1. Zahlendarstellung

1.1 Dualzahlen

Sei {0,1} die Menge der **Dualziffern**. Die Ziffer 2 wird als **Basis** des **Dualsystems** (für Dualzahlen) bezeichnet.

1.1.1 Natürliche Zahlen als Dualzahlen

Eine natürliche Zahl wird im **Dualsystem** durch eine endliche Folge von Dualziffern dargestellt:

$$a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0$$

($n>0,\ a_i \in \{0,1\}$ für $i=0,1,\dots n-1$).

Eine solche Darstellung repräsentiert eine Zahl a, für die gilt:

$$a = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots a_1 2 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

Bsp.: Die Dualzahl 11011 und die Dezimalzahl 27 repräsentieren die gleiche Zahl

Schreibweise: Falls Verwechslungen möglich sind, wird bei Zahlendarstellungen ein Index angegeben, der jeweils die Anzahl der Ziffern im Zahlensystem angibt.

Bsp.: $(11011)_2 = (27)_{10}$

Zur **Konvertierung** von ganzen Zahlen vom Dual- in das Dezimalsystem und umgekehrt wird zweckmäßigerweise das **Hornerschema** genutzt. D.h. man verwendet die folgende Formel:

$$(a)_{10} = (\cdots((a_{n-1}2 + a_{n-2})2 + a_{n-3})2 + \cdots a_1)2 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

1.1.2 Gebrochene Zahlen in Dualdarstellung

Darstellung einer gebrochenen Zahl im Dualsystem:

$$a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$$

($n>0, m>0,\ a_i \in \{0,1\}$ für $i=-m,-m+1,\ldots n-1$).
Eine solche Darstellung repräsentiert die Zahl a, für die gilt:

$$a = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1}2^{-1} + a_{-2}2^{-2} + \cdots a_{-m}2^{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i 2^i$$

Bsp.: $(11{,}101)_2 = (3{,}625)_{10}$

Bei gebrochene Dualzahlen führt man die Konvertierungen zum und vom Dezimalsystem zweckmäßigerweise getrennt für den ganzen und den gebrochenen Anteil durch. Für den gebrochenen Anteil verwendet man zweckmäßig auch das **Hornerschema**.

D.h. man verwendet für den gebrochenen Anteil die folgende Formel:

$$(a)_{10} = \left(\cdots\left(\left(a_{-m}2^{-1} + a_{-m+1}\right)2^{-1} + a_{-m+2}\right)2^{-1} + \cdots a_{-1}\right)2^{-1} = \sum_{i=-m}^{-1} a_i 2^i$$

1.1.3 Unendliche Darstellungen

Nicht jede gebrochene Zahl hat eine endliche Darstellung.

Bsp.: $(0{,}3)_{10} = (0{,}01001100110011001\ldots)_2$

1.1.4 Ganze Zahlen im Dualsystem

Zur Darstellung negativer ganzer Zahlen werden verschiedene Varianten genutzt.

(a) Betrag mit Vorzeichen

Bsp.: $(-101)_2 = (-5)_{10}$

(b) **Einerkomplement** (*p*-stelliges)

$$y=\left(2^{p}-1\right)-a \text{ wobei } n>0,\ a=\left(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0\right)_2 \text{ und } p>n.$$

Bsp.: *n=3, p=6, a=101*
-*a* im Einerkomplement: *111010*

(c) **Zweierkomplement** (*p*-stelliges)

$$y=\left(2^{p}-a\right) \text{ wobei } n>0,\ a=\left(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0\right)_2 \text{ und } p>n.$$

Bsp.: *n=3, p=6, a=101*
-*a* im Zweierkomplement: *111011*

Man beachte, dass man bei Nutzung des Zweierkomplements das Vorzeichen bei der Addition und Subtraktion nicht gesondert behandeln werden muss!

Bsp.: (*p=6*)

$(-6)_{10}=(111010)_{2er}$	111010
$(+5)=(101)_2$	+ 101
$(-1)_{10}=(111111)_{2er}$	111111

1.2 Zahlendarstellung mit beliebiger Basis

Seien

B …. eine Basis (natürliche Zahl, $B>1$) und
$\{0,1,2,\cdots B-1\}$ …. eine Menge von Ziffern.

Dann repräsentiert die Zeichenfolge

$$a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$$

mit ($n>0, m>0,\ a_i\in\{0,1,2,\cdots B-1\}$ für $i=-m,-m+1,\ldots n-1$)
die Zahl a:

$$a=a_{n-1}B^{n-1}+a_{n-2}B^{n-2}+\cdots a_1B^1+a_0B^0+a_{-1}B^{-1}+a_{-2}B^{-2}+\cdots a_{-m}B^{-m}=\sum_{i=-m}^{n-1}a_iB^i$$

Bspe.:

Basis	Ziffernmenge	Bezeichnung des Zahlensystems
2	*0,1*	Dualsystem
8	*0,1,2,…7*	Oktalsystem
10	*0,1,2,…9*	Dezimalsystem
16	*0,1,2,…9,A,B,C,D,E*	Hexadezimalsystem

Hinweis: Konvertierungen erfolgen zweckmäßig mit dem Hornerschema.

Bspe.: $(12)_{10}=(20)_6$

$(0,5)_{10}=(0,3)_6$

Bemerkungen:
- Die Darstellung einer Zahl ist eindeutig, wenn man von führenden Nullen absieht.
- Die Darstellung gebrochener Zahlen kann unendlich lang sein.
- Für die Konvertierung zwischen Zahlensystemen, deren Basen Potenzen von 2 sind, verwendet man zweckmäßig auch ein direktes Verfahren („Gruppierung der Ziffern vom Komma weg“) .

Bspe.: $(0,1)_{10}=(0,13B913B913B9\ldots)_{13}$

$(0,1)_{13}=(0,076923076923076923\ldots)_{10}$

$(1B,8)_{16}=(0001\ 1011,\ 1000)_2=(33,4)_8$

1.3 Halblogarithmische Zahlendarstellung

Seien

B …. eine Basis (natürliche Zahl, *B>1*),

$\{0,1,2,\cdots B-1\}$ …. eine Menge von Ziffern und

$v_1, v_2 \in \{+,-\}$ …. Vorzeichen

Dann repräsentiert die Zeichenfolge

$$v_1 a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} E v_2 b_{p-1} b_{p-2} \cdots b_1 b_0$$

mit (*n>0*, $m \geq 0$, *p>0*, $a_i, b_j \in \{0,1,2,\cdots B-1\}$ für *i=-m,-m+1,... n-1, j=0,1,… p-1*)
die Zahl *a*:

$$a = w_1 \left(\sum_{i=-m}^{n-1} a_i B^i \right) B^{w_2 \left(\sum_{j=0}^{p-1} bjB^j \right)}$$

Es gelte $w_i = \begin{cases} 1 & falls\ v_i = + \\ -1 & sonst \end{cases}$.

Bsp.:

$(1{,}5E-2)_{10}$ entspricht $(1{,}5 \cdot 10^{-2})_{10} = (0{,}015)_{10}$

$(10{,}1E+11)_2$ entspricht $(2{,}5 \cdot 2^3)_{10} = (2{,}5 \cdot 8)_{10} = (20)_{10}$

Eine Variante der **normalisierten Darstellung**:

$n = 0$

$a_0 = 0$

$a_{-1} \neq 0$ (außer bei *a=0*)

m *fest*

p *fest*

Man beachte bei der normalisierten Darstellung:

- Die Zahlendarstellung ist eindeutig.
- Die Abstände zwischen zwei benachbarten darstellbaren Zahlen sind unterschiedlich! (Genauigkeitsprobleme)
- Es gibt eine kleinste und eine größte darstellbare Zahl.