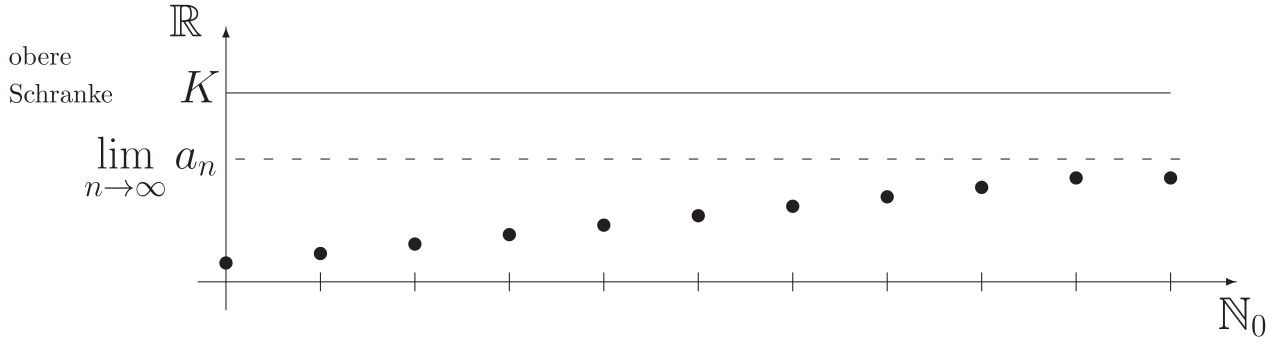
5.1.3 Konvergenzkriterien für Folgen

(1) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, falls sie **beschränkt und monoton wachsend** oder fallend ist.



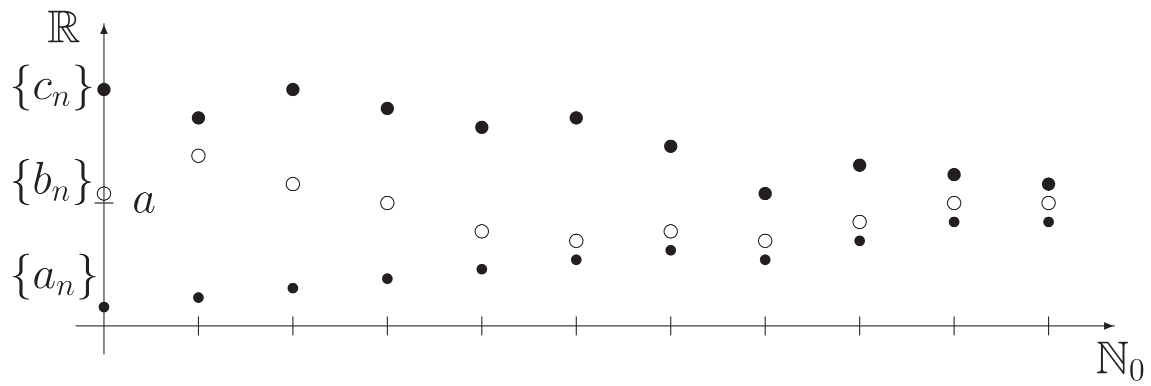
(2) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

so folgt aus $a_n \le b_n \le c_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}_0$), dass

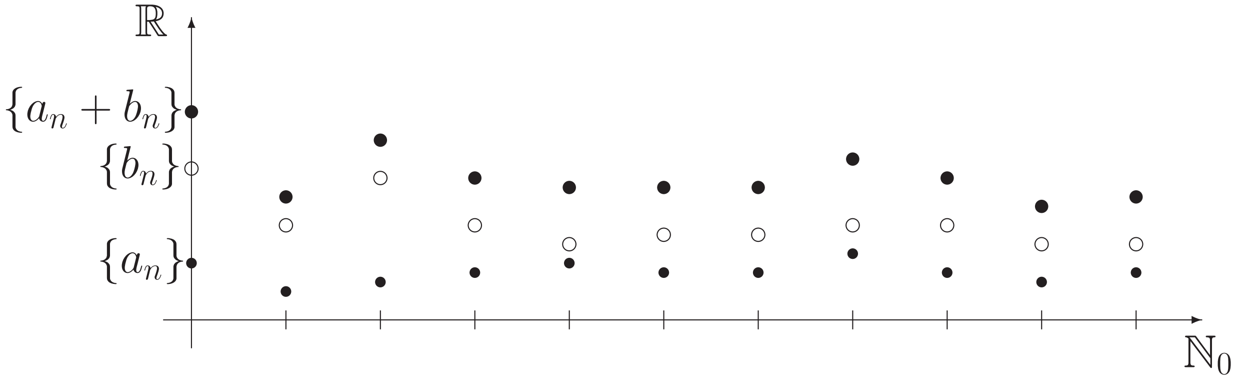
$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

gilt.



(3) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, so sind auch die Folgen $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\{a_n-b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und (falls $b_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$) $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \\
\lim_{n\to\infty}(a_n^q) &= \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)^q \qquad \text{für alle } q>0
\end{aligned}$$



(4) Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, so ist für jede reelle Zahl c auch die Folge $\{ca_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$