Grundlagen der komplexen Rechnung

Komplexe Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlenmenge $\mathbb{R}$ dar:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$$

Diese quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, da das Quadrat einer reellen Zahl stets größer oder gleich 0 ist.

Formale Lösung: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$

Der formale Wurzelausdruck $\sqrt{-1}$ heißt imaginäre Einheit und wird durch das Symbol j gekennzeichnet:

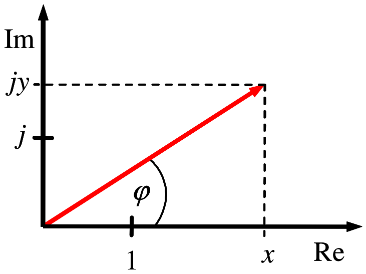
$$j = \sqrt{-1} \quad \text{bzw.} \quad j^2 = -1 \tag{1}$$

Lösungen der Gleichungen: $x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm j$

Unter einer imaginären Zahl jb versteht man das formale Produkt aus der reellen Zahl $b \neq 0$ und der imaginären Einheit j. Unter einer komplexen Zahl $\underline{z}$ versteht man die formale Summe aus einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl jy. Die kartesische Form (Normalform) einer komplexen Zahl lautet:

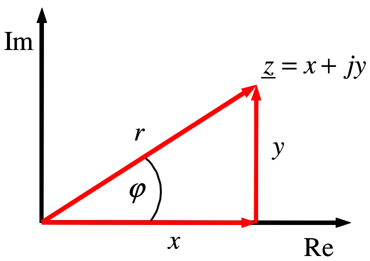
$$\underline{z} = x + jy \tag{2}$$

Gaußsche Zahlenebene:
Eine komplexe Zahl $\underline{z} = x + jy$ lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene durch einen Zeiger geometrisch darstellen.



$\underline{z} = x + jy$ (kartesische Form)

Trigonometrische Form:
Die komplexe Zahl $\underline{z} = x + jy$ lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen aus der kartesischen Form in die sog. trigonometrische Form überführen:



r: Betrag von $\underline{z}$

φ: Argument von $\underline{z}$ (Winkel)

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \text{Transformationsgleichungen}$$

$$\underline{z} = x + jy = r \cdot \cos(\varphi) + jr \cdot \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \underline{z} = r \cdot [\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)] \tag{3}$$

Exponentialform:
Unter Verwendung der Eulerschen Formel erhält man aus der trigonometrischen Form die Exponentialform einer komplexen Zahl:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \tag{4}$$

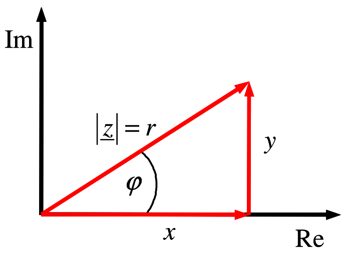
Gl. (4) in Gl. (3): $$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} \tag{5}$$

Hinweis: Sowohl der trigonometrischen als auch der exponentiellen Darstellung liegen Polarkoordinaten zugrunde. Man fasst diese Schreibweisen daher unter der Bezeichnung "Polarform" zusammen.

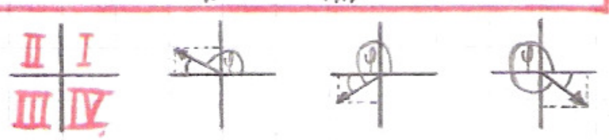
Umrechnung: Polarform → Kartesische Form:
Eine in der Polarform vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen in die kartesische Form überführen:

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \left[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right] = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{x} + j\,\underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_{y} = x + jy \tag{6}$$

Umrechnung: Kartesische Form → Polarform:
Eine in der kartesischen Form vorliegende komplexe Zahl lässt sich unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem der zugehörige Zeiger liegt, wie folgt in die trigonometrische Form bzw. in die Exponentialform umrechnen:



Quadrant	I	II, III	IV
φ	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+180°$	$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+360°$



$$r = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x} \quad \text{(siehe Tabelle)} \tag{7}$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 + \underline{z}_2 &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\ \underline{z}_1 - \underline{z}_2 &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned} \tag{8}$$

Addition und Subtraktion lassen sich nur in der kartesischen Form durchführen (ggf. Umrechnung in diese Form notwendig)!

Multiplikation und Division komplexer Zahlen (in Exponentialform):

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{9}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{10}$$

Konjugiert komplexe Zahl:
Der Übergang von der komplexen Zahl $\underline{z}$ zur konjugiert komplexen Zahl $\underline{z}^*$ bedeutet einen Vorzeichenwechsel im Imaginärteil, während der Realteil unverändert bleibt:

$$\underline{z} = x + jy \quad \rightarrow \quad \underline{z}^* = x - jy \tag{11}$$