Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition. Ein **lineares Gleichungssystem** aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, ..., x_n$ (kurz: $m \times n$**-Gleichungssystem**) hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dabei sind die a_{ij} und b_i gegebene reelle Zahlen.

- Die a_{ij} heißen **Koeffizienten** des Gleichungssystems.
- Sind alle b_i gleich null, so heißt das Gleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Gesucht sind **alle Lösungen des Gleichungssystems**, d.h. alle n-Tupel $x_1, \ldots, x_n$ reeller Zahlen, für die alle m Gleichungen erfüllt sind.

Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

lässt sich als Matrixgleichung schreiben:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Dabei sind

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \ldots \text{die } \textbf{Koeffizientenmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \ldots \text{der } \textbf{Vektor der Unbekannten},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \ldots \text{die } \textbf{rechte Seite bzw. der inhomogene},$$

des linearen Gleichungssystems.

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich in verkürzter Form durch Angabe der **erweiterten Koeffizienzenmatrix** schreiben:

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$