Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen einer Matrix

Der Rang r einer Matrix ändert sich nicht bei Anwendung der folgenden **elementaren Umformungen**:

(1) Zwei Zeilen oder Spalten werden miteinander vertauscht.

(2) Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen, von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert.

(3) Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert.

Mit Hilfe elementarer Umformungen lässt sich jede Matrix A in Zeilenstufenform überführen:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} * & \circ & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ 0 & * & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & \circ & \dots & \circ \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

mit $\alpha_{11} \dots \alpha_{rr} \neq 0$.

Es gilt dann:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A}) = r = \text{Anzahl der Nicht-Null-Zeilen von } \tilde{A}.$$