Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei ein **lineares** (m, n)**-Gleichungssystem**, welches sich in folgende **Zeilenstufenform** bringen lässt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_m \end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Das Gleichungssystem ist **unlösbar**, falls der Rang der Koeffizientenmatrix echt kleiner ist als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, denn dann enthält es einen Widerspruch.

Kurz: LGS $(A|b)$ **unlösbar, falls rang**$(A) <$ **rang**$(A|b)$

(2) Das Gleichungssystem ist **lösbar**, falls der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

Kurz: LGS $(A|b)$ **lösbar, falls rang**$(A) =$ **rang**$(A|b)$

Es gilt:

- **Falls rang**$(A) = n$, dann gibt es eine **eindeutige Lösung**, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt.
- **Falls rang**$(A) < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Fall gibt es also **unendlich viele Lösungen.**