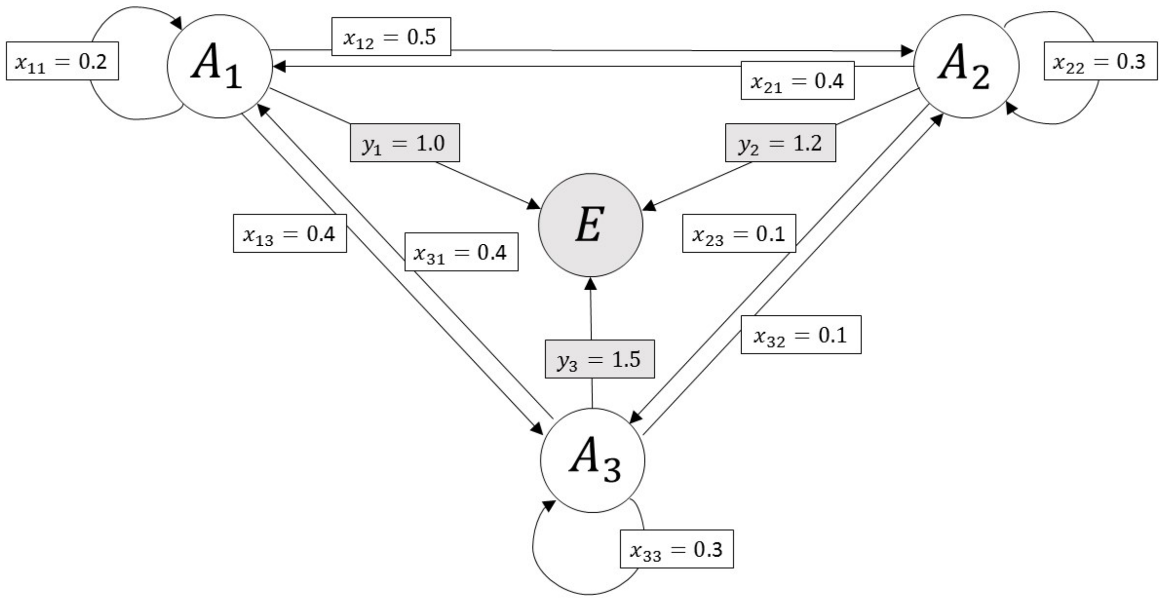
2.4.4 Anwendung: Das Leontief-Modell



Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	0.2	0.5	0.4	1.0	2.1
von A_2	0.4	0.3	0.1	1.2	2.0
von A_3	0.4	0.1	0.3	1.5	2.3

Fragestellung: Gegeben obige Verflechtungsstruktur, welche Gesamtproduktionen x_1, x_2, x_3 müssen erbracht werden, um eine Nachfrage

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

abzudecken?

Wir wissen bereits, dass das Leontief-Modell

$$\begin{aligned} (1-z_{11})x_1 - \quad z_{12}x_2 - \quad z_{13}x_3 &= y_1 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - \quad z_{23}x_3 &= y_2 \\ -z_{31}x_1 - \quad z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{L}$$

als Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{x} - \mathbf{Z}\mathbf{x} = (I - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

geschrieben werden kann mit

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ } \textbf{Marktvektor / Nachfragevektor, gegeben};$$

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ } \textbf{Produktionsvektor, gesucht};$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ } \textbf{Input-Output-Matrix}.$$

Dabei gilt

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}^0}{x_j^0} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

mit x_{ij}^0, x_j^0 ... Produktionskoeffizienten zum Zeitpunkt der Marktbeobachtung.

Im Beispiel sind die Produktionskoeffizienten x_{ij}^0, x_j^0 zum Zeitpunkt der Marktbeobachtung gegeben durch die Tabelle

Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	0.2	0.5	0.4	1.0	2.1
von A_2	0.4	0.3	0.1	1.2	2.0
von A_3	0.4	0.1	0.3	1.5	2.3

.

Damit

$$\mathbf{X}^0 = \left(x_{ij}^0\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x^0} = (x_i^0)_{i=1,2,3,} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.0 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0.2/2.1 & 0.5/2.0 & 0.4/2.3 \\ 0.4/2.1 & 0.3/2.0 & 0.1/2.3 \\ 0.4/2.1 & 0.1/2.0 & 0.3/2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/21 & 5/20 & 4/23 \\ 4/21 & 3/20 & 1/23 \\ 4/21 & 1/20 & 3/23 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\mathbf{I} - \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 - 2/21 & -5/20 & -4/23 \\ -4/21 & 1 - 3/20 & -1/23 \\ -4/21 & -1/20 & 1 - 3/23 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19/21 & -5/20 & -4/23 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 \end{pmatrix}.$$

Somit hat das Leontief-Modell $(\mathbf{I} - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ für gegebenes

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

die Form

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z}|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 19/21 & -5/20 & -4/23 & 10 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 & 10 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 & 10 \end{array}\right)$$

Die zugehörige Zeilenstufenform (TR)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -21/76 & -84/437 & 210/19 \\ 0 & 1 & -700/6969 & 4600/303 \\ 0 & 0 & 1 & 10580/637 \end{array}\right)$$

führt zur **eindeutigen(!) und positiven(!)** Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1720/91 \\ 4600/273 \\ 10580/637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.90 \\ 16.84 \\ 16.61 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Lösung kann mit dem Casio-TR über den Befehl rref($(\mathbf{I}-\mathbf{Z}|\mathbf{y})$) direkt aus der reduzierten Zeilenstufenform abgelesen werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18.90 \\ 0 & 1 & 0 & 16.84 \\ 0 & 0 & 1 & 16.61 \end{array}\right)$$

Satz: Das Leontief-Modell $(\mathbf{I}-\mathbf{Z})\mathbf{x} = \mathbf{y}$ hat genau dann eine eindeutige positive Lösung, wenn in der Matrix $\mathbf{Z}$ alle Spaltensummen kleiner als Eins sind, d.h. wenn

$$\sum_{j=1}^{3} z_{ij} < 1.$$