisen:**

| | |
|---|---|
| $\exists a(H)$ | es gibt/existiert ein (Inividuum) *a*, so daß *H* gilt<br>es gibt/existiert mindestens ein Individuum *a*, so dass *H* gilt |
| $\overline{\exists a(H)}$ | es gibt kein (Individuum) *a*, so dass *H* gilt<br>für kein (Individuum) *a* gilt *H* |
| $\forall a(H)$ | für alle (Individuen) *a* gilt *H*<br>für jedes (Individuum) *a* gilt *H* |
| $\overline{\forall a(H)}$ | nicht für alle (Individuen) *a* gilt *H*<br>nicht für jedes (Individuum) *a* gilt *H* |

- **Gebunden und frei vorkommende Variable**
  Falls in der (Teil-)Formel *H* eine Variable *x* vorkommt, dann heißt sie in den Formeln $\forall x(H)$ und $\exists x(H)$ **gebunden vorkommend**. Eine nicht in einer Formel der Gestalt $\forall x(H)$ oder $\exists x(H)$ gebunden vorkommende Variable heißt innerhalb dieser Formel **frei vorkommend**.

  Bsp.: $\exists x\left(x^2 + ax + b = 0\right)$
  *x* …. gebunden vorkommend
  *a* …. frei vorkommend
  *b* …. frei vorkommend

## 4.3 Ableitregeln für allgemeingültige Formeln

- Die **Einsetzungsregel** der Aussagenlogik gilt auch in der Prädikatenlogik, allerdings mit einer Einschränkung:

| |
|---|
| Falls eine Variable gebunden vorkommt, dann darf für sie höchsten eine Variable eingesetzt werden, die in der Formel **überhaupt noch nicht** vorkommt. |

- Die **Ersetzungsregel** der Aussagenlogik gilt auch in der Prädikatenlogik

- Weitere spezielle Schlussregeln:

(1) **Abtrennregel**

Wenn die Formeln $H$ und $H \rightarrow G$ allgemeingültig sind, dann ist es auch die Formel $G$.

**(2) Vordere Generalisierung**
Wenn die Formel $H \rightarrow G$ allgmeingültig ist, dann ist auch die Formel $(\forall x(H)) \rightarrow G$ eine allgemeingültige Formel.

**(3) Hintere Partikularisierung**

Wenn die Formel $H \rightarrow G$ allgemeingültig ist, dann ist auch die Formel $H \rightarrow (\exists x(G))$ eine allgemeingültige Formel.

## 4.4 Rechenregeln /Identitäten

Vor.: In $H_1, H_2, H$ sind die Variablen $x$ und $y$ höchstens ohne Quantoren enthalten. $H^*$ enthalte die Variable $x$ nicht.

- **Einfache allgemeingültige Ausdrücke:**

$$H(x) \rightarrow H(x)$$
$$\forall x\big(H(x)\big) \rightarrow \exists x\big(H(x)\big)$$
$$\forall x H^* = H^*$$
$$\exists x H^* = H^*$$

- **Quantorenvertauschung:**

$$\forall x \forall y\ H = \forall y \forall x\ H$$
$$\exists x \exists y\ H = \exists y \exists x\ H$$
$$\exists x \forall y\ H \to \forall y \exists x\ H$$

- **Quantorenverteilung:**

$$\forall x\left(H_1 \wedge H_2\right) = \left(\forall x\ H\right)_1 \wedge \left(\forall x\ H_2\right)$$
$$\left(\forall x\ H_1\right) \vee \left(\forall x\ H_2\right) \to \forall x\left(H_1 \vee H_2\right)$$
$$\exists x\left(H_1 \vee H_2\right) = \left(\exists x\ H_1\right) \vee \left(\exists x\ H_2\right)$$
$$\exists x\left(H_1 \wedge H_2\right) \to \left(\exists x\ H_1\right) \wedge \left(\exists x\ H_2\right)$$

- **DeMorgan:**

$$\exists x\ \overline{H} = \overline{\forall x\ H}$$
$$\forall x\ \overline{H} = \overline{\exists x\ H}$$

- **Quantorenverschiebung:**

$$\forall x\left(H \wedge H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \wedge H^*$$
$$\forall x\left(H \vee H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \vee H^*$$
$$\forall x\left(H \to H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \to H^*$$
$$\forall x\left(H^* \to H\right) = H^* \to \left(\forall x\ H\right)$$

$$\exists x\left(H \wedge H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \wedge H^*$$
$$\exists x\left(H \vee H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \vee H^*$$
$$\exists x\left(H \to H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \to H^*$$
$$\exists x\left(H^* \to H\right) = H^* \to \left(\exists x\ H\right)$$

- **Auflösen der Quantoren bei endlichen Individuenbereichen:**

Seien $I = \{x_1, x_2, \cdots n_n\}$ der Individuenbereich (*n>0*) und H eine Formel. Dann gelten:

$$\forall x(H) = H(x_1) \wedge H(x_2) \wedge \cdots H(x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} H(x_i)$$ und

$$\exists x(H) = H(x_1) \vee H(x_2) \vee \cdots H(x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} H(x_i)$$

- **Auflösen der Quantoren bei Einschränkung des Individuenbereiches auf die Wahrheitswerte:**

Seien $I = \{0,1\}$ der Individuenbereich (*n>0*) und H eine Formel. Dann gelten:

$\forall x(H) = H(0) \wedge H(1)$ und

$\exists x(H) = H(0) \vee H(1)$

**Man beachte:**

Bei Anwendungen möchte man sich oft nicht auf den gesamten Individuenbereich *I*, sondern nur auf eine Teilmenge $M \subseteq I$ beziehen. Deshalb benutzt man in der Literatur folgende Schreibweisen:

$\forall x \in M(H)$ bzw. $\forall_{x \in M}(H)$ anstelle von $\forall x(x \in M \rightarrow (H))$
$\exists x \in M(H)$ bzw. $\exists_{x \in M}(H)$ anstelle von $\exists x(x \in M \wedge (H))$

### 4.5 Weitere Quantoren

In der Literatur werden weitere prädikatenlogische Quantoren definiert und verwendet (Bspe.: $\exists!\, x(H)$, $\exists!!\, x(H)$, $\iota x(H)$).

### 4.6 Prädikatenlogik 2. Stufe

Die Prädikatenlogik 1.Stufe wird wie folgt erweitert:

Variable stehen nicht nur für Individuen sondern auch für Prädikate und Operatoren.

Bsp.: $\forall p\big(\exists x \forall y\big(p(x.y)\big) \rightarrow \forall y \exists x\big(p(x,y)\big)\big)$