Hochschule für
Technik und Wirtschaft
Dresden
University of Applied Sciences

Fakultät
Informatik und Mathematik

Script zur Vorlesung

Wirtschaftsmathematik II

Sommersemester 2016

Hinweis: Das folgende Material geht auf die Mitschrift des Studenten Markus Söhnel zu der für den Studiengang „Wirtschaftsinformatik“ an der HTW Dresden gehaltenen Vorlesung „Wirtschaftsmathematik II“ zurück. Es fasst alle Inhalte der Vorlesung ohne Anspruch auf Vollständigkeit und Fehlerfreiheit zusammen.

Anmerkungen und Bemerkungen in „grauen Feldern“ kommen vom Autor selber und sind kein Bestandteil der Vorlesung! Sie können als sinnvolle Ergänzung angesehen werden. Zusätzliche Informationen sind inhaltlich fehlerfrei, können aber unvollständig und insbesondere Rechtschreibfehler enthalten.

Autor: Markus Söhnel
s74639@htw-dresden.de

Letzte Aktualisierung: 2. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung für reelle Funktionen mit einer Variable

1 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Lösung (Cobweb-Modell[1])
$a = 100, b = 11, c = 10000, d = 200$

$$p_0 = \frac{b+c}{a+d} + \left(-\frac{a}{d}\right)^n \left(1 - \frac{b+c}{a+d}\right)$$

$$= \frac{10011}{300} + \left(-\frac{100}{200}\right)^n \left(1 - \frac{10011}{300}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{10011}{300} = 33.37$$
$$= \underline{\underline{p_\infty}}$$

Zugehöriges Angebot:	$A(p_\infty) = 100 * 33.37 - 11 = 3326$
Zugehörige Nachfrage:	$N(p_\infty) = 10000 - 200 * 33.37 = 3326$

Definition

1. Falls f jede monoton wachsende bzw. fallende Zahlenfolge x_0 mit $x_n \in \mathbb{D}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x)$ existiert und den gleichen Wert

   $\alpha = \lim_{n\to\infty} f(x)$ ergibt, dann heißt α $\begin{cases} \text{rechtsseitiger} & \text{(für fallende Zahlenfolge)} \\ \text{linksseitig} & \text{(für steigende Zahlenfolge)} \end{cases}$

   Grenzwert von f an der Stelle x_0.
   Bezeichnung: $\lim_{x\nearrow x_0} p(x) = \alpha \qquad \lim_{x\searrow x_0} f(x) = \beta$

[1] Diese Mitschriften stammen noch aus dem 1. Semester und können unvollständig sein, da lediglich die Tafel abfotografiert wurde. Es wurde direkt mit „Lösungen“ begonnen. Eine Einführung gab es nicht.

2. Falls der rechts- und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen, d.h.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} = \alpha$$

dann heißt α Grenzwert von f an der Stelle x_0.
Bezeichnung: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$

Beispiel

1. Heaviside-Funktion:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

$\lim_{x \nearrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \nearrow 0} h(x) = \lim_{n \to \infty} h(x_0)$
wobei (x_n) eine Zahlenfolge ist mit

- (x_n) ist wachsend
- $\lim_{x \to \infty} x_n = 0$

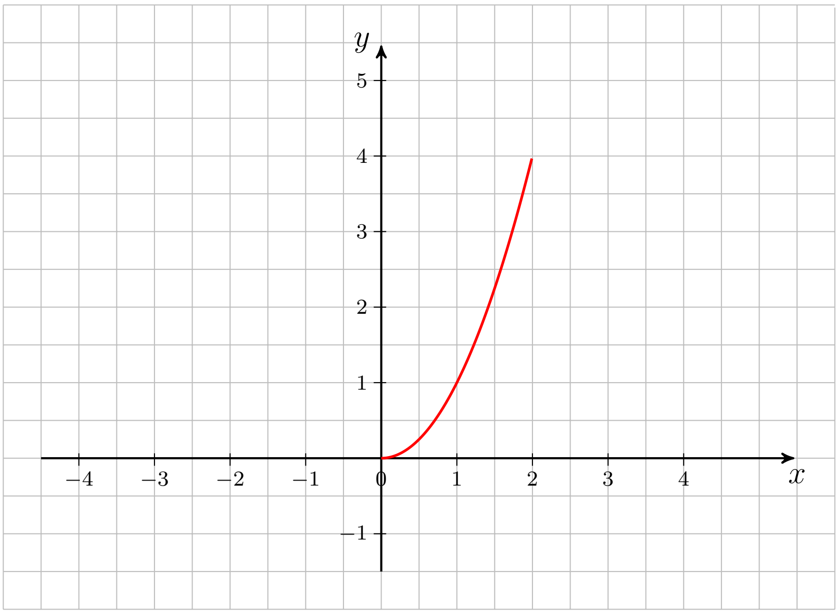
Da $x_n < 0 \Rightarrow h(x_n) = 0$, also $\lim_{n \to \infty} h(x_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$; damit

$$\lim_{x \nearrow 0} h(x) = 0 \ldots \text{linksseitiger Grenzwert}$$

Grenzwert von „oben“ und „unten“ siehe Youtube

- $\lim_{x \nearrow 0} \ldots$ von unten: Die Zahl 0 wird von unten angestrebt ($-\infty \to 0$)
  $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$
- $\lim_{x \searrow 0} \ldots$ von oben: Die Zahl 0 wird von oben angestrebt ($\infty \to 0$)
  $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 = f(0) = 1$

2. $f(x) = x^k, x \in (0, \infty)$ wobei $k \in \mathbb{N}$



$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n^k$ wobei

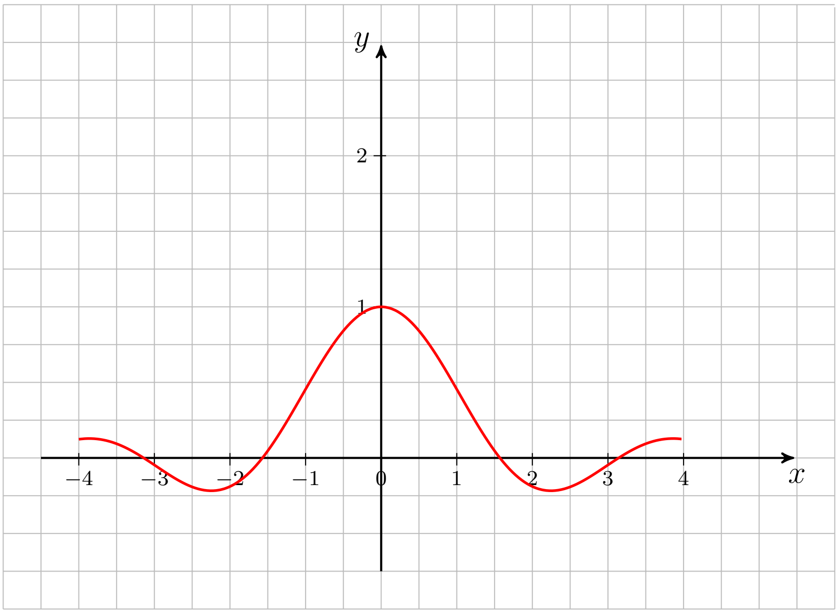
- (x_n) monoton wachsende ZF
- $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

$$\lim_{n \to \infty} x_n^k = \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{x_n * x_n * \cdots * x_n}_{\text{k-Faktoren}} \right) = a^k$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \nearrow a} x^k = a^k = f(a)$$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$$



$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \qquad x \in (0, \pi)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos x}}_{=1} \geq \lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} \geq \underbrace{\lim_{x\to 1} \cos x}_{=1} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = 1}}$$

Definition (Stetigkeit)
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion

1. Die Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in D$
   - linksseitig, falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$
   - rechtsseitig, falls $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$
   - stetig, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
     Bezeichnung: $x_0 \ldots$ Stetigkeitsstelle von f falls f stetig in D
2. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ stetig, so heißt f stetige Funktion
3. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$ nicht stetig, dann heißt x_0 Unstetigkeitsstelle von f

Beispiel

1. $h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - rechtsseitig bei $x_0 = 0$
   - Unstetigkeitsstelle bei $x_0 = 0$
   - stetig für alle bei $x \neq 0$

2. $f(x) = x^k, x \in (0, \infty), k \in \mathbb{N}$ ist eine stetige Funktion

3. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ist stetig.
   Die Lücke im Definitionsbereich bei $x_0 = 0$ kann durch die stetige Fortsetzung geschlossen werden.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Anmerkung
Alle Funktionen, die keine Fallunterscheidung besitzen, sind stetig, da
Verkettung stetiger Funktionen (Polynomfunktionen, gebrochen rationale Funktionen, $\sin$, $\cos$, $\tan$, e^x, $\ldots$) ebenfalls stetig sind

Die Nullstellen des Nennerpolynoms $\mathbb{Q}_n$ gehören nicht zum Definitionsbereich D und damit sind sie weder Stetig- noch Unstetigkeitsstellen

Bemerkung

1. Eine Funktion f ist an einem Punkt x_o im inneren der Definitionsbereiches stetig, wenn man sie an dieser Stelle ohne den Stift abzusetzen „durchzeichnen“ kann

2. Vor allem Funktionen der Form

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in D_1 \\ g_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

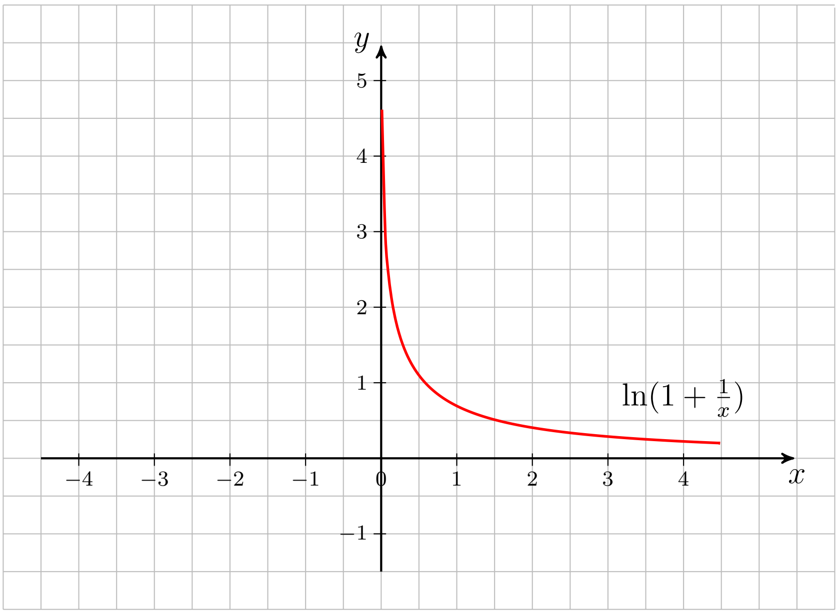
müssen auf Unstetigkeitsstellen an den Grenzen $D_1, D_2, \ldots, D_n$ überprüft werden.

3. Nur bei stetigen Funktionen (rechts- und links-) stetig, lässt sich die Grenzwertbildung (rechts- /linksseitig) und die Funktionswertbildung vertauschen

Beispiel

1. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   $\ln$ Funktion ist stetig



$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1}\right) = \ln 1 = \underline{\underline{0}}$$

2. Bauer mit Kartoffeln

   $N(p) = 10000 - 200p \quad A(p) = 100p - 11$

Bei stabilem Markt:

$$\begin{aligned} A(p) &= N(p) \\ 100p - 11 &= 10000 - 200p \\ \underline{\underline{p}} &\underline{\underline{= 33.37}} \end{aligned}$$

Zugehörige Nachfrage-Menge: $N(33.37) = 10000 - 200 * 33.37 = 3326$

Kostenfunktion[2] $K(m) = \begin{cases} 25 * m + 20000 & m \leq 3326 \\ 25 * m + 30000 & m > 3326 \end{cases}$

- Gewinn = Erlös - Kosten
- = Absatz * Preis - Kosten

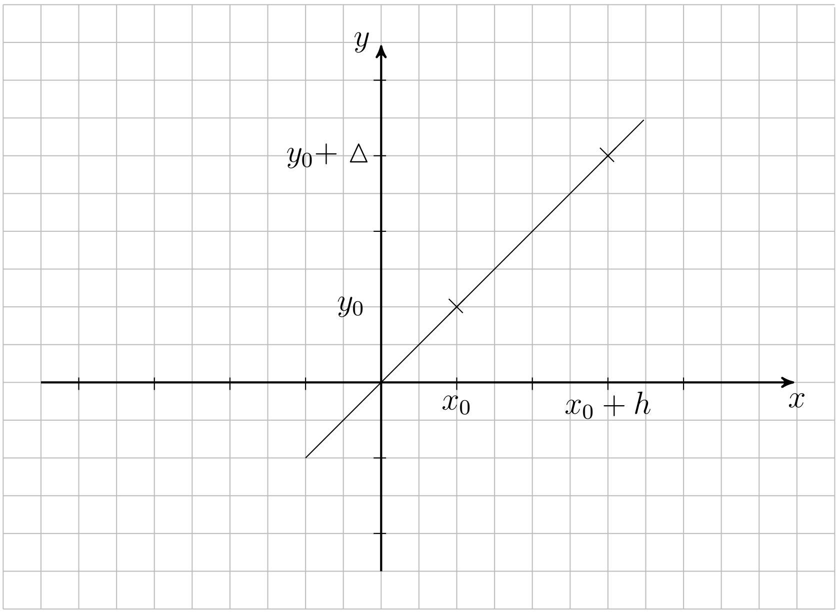
$$\begin{aligned} G(p) &= N(p) * p - K\left(N(p)\right) = (10000 - 200p) * p - K(10000 - 200p) \\ &= 10000p - 200p^2 - 25(10000 - 200p) - \begin{cases} 20000 & p \geq 33.37 \\ 30000 & p < 33.37 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -200p^2 + 15000p - 25000 - 20000 & p \geq 33.37 \\ -200p^2 + 15000p - 25000 - 30000 & p < 33.37 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Der Differenzeinquotient und die erste Ableitung

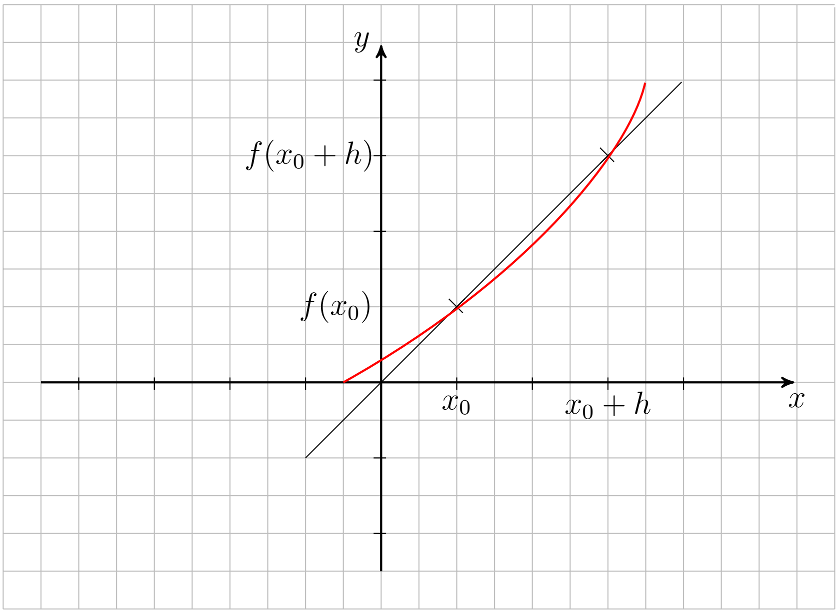
Wiederholung

Gegeben: Punkt $P_1 = (x_0, y_0), P_2 = (x_0 + h, y_0 + \triangle)$ (Geradengleichung)

$$\begin{aligned} g: y - y_0 &= \frac{\triangle}{h}(x - x_0) \\ y(x) &= y_0 + \frac{\triangle}{h}(x - x_0) \end{aligned} \tag{1.1}$$



Wir betrachten nun eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$



Der durchschnittliche Anstieg der Funktion zwischen x_0 und $x_0 + h$ ist gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\triangle f}{\triangle x}(x_0, h) \tag{1.2}$$

Die zugehörige Gerade durch $P_1(x_0, f(x_0))$ und $P_2 = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ ist gegeben durch

$$g(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} * (x - x_0) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Bezeichnung
g ist die Sekante von f durch $x_0, x_0 + h$.
Kurz: Differenzquotient = Anstieg der Sekante

Definition
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \tag{1.4}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar und $f'(x_0)$ die erste Ableitung von f an der Stelle x_0
Bezeichnung: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}$

Definition
Die Gerade durch den Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ mit dem Anstieg $m = f'(x_0)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + m(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.5}$$

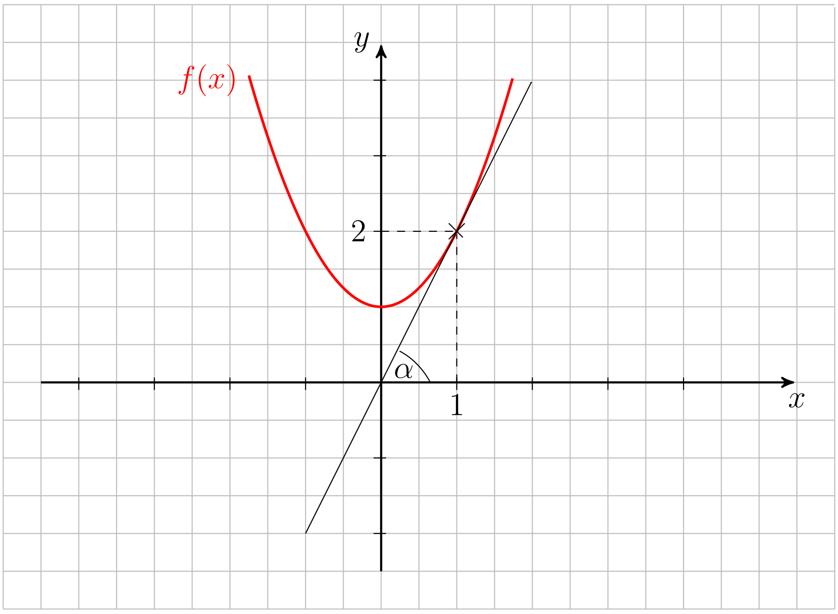
Dies heißt Tangente auf f im Punkt x_0. $m = f'(x_0)$ wird auch als Anstieg von f an der Stelle x_0 bezeichnet. Der Anstiegswinkel der Tangente lässt sich berechnen über

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= f'(x_0) \\ \alpha &= \arctan(f'(x_0)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Beispiel

$f(x) = x^2 + 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

$P_0(1,2)$, d.h. $x_0 = 1, f(x_0) = 2$



$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{n\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-(x_0^2+1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2+1-(1^2+1)}{h} = \frac{(2*x_0*h+h^2)}{h} \\ &= \frac{2*h+h^2}{h} = 2x_0 + h = 2 + h \longrightarrow 2x_0 = 2 \end{aligned}$$

Also: $f'(1) = 2$ bzw. allgemein: $f'(x_0) = 2x_0, x \in \mathbb{R}$

Gleichung der Tangente in $P_0(1,2)$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ &= 2 + (x-1) * 2 \\ &= \underline{\underline{2x}} \end{aligned}$$

$\tan\alpha = f'(x) \Longrightarrow \alpha = \arctan 2 = \underline{\underline{63.43°}}$

Definition

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt im Intervall $A \subset D$ differenzierbar, falls f für jedes $x \in A$ differenzierbar ist. Falls $A = D$, dann heißt f (überall) differenzierbar.

Definition

Ist die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt die Funktion $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.7}$$

die erste Ableitung der Funktion f.

Beispiel

$f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar, denn

$$\lim_{n\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

existiert (siehe oben). Also ist $f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ die erste Ableitung von f.

Beispiel

Heaviside Funktion: $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x)}{h} = \begin{cases} \frac{1-1}{h} = 0 & x_0 > 0 \\ \frac{0-0}{h} = 0 & x_0 < 0 \\ \frac{1-1}{h} = 0 & x_0 = 0, h > 0 \\ \frac{0-1}{h} = -1 & x_0 = 0, h < 0 \end{cases}$$

Damit:

- $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} 0 = 0$ für $x_0 > 0$
- $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} 0 = 0$ für $x_0 < 0$
- Aber: $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existiert nicht, denn
  - $\lim_{h\nearrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$ und
  - $\lim_{h\searrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ stimmen nicht überein

$\Rightarrow h$ ist überall differenzierbar, außer in $x_0 = 0$

Anmerkung
Ist eine Funktion an der Stelle x_0 unstetig, so ist sie an dieser Stelle x_0 niemals differenzierbar!

Beispiel (Betrags Funktion)
$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\nearrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{h}{h} = -1$$

Satz
Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.
D.h. im Umkehrschluss, dass wenn f in x_0 unstetig ist (z.B. Sprung), $f(x)$ auch nicht differenzierbar ist.

3 Technik des Differenzierens

Beispiel

1. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 * \frac{d}{dx}(x^4) + 2\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(5) \\ &= 3 * 4x^3 + 2 * 2x + 1 - 0 \Longrightarrow \underline{\underline{12x^3 + 4x + 1}} \end{aligned}$$

2. $f(x) = e^x * \sin(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^x) * \sin x + e^x * \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= e^x * \sin x + e^x * \cos x \Longrightarrow \underline{\underline{e^x(\sin x + \cos x)}} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x) - (x^2+1) - x * \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) - x * 2x}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow \underline{\underline{\frac{-x^2+1}{(x^2+1}}}$$

4. $f(x) = e^{x^2+3x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dz}e^z * \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}e^z * \frac{d}{dx}(x^2+3x)$$

$$= e^z * (2x+3) = e^{x^2+3x}(2x+3)$$

3.1 Ableitungen von Umkehrfunktionen

Satz

Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f^{-1} : D_{f^{-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige Umkehrfunktion (Die Existenz sei vorausgesetzt). Dann gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'^{-1}(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(x_0\right)\right)} = \frac{1}{f'(z)} \quad \Bigg|_{z=f^{-1}(x_0)} \tag{1.8}$$

Beispiel

$g(x) = \arcsin x, x \in (-1, 1)$, gesucht: $g'(x), x \in (-1, 1)$

Idee:
$f(x) = \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$g(x) = f^{-1}(x)$

$$g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(x)} \quad \Bigg|_{z=f^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos z} \quad \Bigg|_{z=f^{-1}(x)=\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 2}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2}}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis des Satzes

$f(f^{-1}(x)) = x$

$$f'\left(g(x)\right)g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \tag{1.9}$$

3.2 Logarithmische Differentiation

Beispiel

1. $f(x) = x^x$, gesucht: $f'(x)$

   Weg: Logarithmierung: $f(x) = x^x$

$$
\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln(x^x) = x \ln x \\
&= \frac{d}{dz} \ln z * \frac{df}{dx} = \left(\frac{d}{dx} * x\right) * \ln x + x \left(\frac{d}{dx} \ln x\right) \\
&= \frac{1}{z} * f'(x) = 1 \ln x + x * \frac{1}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \\
&= f'(x) = (\ln x + 1) * f(x) = \underline{\underline{(\ln x + 1) * x^x}}
\end{aligned}
$$

2. $f(x) = x^{\cos x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\left(x^{\cos x}\right)\right)' * x^{\cos x} = (\cos x * \ln x)' * x^{\cos x} \\
&= \left((-\sin x)\ln x + \cos x * \frac{1}{x}\right) x^{\cos x} = \underline{\underline{\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) x^{\cos x}}}
\end{aligned}
$$

4 Höhere Ableitungen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitungsfunktion $f'(x), x \in D$ kann wieder differenziert werden, falls f' differenzierbar ist. Man spricht dann von der zweiten Ableitung von f.
Bezeichnung: $f''(x) = (f'(x))', x \in D$

Die Ableitungsfunktion einer zweiten Ableitung heißt 3. Ableitung:

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)', x \in D$$

Allgemein heißt f n-mal differenzierbar, falls alle Ableitungen bis einschließlich $n-k$ Ordnung existieren, also $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$.
Man schreibt

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \tag{1.10}$$

Beispiel:

1. $f(x) = x^3 + 2x + 1$
    - $f'(x) = 3x^2 + 2$
    - $f''(x) = (3x^2 + 2)' = 6x$
    - $f'''(x) = (6x)' = 6$
    - $f^{(4)}(x) = (6)' = 0$
    - $f^{(n)}(x) = 0$

    $\rightarrow f$ ist beliebig oft differenzierbar.
2. $g(x) = e^x$
    - $g'(x) = e^x$
    - $g^{(n)}(x) = e^x$

    $\rightarrow g$ ist beliebig oft differenzierbar.

5 Analyse von Funktionen

Ziel
Feststellung von Funktionseigenschaften (z.B. Monotonie, Krümmungsverhalten) mit Hilfe der Differentialrechnung.

Gegeben
Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, Intervall $[a, b] \in D$

Voraussetzung

1. f ist stetig
2. f ist differenzierbar auf (a, b),auch evtl. mehrfach differenzierbar.

5.1 Monotonie und Extrema

Wiederholung

f ist auf $[a, b]$ monoton wachsend, falls $f(x_2) \geq f(x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt und monoton fallend, falls $f(x_2) \leq f(x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Satz

f ist auf $[a, b]$

1. monoton wachsend, falls $f'(x) \geq 0$ für $x \in (a, b)$
2. streng monoton wachsend, falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ außer isolierte Punkte $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, wo $f'(x) = 0$

Beispiel

a) $f(x) = 2x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 4x, x \in \mathbb{R}$
$f'(x) \geq 0$ für $x \geq 0 \Rightarrow f$ ist auf $[a, \infty)$ monoton wachsend. f ist auf $[0, \infty)$ sogar streng monoton wachsend, denn $f'(x) > 0, x > 0$, d.h. für $x \in (0, \infty)$.

Analog:
$f'(x) < 0$ für $x < 0$, also ist f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend.

b) $f(x) = (x-2)^3, x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 3(x-2)^2 * 1 = 3(x-2)^2 \geq 0$, sogar $f'(x) > 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $f'(2) = 0$
$\Rightarrow f$ ist überall streng monoton wachsend.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 0 & x \in (0,1) \\ (x-1)^2 & x \geq 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ ? & x = 0 \\ 0 & x \in (0,1) \\ ? & x = 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & \text{für } x \in [a,b] \\ f'(x) > 0 & \text{für } x > 1 \\ f'(x) < 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- f ist streng monoton wachsend auf $[1, \infty)$
- f ist monoton wachsend auf $[0, \infty)$
- f ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$
- f ist monoton fallend auf $(-\infty, 1]$

Definition
$x_0 \in (a,b)$ heißt Lokale Minimalstelle bzw. Lokale Maximalstelle und $f(x_0)$ heißt lokales Minimum bzw. lokales Maximum, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(x_0) < f(x)$ bzw. $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ (bzw. $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$) gilt.

„$f(x_0)$ ist der kleinste (bzw. größte) Wert in einer (kleinen) Umgebung von x_0."

Satz
f besitzt an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ eine lokale Minimum-/ Maximumstelle, falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
Wenn $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 eine lokale Minimumstelle,
wenn $f''(x_0) < 0$ dann ist x_0 eine lokale Maximumstelle.

Definition
$x_0 \in (a,b)$ heißt Sattelpunkt von f, falls

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \tag{1.11}$$

Beispiel

1. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
   $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
   $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Minimumstelle

2. $f(x)) - x^2$
   $f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
   $f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Maximumstelle

3. $f(x) = x^3$
   $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ ist kein stationärer Typ
   $f''(x) = 6x, \quad f''(x_0)) = f''(0) = 6 * 0 = 0$
   $f'''(x) = 6 > 0 \Rightarrow x_0 = 0$ ist ein Sattelpunkt.

4. $f(x) = x^4$
   $f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
   $f''(x) = 12x^2, \quad f''(x_0) = f''(0) = 0$
   $f'''(y) = 24x, \quad f'''(x_0) = f'''(0) = 0$
   $f^{(4)}(x) = 24 > 0$

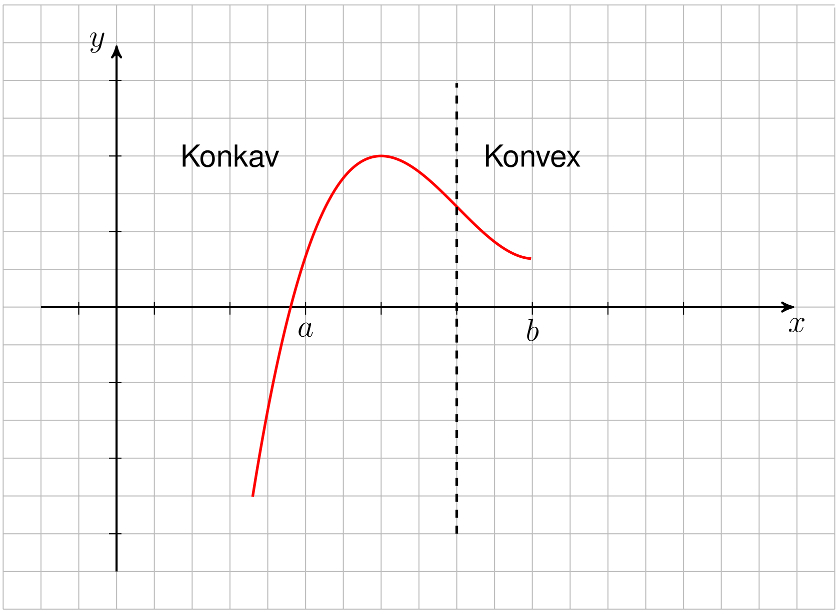
Bemerkung
Wird bei einer Funktion $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ das Globale Minimum bzw. Globale Maximum gesucht, d.h. diejenige Stelle $x_0 \in [a,b]$, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ bzw. $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ ist, so werden alle lokalen Minimalstellen $x_1, \dots, x_n$ (bzw. Maximalstellen) und a, b miteinander verglichen.

$$f(x_0) = min(f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n))$$

bzw.

$$f(x_0) = max(f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n))$$

5.2 Krümmungsverhalten und Wendepunkte



Bemerkung

Konkav bedeutet anschaulich eine Wölbung des Funktionsgraphen im Vergleich zur Sekante bzw. eine „Rechtskurve“ in die Richtung der steigenden x- Werte. Konvex bedeutet „Delle“ bezüglich der Sekante bzw. „Linkskurve“.

Beispiel

1. Konvex: $f(x) = x^2$
2. Konkav: $f(x) = -x^2$

Satz

f ist auf $[a, b]$

1. Konvex, falls $f''(x) \geq 0$
   (d.h. falls die erste Ableitung $f'(x)$ monoton wachsend ist)
2. Konkav, falls $f''(x) \leq 0$
   (d.h. falls die erste Ableitung $f'(x)$ monoton fallend ist)

Definition

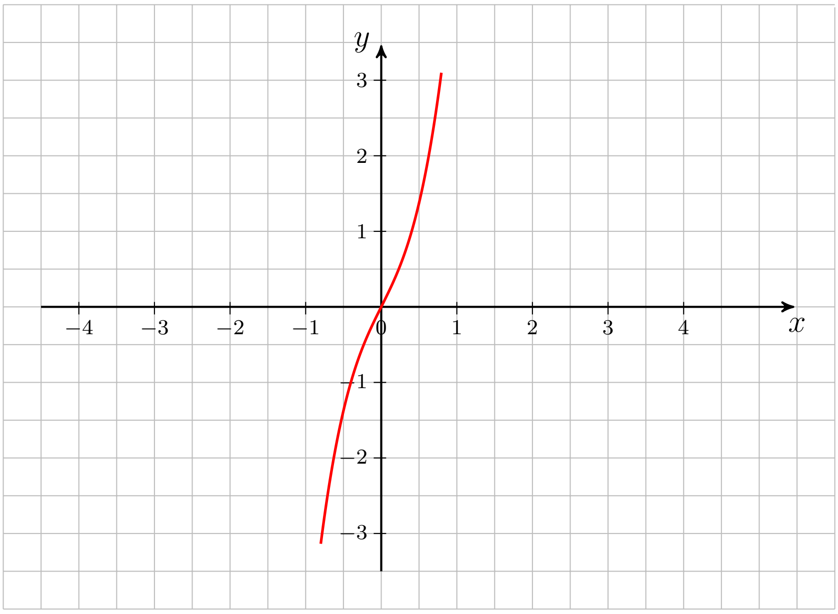
Falls $f''(x_0) = 0$ und zusätzlich $f'''(x_0) \neq 0$, so wird x_0 Wendepunkt genannt.

Bemerkung

1. Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten
2. Ein Wendepunkt, wo der Anstieg Null ist, d.h. für den $f'(x_0) = 0$ gilt, ist ein Sattelpunkt.

Beispiel

$f(x) = 3x^3 + 2x \qquad x \in \mathbb{R}$



Nullstellen:

$3x^3 + 2x = x(3x^2 + 2) \longrightarrow$ einzige Nullstelle bei $x = 0$

$f'(x) = 9x^2 + 2 > 0 \longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend, keine lokalen Extrema oder Sattelpunkte

$$f''(x) = 18x \Rightarrow \begin{cases} < 0 & x < 0 \text{ Konkav} \\ = 0 & x = 0 \text{ Wendepunkt} \\ > 0 & x > 0 \text{ Konvex} \end{cases}$$

5.3 Kurvendiskussion

Beispiel

$f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. $x = 0$ ist Definitionslücke
2. $x = 0$ ist eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms, aber keine Nullstelle des Zählerpolynoms
   $\rightarrow x = 0$ ist (einfache) Polstelle

   Verhalten bei $x = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{\searrow 0} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \underline{\underline{+\infty}}$$

3. $f(-x) = \frac{-5(-x)^2+5}{(-x)^3} = \frac{-5x^2+5}{-x^3} = \underline{\underline{-\left(\frac{-5x^2+5}{x^3}\right) = -f(x)}}$

   f ist ungerade, d.h. spiegelsymmetrisch zum Ursprung.

4. Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \frac{x^2\left(-5+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right) * \left(-5 + \frac{5}{x^2}\right) = 0$$

   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

5. Nullstellen:
   $-5x^2 + 5 = 0 \longrightarrow \underline{\underline{x_{1\ |\ 2} = 1 \ \mid\ -1}}$

6. Schnittpunkt entfällt, weil $f(0)$ nicht im Definitionsbereich liegt.

7. Besondere Kurvenpunkte

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{-10x(x^3) - (-5x^2+5) * 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-10x^4 + 15x^4 - 15x^2}{x^6}$$
$$= \frac{5x^4 - 15x^2}{x^6} = \frac{5x^2(x^2-3)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{5(x^2-3}{x^4}}}$$

$$f''(x) = 5\left(\frac{2x * x^4 - (x^2-3) * 4x^3}{x^8}\right) = 5\left(\frac{2x^5 - 4x^5 + 12x^3}{x^8}\right)$$
$$= \frac{5x^3(-2x^2+12)}{x^5} = \underline{\underline{\frac{10(-x^2+6}{x^5}}}$$

$$f'''(x) = 10\left(\frac{-2x(x^5) - (-x^2+6) * 5x^4}{x^{10}}\right) = \frac{10}{x^{10}}\left(-2x^6 + 5x^6 - 30x^4\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{30}{x^8}\left(x^2-10\right)}}$$

Extrema herausfinden

$f'(x) = 0$:

$$\frac{5(x^2-3)}{x^4} = 0 \qquad x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{10\left(-(\sqrt{3})^2+6\right)}{(\sqrt{3})^5} = \frac{30}{(\sqrt{3})}^5 > 0$$

Ergebnis aus erster Ableitung in Ursprungsterm einsetzen

$$f(\sqrt{3}) = \frac{-5(\sqrt{3})^2+5}{(\sqrt{3})^3} = \frac{-10}{3\sqrt{3}} = \underline{\underline{-1.92}}$$

Analog: $f''(-\sqrt{3}) < 0, f(-\sqrt{3}) = +1.92$

Wendepunkte

$f''(x) = 0$

$\frac{10(-x^2+6)}{x^5} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6, x_1 = \sqrt{6}, x_2 = -\sqrt{6}$

$$f'''(\sqrt{6}) = \frac{30\left((\sqrt{6})^2 - 10\right)}{(\sqrt{6})^6} = \frac{-120}{6^3} < 0 \longrightarrow \sqrt{6} \text{ ist Wendepunkt}$$

Analog für $f'''(-\sqrt{6}) > 0 \neq 0 \longrightarrow -\sqrt{6}$ ist Wendepunkt

8. Funktion ist
   - streng monoton wachsend in $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \infty\right)$
   - streng monoton fallend in $\left[\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right]$
   - streng konvex in $\left(-\infty, \sqrt{6}\right] \cup \left(0, \sqrt{6}\right]$
   - streng konkav in $\left[-\sqrt{6}, 0\right) \cup \left[\sqrt{6}, \infty\right)$.

9. Die Funktion ist
   - nach oben unbeschränkt $\rightarrow$ kein globales Maximum.
   - nach unten unbeschränkt $\rightarrow$ kein globales Minimum

6 Anwendungen der Differentialrechnung

6.1 Regel von Bernoulli L' Hospital

Ziel

Bestimmung des Grenzwertes $x \rightarrow x_0$ oder $x \rightarrow \pm\infty$ für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ (auch „$0 * \infty$“).

Beispiel

1. $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\rightarrow\infty}(e^{-x} * \ln x) = \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

Satz
Seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.12}$$

(Gilt auch für einseitige Grenzwerte und Grenzwerte $x \to \pm\infty$)

Beispiel

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 2$
   $g(x) = x^2 - 1 \quad g'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

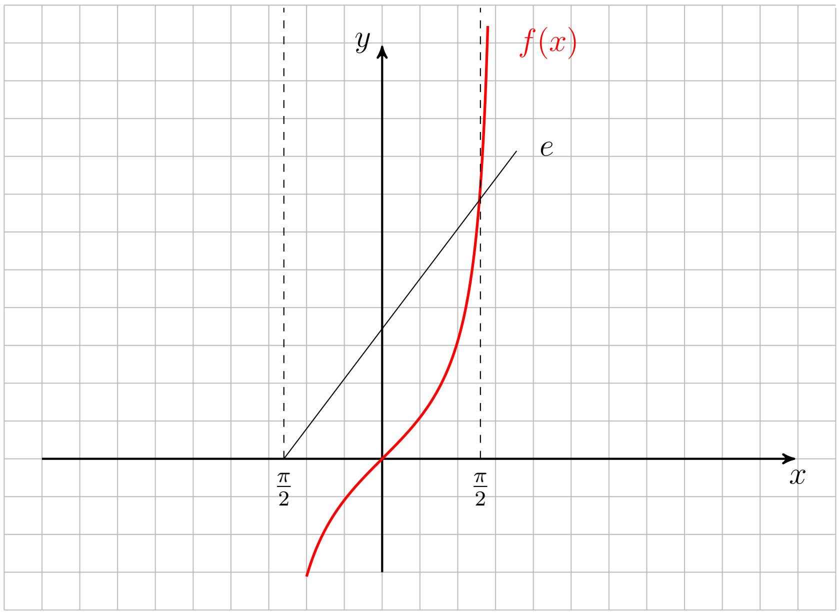
2. $f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
   $g(x) = e^x \quad g'(x) = e^x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = „\frac{0}{\infty}“ = \underline{\underline{0}}$$

6.2 Newton-Verfahren

Ziel
Näherungsweise Berechnung der Nullstellen einer Funktion bzw. der Lösungen einer Gleichung.

Beispiel
$\tan x = x + 2$



$0 = g(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) * (x_1 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$
$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) = x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.13}$$

Beispiel

$f(x) = \tan x - x - 2$
$f'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n - 2}{\tan^2 x_n} \Rightarrow x_0 = \underline{\underline{1.5}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wichtig: Die richtige Wahl eines geeigneten Startwertes!

6.3 Taylorpolynom

Ziel

Eine Funktion $f(x), x \in D$ möglichst gut durch ein Polynom zu approximieren.

1. Wahl eines Entwicklungspunktes x_0. Oft $x_0 = 0$
2. Bestimmung eines Polynoms $T(X) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n$ so dass

- $f(x_0) = T(x_0)$
- $f'(x_0) = T'(x_0)$
- $f''(x_0) = T''(x_0)$
- $f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}(x_0)$

Beispiel
Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$f(0) = T(0) = a_0$
$f'(0) = T'(0) = [a1 + a_2 * 2x + \cdots + a_n x^{n-1}]_{x=0} = a_1$
$f''(0) = T''(0) = [2a_2 + 6a_3 * x + \cdots + a_n * n(n-1)x^{n-2}]_{x=0} = 2a_2$
$\vdots$
$f^{(k)}(0) = T^{(k)}(0) = 1 * 2 * 3 * \cdots * k * a_k = k!a_k, k = 0, 1, 2, \ldots$

Definition
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Das Polynom

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \underbrace{f(0)}_{a_0} + \underbrace{f'(0)}_{a_1} *x + \frac{f''(0)}{2} * x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned} \tag{1.14}$$

heißt Taylorpolynom vom Grad n an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ (auch McLaurin-Polynom).

Beispiel
$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)} = \sin x, f^{(5)} = \cos x$

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1, f^{(4)} = 0, f^{(5)} = 1$

$T_1(x) = f(0) + f'(0) * x = 0 + 1x = x \ldots$ lineare Approximation von $\sin x$ in $x_0 = 0$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) * x + \frac{f''(x)}{2} * x^2 = 0 + 1x + \frac{0}{2} * x^2 = x$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0) * x + \frac{f''(0)}{2} * x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} * x^3 = x + \frac{(-1)}{6} * x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} * x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} * x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Bemerkung

Für eine beliebigen Entwicklungspunkt x_0 hat das Taylorpolynom die Form

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} * x^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} * x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Definition

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{1.16}$$

Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

7 Ökonomische Funktionen

Anmerkung
Definitionen und Anmerkungen sind als PDF im Opal zu finden

- Folie 7 Ökonomische Funktionen
- Folie 7.1 Verwendung von Funktionen in den Wissenschaften
- Eigenschaften der Kostenfunktion

Beispiel

1. Nachfragefunktion:
   $p(x) = 10 - 0.5x, x \in [0, 20] \Leftrightarrow \frac{p-10}{-0.5} = x$
   $\Longrightarrow x(p) = -2p + 20 \ldots$ Umkehrfunktion zu $p(x)$

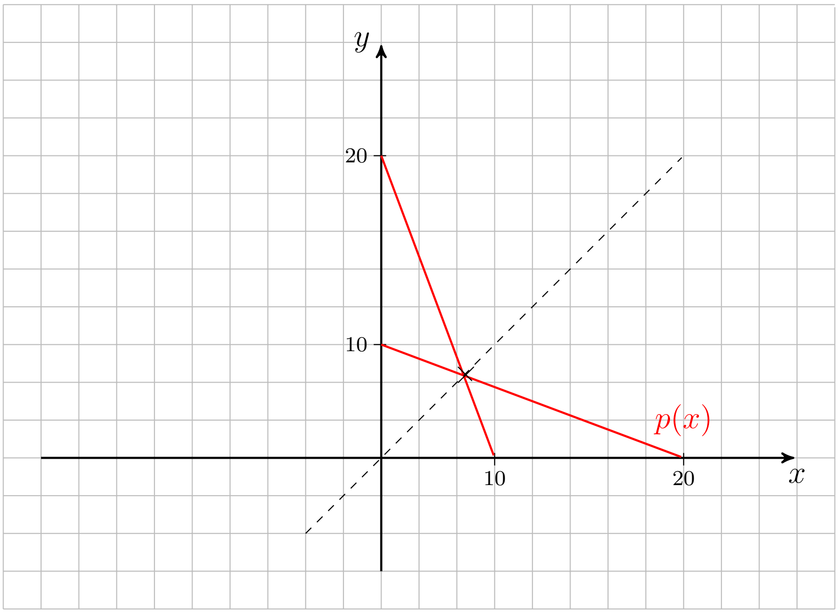


Abbildung 1.1: Grafisch - Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$

2. Kostenfunktion
   $K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800 \quad x \geq 0$
   $K_f = K(0) = 800 \ldots$ Fixkosten
   $K_v = K(x) - K_f = 0.01x^3 - x^2 + 60x \quad x \geq 0$

   Es gilt

$$K(x) = K_f + K_v(x) \tag{1.17}$$

7.1 Stückkosten und Durchschnittskosten

Gegeben: Kostenfunktion $K(x), x \geq 0$

$$k(x) = \underbrace{\frac{K(x)}{x}}_{\text{Stückkosten}} + \underbrace{\frac{K_f(x)}{x}}_{\text{Stückfixkosten}} + \underbrace{\frac{K_v(x)}{x}}_{\text{Variable Kosten}} \tag{1.18}$$

Beispiel

$K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800 \quad x \geq 0$

$K_f = K(0) = 800 \ldots$ Fixkosten

$K_v = K(x) - K_f = 0.01x^3 - x^2 + 60x \quad x \geq 0$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \underbrace{0.01x^2 - x + 60}_{K_v(x)} + \underbrace{\frac{800}{x}}_{k_f}$$

Stückkostenfunktion $k(x)$: Ist der Zusammenhang zwischen produziertem Output $x \geq 0$ und den Durchschnittskosten $k(x)$ pro Mengeneinheiten.

Eigenschaften

- Positiv
- Monotonieverhalten und Extremwerte können grafisch mit Hilfe der sogenannten Fahrstrahlanalyse ermittelt bzw. abgeschätzt werden.

Beispiel zur Fahrstrahlanalyse

$K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800$

Formel

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \tan \alpha \tag{1.19}$$

wobei $\alpha \ldots$ Winkel zwischen Fahrstrahl (d.h. Vektor $\begin{pmatrix} x \\ K(x) \end{pmatrix}$ und positiver x-Achse

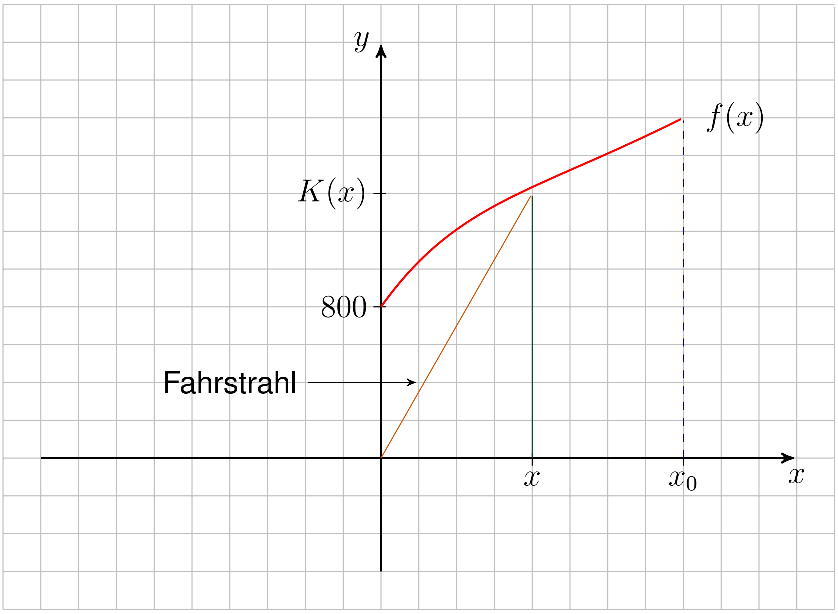


Abbildung 1.2: Exponentialfunktion mit Fahrstrahl

Die Fahrstrahlanalyse zeigt:

Es existiert genau ein Min x_0 der Stückkostenfunktion (im Beispiel)

Bezeichnung: $x_0 \dots$ Betriebsoptimum

Beispiel

$k(x) = 0.01x^2 - x + 60 + \frac{800}{x}$

$k'(x) = 0.02x - 1 - \frac{800}{x^2} = 0$

$0.02x^3 - x^2 - 800 = 0$, numerisch Lösen (per Hand oder CAS)

$x_0 = 60.815, k(x_0) = 49.324$

$k''(x) = 0.02 + \frac{1600}{x^3} > 0 \longrightarrow$ Min bei x_0

Definition

Die Minimalstelle x_0 der Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ heißt Betriebsoptimum. Der dazugehörige Wert $K(x_0)$ ist das langfristige Preisoptimum und stellt die untere Schranke für den (langfristigen, mittleren) Abgabepreis des Produktes dar.

7.2 Die Erlösfunktion

Der Erlös E (Umsatz) ist in Abhängigkeit von dem Absatz x oder dem Preis p.

Grundlage
Nachfragefunktion $x = x(p)$ bzw. $p = p(x)$

$$E(x) = x * p(x) \text{ bzw. } E(p) = x(p) * p \tag{1.20}$$

Beispiel
$p(x) = 100 - 0.4x \quad x \in (0, 25)$

- $E(x) = x * p(x) = \underline{\underline{100x - 0.4x^2}} \quad x \in (0, 25)$
- $E(p) = p = 100 - 0.4x$
  $p - 100 = -0.4x \Rightarrow x = \frac{p-100}{-0.4}$
  $x = 2.5p - 250 = x(p), \quad p \in (0, 100)$

  $E(p) = p * x(p) = \underline{\underline{2.5p^2 - 250p}} \quad p \in (0, 100)$

7.3 Gewinnfunktion

$$G(x) = E(x) - K(x) \qquad x \in D_G \subseteq (0, \infty) \tag{1.21}$$

Ist der Zusammenhang zwischen dem Gewinn G und der Produktmenge (Output) x, die am Markt umgesetzt wird.

- $G \ldots$ Gewinn (in GE)
- $x \ldots$ Nachfrage (in ME)

$$E(x) = x * p(x) \Longrightarrow G(x) = x * p(x) - K(x)$$

Eigenschaften

1. monoton steigend bis zum Output $x_{G_{max}}$ mit dem maximalem Gewinn, danach progressiv fallend

2. In der Regel zwei Nullstellen x_1, x_2

   Eigenschaften $x_1 \ldots$ untere Gewinnschwelle

   $x_2 \ldots$ obere Gewinnschwelle

$$G(x) \geq 0 \text{ für } x \in [x_1, x_2]$$

Beispiel

$p(x) = 100 - 0.4x \quad x \in (0, 25)$

$K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800$

$G(x) = p(x) * x - K(x) = (100 - 0.4x)x - (0.01x^3 - x^2 + 60x + 800)$

$\underline{\underline{G(x) = -0.01x^3 + 0.6x^2 + 40x - 800}}$

Wo liegen die Gewinnschwellen, wo liegt der Maximalgewinn?

Gewinnmaximum: $G'(x) = -0.03x^3 + 1.2x + 40 = 0$

$\longrightarrow$ Auflösen der Gleichung mit TR liefert $x_0 = 61.633$

$G''(x) = -0.06x + 1.2 \quad G''(61.633) < 0 \longrightarrow$ Max liegt bei x_0, also $x = 61.633$

$G(x_{G_{max}}) = G_{max} = G(61.633) = \underline{\underline{1603.29GE}}$

Gewinnschwelle: $G(x) = 0 \Rightarrow 0.01x^3 + 0.6x^2 + 40x - 800 = 0$

Auflösen durch approximieren, z.B. mit dem Newton Verfahren

(TR: $x_1 = 16.92, x_2 = 93.60$)

Für $16.92 \leq x \leq 93.60$ ist $G(x) > 0$, d.h. $x_1 \ldots$ untere Gewinnschwelle

$x_2 \ldots$ obere Gewinnschwelle

Eng verbunden mit der Gewinnfunktion ist die Stückfunktion (Durchschnittsgewinn)

$$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{x * p(x) - K(x)}{x} = p(x) - \frac{K(x)}{x} = p(x) - k(x) \tag{1.22}$$

Das Max der Stückfunktion fällt in der Regel nicht mit dem Maximum der Gewinnfunktion zusammen.

Beispiel

$g(x) = \frac{0.01x^3+0.6x^2+40x+800}{x} = -0.01x^2 + 0.6x + 40 - \frac{800}{x}$

$g'(x) = -0.02x + 0.6 + \frac{800}{x^2} = 0 \Longrightarrow x_0 = 47.63$

$g''(x) = -0.02 - \frac{1600}{x^3} < 0 \Longrightarrow x_0 = x_{G_{max}}$ ist Maximumstelle

7.4 Wachstumsfunktionen

1. **Unbegrenztes Wachstum**

   Beispiel

   m-fache unterjährige Verzinsung (z.B. $m = 4$, quartalsweise), Anfangskapital K_0.
   Nominalzins i_n

   Zur Erinnerung
   Zinsperiode $= \frac{\text{1 Jahr}}{m}$, Periodenzins $= \frac{i_n}{m} = i_p$

   Kapital nach 1 Zinsperiode: $K_n + i_p * K_0 = K_0 \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)$
   1 Jahr: $K_0 * \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m$
   k Jahren: $K_0 \left(\left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m\right)^k = K_0 * a^k$

   Frage: Was passiert bei $m \to \infty$, der sogenannten „stetigen Verzinsung“?
   Klar: Es muss $\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m$ betrachten werden.

   Hilfsfunktion:
   $$\begin{aligned} a_m &= \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^m \\ \ln(a_m) &= m * \ln\left(1 + \frac{i_n}{m}\right) \longrightarrow \text{„}\infty * 0\text{“} \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{i_n}{m}\right)}{\frac{1}{m}} \longrightarrow \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{i_n}{m}\right)}{\frac{1}{m}} &= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{i_n}{m}} * \left(-\frac{i_n}{m^2}\right)}{-\frac{1}{m^2}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m + i_n} * \frac{(-i_n)}{m^2} * (-m^2) = \frac{i_n}{m + i_n} \\ &= \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} e^{\ln a_m} = e^{i_n} \Rightarrow= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \end{aligned}$$

   Damit ist das Kapital nach k Jahren bei stetiger Verzinsung

   $$K_0 \left(e^{i_n}\right)^k = K_0 = e^{i_n * K}$$

Die Größe i_n kann interpretiert werden als anteiliger Kapitalzuwachs pro (infinitesimal kleine) Zinsperiode.
Kapitalzuwachs: $K_0 * \frac{i_n}{m}$, anteiliger (relativer) Kapitalzuwachs

$$\frac{K_0 * \frac{i_n}{m}}{K_0} = \frac{i_n}{m} \tag{1.23}$$

Das Verhältnis von relativem Kapitalzuwachs zur Länge der Zinsperiode

$$\frac{\frac{i_n}{m}}{\frac{\text{1 Jahr}}{m}} = \frac{i_n}{\text{1 Jahr}} \tag{1.24}$$

Definition
Die Funktion $B = B(t) = B_0 * e^{\lambda * t}, t > 0$ beschreibt den Zusammenhang zwischen einem Bestand B (z.B. Bevölkerung, Substanz, Geldmenge) und der Zeit t bei unbeschränktem Wachstum. Dabei ist $B_0 = B(0)$ der Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die stetige Wachstumsrate, d.h. der relative Zuwachs pro (kleiner) Zeiteinheit.

2. **Logistisches Wachstum**
Falls ein Bestand B zunächst exponentiell wächst, dann aber eine Stättigungs- oder Kapazitätsgrenze erreicht, so spricht man von logistischem Wachstum..

Definition
Die Funktion

$$B = B(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}} \qquad t > 0 \tag{1.25}$$

mit den Parametern $a, b, c > 0$ heißt logistische Funktion und beschreibt den Zusammenhang zwischen einem Bestand B (z.B. Bevölkerung, Spartätigkeit) und der Zeit t. Dabei ist

$$B(0) = \frac{a}{1 + b} \tag{1.26}$$

der Anfangsbestand und a die Sättigungsgrenze.

8 Analyse Ökonomischer Funktionen

8.1 Das Differential einer Funktion f

Gegeben:
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar

Für kleine Änderungen dx von x gilt

$$\triangle f \approx df = f'(x_0)dx \tag{1.27}$$

Bezeichnung: $df \ldots$ Differential von f an der Stelle x.

Definition
Das Differential df einer Funktion f an der Stelle x_0 zum Zuwachs dx ist der Wert

$$df := f'(x)dx \tag{1.28}$$

Beispiel
$K(x) = 0.06x^3 - 2x^2 + 60x + 200, x > 0$
Output $x_0 = 10ME$
gesucht: Kostenänderung bei

1. Produktionssteigerung um $2ME$
2. Produktionssenkung um $1ME$

Lösung
$K'(x) = 0.18x^2 - 4x + 60$

$$dK = K'(x_0) * dx_0 = \underbrace{0.18 * 10^2 - 4 * 10 + 60}_{K'(10)=38} dx_0 = \underline{\underline{38dx_0}}$$

1. $dx_0 = 2 \qquad dK = 38 * 2 = 76GE$
2. $dx_0 = -1 \qquad dK = 38 * (-1) = -38GE$

8.2 Ökonomische Grenzfunktion

Definition

Die erste Ableitung einer ökonomischen Funktion f heißt Grenzfunktion (auch Marginalfunktion). Sie beschreibt den Zuwachs von $f(x)$, der durch eine weitere Einheit von x hervorgerufen wird.

Beispiel

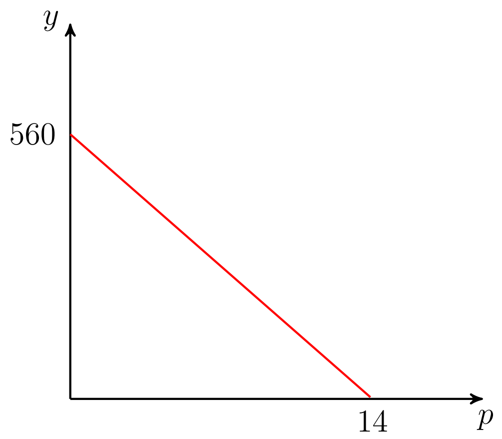
1. $K'(x) = 0.18x^2 - 4x + 60 \ldots$ Grenzkostenfunktion
   Sie beschreibt den Kostenzuwachs der bei Änderung von x auf $x+1$, also Erhöhung des Outputs um eine Einheit, entsteht.
2. Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0.06x^2 - 2x + 60 + \frac{200}{x}$
   Grenzkostenfunktion $k'(x) = 0.12x - 2 - \frac{200}{x^2}, x > 0$

8.3 Elastizitäten

Beispiel

$x(p) = -40p + 560, \quad 0 < p < 14$

Nachfrage (in Kg) nach einem Gut in Abhängigkeit vom Marktpreis p (in Euro/Kg)



Grenznachfrage: $x'(p) = -40$, d.h. wenn der Preis um 1 Euro / Kg steigt, dann sinkt die Nachfrage um $40Kg$ (egal wie groß der Ausgangspreis war). Relative Nachfrageänderungen im Vergleich zu relativen Preisänderungen lassen sich oft besser interpretieren.

Gegeben
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, ökonomische Funktion

Definition
Das Verhältnis der relativen Änderungen $\frac{df}{f}$ und $\frac{dx}{x}$ hießt Elastizität von f an der Stelle x

$$\epsilon_f(x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} \underbrace{=}_{(*)} f'(x) * \frac{x}{f(x)} \tag{1.29}$$

Bemerkung

1. Durch Umformen ergibt sich
   (*): $\epsilon_f(x) = \frac{df}{f} * \frac{x}{dx} = \frac{df}{dx} * \frac{x}{f} = f'(x) * \frac{x}{f(x)}$
2. Die Zuordnung $x \longmapsto \epsilon_f(x)$ ist eine Funktion, die Elastizitätsfunktion von f
   Bezeichnung: $\epsilon_f : x \longmapsto \epsilon_f(x)$

Beispiel
$x(p) = -40p + 560, \quad 0 < p < 14$

$$\epsilon_x(p) = x'(p) * \frac{p}{x(p)} = -40 * \frac{p}{(-40p + 560)}$$

$$= \frac{-40}{-40p + 560} = \underline{\underline{1 + \frac{560}{40p - 560}}}$$

Dies ist die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises.
Also: $\epsilon_x(p)$ gibt an, um wie viel Prozent sich die Nachfrage erhöht, wenn p um 1% geändert wird.

Allgemein
Die Elastizitätsfunktion $\epsilon_f(x)$ gibt an, um wie viel Prozent sich $f(x)$ ändert (erhöht), wenn x um 1% erhöht wird .

Beispiel

Preis-Nachfrage bzw. Nachfrage-Preisfunktion

$x(p) = -40p + 560, \quad 0 < p < 14$

$x'(p) = -40 \qquad \epsilon_x(p) = \frac{-400}{-40p+560}$

$$x(p) = -40p + 560 \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{40} * x + 14 \qquad \text{Umkehrfunktion}$$

$$\epsilon_p(x) = p'(x) * \frac{x}{p(x)} = -\frac{1}{40} * \frac{x}{-\frac{1}{40}x + 14} = \underline{\underline{\frac{-x}{-x+560}}}$$

$$\epsilon_x(p) = \frac{-40p}{40p+560} \Longleftrightarrow \epsilon_p(x) = \frac{-x}{-x+560}$$

Bemerkung

Die Funktion $I(x) = x, \quad x \in (a,b)$ hat die Elastizität $\epsilon_I(x) = 1$ denn

$$\epsilon_I(x) = I'(x) * \frac{x}{I(x)} = 1 * \frac{x}{x} = 1, \quad x \in (a,b)$$

Betrachten man eine ökonomische Funktion $F(x), x \in D$ (z.B. Kostenfunktion) im Vergleich zur zugehörigen Durchschnittsfunktion $f(x) = \frac{F(x)}{x}, x \neq 0, x \in D$ (z.B. Stückkosten). Dann gilt

$$F(x) = x * f(x) \quad (= I(x) * f(x)) \tag{1.30}$$

Also:

$$\epsilon_F(x) = \underbrace{\epsilon_I(x)}_{=1} + \epsilon_f(x) = 1 + \epsilon_f(x) \tag{1.31}$$

Außerdem:

$$\epsilon_F(x) = F'(x) * \frac{x}{F(x)} \Longrightarrow \epsilon_F(x) = \frac{F'(x)}{f(x)} \tag{1.32}$$

Die Elastizität von F ist das Verhältnis von Grenzfunktion (F') zu Durchschnittsfunktion (f).

Anwendung

AMOROSO-ROBINSON-Gleichung

Erlösfunktion: $E(x) = x * p(x); \frac{E(x)}{x} = p(x)$

Grenzerlös: $E'(x) = F'(x) = f(x)\epsilon_F(x) = p(x)\epsilon_E(x) = p(x)(1 + \epsilon_p(x)$

AMOROSO-ROBINSON-Gleichung

$$E'(x) = p(x)\,(1 + \epsilon_p(x)) = p(x)\left(1 + \frac{1}{\epsilon_x(p)}\right) \tag{1.33}$$

2 Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

1 Funktionen im $\mathbb{R}^n$

Definition
Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, die jedem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ eine reelle Zahl $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ zuordnet, heißt reelle Funktion von mehreren Variablen $x_1, \ldots, x_2$.
Schreibweise: $D \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

Beispiel

1. $f(x_1, x_2) = 3 + x_1 + 2x_2 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   lineare Funkion
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   quadratische Funktion
3. $f(x_1, x_2) = x_1 * x_2 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   Monom vom Grad 2, Sonderform eines Polynoms

Definition
Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so heißt die Menge

$$G := \{(x_1, \ldots, x_2; y) \text{ mit } y = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Graph der Funktion f.

Bemerkung
Für $n \geq 3$ kann der Graph einer Funktion im $\mathbb{R}^3$ nicht mehr grafisch dargestellt werden. Im folgenden werden deshalb meist Funktionen von 2 Variablen als Beispiel behandelt, die

meisten Ergebnisse lassen sich aber direkt auf Funktionen mit 3 und mehr Variablen übertragen. Zur Bezeichnung: statt $y = f(x_1, x_2)$ wird häufig $z = f(x, y)$ geschrieben.

Beispiel

1. Achsenschnittpunkte:
   x_1-Achse: $x_2 = 0, y = 0, 0 = 3 + x_1 + 2 * 0$
   $x_1 = -3$

   x_2-Achse: $x_1 = 0, y = 0$
   $x_2 = -1.5$

   y-Achse: $x_1 = 0, x_2 = 0$
   $y = 3 + 0 + 0 = 3$

Bemerkung
Für die anschauliche Darstellung von Funktionen mit mehreren Variablen werden oft Höhenlinien (oder Niveaulinien) verwendet.

Definition
Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so heißt die Menge

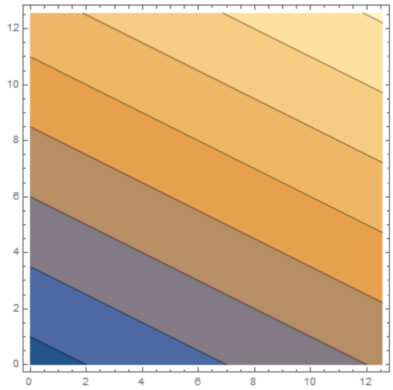
$$N_c := \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\} \tag{2.1}$$

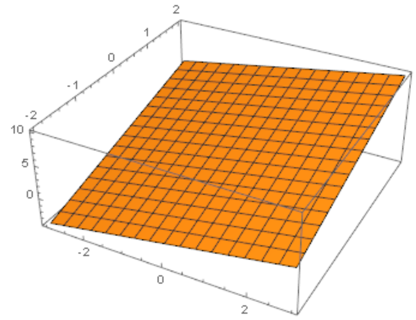
Niveaulinie bzw. Höhenlinie von f zum Niveau c.

Beispiel

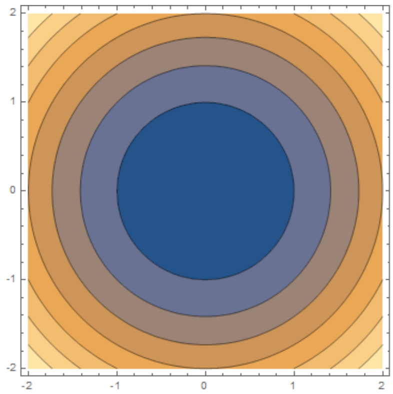
1. $f(x_1, x_2) = 3 + x_1 + 2 * x_2$

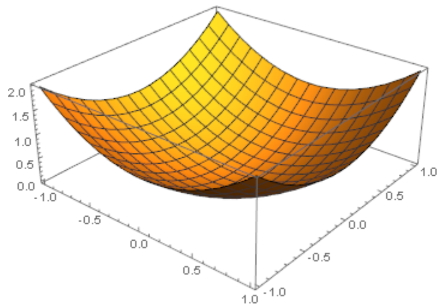
   c ist fest vergeben; $c = f(x_1, x_2) = 3 + x_1 + 2 * x_2$
   $x_2 = \frac{c-3-x_1}{2} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{c-3}{2}$





2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
   c ist fest vorgeben, $c = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
   Kreisgleichung mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{c}$





1.1 Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variablen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Falls $y = 0$ und x beliebig

$$f(x,y) = \frac{4x * 0}{x^2 + 0^2} = 0 \text{ für alle } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0$$

Falls $y = x$, dann

$$f(x,x) = \frac{4xy}{x^2 + x^2} = 2 \text{ für alle } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 2$$

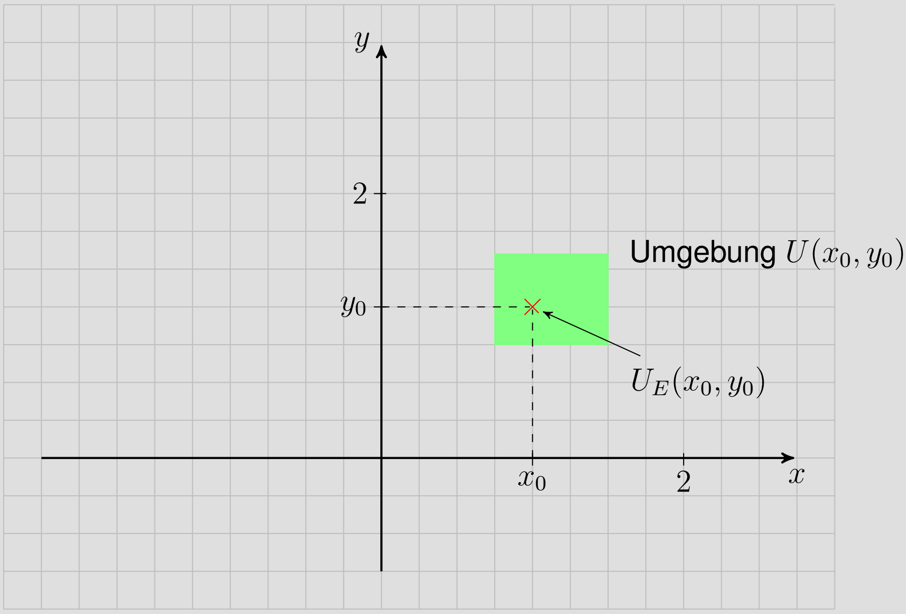
Bemerkung zur Stetigkeit

1. Alle Polynome sind stetig
2. Verknüpfungen stetiger Funktionen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Verkettung) sind stetig.
3. Für Funktionen mit mehreren Variablen gibt es kein „Verhalten im Unendlichen“, denn der Grenzwert
$$\lim_{\underbrace{(x_1,\ldots,x_n)\to\infty}_{\text{Was ist das?}}} f(\ldots)$$
existiert nicht.

Umgebung

Die Umgebung $U(x_0, y_0)$ ist die Menge, für die ein $\epsilon > 0$ existiert.

$$U_\epsilon(x_0, y_0) \subseteq U(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$



Definition

Es gelte $U(x_0, y_0) \subseteq Db(f)$, f heißt stetig an der Stelle (x_0, y_0) wenn

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

2 Partielle Ableitungen

Gegeben: $z = (x, y) \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \ldots$ Funktion mit zwei Variablen, stetig.
Falls $y = y_0$ fest gewählt wird, so ist $z = f(x, y_0)$ eine Funktion von einer Variable, nämlich x.

Beispiel

1. $z = f(x, y) = x^2 y \qquad x, y \in \mathbb{R}$
   Wähle $y = 2$, dann $z = f(x, 2) = x^2 2$ ist eine Funktion von einer Variable. Diese Funktion ist differenzierbar und hat die Ableitung $2 * 2x = 4x$.

   Etwas allgemeiner: $y = y_0$, dann ist $z = f(x, y_0) = x^2 y_0$ eine Funktion mit einer Variable. Diese Funktion ist differenzierbar mit der Ableitung $2y_0 x$
   Bezeichnung: $\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) = 2y_0 x$

2. $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + y^2 - x$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + y^2 - x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y}$$

$$f_x = \frac{2x}{y^3} - 1 \qquad\qquad f_y = -\frac{3x^2}{y^4} + 2y$$

$$f_{xx} = \frac{2}{y^3} \qquad f_{xy} = -\frac{6x}{y^4} \qquad f_{yx} = -\frac{6x}{y^4} \qquad f_{yy} = \frac{12x^2}{y^5} + 2$$

Partielle Ableitungen

Definition

Die Funktion $z = f(x, y), x, y \in \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.4}$$

existiert. Analog dazu ist f an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach y differenzierbar, wenn

$$f_y(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2.5}$$

existiert

Diskussion

1. f heißt im Gebiet partiell differenzierbar, wenn f für alle $(x_0, y_0) \in G$ partiell differenzierbar ist.
2. Analog dazu sind Funktionen mit mehr als 2 Veränderlichen
   $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Die Variablen $x_2, \ldots, x_n$ werden festgehalten, x_1 wird differenziert $\to f_{x1}$ usw.
3. Bezeichnung

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = z_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, f_y \right) \tag{2.6}$$

4. Höhere Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \ldots \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Satz von SCHWARZ

Die Funktion f, f_x, f_y, f_{xy} seien in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ erklärt.Ferner sei f_{xy} an der einen Stelle (x_0, y_0) stetig. Dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0) \tag{2.8}$$

Bemerkung
Verallgemeinerung von mehr als 2 Variablen
$z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad u_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial z}{\partial u_i} * \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Beispiel
$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

- $f_y(x,y) = 3 * 2y * e^{-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)\frac{d}{dy}e^{-x^2-y^2}$
  $= 6y * e^{-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2} * (-2y)$
  $= \underline{\underline{2y * e^{-x^2-y^2}(3 - x^2 - 3y^2}}$

  Punkt für x einsetzen:
  $f_y(x,y)\Big|_{x=1} = f_y(1,y) = 2ye^{-1-y^2}(2-3y^2)$

3 Differenzierbarkeit und lineare Approximation im $\mathbb{R}^n$

3.1 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion von n Variablen

1. f heißt partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots f_{x_n}$ existieren
2. f heißt differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots f_{x_n}$ existieren und stetig sind.

Bemerkung

1. $f : D \to R$ mit $D \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann differenzierbar, wenn alle Höhenlinien innerhalb des Definitionsbereiches D ununterbrochene, „glatte“ (d.h. ohne „Ecken“) Kurven sind.
2. $f : D \to R$ mit $D \in R^n$ ist genau dann differenzierbar, wenn alle Höhenlinien, die man erhält indem man jeweils $(n-2)$ Variable fixiert, innerhalb des Definitionsbereiches D ununterbrochene, „glatte“ (d.h. ohne „Ecken“) Kurven sind.

3.2 Tangentialebene

Satz

Falls $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, so gibt es in jedem Punkt $P = (x_0, y_0) \in D$ eine eindeutig definierte Tangentialebene. Sie ist gegeben durch die Gleichung

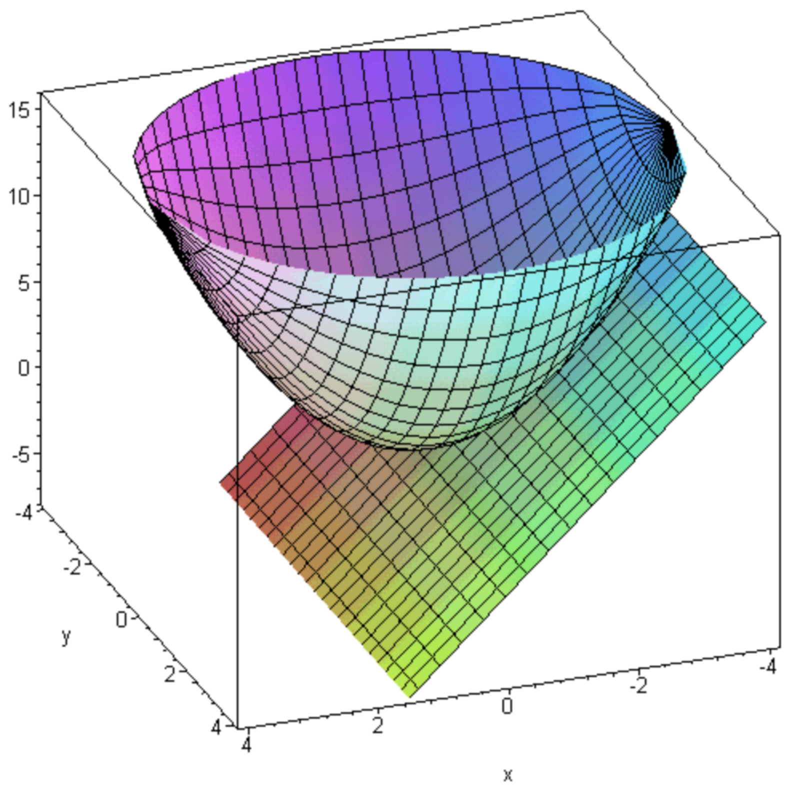
$$t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.10}$$

Bemerkung

1. Falls $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, so wird die lineare Approximation im Punkt $P = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in D$, welche durch die Gleichung

$$\begin{aligned} t(x_1,\ldots,x_n) =& f(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(n)}) + f_{x_1}(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(n)})(x_1 - x_0^{(1)}+ \\ & \ldots f_{x_n}(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(n)})(x_n - x_0^{(n)}) \qquad x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.11}$$

gegeben ist, Tangentialhyperebene genannt.



Beispiel

$z = (x^2 + y^2)e^{-x} \qquad P = (0,1)$

Tangentialebene

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((x^2+y^2)e^{-x}\Big) = 2x * e^{-x} + (x^2+y^2)(-e^{-x})$$
$$f_x(0,1) = 2 * 0e^{-0} + (0^2+1^2)(-e^{-0}) = -1$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2+y^2)e^{-x}\Big) = 2y * e^{-x}$$
$$f_y(0,1) = 2 * 1 * e^{-0} = 2$$

Bezeichnung: $\begin{pmatrix} f_x(0,1) \\ f_y(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bigtriangledown f(0,1)$

$f(0,1) = (0^2+1^2)e^{-0} = 1$

$\Rightarrow t(x,y) = 1 + (-1)(x-0) + 2(y-1) = 1 - x + 2y - 2 = \underline{\underline{-1 - x + 2y}} \qquad x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \Big(\bigtriangledown f(x_0,y_)\Big)^T \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= t(x,y) = f(x_0,y_0) + (\bigtriangledown f(x_0,y_0))^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Statt $P = (0,1)$ soll nun $P_2 = (0.1, 0.95)$ betrachtet werden. Wie stark ändert sich f?

- $x_0 = 0 \longrightarrow x_1 = 0.1$, d.h. Änderung $dx = 0.1$ in x-Richtung
- $y_0 = 1 \longrightarrow y - 1 = 0.95$, d.h. Änderung $dy = -0.05$ in y-Richtung

Also:

$$\begin{aligned} f(0,1) = 1 \to f(x_1,y_1) &= f(x_0+dx, y_0+dy) \\ &\approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy}_{L(x_1,y_1} \end{aligned}$$

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, d_y)dy \tag{2.12}$$

Bezeichnung: Differential von f im Punkt (x_0, y_0)

$$df := f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \tag{2.13}$$

Hier:
$dx = 0.1 \quad dy = -0.05$
$f_x(0,1) = -1 \quad f_y(0,1) = 2$

$$df = (-1)dx + 2dy = (-1) * 0.1 + 2(-0.05) = -0.2$$
$$\Rightarrow f(0.1, 0.95) \approx f(0,1) + df = 1 - 0.2 = \underline{\underline{0.8}} \quad \text{(wahrer Wert: } 0.83\text{)}$$

Beispiel

$f(x,y) = 2x^3 - y^2$ mit den Punkten $x_0 = 1, y_0 = 1$

1. z_0 bestimmen
   $z_0 = 2x^3 - y^2 \Longrightarrow z_0 = 2 * 1^3 - 1^2 = \underline{\underline{1}}$
2. $f(x,y)$ nach x und y ableiten
   - $f_x(x,y) = 6x^2$
   - $f_y(x,y) = -2y$
3. x_0, y_0 in die abgeleiteten Funktionen einsetzen
   - $f_x(x_0, y_0) = 6$
   - $f_y(x_0, y_0) = -2$
4. Einsetzen

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z - 1 &= 6 * (x-1) + (-2) * (y-1) \\ &= 6x - 6 - 2y + 2 + 1 = \underline{\underline{6x - 2y - 3}} \end{aligned}$$

4 Ökonomische Anbindungen der partiellen Ableitung

4.1 Partielle Grenzfunktionen und Elastizität

4.1.1 Partielle Grenzfunktion

Definition
Es sei $f(x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt die Funktion

$$f_{x_k}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_n)\qquad (x_1,\ldots,x_n)\in D \tag{2.14}$$

partielle Grenzfunktion von f bzgl. $x_k \quad (k=1,\ldots,n)$.

$\Rightarrow$ Änderung des Funktionswertes $f(x_1,\ldots,x_n)$ wenn x_k um eine Einheiot und wenn alle anderen Eingangsgrößen $x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$ unverändert gelassen werden.

Gegeben: $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $D\subset\mathbb{R}^n$, differenzierbar, ökonomische Funktion
$P=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_3^{(0)}\right)\in D\ldots$ Arbeitspunkt, aktueller Wert der Einflussgröße

Beispiel
Zwei verbundene Güter mit ungleichen Absatzmengen x_1 bzw. x_2 in Abhängigkeit von Marktpreisen p_1 und p_2 $\rightarrow$ Preis-Nachfrage-Funktion.

$x_1(p_1,p_2)=-0.5p_1+2p_2+10\ldots$ Nachfrage nach Gut 1
$x_2(p_1,p_2)=0.8p_1-1.5p_2+15\ldots$ Nachfrage nach Gut 2

Gesamterlös

$$\begin{aligned}E(p_1,p_2)&=\underbrace{x_1(p_1,p_2)*p_1}_{E_1}+\underbrace{x_2(p_1,p_2)*p_2}_{E_2}\ldots\text{ Gesamterlös}\\&=(-0.5p_1+2p_2+10)*p_1+(0.8p_1-1.5p_2+15)p_2\end{aligned}$$

$$\left(p_1^{(0)},p_2^{(0)}\right)=(8,5)\longrightarrow E(8.5)=\underline{\underline{197.5(GE)}}$$

Partielle Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial p_1} &= (-0.5)p_1 + (-0.5p_1 + 2p_2 + 10) * 1 + 0.8p_2 \\ &= \underline{\underline{-p_1 + 2.8p_2 + 10}}\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial p_1}\right|_{(8,5)} = \underline{\underline{16}}$$

Der Erlös wächst um 16 Einheiten, wenn p_1 um eine Einheit wächst.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial p_2} &= 2p_1 + (-1.5)p_2 + (0.8p_1 - 1.5p_2 + 15) * 1 \\ &= \underline{\underline{2.8p - 3p_2 + 15}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E}{\partial p_2}\right|_{(8,5)} &= 2.8 * 8 - 3 * 5 + 15 \\ &= \underline{\underline{22.4}}\end{aligned}$$

Der Erlös wächst um 22.4 Einheiten, wenn p_2 um eine Einheit wächst.

Totales Differential berechnen

$$\begin{aligned}dE &= \frac{\partial E}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial E}{\partial p_2}dp_2 \\ dE\Big|_{(8,5)} &= 16dp_1 + 22.4dp_2\end{aligned}$$

Totales Differenzial des Erlöses (totale Faktorvariation).

1. $dp_1 = 1, dp_2 = 1$

$$\Rightarrow dE = 16 + 22.4 = 38.4$$

   Erlös ändert sich um $+38.4$ Geldeinheiten, wenn sich p_1 und p_2 gleichzeitig um eine Einheit erhöht wird.

2. $dp_1 = 1.5, dp_2 = -2$

$$\Rightarrow 16 * (1.5) + 22.4 * (-2) = -20.8$$

Erlös fällt um 20.8 Geldeinheiten, wenn sich $p_1 = 1.5$ Einheiten wächst und $p_2 = -2$ Einheiten fällt.

4.1.2 Partielle Elastizität

Definition
Die Elastizität von f an der Stelle x beschreibt die relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ im Verhältnis zur relativen Änderung der Eingangsgröße x.

Beispiel
partiellen Elastizitäten des Erlöses bezüglich der Preise p_1 und p_2.
Zur Erinnerung

- $\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right) = (8, 5)$
- $E(8, 5) = 197.5$
- $\frac{\partial E}{\partial p}(8, 5) = 16$
- $\frac{\partial E}{\partial p_2} = 22.4$

$$\begin{aligned}\epsilon_{E,p_1} &= E_{p_1} * \frac{p_1}{E(p_1, p_2)} = \frac{\partial E}{\partial p_1} * \frac{p_1}{E(p_1, p_2)}\bigg|_{(8,5)} \\ &= 16 * \frac{8}{197.5} = \underline{\underline{0.648}}\ldots \text{ partielle Elastizität des Erlöses bzgl. } p_1\end{aligned}$$

Der Erlös ändert sich um 0.65% wenn sich p_1 um 1% erhöht (und p_2 konstant bleibt).

$$\begin{aligned}\epsilon_{E,p_2} &= E_{p_2} * \frac{p_2}{E(p_1, p_2)} = \frac{\partial E}{\partial p_2} * \frac{p_2}{E(p_1, p_2)}\bigg|_{(8,5)} \\ &= 22.4 * \frac{5}{197.5} = \underline{\underline{0.567}}\ldots \text{ partielle Elastizität des Erlöses bzgl. } p_2\end{aligned}$$

Der Erlös wächst um 0.567% wenn der Preis p_2 um 1% erhöht (und p_1 konstant bleibt).

Falls p_1 um 2% wächst und p_2 um 1.5% fällt, dann ändert sich der Erlös um

$$\epsilon_{E,p_1} * 2\% + \epsilon_{E,p_2} * (-1.5\%) = 0.648 * 2 + 0.567 * (-1.5) = \underline{\underline{0.445\%}}$$

Beispiel Fortgesetzt

Rechnen mit partiellen Elastizitäten

- $x_1(p_1, p_2) = -0.5p_1 + 2p_2 + 10$
- $x_2(p_1, p_2) = 0.8p_1 - 1.5p_2 + 15$

$$\epsilon_{x_1,p_1} = \frac{\partial x_1(p_1,p_2)}{\partial p_1} * \frac{p_1}{x_1(p_1,p_2)} = -0.5 * \frac{8}{16} = \underline{\underline{-0.25}}$$

$$\epsilon_{x_1,p_2} = \frac{\partial x_1(p_1,p_2)}{\partial p_2} * \frac{p_2}{x_1(p_1,p_2)} = 2 * \frac{5}{16} = \underline{\underline{0.625}}$$

$$\epsilon_{x_2,p_1} = \frac{\partial x_2(p_1,p_2)}{\partial p_1} * \frac{p_1}{x_2(p_1,p_2)} = \underline{\underline{0.46}}$$

$$\epsilon_{x_2,p_2} = \frac{\partial x_2(p_1,p_2)}{\partial p_2} * \frac{p_2}{x_2(p_1,p_2)} = \underline{\underline{-0.5396}}$$

$\epsilon_{x_1,p_2}, \epsilon_{x_2,p_1} \ldots$ Kreuzpreis-Elastizitäten.

Elastizität der Nachfrage nach Gut 1 bezüglich des Preises für Gut 2 (bzw. Nachfrage Gut 2 zum Preis für Gut 1)

$$E = x_1(p_1, p_2) * p_1 + x_2(p1, p_2) * p_2$$
$$\epsilon_{E,p_1} = \frac{E_1 * \epsilon_{E_1,p_1} + E_2 * \epsilon_{E_2,p_1}}{E_1 + E_2}$$

Nebenrechnung:

$$\epsilon_{E_1,p_1} = \epsilon_{x_1(p_1,p_2)*p_1,1} = \underbrace{\epsilon_{x_1,p_1}}_{=-0.25} + \underbrace{\epsilon_{p_1,p_1}}_{=1} = \underbrace{\epsilon_{x_1,p_1} + 1}_{+0.75}$$

$$\epsilon_{E_2,p_1} = \epsilon_{x_2(p_1,p_2)*p_2,p_1} = \epsilon_{x_2,p_1} = 0.46$$

Daraus folgt die allgemeine Form der partiellen Preis-Elastizität

$$\epsilon_{E_1,p_1} = \frac{x_1 p_1 \left(\epsilon_{x_1,p_1} + 1\right) + x_2 p_2 \left(\epsilon_{x_2,p_1}\right)}{E} \tag{2.15}$$

$$= \frac{16.8(-0.25+1) + 13.9 * 5(0.46)}{197.5} = \underline{\underline{0.648}}$$

Beispiel

$p_1 \ldots$ ändert sich um 1%

$p_2 \ldots$ ändert sich um -2%

$$\epsilon_E = \epsilon_{E,p_1} * 1\% + \epsilon_{E,p_2} * (-2\%) = 0.648 * 0.01 + 0.567 * (-0.02\%) = \underline{\underline{-0.486\%}}$$

Der Erlös fällt um 0.49%, wenn p_1 um 1% steigt und p_2 um 2% fällt.

Satz

Gegeben: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar.

Falls sich jedes x_i jeweils um einen Faktor $\beta_i = \frac{dx}{x}$ ändert, so ändert sich f um den Faktor

$$\epsilon_f = \frac{df}{f} = \epsilon_{f,x_1} * \beta_1 + \epsilon_{f,x_2} * \beta_2 + \cdots + \epsilon_{f,x_n} * \beta_n \tag{2.16}$$

4.2 Homogene Funktionen

Beispiel

Produktionsfunktion

$x(r_1, r_2) = 10 r_1^{0.2} * r_2^{0.6}$

$r_1, r_2 \ldots$ Inputmenge (Bsp. Bedarf an Rohstoffen 1 bzw. 2)

$x \ldots$ Outputmenge (Produktionsergebnis)

$r_1 \to +0.1 r_1$ bzw. $r_2 \to +0.1 r_2 \Longrightarrow$ Wie ändert sich der Output?

$$x(1.1r_1, 1.1r_2) = 10 * (1.1)^{0.2} * (1.1)^{0.6} = \underbrace{10 r_1^{0.2} * r_2^{0.6}}_{x(r_1,r_2)} * (1.1)^{0.8}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Form

$$\lambda^{0.8} * x(r_1, r_2)$$

Definition

Funktionen der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c * x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2} * \cdots * x_n^{\alpha_n} \tag{2.17}$$

wobei $x_1, \ldots, x_n > 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0, c > 0$ heißen Cobb-Douglas- Funktionen.

Satz

Cobb-Douglas-Funktionen sind homogen vom Grad $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Außerdem gilt für Cobb-Douglas-Funktionen

$$\epsilon_{f,x_i} = \lambda_i$$

5 Lokale Extrema von Funktionen mit mehreren Variablen

Gegeben

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$, differenzierbar.

Gesucht

Lokalen Extremstellen

Definition

Ein Punkt $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ heißt stationärer Punkt von f, falls

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Beispiel

$f(x, y) = e^{-x}(x^2 + y^2)$

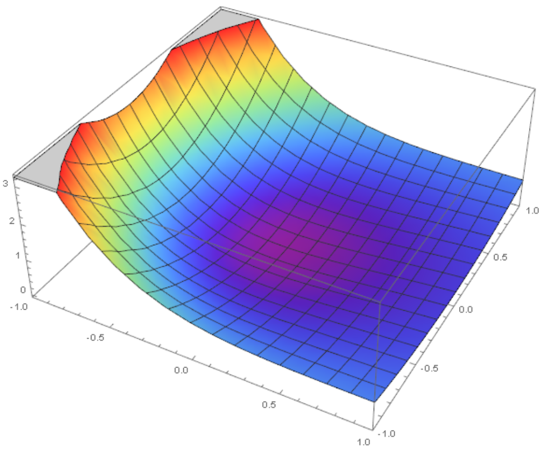


Abbildung 2.1: 3D Plot

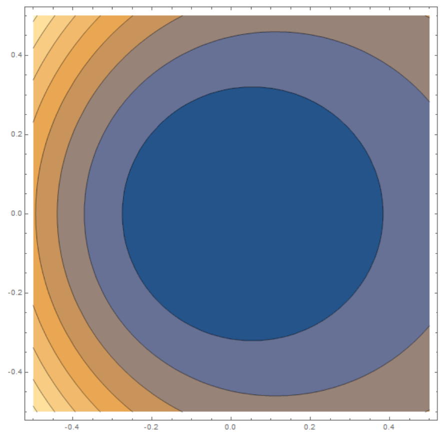


Abbildung 2.2: Höhenlinien

Ableiten nach x und y

- $f_x = e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x) = 0$
- $f_y = 2ye^{-x} = 0$

$$\begin{aligned} &1)\quad e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x) &= 0 \\ &2)\quad 2y\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt: $y = 0$

Einsetzen in (1) $\quad e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x) = 0$

$-x(x-2) = 0 \longrightarrow x = 0$ oder $x = 2$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $\underline{\underline{(0, 0)}}$ und $\underline{\underline{(2, 0)}}$

Satz

Sei $f = f(x, y), (x, y) \in D$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ und zweimal stetig partiell differenzierbar. Der Punkt $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ ist eine lokale Maximalstelle bzw. Minimalstelle von f, falls gilt

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$
   d.h. (x_0, y_0) ist ein stationärer Punkt von f
2. $\triangle_f(x_0, y_0) = det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$

hinreichende Bedingung für lokales Extremum

3. $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ Maximalstelle
   $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ Minimalstelle
   Art des Extremums

Falls (x_0, y_0) ein stationärer Punkt von f ist (d.h. (1) ist erfüllt), aber $\triangle f(x_0, y_0) < 0$ so liegt keine lokale Extremalstelle sondern ein Sattelpunkt vor. Für $\triangle f(x_0, y_0) = 0$ versagt das Kriterium, d.h. es ermöglicht keine Entscheidung darüber, ob es sich um ein Extremum oder einen Sattelpunkt handelt.

Beispiel
$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x)\right) = e^{-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2)$
$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x)\right) = -2ye^{-x}$
$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x)\right) = -2ye^{-x}$
$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}(-x^2 - y^2 + 2x)\right) = 2e^{-x}$

Hesse-Matrix

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2) & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}$$

1. $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $\triangle_f(0, 0) = det\left(H_f(0, 0)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 * 2 - 0 * 0 = 4 > 0$

   $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \longrightarrow$ Minimalstelle bei $\underline{\underline{x_0 = 0, y_0 = 0}}$.

2. $H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} e^{-2}(2^2 - 4 * 2 + 2) & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$

   $\triangle_f(2, 0) = det\left(H_f(2, 0)\right) = \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} = -4e^{-4} - 0 < 0$

   Kein Extremum, Sattelpunkt.
   Die Funktion $f(x, y) = e^{-x}(x^2 + y^2)$ hat genau eine lokale Extremstelle bei $x_0 = 0, y_0 = 0$ (ein Minimum). Außerdem hat sie einen Sattelpunkt bei $x_0 = 2, y_0 = 0$.

6 Extremwertprobleme mit Nebenbedingung

Beispiel
Ein Unternehmen produziert ein Gut gemäß folgernder Produktionsfunktion

$$x = x(A, K) = 100A^{0.8}K^{0.2}$$

$x \ldots$ Output, $A, K \ldots$ Arbeits- bzw. Kapitaleinsatz
Pro Arbeitseinheit wird ein Lohn von 20 GE fällig. Eine Kapitaleinheit verursacht 10 GE Zinskosten. Wie lautet der kostengünstigste Faktoreneinsatz für einen Output von 10000 ME?

$$\begin{aligned} f(A, K) &= A * 20 + K * 10 \longrightarrow \text{Minimum} && \text{Zielfunktion} \\ \varphi(A, K) &= \underbrace{100 * A^{0.8}K^{0.2}}_{\text{Output}} = 10000 && \text{Nebenbedingung} \end{aligned}$$

1. Lagrange-Funktion aufstellen

$$\begin{aligned} F(A, K, \lambda) &= f(A, K) + \lambda\varphi(A, K) \\ &= 20A + 10K + \lambda\left(100A^{0.8}K^{0.2} - 10000\right) \end{aligned}$$

2. stationäre Punkte finden

$$\begin{aligned} F_A(A, K, \lambda) &= 20 + \lambda\left(100 * 0.8A^{-0.2}K^{0.2}\right) = 0 \\ F_K(A, K, \lambda) &= 10 + \lambda\left(100A^{0.8}0.2K^{-0.8}\right) = 0 \\ F_\lambda(A, K, \lambda) &= 100A^{0.8}K^{0.2} - 10000 = 0 \end{aligned}$$

(1):

$$\begin{aligned} 20 + 80\lambda\left(\frac{K}{A}\right)^{0.2} &= 0 \\ \lambda = \frac{-2}{8}\left(\frac{A}{K}\right)^{0.2} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{A}{K}\right)^{0.2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 10+20\lambda\left(\frac{A}{K}\right)^{0.8} &= 0 \\ \lambda = \frac{-1}{2}\left(\frac{K}{A}\right)^{0.8} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{K}{A}\right)^{0.8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{4}\left(\frac{A}{K}\right)^{0.2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{K}{A}\right)^{0.8} = A^{0.2} * A^{0.8} \\ &= 2K^{0.8} * K^{0.2} \Longrightarrow A = 2K \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 100(\underbrace{2K}_{A})^{0.8}K^{0.2} - 10000 &= 0 \\ K = \frac{100}{2^{0.8}} &= \underline{\underline{57.43}} \\ A = 2K &= \underline{\underline{114.87}} \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{57.43}{114.87}\right)^{0.8} = \underline{\underline{-0.29}}$$

Für den Output von 10000 Einheiten fallen minimale Kosten von 2871.50 GE an. Welche Kosten fallen für den Output von 10100 Einheiten an? Statt der Nebenbedingung von $100K^{0.2} * A^{0.8} = 10000$ bzw. $100K^{0.2} * A^{0.8} - 10000 = 0$ haben wir nun eine neue Nebenbedingung: $100K^{0.2}A^{0.8} = 10100$ bzw. $100K^{0.2}A^{0.8} - 10000 = 100$. Daraus folgt, das

- $c = 100$
- $\lambda = -0.29$ (siehe oben)
- $-\lambda c = 0.29 * 100 = 29$

Für den Output 10100 wachsen die Kosten um 29 GE.

3 Lineare Optimierung

Ziel
Gewinn $\longrightarrow$ Maximal

Beispiel

$x_1 \ldots$ Anbaufläche Erbsen
$x_2 \ldots$ Anbaufläche Möhren

$$\text{Gewinn}(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2 \longrightarrow \text{ max}$$

Nebenbedingungen

- $100x_1 + 50x_2 \leq 2500$
- $x_1 + x_2 \leq 30$
- $x_1 + 2x_2 \leq 50$
- Negativitätsbedingung $x_1, x_2 \geq 0$

Satz
Zielfunktion und Nebenbedingungen sind linear.

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ldots$ Variablenvektor

$\underline{c} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} \ldots$ Vektor des Zielfunktionskoeffizienten

$G(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 200x_1 + 300x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \dots$$ Aufwandsmatrix

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix} \dots$$ Ressourcenvektor

Lineares **O**ptimierungs**p**roblem (LOP)
$\underline{c}^T \underline{x} \longrightarrow$ max
$A\underline{x} \leq \underline{b}$

Definition Allgemeine Form eines LOP
Zielfunktion:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \text{ min} \tag{3.1}$$

Systeme von linearen Nebenbedingungen

$$a_{11}x_1 + x_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \Diamond b_1 \tag{3.2}$$

Die Raute $\Diamond$ bedeutet dass der Wert $=, \leq$ oder $\geq$ sein darf

Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \quad (k \leq n) \tag{3.3}$$

In Matrixform

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ... Variablenvektor} \\
\underline{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ ... Vektor der Zielkoeffizienten} \\
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \times & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ... Aufwandsmatrix} \\
\underline{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ ... Ressourcenvektor}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

1 Grafische Lösung eines LOPs mit 2 Variablen

Definition
Der zulässige Bereich eines LOPs ist die Menge aller Wertepaare $B = \{(x_1, x_2)$: alle Nebenbedingungen einschließlich der Nichtnegativitätsbedingung sind erfüllt$\}$

Beispiel
$x_1 + x_2 \leq 30$ bzw. $x_2 \leq 30 - x_1$
$100x_1 + 50x_2 \leq 2500$ bzw. $x_2 \leq 50 - 2x_1$
$x_1 + 2x_2 \leq 50$ bzw. $x_2 \leq 25 - \frac{1}{2}x_1$
$z = 200x_1 + 300x_2 \longrightarrow$ max

Niveaulinien
$z =$ konstant
$z = 200x_1 + 300x_2 \rightarrow x_2 = z - 200x_1 = \frac{z}{300} - \frac{2}{3}x_1$
$z = 6000 : x_2 \leq 20 - \frac{2}{3}x_1 \qquad z = 4000 : x_2 = \frac{40}{3} - \frac{2}{3}x_1$

Maximalstelle

$x_2 = 25 - \frac{1}{2}x_1 \wedge x_2 = 30 - x_1 \Rightarrow 25 - \frac{1}{2} = 30 - x_1$

$\underline{\underline{x_1 = 10}} \qquad \underline{\underline{x_2 = 20}}$

$\Longrightarrow z* = 200 * 10 + 300 * 20 = \underline{\underline{8000}}$

Aktive Ressourcen:	Land	$x_1 + x_2 \leq 30$
	Arbeitszeit	$2x_1 + x_2 \leq 50$
Inaktive Ressourcen:	Saatkosten	$100x_1 + 50x_2 \leq 2500$

1.0.1 Grafische Lösung eines LOP mit 2 Variablen - Zusammenfassung

1. zulässigen Bereich zeichnen (Nebenbedingungen)
2. Höhenlinien der Zielfunktion zeichnen und Richtung der Optimierung bestimmen
3. Optimalen Punkt als Schnittpunkt von Nebenbedingung bestimmen
4. Aktive und Inaktive Restriktionen bestimmen

2 Sensitivitätsanalyse

Der Schattenpreis einer Restriktion gibt an, um wie viele Einheiten sicher der optimale Wert der Zielfunktion erhöht, wenn man die zugehörige Ressource um eine Einheit aufweitet. Das ist der maximale Preis, wenn man eine Einheit der zugehörigen Ressource dazukauft, ohne das Ergebnis zu verschlechtern.

Inaktive Ressource: Schattenpreis ist Null

3 Simplex Algorithmus

- das LP besitzt keine zulässigen Lösungen, d. h., das Polyeder ist leer (z. B. $max\{x \vee x_1 x_2\}$)
- das LP ist unbeschränkt, d. h., es gibt Lösungen mit beliebig hohem Zielfunktionswert (z. B. $max\{x \vee x \geq 0\}$)
- es gibt genau eine oder unendliche viele Optimallösungen, die dann alle auf einer gemeinsamen Seitenfläche (Ecke, Kante, ...) des Polyeders P liegen.

Satz

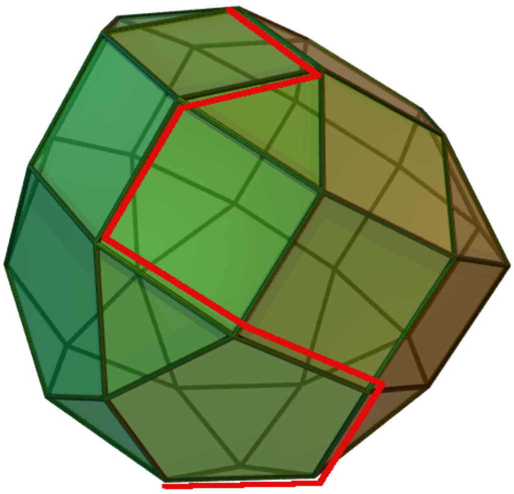
Für 3 und mehr Variable gelten diese Überlegungen analog.

Beispiel

$x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow$ max

$$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & \leq 3 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \geq 5 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$



Im Polyeder wird eine Ebene aufgespannt und nach oben geschoben, bis die Ebene an einer Ecke (=Restriktion) anstößt.

4 Integralrechnung

1 Das unbestimmte Integral

Gegeben: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
Gesucht: $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$

Definition

1. Eine Differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ falls $F'(x) = f(x), x \in D$
2. Die Menge aller Stammfunktionen heißt unbestimmtes Integral.
   Bezeichnung: $\int f(x)dx = \{F : D \longrightarrow \mathbb{R} : F'(x) = f(x), x \in D\}$

Beispiel

1. $f(x) = 2x$
   $F(x) = x^2$ ist die Stammfunktion, denn $F'(x) = 2x$
   $\Rightarrow \int 2x\ dx = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{3x}$
   $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ ist die Stammfunktion, denn $F'(x) = e^{3x}$
   $\Rightarrow \int e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c, c \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sin x + 2$
   $F(x) = -\cos x + 2x$ ist die Stammfunktion, denn $F'(x) = -(-\sin x) + 2$
   $\Rightarrow \int \sin x + 2\ dx = -\cos x + 2x + c, c \in \mathbb{R}$

Satz

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so ist das unbestimmte Integral, d.h. die Menge aller Stammfunktionen gegeben durch

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Beispiel

$\int \sin(\underbrace{2x+3}_{g(x)=2x+3})dx = -\cos(2x+3) * \frac{1}{2} + c$ denn

$\left(-\cos(2x+3)\frac{1}{2} + c\right)' = -(-\sin(2x+3) * 2 * \frac{1}{2} = \sin(2x+3)$

Merkregel

$$\int \sin(g(x))\,dx = \int \sin(g)dg * \frac{dx}{dg} = \left(\int \sin(g)dg\right)\frac{1}{\frac{dg}{dx}} = \int \sin(g)dg * \frac{1}{g'(x)}$$

Dabei hängt bei einer linearen Funktion $\frac{1}{g'(x)}$ icht von x ab.

Beispiel

1. $f(x) = 2xe^{x^2}$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int 2x * e^{g(x)}\frac{dg}{2x} = \int e^g dg = e^g \Longrightarrow e^{x^2}$$

wobei $g(x) = x^2 \Longrightarrow \frac{dg}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dg}{2x}$

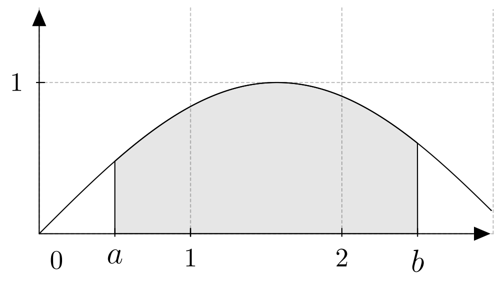
2. $\int x\cos(x)dx$

- $u = x \Rightarrow u' = 1$
- $v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$$\int 1 * \sin(x)dx = x\sin x - (-\cos x) + c = \underline{\underline{x\sin x + \cos x + c}}$$

2 Das bestimmte Integral

Gegeben: $f : a, b \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) > 0, x \in [a, b]$
Gesucht: Fläche zwischen x-Achse und Graph der Funktion f.



$$\begin{aligned} A_n &= f(x_0) * \Delta x + f(x_1) * \Delta x + \cdots + f(_{n-1}) * \Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) * \Delta x \\ A_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \end{aligned} \tag{4.2}$$

Es gilt: $A_n \leq A \leq A_0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \leq A \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x \tag{4.3}$$

Bei feiner werdender Einteilungen, d.h. bei $\Delta x \longrightarrow 0$ gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k-1})\Delta x \tag{4.4}$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.5}$$

Sprich: „Integral von a nach b über f(x)dx“

2.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.6}$$

Beispiel
$f(x) = x$ mit $\int_1^3 xdx$
$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$

$$\int_1^3 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} * 3^2 - \frac{1}{2} * 1^2 = \underline{\underline{4FE}}$$

Anmerkung
„FE“ bedeutet „Flächeneinheiten“

Bemerkung

1. Obige Überlegungen gelten auch für Funktionen mit negativen Werten

   $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

   falls F eine Stammfunktion ist. Aber dabei haben Flächenstücke oberhalb der x-Achse ein positives Vorzeichen und Flächenstücke unterhalb der X-Achse ein negatives Vorzeichen. $\int_a^b f(x)dx$ ist die Differenz zwischen dem positiven Flächenteil oberhalb der x-Achse und dem negativen Flächenteil unterhalb der x-Achse.

2. Falls man sich für den Gesamtflächeninhalt zwischen x-Achse und Graph von f interessiert, so muss man erst alle Nullstellen von f finden und dann Stückweise integrieren und gegebenenfalls das Vorzeichen korrigieren.

Beispiel

$f(x) = x2 - 4, x \in [-3, 3]$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4)dx + \int_{-2}^{2} -(x^2 - 4) + \int_{2}^{3} (x^2 - 4)dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{2}^{3} \\
&= \frac{1}{3}(-8) - 4(-2) - \frac{1}{3}(-27) + 4(-3) - \frac{1}{3} * 8 + 4 * 2 + \frac{1}{3}(-8) - 4(-2) + \frac{1}{3} * 27 \\
&- 4 * 3 - \frac{1}{3} * 8 + 4 * 2 \\
\\
&= -\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 \\
&= 2 * \left(-\frac{8}{3} + 5\right) - \frac{16}{3} + 16 \\
&= -8 + 26 = \underline{\underline{18FE}}
\end{aligned}
$$

Index