Hochschule für
Technik und Wirtschaft
Dresden
University of Applied Sciences

Fakultät
Informatik und Mathematik

Script zur Vorlesung

Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2015

Hinweis: Das folgende Material geht auf die Mitschrift des Studenten Markus Söhnel zu der für den Studiengang „Wirtschaftsinformatik“an der HTW Dresden gehaltenen Vorlesung “Wirtschaftsmathematik“ zurück. Es fasst alle Inhalte der Vorlesung ohne Anspruch auf Vollständigkeit und Fehlerfreiheit zusammen.

Autor: Markus Söhnel
s74639@htw-dresden.de

Letzte Aktualisierung: 29. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1 Mengen und Mengenkalkül

Definition
Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Darstellung von Mengen

- Explizit, d.h. durch Aufzählung aller Elemente $\longrightarrow \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$

  z.B. $\{2, 4, 6, 8\}$

- Implizit, d.h. mittels eines definierenden Ausdruckes $A \longrightarrow \ \{x \ | \ A(X)\}$

  z.B. $\{x \ | \ x$ ist gerade Zahl und kleiner als 10$\}$

1. Eine Menge ist immer auf eine Grundgesamtheit bezogen, aus der die Elemente der Menge stammen.
   Bezeichnung M, Ω, S, X
2. Eine Menge die kein Element enthält, heißt leere Menge
   Bezeichnung $\emptyset$

Wichtig
Bei expliziten Darstellungen spielt die Reihenfolge der Darstellung keine Rolle. Auch die Anzahl des Auftretens eines Elements ist irrelevant.

Bsp:

- $\{4, 6, 2, 8\}$ und $\{2, 4, 6, 8\}$ stellen die selbe Menge dar
- $\{2, 2, 4, 6, 6, 6, 8, 8\}$ und $\{2, 4, 6, 8\}$ stellen die selbe Menge dar

Definition
Jedes Objekt einer Menge wird Element genannt
Bezeichnung

$$x \in A$$

1.1 Häufig vorkommende Mengen in der Mathematik

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x$ ist rationale Zahl, d.h. darstellbar als $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in Z\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x$ ist reelle Zahl$\}$

Definition

1. A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
   Bezeichnung $A \subset B$
2. Zwei Mengen A und B sind gleich wenn $A \subset B$ und $B \subset A$
   Bezeichnung $A = B$
3. A heißt echte Teilmenge von B, falls $A \subset B$ aber $B \neq A$
   Bezeichnung $A \subsetneq B$

Bsp:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. $\{2, 4, 6, 8\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10$ und x ist gerade$\}$

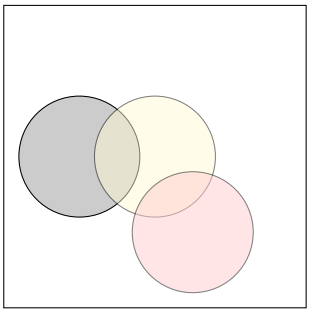
Bezeichnung Durchstreichen eines Mengenvergleichsoperators bzw. des Elementoperators bedeutet, dass diese Beziehung nicht gilt.

- $A \not\subset B$ A ist nicht Teilmenge von B
- $A \neq B$ A ist nicht gleich B
- $x \notin A$ x ist kein Element von A

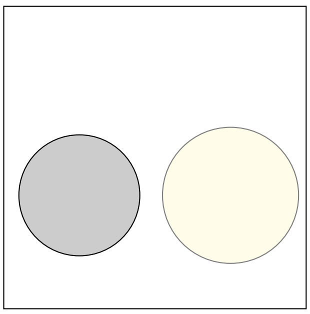
Bsp:

- $\mathbb{N}_0 \not\subset \mathbb{N}$
- $0 \notin \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}_0 \not\mathbb{N}$

Grafische Darstellung von Mengenbeziehungen im Venn-Diagramm



Definition
Zwei Mengen A und B heißen disjunkt wenn kein Element von A zu C gehört und kein Element von B zu A gehört.



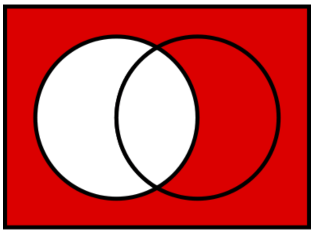
Bsp:

- $A = \{2, 4, 6, \}$
- $B = \{1, 3, 5\}$
  $\rightarrow A$ und B sind disjunkt

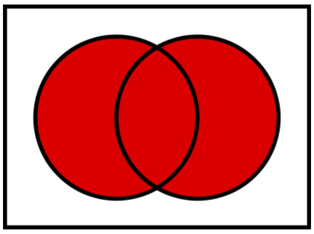
1.2 Grundlegende Mengenverknüpfungen

Vereinigung (Mengen-Oder)	$A \vee B := \{x \mid x \subseteq A$ oder $x \in B\}$
Durchschnitt (Mengen-Und)	$A \wedge B := \{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B := \{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$
Komplement	$\overline{A} := \{x \mid x \notin A\}$

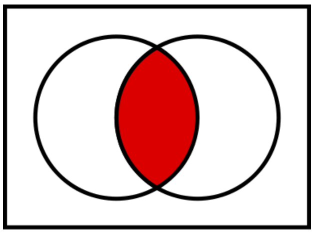
- Komplement $\overline{A} \rightarrow$ auch A^C



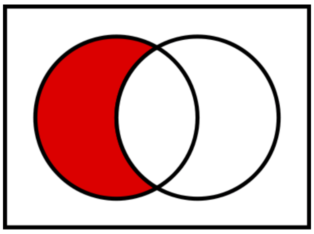
- Vereinigung $A \cup B$



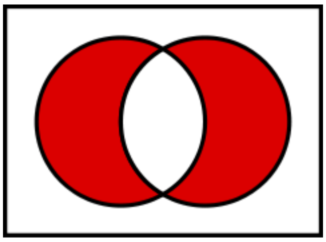
- Durchschnitt $A \cap B$



- Differenz $A \setminus B \equiv A \cap \overline{B}$



- Symmetrische Differenz $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  $= \{x \in M \;\mid$ Entweder $x \in A$ oder $x \in B\}$



Bsp:
$M = \mathbb{N}_0$

- $A = \{x \mid x$ ist gerade$\}$
- $B = \{x \mid x \leq 5\}$
- $\overline{A} = \{x \mid x$ ist ungerade$\}$
- $\overline{B} = \{x \mid x \geq 5\}$
- $A \cup B = \{x \mid$ gerade oder $x \leq 5\}$
  $= \{0, 1, 2, 3, 4, , 6, 8, 10, 12, \dots\}$
- $A \cap B = \{x \mid x$ ist gerade und $x \leq 5\}$
  $= \{0, 2, 4\}$
- $A \setminus B = \{x \mid x$ ist gerade aber nicht $x \leq 5\}$
  $\equiv A \cap \overline{B} = \{x \mid x$ ist gerade und $x \geq 5\}$
  $= \{6, 8, 10, 12, \dots\}$
- $B \setminus A = \{x \mid x \leq 5$ aber nicht x ist gerade$\}$
  $= \{1, 3\}$

- $A \triangle B = \underbrace{\{6,8,10,12\}}_{A\backslash B} \cup \underbrace{\{1,3\}}_{B\backslash A}$
  $= \{1,3,6,8,10,12,\dots\}$

1.2.1 Gesetze von deMorgan

1. $\overline{A \cap B} = \{x \mid$ Es gilt nicht: x ist gerade und $x \leq 5\} \underbrace{=}_{\text{s. oben}} \overline{\{0,2,4\}} = \{1,3,5,6,7,8\}$

   $\equiv \overline{A} \cup \overline{B} = \{x \mid \underbrace{x \text{ ist ungerade}}_{\overline{A}} \text{ oder } \underbrace{x \geq 5}_{\overline{B}}\} \to \{1,3,5,7,\dots\} \cup \{5,6,7,8,\dots\}$

2. $\overline{A \setminus B} = \{x \mid$ Es gilt nicht: (x ist gerade aber nicht kleiner 5)$\}$
   $\equiv \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$
   $= \{x \mid x$ ist ungerade oder $x < 5\} = \{0,1,2,3,4,5,7,9,11,\dots\}$

Definition

1. Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$
2. Zwei Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen Zerlegung von M, falls
   a) $A_i \subset M, i = 1, \dots, n$
   b) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
   c) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = M$

Definition
Die Potenzmenge einer Menge M ist die Zusammenfassung der Menge aller Teilmengen.
Bezeichnung: $\mathcal{P}(M)$

Bsp:

1. $M = \{0,1\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M, \{0\}, \{1\}\}$
2. $M = \{1,2,3\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Definition

Die Anzahl der Elemente einer Menge A nennt man Mächtigkeit oder Kardinalität von A
Bezeichnung: $|A|$

Falls A unendlich viele Elemente hat, schreiben wir

$$|A| = \infty$$

Achtung: In diesem Fall wird in der Regel in abzählbar unendlich (z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) und überabzählbar unendlich (z.B. Intervalle, $\mathbb{R}$) unterschieden.

Definition
Falls I eine beliebige Menge ist, sogenannte Indexmenge und $A_i, i \in I$ Mengen, dann heißt

$$(A_i)_{i\in I}$$

Familie von Mengen. Die Vereinigung und der Durchschnitt dieser Mengen werden mit

$$\bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{Vereinigung über alle } i \in I \text{ und}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \qquad \text{Durschnitt über alle } i \in I A_i$$

bezeichnet.

Bsp:

1. Vereinigung
   $I = \{1, 2, 3, 4\}$
   $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 \ | \ x < i\}, i \in I$
   $A_1 = \{0\}, A_2 = \{0, 1\}, A_3 = \{0, 1, 2\}, A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x \ | \ x \text{ liegt in mindestens einem } A_i\}$$

2. Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{x \ | \ x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$$

   Dabei gilt:

   - $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
   - $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

3. **Bsp.**

   - $A_i = \{$ Studenten, die in Klausur i eine Note 1 haben$\}$
   - $I = \{$ Menge der betrachteten Klausuren$\}$
   - $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\ldots$ Studenten, die in allen Klausuren eine 1 haben$\}$
   - $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\ldots$ Studenten, die in mindestens einer Klausur eine 1 haben $\}$

2 Produktmengen und Relationen

2.1 Das kartesische Produkt

Definition
Sind X, Y Mengen, so heißt $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ das kartesische Produkt oder die Produktmenge von X und Y.

Bsp:

1. $X = \{a,b\}; Y = \{1,2,3\} \qquad X \times Y$

	1	2	3
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$

$\equiv \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

2. $X = [0,1], Y = [1,3] \longrightarrow X \times Y = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [1,3]\}$

Ähnlich definiert man das Kartesische Produkt von endlich vielen Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ als

$$X_1 \times X_2 \times \ldots X_n = \bigotimes_{i=1} X_i = \prod_{i=1}^{n} X_1$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_3) \mid x_i \in X_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

Bsp:
$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \{0,1\}$

$X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \in \{0,1\}\}$

$= \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,0),$
$1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$

Bezeichnung:

- $(x_1, x_2, x_3) \ldots$ „Trippel“
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) \ldots$ „Quadtupel“
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots$ „n-Tupel“
  Zeilenvektor der Dimensionen

Stimmen die Mengen $X_1, \ldots, X_n$ überein, gilt also

$$X = X_1 = X_2 = \cdots = X_n$$

(so wie im Bsp. oben), so schreiben wir

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X^n$$

Bsp:
$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

2.2 Relationen

Definition
Eine Teilmenge $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ der Produktmenge von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt n-stellige Relation zwischen den Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Falls $X_1 = X_2 = \ldots X_n$, so spricht man von einer n-stelligen Relation auf X.

Bsp:

1. $X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}$
   $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (Alle Punkte der Kugel im Ursprung mit Radius 1)

2. Die folgende Tabelle beschreibt eine 4-stellige Relation zwischen den Mengen

    - $P = \{$Schneider, Meier, Schulze, ...$\}$
    - $V = \{$Mathe 1, Mathe 2, Physik, Informatik, ...$\}$
    - $S = \{$IM, IW, II, ...$\}$
    - $U = \{$1, ..., 7$\}$

Professor	Vorlesung	Studiengang	ECTS
Schmidt	Mathe 1	IM	5
Schmidt	Mathe 2	IM	7
Schulze	Informatik	IW	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3. Für eine beliebige, nicht leere Menge M ist die Teilmengenbeziehung

$$C : \{(A; B) \;\mid\; A \subset B \subset M\} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$$

eine Relation (zweistellig) auf $\mathcal{P}(M)$

z.B. $M = \{1, 2\}, \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\emptyset \subset \{13, \emptyset \subset \{2\}, \emptyset \subset \{1, 2\}, \emptyset \subset \emptyset$
$\{13 \subset \{1, 2\}, \{23 \subset \{1, 2\}, \{13 \subset \{1\}, \{2\} \subset \{2\}, \{1, 2\} \subset \{1, 2\}$

$C = \{(\emptyset, \emptyset), (0, \{13\}, (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), \ldots\} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$

2.2.1 Zweistellige Relationen

Bei zweistelligen Relationen bedient man sich der Regel der sogenannten Infix-Schreibweise

$$xRy \text{ genau dann wenn } (x, y) \in R$$

Bsp:
$A \subset B$ statt $(A, B) \in \subset$

Zweistellige Relationen auf endlichen Mengen können durch Relationspfeile in einen Relationsgraphen dargestellt werden.

Bsp:
Teilmengenbeziehung, $M = \{1, 2\}$ auf $\mathcal{P}(M)$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \{1\} \arrow[loop right] \arrow[d] \\
\{2\} \arrow[loop left] \arrow[r] & \{1,2\} \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Jedes Element von $\mathcal{P}(M)$ wird durch einen sogenannten Knoten dargestellt. Falls xRy, dann zeichnet man einen Pfeil von x nach y. Eine Schlinge entsteht, falls xRx.

Bsp:
Relation „Ist Kind von“ führt zum Stammbaum.

Ist R eine zweistellige (binäre) Relation auf M, so ist

$$R^{-1} = \{(y, x) \;\mid\; (x, y) \in R\}$$

ebenfalls eine binäre Relation auf M. Sie wird die zu R inverse Relation genannt.
Beim Übergang von R zu R^{-1} werden im Relationsgraphen die Pfeilrichtungen umgekehrt.

Bsp:

1. „Kind von“ ist inverse Relation zu „Elternteil von“
2. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x \leq y\}$
   $R^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x \leq y\} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; y \geq x\}$

Da Relationen Mengen sind (Teilmengen der Produktmenge $M \times M$), können wir die klassischen Mengenoperationen anwenden.

- $\overline{R} = \{(x,y) \mid x \not R y\} = \{(x,y) \mid (x,y) \notin R\}$
- $R \subset \tilde{R} = \{(x,y) \mid xRy$ oder $x\tilde{R}y\}$
- $R \cap \tilde{R} = \{(x,y) \mid xRy$ und $x\tilde{R}y\}$
  wobei $R, \tilde{R}$ zwei Relationen auf M sind

Bsp:

- $R =$ „Sohn von“, $\tilde{R} =$ “Tochter von“
- $R \cup \tilde{R} =$ „Kind von“
- $R \cap \tilde{R} = \emptyset$
- $\overline{R} =$ „nicht Sohn von“

Sind R_1 und R_2 zwei Relationen auf M, so heißt die Relation

$$R_1 \circ R_2 := \{(x,z) \mid \text{ Es existiert ein } z_i \text{ so dass } (x,y) \in R_1 \text{ und } (y,z) \in R_2\}$$

das Produkt oder die Komposition der Relationen R_1 und R_2. Es gilt also

$$x(R_1 \circ R_2)z$$

genau dann, wenn xR_1y und yR_2z für ein $y \in M$

Bsp:
$R_1 =$„Vater von“, $R_2 =$ „Elternteil von“ auf der Menge aller Menschen
$R_1 \subset R_2$

$$x(R_1 \circ R_2)z = \{(x,z) \mid \text{ Es gibt ein y so dass } \underbrace{(x,y) \in R_1}_{\text{x ist Vater von y}} \text{ und } \underbrace{(y,z) \in R_2}_{\text{y ist Elternteil von z}}\}$$

$$= \{(x,z) \mid x \text{ ist Opa von } z\}$$

$$x(R_2 \circ R_1)z = \{(x,z) \mid \text{ Es gibt y ein so dass } \underbrace{(x,y) \in R_2}_{\text{x ist Elternteil von y}} \text{ und } \underbrace{(y,z) \in R_1}_{\text{y ist Vater von z}}\}$$

$$= \{(x, 2) \mid x \text{ ist Großelternteil väterlichseits}\}$$

Eigenschaften binärer Relationen auf eine Menge M
Eine binäre Relation $R \subset M^2$ heißt

- reflexiv, falls $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$.
- irreflexiv, falls $(x, x) \notin R$ für alle $x \in M$
- symmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ folgt, dass $(y, x) \in R)$ (d.h. $R = R^{-1}$)
- asymmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ folgt, dass $(y, x) \notin R$ (also $R \cap R^{-1} = \emptyset$)
- antisymmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt dass $x = y$
- transitiv, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt dass $(x, z) \in R)$ (also $R \circ R \subset R$)

Bsp:

Relation	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch	transitiv
$<$ auf $\mathbb{R}$	nein	ja	nein	ja	nein	ja
$\leq$ auf $\mathbb{R}$	ja	nein	nein	nein	ja	ja
$=$ auf $\mathbb{R}$						
gewinnt auf {Schere, Stein, Papier}	nein	ja	nein	ja	nein	nein

2.2.2 Ordnung und Äquivalenzrelationen

$M \ldots$ Menge
$R \subset M^2 \ldots$ binäre Relation auf M

Definition
Eine binäre Relation R auf M heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung

Äquivalenzrelationen kann man als Gleichheit bzgl. eines Merkmals verstehen, d.h. xRy falls x und y in betrachteten Merkmal gleich sind.

Bsp:

1. Die Identität ist eine Äquivalenzrelation.

   $$I = \{(x,x) : x \in M\}$$

   denn:

   - I ist reflexiv: Für alle $x \in M$ mit $(x,x) \in I$
   - I ist symmetrisch: Für alle $x, y \in M$ mit $(x,y) \in I \Rightarrow x = y$
     $\Rightarrow (y,x) = (x,y) \in I$
   - I ist transitiv: Für alle $x, y, z \in M$ mit $\underbrace{(x,y) \in I}_{x=y}$ und $\underbrace{(y,z) \in I}_{y=z}$
     $\Rightarrow x = y = z$, also $(x,z) = (x,x) \in I$
     (Identität = Gleichheit in allen Merkmalen)

2. $M = \mathbb{Z}, R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x$ und y lassen bei Division 3 den gleichen Rest$\}$
   $(x,y) \in R$ genau dann, wenn $x \equiv y \mod 3$ ist eine Äquivalenzrelation ist, denn:

   - reflexiv: Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv y \mod 3$
   - symmetrisch: Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x \equiv y \mod 3$, dann auch $y \equiv x \mod 3$
   - transitiv: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x \equiv y \mod 3$ und $y \equiv z \mod 3$ dann $x \equiv z \mod 3$

3. Die Relation „parallel zu“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Geraden im Raum (Gleichheit bzgl. Richtung).

4. Die Relation „schneiden sich“ ist keine Äquivalenzrelation

Definition
Ist R eine Äquivalenzrelation auf M, so bezeichnet man mit

$$R[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in R\} = \{y \in M \mid xRy\}$$

die Äquivalenzrelation von x.

$R[x] \dots$ Menge aller Elemente die gleich sind mit x bzgl. des betrachteten Merkmals.

Satz
Zwei Äquivalenzklassen $R[x]$ und $R[y]$ sind entweder identisch oder disjunkt. Die Menge aller zu einer Äquivalenzrelation R gehörenden Äquivalenzklassen bildet deshalb eine Zerlegung der Menge M.

Bsp:

1. $R = \{(x,y) \mid x \equiv y \mod 3\}$
   - $R[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
   - $R[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$
   - $R[-1] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = R[2] = R[-4]$

$$\mathbb{Z} = \underbrace{R[0] \cup R[1] \cup R[2]}_{\text{Zerlegung von } \mathbb{Z}}$$

Definition
Eine binäre Relation R auf M heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung
Eine Relation ist eine Ordnungsrelation, wenn sie den Vergleich bzgl. eines Merkmals beschreibt.

Bsp:

1. $\leq$ auf $\mathbb{R}$: $R = \{(x, y) \leq \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ ist
   - reflexiv, denn $(x, x) \in R$, weil $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   - antisymmetrisch: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{(x, y) \in R}_{x \leq y}$ und $\underbrace{(y, x) \in R}_{y \leq x}$ gilt $x \equiv y$
   - transitiv: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\underbrace{(x, y) \in R}_{x \leq y}$ und $\underbrace{(y, x) \in R}_{y \leq x}$, dann $\underbrace{(x, z) \in R}_{x \leq z}$

2. $\subset$ auf der Potenzmenge von der Menge Ω

$$M = \mathcal{P}(\Omega), R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega\}) \mid A \subset B \subset \Omega\}$$

   ist eine Ordnungsrelation, denn:
   - reflexiv: Für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $A \subset A$
   - antisymmetrisch: Falls $A \subset B$ und $B \subset A$ dann gilt immer $A \equiv B$
   - transitiv: Falls $A \subset B$ und $B \subset C$, dann ist immer $A \subset C$

3 Funktionen

Definition
Es seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element $x \subset X$ genau ein Element $y = f(x) \subset Y$ zuordnet, heißt eine Funktion oder Abbildung von X nach Y.

Bezeichnung $f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$

Bsp:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$
   ordnet jeder reellen Zahl x die Zahl $f(x) = x^2$ zu.

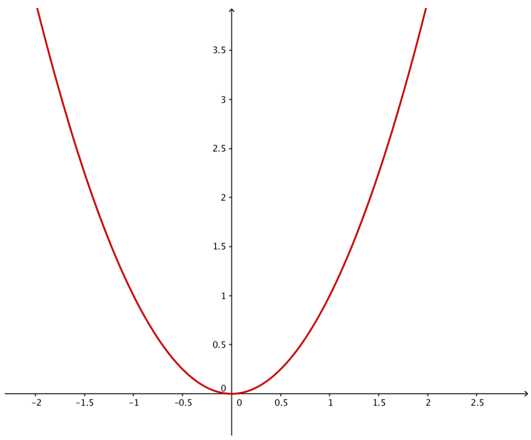
2. $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{P} : n \longmapsto n^2$
   ordnet jeder natürlichen Zahl n einschließlich der Null die Zahl $g(n) = n^2$ zu.

Bezeichnung
Sei $f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$ eine Funktion

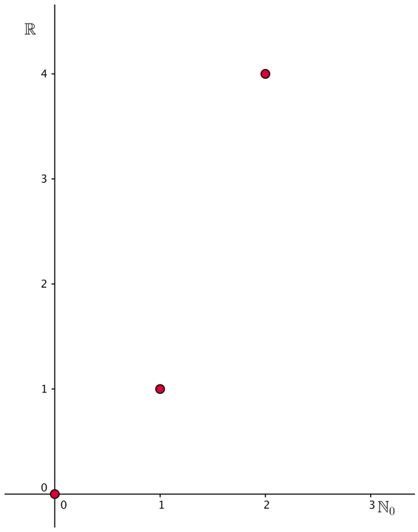
1. Die Menge X heißt Definitionsbereich von f. Die Menge Y heißt Wertebereich von f
2. Das einem Element $x \in X$ zugeordnete Element $f(x)$ heißt Funktionswert an der Stelle x
3. Die Elemente des Definitionsbereiches X heißen Argument von f
4. Die Menge $f(X) = \{y \in Y \mid \text{Es gibt ein } x \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt Bild von X unter f.
5. Die Relation $graph(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ heißt Graph von f

Bsp:

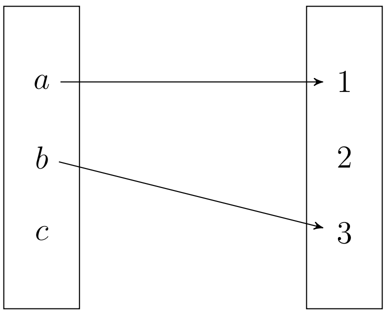
1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$
   - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
   - Wertebereich: $\mathbb{R}$
   - Funktionswert an der Stelle $2.5 : f(2.5) = 2.5^2 = 6.25$
   - Bild von $\mathbb{R} : f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$
   - $graph(f) = \{(x, y) \mid y = x^2\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

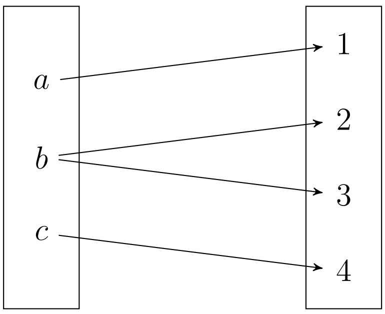


2. $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto n^2$
   - Definitionsbereich: $\mathbb{N}_0$
   - Wertebereich $\mathbb{R}$
   - $g(\mathbb{N}_0) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
   - $graph(g) = \{(n, n^2) \ | \ n \in \mathbb{N}^0\} = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$



3. Die Zuordnungen





sind keine Funktionen, denn bei (a) ist nicht f jeden Wert $x \in X$ ein Funktionswert erklärt und bei (b) ist der Funktionswert f b nicht eindeutig.

4. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto xy^2$ ist eine reellwertige Funktion von zwei Variablen.

   z.B.

$$g(1, 2) = 1 * 2^2 = 4 \qquad g(-1, 3) = (-1) * 3^2 = -9$$

5. Die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto (x, x^2)$ ist eine vektorwertige Funktion (mit einem gesicherten Paar reeller Zahlen (Vektor) als Funktionswert)

   z.B

$$h(1) = (1, 1^2) = (1, 1) \qquad h(0.5) = (0.5, 0.5^2) = (0.5, 0.25)$$

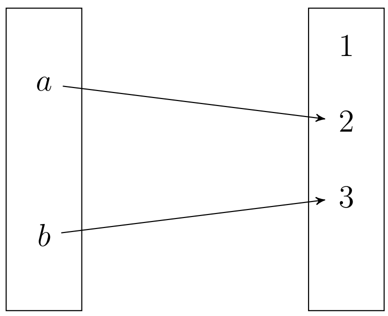
Definition

Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- injektiv (eineindeutig), wenn gilt:
  Ist $x_1 \neq x_2$, so ist auch $f(x_1) \neq f(x_2), x_1, x_2 \in X$ (zu jedem Funktionwert gibt es ein eindeutig bestimmtes Argument)
- surjektiv ("auf Y„), wenn gilt:
  Für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. ($f(X) = Y$ bzw. jeder Wert aus Y ist tatsächlich ein Funktionswert.
- bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

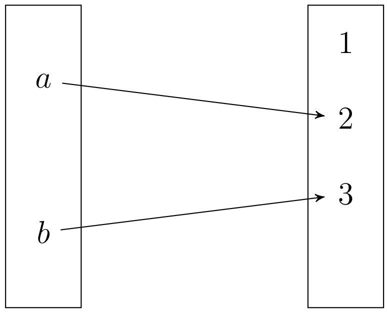
Bsp. 1:

- ist eine Funktion
- ist injektiv
- ist nicht surjektiv, denn 1 ist kein Funktionswert
- ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv



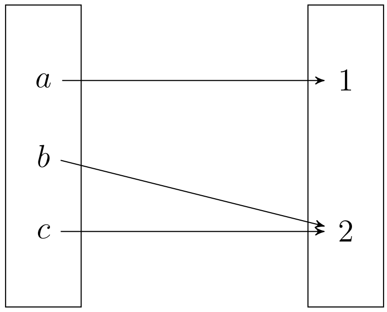
Bsp. 2:

- nicht injektiv, da $b \longmapsto 2$ und $c \longmapsto 2$
- ist surjektiv
- nicht bijektiv, da nicht injektiv

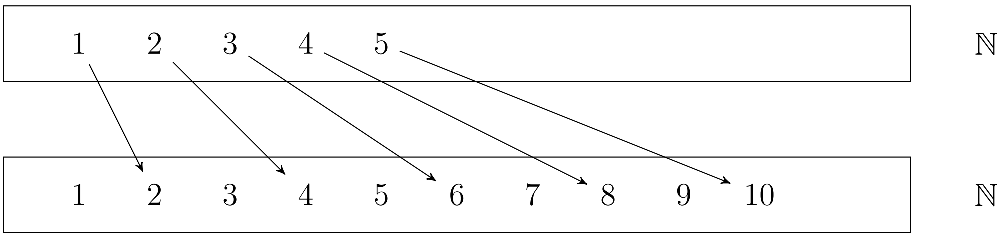


Bsp. 3:

- nicht injektiv, da $b \longmapsto 2$ und $c \longmapsto 2$
- ist surjektiv
- nicht bijektiv, da nicht injektiv



Bsp. 4:



Bsp. 5:

$f : [0,1] \longrightarrow [0,2] : x \longmapsto 2x$

Lösung: $\underbrace{y = 2x}_{x=\frac{y}{2}}$ $\quad y \in [0,2]$ fest gewählt.

Also: Für alle $y \in [0,2] = Y$, existiert ein Argument $x = \frac{y}{2}$, sodass $f(x) = y \longrightarrow$ surjektiv und dieses x ist eindeutig bestimmt $\longrightarrow$ bijektiv und damit auch bijektiv.

3.1 Die Umkehrabbildung

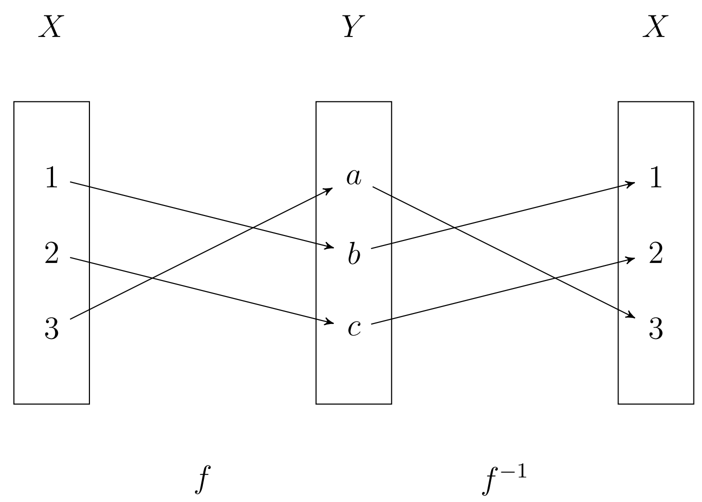
Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit ist die Zuordnung

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X : y \longmapsto x \text{ falls } y = f(x)$$

eine Funktion (lies: f invers oder f hoch -1). Sie heißt die zu f inverse Funktion der auch Umkehrfunktion (Umkehrabbildung) von f.

Bsp:

1. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}, f, f^{-1}$ sind gegeben durch folgende Zuordnungsgraphen:



2. Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x + 1$
   f ist bijektiv, denn zu jeden $y \in \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige bestimmte Lösung der Gleichung.

   $y = f(x)$
   $y = 2x + 1 \mid -1$
   $y - 1 = 2x \mid : 2$
   $x = \frac{y-1}{2}$

Damit ist f^{-1} gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \frac{y-1}{2}$$

oder äquivalent

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x-1}{2}$$

Definition

Die Abbildung $I_x : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$ heißt Identität auf X (oder identische Abbildung).

- I_x ist bijektiv
- $I_x^{-1} = I_x$

3.2 Verknüpfungen von Funktionen

Gegeben:
$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen

Definition

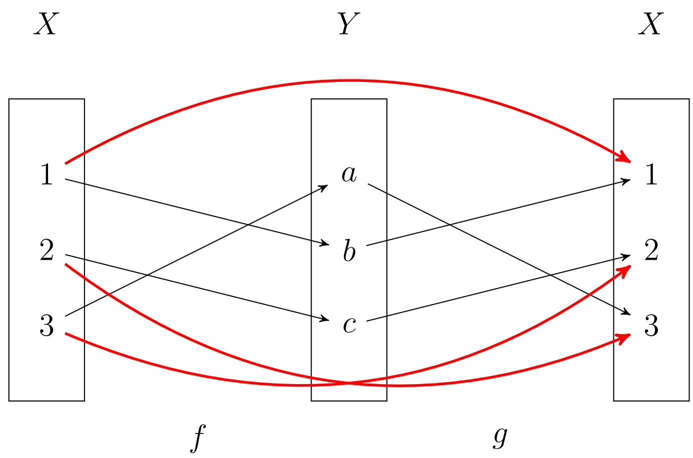
Die Funktionen $g \circ f : X \longrightarrow Z : x \longmapsto g(f(x))$ heißt Verknüpfung oder Komposition von f mit g (lies $f \circ g$: „f kringel g“)

$f \circ g$:

$$\underbrace{X \overset{\text{f}}{\Longrightarrow} Y \overset{\text{g}}{\Longrightarrow} Z}_{f \circ g}$$

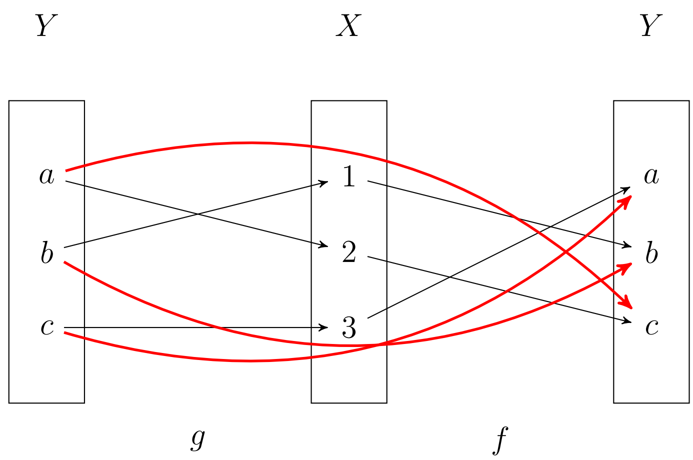
Bsp:

1. $X = \{1,2,3\}, Y = \{a,b,c\}, f, g$ sind gegeben durch folgende Zuordnungsgraphen



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f : X \longrightarrow Y$
$g : Y \longrightarrow Z$
$f \circ g : Y \longrightarrow X$



Im Allgemeinen sind $f \circ g$ und $g \circ f$ völlig unterschiedliche Funktionen!

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x - 1$
   $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)+1 = 2x$$
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(gx) - 1 = 2(x+1) - 1 = \underline{\underline{2x+1}}$$
$$f \circ g \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{DB von g}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Wertebereich von f}} : x \longmapsto 2x+1$$

Satz
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Funktion und bezeichne $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ die Umkehrfunktion von f. Dann gilt

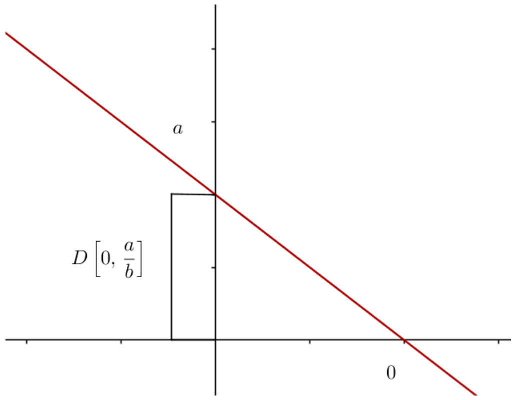
1. $f^{-1} \circ f = I_x$
2. $f \circ f^{-1} = I_y$

Bsp:
Aus langjähriger Marktbeobachtung sei bekannt, dass die Nachfragemenge eines Guts linear vom Preis p abhängt, d.h. dass $x = a - bp$, wobei $x \ldots$ Nachfragemenge, $p \ldots$ Preis und $a, b > 0$ Parameter (fest, gesamt).
Inwiefern lässt sich der Preis p vorhersagen, der sich bei Nachfragemenge (Absatz) x erweitern lässt?

Mathematische Modellierung
$x \in [0, \infty)$
$p \in [0, \frac{a}{b}]$ $\qquad a - bp \geq 0 \Rightarrow p < \frac{a}{b}$

$$D : [a, \frac{a}{b}] \longrightarrow [0, \infty) : p \longmapsto a - bp$$

Gesucht: D^{-1}. Problem: Funktion ist nicht bijektiv. Nachfragemenge $x > a$ kann nicht am Markt abgesetzt werden (Werte $x > a$ tauchen nicht als Funktionswerte von D auf).



Wir suchen die Umkehrfunktion $D^{-1} : [0, a\} \longmapsto [0, \frac{a}{b}]$
Weg: Auflösen der Gleichung $x = a - bp$ nach p
$x - a = -bp \;\; |: (-b) \neq 0$
$\frac{x-a}{-b} = p$
$\underline{p = -\frac{x}{b} + \frac{a}{b}}$

Also:

$$D^{-1}\,[0, a] \longrightarrow \left[0, \frac{a}{b}\right] : x \longmapsto -\frac{x}{b} + \frac{a}{b}$$

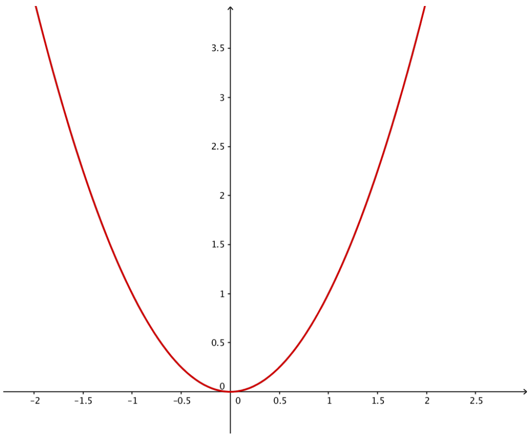
4 Reelle Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion.

Bsp:

1. $f : R \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

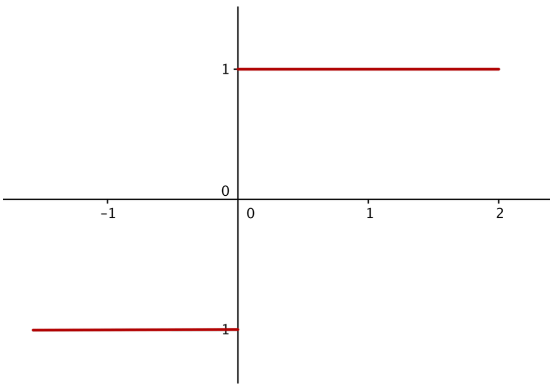


alternative Schreibweise:

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

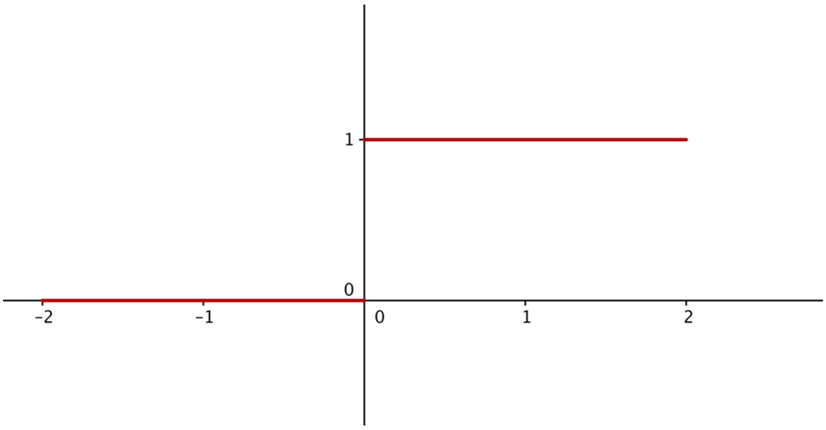
2. $sign(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

z.B. $sign(5) = +1; sign(-3.2) = -1$



3. Heaviside-Funktion (Einschaltfunktion)

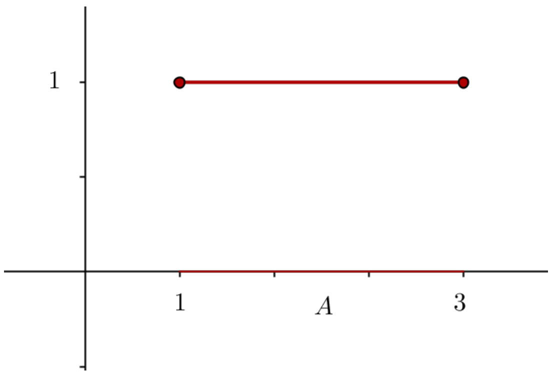
$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



4. Indikatorfunktion , $A \subset \mathbb{R}$

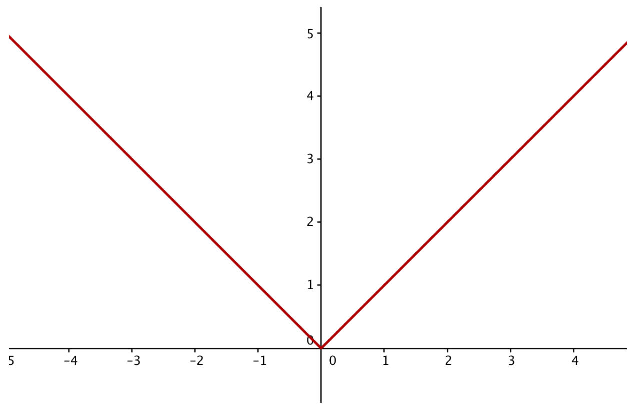
$$X_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

z.B. $A = [1,3], X_{[1,3]} = \begin{cases} 1 & 1 \leq X \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



5. Betragsfunktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Es gilt $|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{falls } x \geq a \\ -(x - a) = a * x & \text{falls } x < a \end{cases}$ $, a \in \mathbb{R}$

Also: $|x - a| \ldots$ Abstand zu x und a (auf der Zahlengerade)

Bsp:

Gesucht ist die Menge aller Lösungen von $|x - 3| \geq 2$

Grafische Lösung

$$L = \{x \mid x < 1 \text{ oder } x \geq 5\}$$

analytische Lösung: über Fallunterscheidung

- $\underbrace{x-3 \geq 0}_{x \geq 3} \Rightarrow x-3 \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$ auflösen nach x

$$L_1 = \underbrace{\{x \mid x-3 \geq 0\}}_{\text{Bedingung der Falunterscheidung}} \cap \underbrace{\{x \mid x \geq 5\} = \{x \mid x \geq 5\}}_{\text{Bedingung aus der Ungleichung}}$$

- $x-3<0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) \geq 2$ auflösen nach x
  $(x-3) \leq -2 \Rightarrow x \leq 1$

$$L_2 = \underbrace{\{x \mid 3<0\}}_{\text{Bedingung der Falunterscheidung}} \cap \underbrace{\{x \mid x \leq 1\} = \{x \mid x=1\}}_{\text{Bedingung aus der Ungleichung}}$$

Gesamtlösung:

$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \geq 5 \text{ oder } x \leq 1\} = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)}}$$

Definition

1. Eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_0 \quad , x \in R$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $n(a_n \neq 0)$

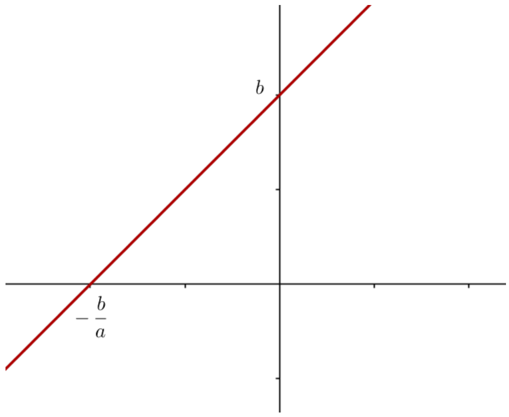
2. Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $p(x), q(x)$ Polynomen, heißt rationale Funktion

Bsp:

1. $p(x) = ax + b, a \neq 0$, Polynom vom Grad 1, lineare Funktion.
   Grafische Darstellung über zwei Punkte $p(0) = b$ und
   $p(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 (\Rightarrow x = -\frac{b}{a})$



2. $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, Polynom 2. Grades, quadratische Funktion
   $= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

   $$= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{=D}\right)$$ Scheitelpunktform der Parabel

   $$p(x) = \left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + D\right)$$

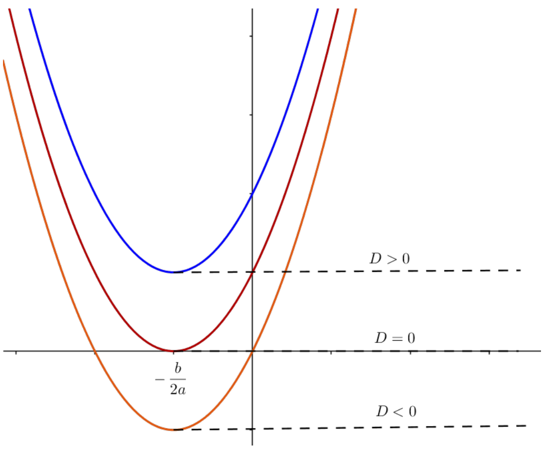


Abbildung 1.1: $a > 0$

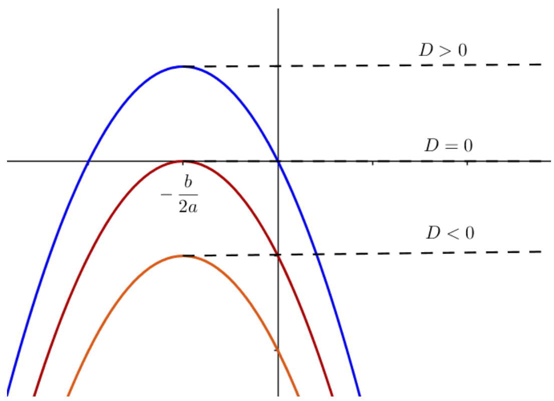


Abbildung 1.2: $a < 0$

Definition
Die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ werden Nullstellen von f genannt.

Bsp:
$f(x) = x^2 + px + q \qquad p, q \in \mathbb{R}$

- $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
  Nullstellen von f, falls $\frac{p^2}{4} - q > 0$

- $x_1 = -\frac{p}{2}$
  Nullstelle von f, falls $\frac{p^2}{4} - q = 0$
- Keine Nullstelle falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$

Definition Verknüpfung von reellen Funktionen
Seien $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann sind auch

- $f + g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) + g(x)$
- $f - g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) - g(x)$
- $f * g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) * g(x)$
- $\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$
  mit $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ und $c * f : D_g \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c * f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ reelle Funktionen

  Beachte: $fg \ldots$ ist die sogenannte punktweise Multiplikation von f und g. Dies darf nicht verwechselt werden mit der Hintereinanderausführung (Komposition) $f \circ g$

Bsp:
$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad , g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

$f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) * g(x) = x^2(2x - 1) = 2x^2 - x^2$

- kurz: $(fg)(x) = 2x^3 - x^2, x \in \mathbb{R}$

- klar: $(gf)(x) = 2x^3 - x^2, x \in \mathbb{R}$

$f \circ g : D_g \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x-1)^2)4x^2 - 4x + 1$
(falls der Wertebereich von g enthalten ist in D_f)

- kurz: $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}$
$g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$
$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-4}{x^4-2x^3-x^2+2x} \quad , x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x^4 - 2x^3 + 2x = 0\}$

Satz
Ist

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom n-ter Ordnung (d.h. $a_n \neq 0$), dann besitzt f höchstens n reelle Nullstellen. Ist x_0 eine Nullstelle von f, dann existiert ein Polynom g von (n-1)-ter Ordnung, so dass

$$f(x) = (x - x_)) * g(x)$$

Das Polynom $g(x)$ lässt sich mittels Polynomdivision ermitteln.

Bsp:
$g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$

$= x(x^3 - 2x^2 - x + 2) \qquad \Rightarrow x_0 = 0$
$= (x - 0)(x^3 - 2x^2 - x + 2)$
Durch probieren: $x_1 = 1$ ist eine NS von $x^3 - 2x^2 - x + 2$, denn $1^3 - 2 * 1^2 - 1 + 2 = 0$

1. Ausmultiplizieren mit Koeffizientenvergleich

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = ax^2 + bx^2 + cx = ax^2 - bx - c = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$$

Koeffizientenvergleich: x^3: $1 = a$
x^2: $-2 = b - a$
x: $-1 = c - b$
x^0: $2 = -c$

führt auf ein Gleichungssystem. Auflösen liefert:

- $a = 1$
- $b = -1$
- $c = -2$

Also:

$$\underline{\underline{g(x) = x(x-1)(x^2 - x - 2)}}$$

2. $\Rightarrow$ Polynomdivision anwenden, wie in Schule gelernt.
   $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$

$$\underline{\underline{\Rightarrow g(x) = x(x-1) \quad \underbrace{x^2 - x - 2}_{\text{quadratische Gleichung}}}}$$

$$\Rightarrow x_{1|2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (2-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

Damit sind die Nullstellen von g:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = 2$
- $x_2 = -1$
- $x_3 = 1$

Bsp: Anfang

$h(x) = \frac{2x-4}{x^4-2x^3-x^2+2x} \quad , x \neq -1, 0, 1, 2$

$= \frac{2(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \quad , x \neq -1, 0, 1, 2$

Definition

Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

eine gebrochen rationale Funktion. Dann heißt ein Punkt $x_0 \in D$

1. $\underset{q_n(x)\neq 0}{\text{p-fache NS}}$ von $f, (1 \leq p \leq m)$, falls $q_n(x_0) \neq 0$ und $p_n(x) = (x - x_0)p * r(x)$ mit $r(x) \ldots$ Polynom und $r(x_0) \neq 0$

2. q-fache Nullstelle von $f, (1 \leq q \leq n)$, falls $p_n(x_0 \neq 0$ und $q_n(x) = (x_0)^q * R(x)$ mit $R(x) \ldots$ Polynom und $R(x_0) \neq 0$

Bsp: Fortsetzung

$h(x) = \frac{2(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$ hat keine Nullstellen. Die Punkte $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1$ sind Polstellen (1. Ordnung, einfach).

Bsp:

$$\frac{(x-1)^2(x+2)(x-5)}{(x+3)^3(x-5)} = f(x) \quad , x \neq 5, x \neq -3$$

ist eine gebrochen rationale Funktion. Der Linearfaktor ($x = 5$) kann gekürzt werden $\rightarrow x_0 = 5$ ist kein besonderer Punkt.

- $x_1 = 1$ ist doppelte Nullstelle
- $x_2 = -2$ ist einfache Nullstelle
- $x_3 = -3$ ist dreifache Nullstelle

Definition

Eine gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ heißt echt gebrochen, falls $m < n$ und unecht gebrochen falls $m \geq n$.

Satz

Jede unecht gebrochene rationale Funktion kann zerlegt werden in die Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Bsp:

$$f(x) = \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 2}{x^2 + 1} \quad , x \in \mathbb{R}$$

ist unecht gebrochen. Zerlegung mit Hilfe von Polynomdivision

$(x^6 + x^4 + x^2 + 2) : (x^2 + 1) = x^4 + 1$

$$\Rightarrow \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 2}{x^2 + 1} = \underline{\underline{(x^4 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1}}}$$

Definition

Unter dem mathematischen Definitionsbereich einer Zuordnungsvorschrift $f(x)$ verstehen wir die Menge aller reellen Zahlen x, für die $f(x)$ einen eindeutigen, reellen Wert liefert.
Bezeichnung: $D_{math} \ldots$ „maximaler Definitionsbereich“, so dass $f : D_{math} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist.

Bsp:

$$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{1}{\sin x} \quad , D_{math} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Definition

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset D$. Dann ist $f\,|_I : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$ ebenfalls eine Funktion und wird als Einschränkung von f auf den Bereich I bezeichnet.

Sprich: $f\,|_I \ldots$ „f eingeschränkt auf I“

Bsp:

$f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$f\mid_{(0,2\pi)}: (0, 2\pi) \longrightarrow R : x \longmapsto \frac{1}{\sin(x)},\ \text{kurz: } f\mid_{(0,2\pi)}(x) = \frac{1}{\sin x} \quad , 0 < x < 2\pi$$

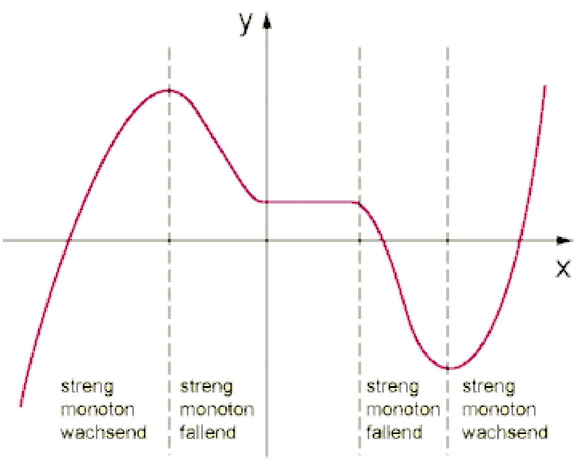
Definition

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

1. f heißt streng monoton wachsend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$
2. f heißt streng monoton fallen, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt dass $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$.

Gilt in (1) oder (2) anstelle von $<$ und $>$ jeweils $\leq$ und $\geq$ so heißt f monoton wachsend bzw. fallend.

Bsp:



f ist nicht monoton aber

- $f\mid_{I_1}$ monoton wachsend (streng)
- $f\mid_{I_3}$ monoton wachsend (streng)
- $f\mid_{I_2}$ monoton fallend (streng)

Satz

Eine reelle Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv (eindeutig umkehrbar), wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. In diesem Fall existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x erhalten werden kann. f^{-1} hat dasselbe Monotonieverhalten wie f. Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung des Graphens von f an der Winkelhalbierdenden $y = x$.

Bsp:

Potenzfunktion $f(x) = x^n, x \geq 0$ ist streng monoton wachsend.

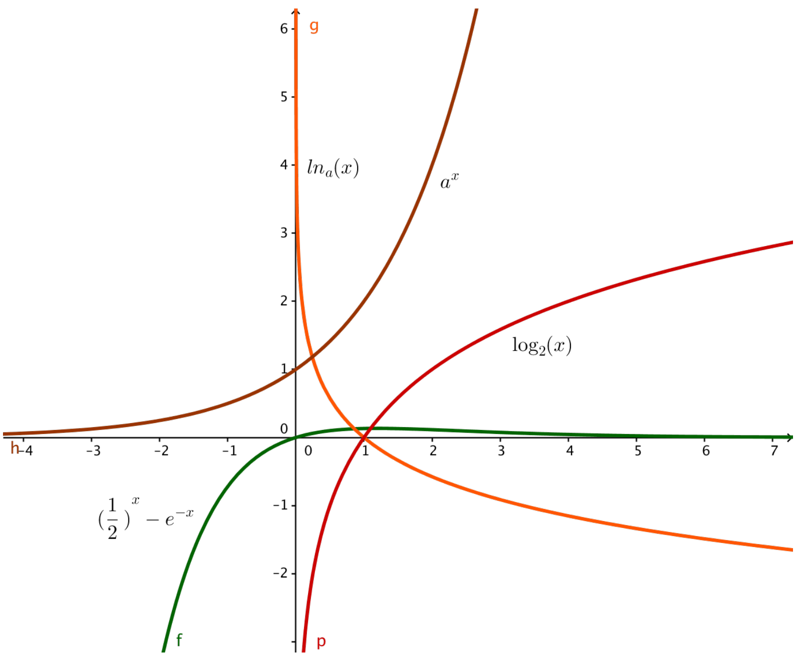
Also existiert eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend.

Bsp:

Die Expotentialfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ mit $f(x) = a^x$ ist für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a > 1$ streng monoton wachsend. DIe Umkehrfunktion $f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ wird als Logarithmusfunktion bezeichnet.



Satz

1. Eine streng monoton wachsende Funktion enthält die Ordnung:
   - Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so ist die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $f(a) < f(b)$ und $f^{-1} < f^{-1}(b)$.

2. Eine streng monoton fallende Funktion kehrt die Ordnung um:
   - Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallend, so ist die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $f(a) > f(b)$ und $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$.

Bsp:

1. Gesucht ist die Menge aller x für die $2^x > 3$ gilt.
   $\log_2(x), x > 0$ ist streng monoton wachsend (denn $2 > 1$)
   $\Rightarrow$ Ordnung bleibt erhalten

   $$\Rightarrow \underbrace{\log_2(2^x)}_{x} > \underbrace{\log_2(3)}_{\log_2(x) = \frac{\ln 2}{\ln 3}} \Rightarrow \underline{\underline{x > \frac{\ln 3}{\ln 2}}}$$

2. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\frac{1}{x+1} < 4$. $\quad x \neq -1 \mid \frac{1}{(\dots)}$
   Ansatz: Anwendung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf beiden Seiten der Gleichung.
   Also für Ungleichung Fallunterscheidung:

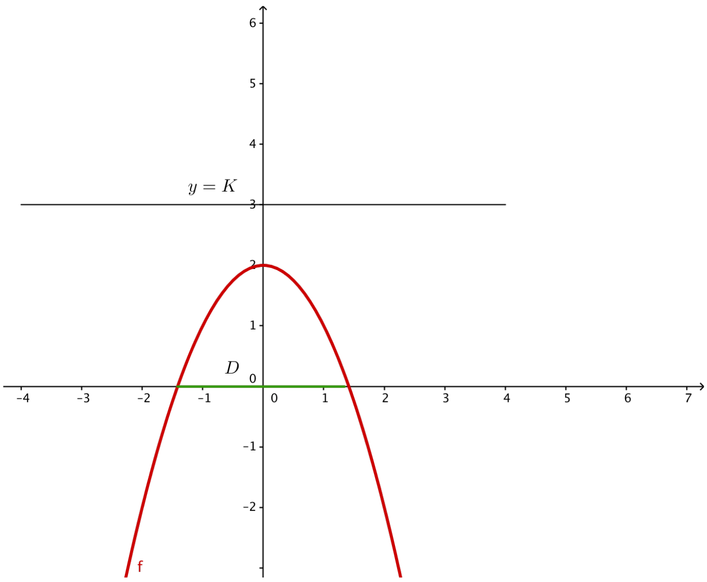
   - $$\frac{1}{x+1} > 0 \quad (4 > 0) \qquad \text{Anwendung von } f \mid_{(0,\infty)}$$
     (monoton fallend) $\longrightarrow$ Relationszeichen wird umgestellt:
     $$\frac{1}{x+1} > 4 \quad \mid \frac{1}{(\dots)} \Rightarrow x + 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{x < -\frac{3}{4}}$$
     Zusammen mit der Bedingung $\frac{1}{x+1} > 0$, also $x > -1$ ergibt sich
     $L_1 = \{x : -1 < x < -\frac{3}{4}\}$
   - $\frac{1}{x+1} < 0$, also $x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0 < 4$. Also ist die Ungleichung immer erfüllt
     $$\Rightarrow \underline{L_2 = \{x : x < -1\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)}}$$

3. $-4 < -3 \mid ()^2$ dreht das Relationszeichen um, denn $f(x) = x^2, x < 0$ ist monoton fallend.

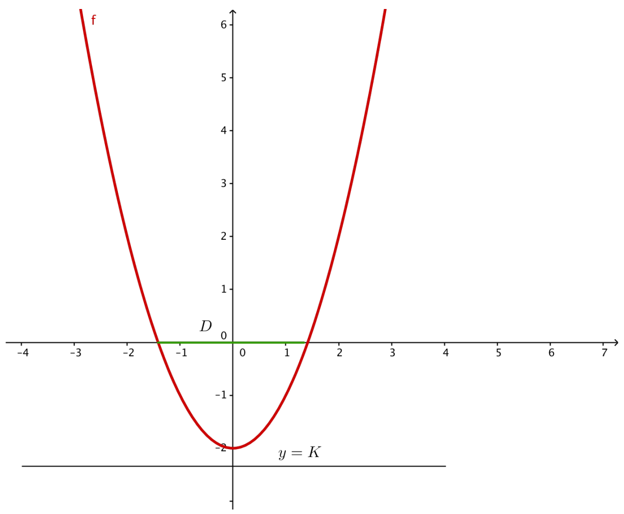
Definition
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. f heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq K$ für alle $x \in D$
   Bezeichnung: $K \ldots$ obere Schranke von f



   Anschaulich: Graph von f liegt unterhalb der Geraden $y = K$

2. f heißt nach unten beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \geq K$ für alle $x \in D$
   Bezeichnung: $K \ldots$ untere Schranke.

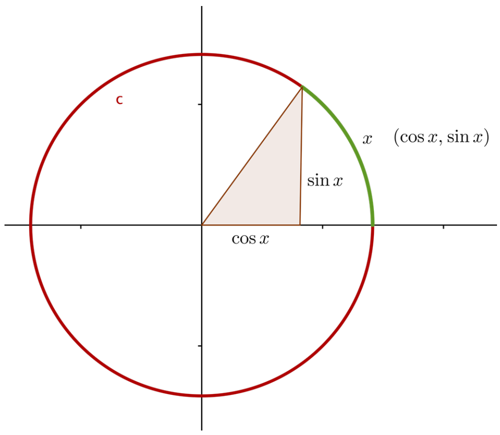


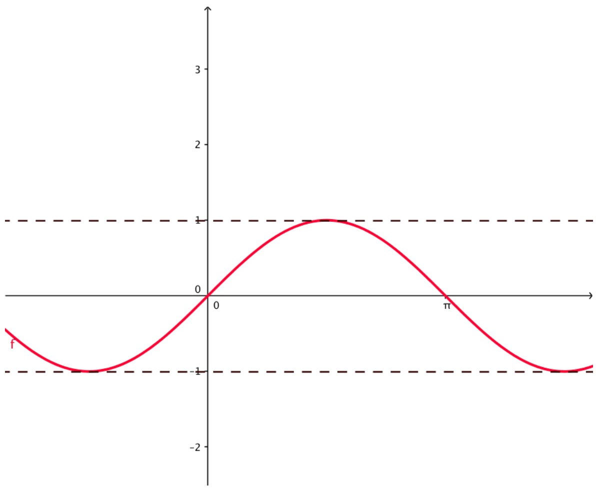
Anschaulich: Graph von f liegt oberhalb der Geraden $y = K$

3. f heißt beschränkt, falls es eine obere Schranke K_1 und eine untere Schranke K_2 gibt, so dass
$$K_2 K_2 \leq f(x) \leq K_1$$
für alle $x \in D$

Bsp:

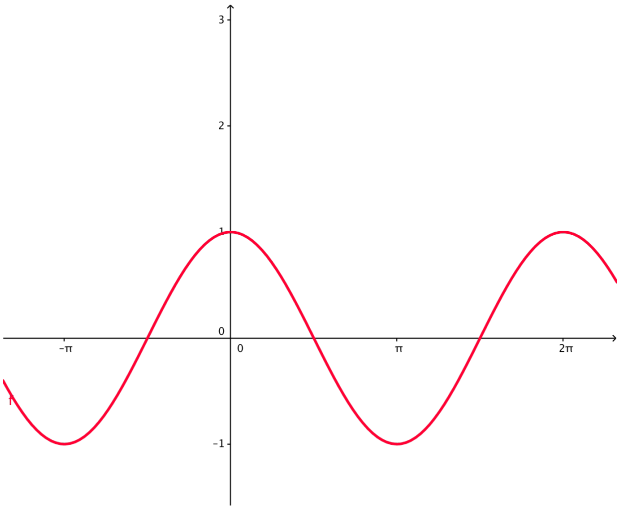
1. $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$





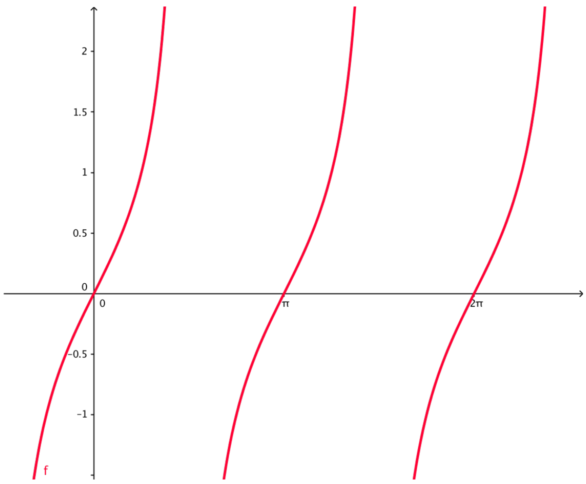
Es gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, also ist $\sin(x), x \in \mathbb{R}$ beschränkt mit der unteren und oberen Schranke -1 bzw. $+1$

2. $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R}$



$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow$ g ist beschränkt.

3. $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

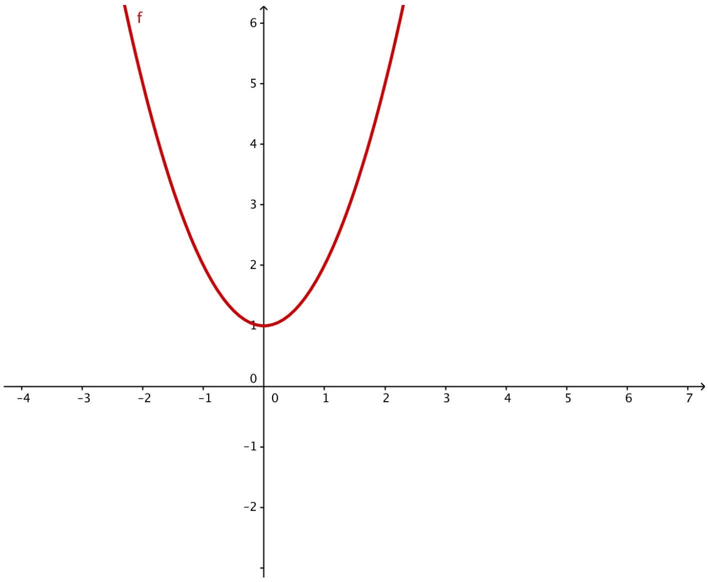


$\tan(x)$ ist unbeschränkt!

Definition

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ und f heißt gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

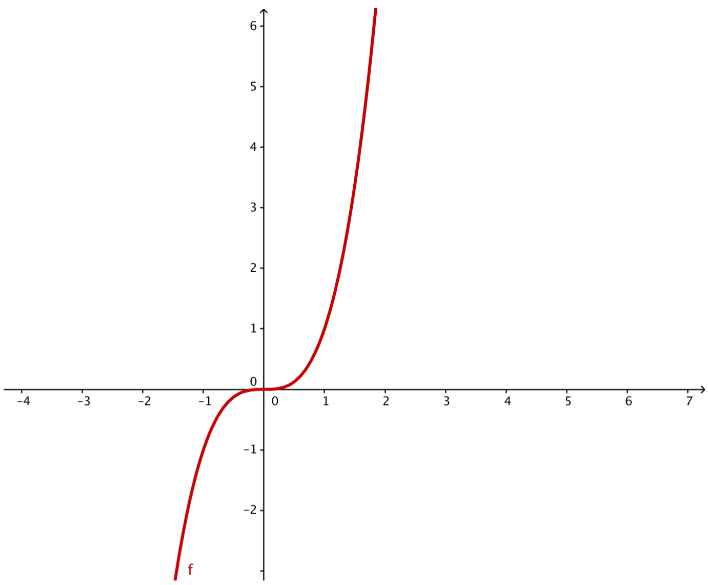
Anschaulich:



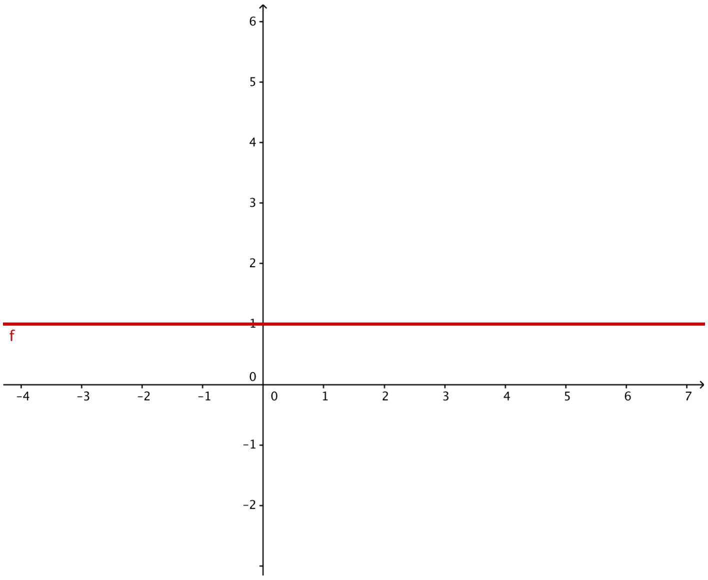
- f ist gerade
- Spiegel symmetrisch zur y-Achse

Bsp:

1. $\sin(x), x \in \mathbb{R}, \tan(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + \pi * k \mid k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = -x, f(x) = x^n$ mit n ungerade sind ungerade Funktionen



2. $\cos(x), x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2, f(x) = c, f(x) = x^n$ mit n gerade sind gerade Funktionen



5 Mathematische Beweisverfahren und Schlussweisen

5.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Ausgangspunkt

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist eine Vorgänger und Nachfolger-Relation

$$V := \left\{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \ \mid \ m = n - 1\right\}$$

und

$$\mathbb{N} = \left\{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \ \mid \ m = n + 1\right\}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ eine mathematische Aussage

$$A(0)\ A(1)\ \ A(2)\ \ \dots\ \ A(n)\ \ A(n+1)\ \ \dots$$

Zu jeder Aussage $A(n)$ gibt es eine nächste Aussage $A(n+1)$ und eine vorhergehende Aussage $A(n-1)(n \geq 1)$. $A(0)$ ist die „erste Aussage“.

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ eine von n abhängende mathematische Aussage. Falls sich beweisen lässt, dass

1. $A(0)$ wahr ist und
2. aus der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist auch die Aussage $A(n+1)$ folgt

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Schritt (1) heißt Induktionsanfang und Schritt (2) heißt Induktionsschritt.

Bsp:

Zu zeigen ist, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Index