IEEE 754

Die Norm **IEEE 754** (ANSI/IEEE Std 754-1985; IEC-60559:1989 - International version) definiert Standarddarstellungen für binäre Gleitkommazahlen in Computern und legt genaue Verfahren für die Durchführung mathematischer Operationen, insbesondere für Rundungen, fest. Der genaue Name der Norm ist englisch *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic for microprocessor systems (ANSI/IEEE Std 754-1985)*.

Die aktuelle Ausgabe ist unter der Bezeichnung ANSI/IEEE Std 754-2008 im August 2008 veröffentlicht worden und umfasst neben der 754-1985 eine Erweiterung um zusätzlich ein binäres und zwei dezimale Datenformate. Weiters ist die Norm IEEE 854-1987, mit dem Titel englisch *Standard for radix-independent floating-point arithmetic*, in der IEEE 754-2008 vollständig integriert worden.[1]

Überblick

In der Norm IEEE 754-1989 werden zwei Grunddatenformate für binäre Gleitkommazahlen mit 32 Bit (*single precision*) bzw. 64 Bit (*double precision*) Speicherbedarf und zwei erweiterte Formate definiert. Die IEEE 754-2008 umfasst die binäre Zahlenformate mit 16 Bit als Minifloat, 32 Bit als *single*, 64 Bit als *double* und neu 128 Bit. Zusätzlich kamen noch die dezimale Darstellungen mit 32 Bit als Minifloat, 64 und 128 Bit hinzu.

Schließlich gab es Vorschläge und Implementierungen von weiteren Zahlenformaten, die nach den Prinzipien der IEEE 754-1989 Norm gestaltet sind und deshalb oft als IEEE-Zahlen bezeichnet werden, obwohl sie das nach der alten Definition streng genommen nicht sind. Dazu gehören die in der neuen Ausgaben integrierten Minifloats, die für die Ausbildung gedacht sind. Minifloats mit 16 Bit werden gelegentlich in der Grafikprogrammierung verwendet. Dazu gehören auch mehrere nicht von IEEE 754-1989 definierte Zahlenformate mit mehr als 64 Bit, etwa das 80-Bit-Format (Extended Precision Layout...), welches die IA-32-Prozessoren intern in ihrer klassischen Gleitkommaeinheit (Floating Point Unit, FPU) verwenden.

Allgemeines

Die Darstellung einer Gleitkommazahl

$$x = s \cdot m \cdot b^e$$

besteht aus:

- Vorzeichen *s* (fast ausnahmslos 1 Bit)
- Basis *b* (bei normalisierten Gleitkommazahlen nach IEEE 754 ist $b = 2$)
- Exponent *e* (r Bits), nicht zu verwechseln mit dem „biased exponent“ bzw. der Charakteristik
- Mantisse *m* (p Bits), manchmal als Signifikant bezeichnet

Das Vorzeichen $s = (-1)^S$ wird in einem Bit S gespeichert, sodass S = 0 positive Zahlen und S = 1 negative Zahlen markiert.
Der Exponent *e* ergibt sich aus der nichtnegativen Binärzahl *E* (*E* wird manchmal auch als Charakteristik oder biased exponent bezeichnet) durch Subtraktion eines festen Biaswertes *B*: $e = E - B$. Der Biaswert (engl: Verzerrung) berechnet sich durch $2^{r-1} - 1$, wobei *r* die Anzahl der Bits von *E* darstellt. Der Biaswert *B* dient also dazu, dass negative Exponenten durch eine vorzeichenlose Zahl (die Charakteristik *E*) gespeichert werden können, unter Verzicht auf alternative Kodierungen wie z. B. das Zweierkomplement. (vergleiche auch Exzesscode)
Schließlich ist die Mantisse $1 \leq m < 2$ ein Wert, der sich aus den p Mantissenbits mit dem Wert M als $m = 1 + M/2^p$ berechnet. Einfacher ausgedrückt denkt man sich an das Mantissenbitmuster M links eine "1," angehängt: m = 1,M.

- $s = (-1)^S$
- $e = E - B$

- $m = 1, M = 1 + M/2^p$

Dieses Verfahren ist möglich, weil durch Normalisierung (s. u.) die Bedingung $1 \leq m < 2$ für alle darstellbaren Zahlen immer eingehalten werden kann. Da dann die Mantisse immer links mit 1. beginnt, braucht dieses Bit nicht mehr gespeichert zu werden. Damit gewinnt man ein zusätzliches Bit Genauigkeit.

Für Sonderfälle stehen spezielle Bitmuster zur Verfügung. Um diese Sonderfälle zu kodieren, sind zwei Exponentenwerte, der maximale ($E = 11\ldots111 = 2^r - 1$) und die Null ($E = 00\ldots000$) reserviert. Mit dem maximalen Exponentenwert werden die Sonderfälle NaN und ∞ kodiert. Mit Null im Exponenten wird die Gleitkommazahl 0 und alle denormalisierten Werte kodiert.

Werte außerhalb des normalen Wertebereichs (zu große bzw. zu kleine Zahlen) werden durch ∞ bzw. −∞ dargestellt. Diese Erweiterung des Wertebereichs erlaubt auch im Falle eines arithmetischen Überlaufs häufig ein sinnvolles Weiterrechnen. Neben der Zahl 0 existiert noch der Wert −0. Während $\frac{1}{0}$ das Ergebnis ∞ liefert, ergibt $\frac{1}{-0}$ den Wert −∞. Bei Vergleichen wird zwischen 0 und −0 nicht unterschieden.

Die Werte NaN (für engl. „not a number“, „keine Zahl“) werden als Darstellung für undefinierte Werte verwendet. Sie treten z. B. auf als Ergebnisse von Operationen wie $\frac{0}{0}$ oder ∞ −∞. NaN werden in Signal-NaN (signalling NaN, NaNs) für Ausnahmebedingungen und stille NaN (quiet NaN, NaNq) unterteilt.

Als letzter Sonderfall füllen denormalisierte Zahlen (in IEEE 754r als subnormale Zahlen bezeichnet) den Bereich zwischen der betragsmäßig kleinsten normalisierten Gleitkommazahl und Null. Sie werden als Festkommazahlen gespeichert und weisen nicht dieselbe Genauigkeit auf wie die normalisierten Zahlen. Konstruktionsbedingt haben die meisten dieser Werte den Kehrwert ∞.

Zahlenformate und andere Festlegungen des IEEE-754-Standards

IEEE 754 unterscheidet vier Darstellungen: einfach genaue (single), erweiterte einfach genaue (single extended), doppelt genaue (double) und erweiterte doppelt genaue (double extended) Zahlenformate. Bei den erweiterten Formaten ist nur jeweils eine Mindestbitzahl vorgeschrieben. Die genaue Bitzahl und der Biaswert bleiben dem Implementierer überlassen. Die Grundformate sind vollständig definiert.

Die Anzahl der Exponentenbits legt den Wertebereich der darstellbaren Zahlen fest (s. u.). Die Anzahl der Mantissenbits legt die Genauigkeit dieser Zahlen fest.

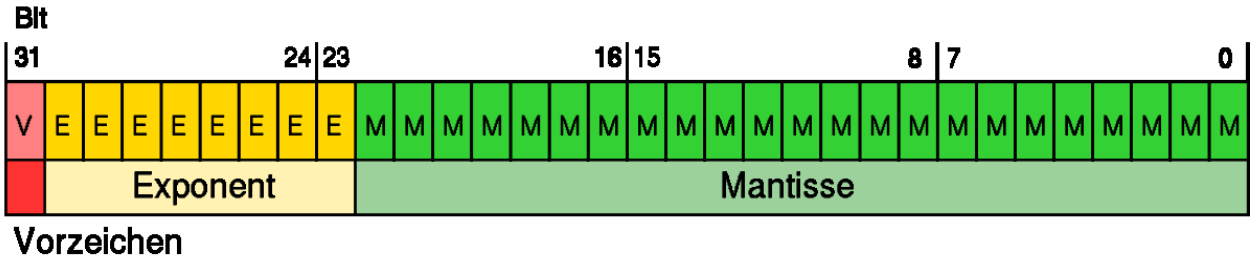
Die beiden letzten Beispiele demonstrieren ein minimales erweitertes Format.

Typ	Größe (1+r+p)	Exponent (r)	Mantisse (p)	Werte des Exponenten (e)	Biaswert (B)
single	32 bit	8 bit	23 bit	-126 ≤ *e* ≤ 127	127
double	64 bit	11 bit	52 bit	-1022 ≤ *e* ≤ 1023	1023
single extended	≥ 42 bit	≥ 11 bit	≥ 31 bit		
double extended	≥ 79 bit	≥ 15 bit	≥ 63 bit		
single extended, minimum	43 bit	11 bit	31 bit	-1022 ≤ *e* ≤ 1023	1023
double extended, minimum	79 bit	15 bit	63 bit	-16382 ≤ *e* ≤ 16383	16383

Für die angegebenen Formate ergibt sich die folgende Beschränkung des jeweiligen Zahlenbereichs. Die betragsmäßig kleinsten Zahlen sind hierbei nicht normalisiert. ϵ beschreibt dabei den relativen Abstand zweier Gleitkommazahlen. Dezimalstellen beschreibt die Anzahl der Stellen einer Dezimalzahl die ohne Genauigkeitsverlust gespeichert werden können. Die Mantisse ist rechnerisch durch das implizite Bit um eins größer als gespeichert.

Typ	ϵ	Dezimalstellen	betragsmäßig kleinste Zahl	Größte Zahl
single	$2^{-(23+1)} \approx 5{,}960 \cdot 10^{-8}$	7-8	$2^{-23} \times 2^{-126} = 2^{-149} \approx 1 \cdot 10^{-45}$	$(1-2^{-24}) \times 2^{128} \approx 3{,}403 \cdot 10^{38}$
double	$2^{-(52+1)} \approx 1{,}110 \cdot 10^{-16}$	15–16	$2^{-52} \times 2^{-1022} = 2^{-1074} \approx 5 \cdot 10^{-324}$	$(1-2^{-53}) \times 2^{1024} \approx 1{,}798 \cdot 10^{308}$
single extended, minimum	$2^{-(31+1)} \approx 2{,}328 \cdot 10^{-10}$	9–10	$2^{-31} \times 2^{-1022} = 2^{-1053} \approx 1 \cdot 10^{-317}$	$(1-2^{-32}) \times 2^{1024} \approx 1{,}798 \cdot 10^{308}$
double extended, minimum	$2^{-(63+1)} \approx 5{,}521 \cdot 10^{-20}$	19-20	$2^{-63} \times 2^{-16382} = 2^{-16445} \approx 4 \cdot 10^{-4951}$	$(1-2^{-64}) \times 2^{16384} \approx 1{,}190 \cdot 10^{4932}$

Die Anordnung der Bits einer *single* zeigt die nachfolgende Abbildung. Die bei einer Rechenanlage konkrete Anordnung der Bits im Speicher kann von diesem Bild abweichen und hängt von der jeweiligen Bytereihenfolge (little/big endian) und weiteren Rechnereigenheiten ab.



Die Anordnung mit *Vorzeichen – Exponent – Mantisse* in genau dieser Reihenfolge bringt (innerhalb eines Vorzeichenbereiches) die dargestellten Gleitkommawerte in dieselbe Reihenfolge wie die durch dasselbe Bitmuster darstellbaren Signed-Integer-Werte. Damit können für die Vergleiche von Gleitkommazahlen dieselben Operationen wie für die Vergleiche von Signed-Integers verwendet werden. Kurz: die Gleitkommazahlen können lexikalisch sortiert werden.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass für steigende negative Signed-Integer-Werte der entsprechende Fließkommawert gegen minus unendlich geht, die Sortierung also umgekehrt ist.

Auch wenn in diesem Artikel hauptsächlich das Zahlenformat erörtert wird, liegt die Bedeutung der Norm IEEE 754 auch darin, dass für Gleitkommazahlen genaue Vorschriften für

- Rundung
- arithmetische Operationen
- Wurzelberechnung
- Konversionen
- Ausnahmebehandlung (Exception handling)

festgelegt wurden.

Beispiele

Berechnung Dezimalzahl → IEEE754-Gleitkommazahl

Die Zahl $18{,}4_{10}$ soll in eine Gleitkommazahl umgewandelt werden, dabei nutzen wir den Single IEEE-Standard.

1. Berechnung des Bias

```
Bias=(2^(r-1))-1  dabei ist r die Anzahl der Bits im Exponenten der Gleitkommazahl
    =(2^(8-1))-1
    =(2^7)-1
    =128-1
    =127
```

2. Umwandlung der Dezimalzahl in eine duale Festkommazahl ohne Vorzeichen

```
18,4

18/2 = 9 Rest 0 (Least-Significant Bit)
 9/2 = 4 Rest 1
 4/2 = 2 Rest 0
 2/2 = 1 Rest 0
 1/2 = 0 Rest 1 (Most-Significant-Bit)
     = 10010

0,4*2 = 0,8 -0 (Most-Significant-Bit)
0,8*2 = 1,6 -1
0,6*2 = 1,2 -1
0,2*2 = 0,4 -0
0,4*2 = 0,8 -0
0,8*2 = 1,6 -1 (Least-Significant-Bit)
      *
      *
      *
      = 0,0110011001100110011...

18,4  = 10010,0110011001100110011...
```

3. Normalisieren

```
10010,011001100... * 2^0 = 1,0010011001100... * 2^4
```

4. Berechnung des dualen Exponenten

```
da 2^4 → Exponent=4
Exponent+Bias
       4+127 = 131

131/2 = 65 Rest 1 (Least-Significant-Bit)
 65/2 = 32 Rest 1
 32/2 = 16 Rest 0
 16/2 =  8 Rest 0
  8/2 =  4 Rest 0
  4/2 =  2 Rest 0
  2/2 =  1 Rest 0
  1/2 =  0 Rest 1 (Most-Significant-Bit)
      = 10000011
```

5. Vorzeichen-Bit bestimmen

```
positiv → 0
```

6. Die Gleitkommazahl bilden

```
1 Bit Vorzeichen + 8 Bit Exponent + 23 Bit Mantisse
0 10000011 00100110011001100110011 →die Vorkomma-Eins wird als Hidden Bit weggelassen;
```

```
                                    da dort immer eine 1 steht, braucht man diese nicht zu speichern.
```

Berechnung IEEE754-Gleitkommazahl → Dezimalzahl

Nun soll die Gleitkommazahl von oben wieder in eine Dezimalzahl zurück gewandelt werden, gegeben ist also folgende IEEE754-Zahl:

```
0 10000011 00100110011001100110011
```

1. Berechnung des Exponenten

```
Umwandeln des Exponenten in eine Dezimalzahl:
10000011 -> 131

Da dies aber der Biased Exponent ist, der zuvor um den Bias verschoben wurde, wird nun der Bias
wieder abgezogen:
131-127 = 4 ist also der Exponent
```

2. Berechnung der Mantisse

```
Da es sich um eine normalisierte Zahl handelt, wissen wir, dass sie eine 1 vor dem Komma hat:
1,00100110011001100110011

Nun muss das Komma um 4 Stellen nach rechts verschoben werden:
10010,0110011001100110011
```

3. Umwandlung in eine Dezimalzahl

```
Vorkommastellen:
10010 (2) = 18 (10)

Nachkommastellen:
0,0110011001100110011 (2) ≈ 0.39999961853 (10)
(Um den Wert der Nachkommazahl zu erhalten, muss man denselben Prozess durchführen wie bei ganzen Zahlen,
nur in umgekehrter Richtung. Also von links nach rechts. Dabei muss der Exponent negativ sein und
mit einer 1 beginnen.
In der Form 0*2^-1+1*2^-2+1*2^-3+0*2^-4+0*2^-5+1*2^-6+1*2^-7+0*2^-8+0*2^-9+1*2^-10+1*2^-11+0*2^-
12+0*2^-13+1*2^-14+1*2^-15+0*2^-16+0*2^-17+1*2^-18+1*2^-19)
Weil die 0,4 im binären eine periodische Darstellung hat, kann sie nicht mehr genau umgewandelt
werden
```

4. Vorzeichen

```
Vorzeichenbit ist eine 0, also ist es eine positive Zahl
```

5. Dezimalzahl "zusammensetzen"

```
18,39999961853
```

Interpretation des Zahlenformats

Die Interpretation hängt von dem Exponenten ab. Zur Erläuterung wird mit S der Wert des Vorzeichenbits (0 oder 1), mit E der Wert des Exponenten als nichtnegative ganze Zahl zwischen 0 und $E_{max} = 11\ldots111 = 2^r-1$, mit M der Wert der Mantisse als nichtnegative Zahl und mit B der Biaswert bezeichnet. Die Zahlen r und p bezeichnen die Anzahl der Exponentenbits und Mantissenbits.

Exponent E	Mantisse M	Bedeutung	Salopp	Bezeichnung
$E = 0$	$M = 0$	$(-1)^S \times 0$	±0	Null (gehört zu denorm.)
$E = 0$	$M > 0$	$(-1)^S \times M / 2^p \times 2^{1-B}$	$\pm 0{,}M \times 2^{1-B}$	denormalisierte Zahl
$0 < E < 2^r-1$	$M >= 0$	$(-1)^S \times (1+M / 2^p) \times 2^{E-B}$	$\pm 1{,}M \times 2^{E-B}$	normalisierte Zahl
$E = 2^r-1$	$M = 0$	Unendlich	±∞	Unendlich
$E = 2^r-1$	$M > 0$	keine Zahl		keine Zahl (NaN)

Null

Null repräsentiert die absolute Null. Auch Zahlen, die zu klein sind, um dargestellt zu werden (Unterlauf), werden auf Null gerundet. Ihr Vorzeichen bleibt dabei erhalten. Negative kleine Zahlen werden so zu −0,0 gerundet, positive Zahlen zu +0,0. Beim direkten Vergleich werden jedoch +0,0 und −0,0 als gleich angesehen.

Denormalisierte Zahl

Ist eine Zahl zu klein, um in normalisierter Form mit dem kleinsten von Null verschiedenen Exponenten gespeichert zu werden, so wird sie als „denormalisierte Zahl“ gespeichert.[2] Ihre Interpretation ist nicht mehr $\pm 1{,}mantisse \cdot 2^{exponent}$ sondern $\pm 0{,}mantisse \cdot 2^{de}$. Dabei ist de der Wert des kleinsten „normalen“ Exponenten. Damit lässt sich die Lücke zwischen der kleinsten normalisierten Zahl und Null füllen. Denormalisierte Zahlen haben jedoch eine geringere (relative) Genauigkeit als normalisierte Zahlen; die Anzahl der signifikanten Stellen in der Mantisse nimmt zur Null hin ab.

Ist das Ergebnis (oder Zwischenergebnis) einer Rechnung kleiner als die kleinste darstellbare Zahl der verwendeten endlichen Arithmetik, so wird es im Allgemeinen auf Null gerundet; das nennt man **Unterlauf** der Gleitkommaarithmetik, englisch **Underflow**. Da dabei Information verloren geht, versucht man, Unterlauf nach Möglichkeit zu vermeiden. Die denormalisierten Zahlen in IEEE 754 bewirken einen **allmählichen Unterlauf** (englisch „gradual underflow“), indem „um die 0 herum“ 2^{24} (für *single*) bzw. 2^{53} (für *double*) Werte eingefügt werden, die alle denselben absoluten Abstand voneinander haben und ohne diese denormalisierten Werte nicht darstellbar wären, sondern zu Unterlauf führen müssten.

Prozessorseitig sind denormalisierte Zahlen aufgrund ihres proportional seltenen Auftretens mit wenig Priorität implementiert und führen deswegen zu einer deutlichen Verlangsamung der Ausführung, sobald sie als Operand einer Berechnung auftauchen. Um Abhilfe (z.B. für Computerspiele) zu schaffen, bietet Intel seit SSE2 die nicht-IEEE 754 konforme Funktionalität an, denormalisierte Zahlen vollständig zu deaktivieren. Gleitkommazahlen, die in diesen Bereich gelangen, werden auf 0 gerundet.[3]

Normalisierte Zahl

Die Mantisse besteht aus den ersten `n` wesentlichen Ziffern der Binärdarstellung der noch nicht normalisierten Zahl. Die erste wesentliche Ziffer ist die höchstwertige (d. h. am weitesten links stehende) Ziffer, die von 0 verschieden ist. Da eine von 0 verschiedene Ziffer im Binärsystem nur eine 1 sein kann, muss diese erste 1 nicht explizit abgespeichert werden; gemäß der Norm IEEE 754 werden nur die *folgenden* Ziffern gespeichert, die erste Ziffer ist eine **implizite Ziffer** oder ein **implizites Bit** (englisch „hidden bit“). Dadurch wird gewissermaßen 1 Bit Speicherplatz „gespart“.

Unendlich

Der Gleitkommawert „Unendlich“ repräsentiert Zahlen, deren Betrag zu groß ist, um dargestellt zu werden. Es wird zwischen +„Unendlich“ und −„Unendlich“ unterschieden. Die Berechnung von 1,0/0,0 ergibt *per Definition* ebenfalls +„Unendlich“.

Keine Zahl (*NaN*)

Damit werden ungültige (oder nicht definierte) Ergebnisse dargestellt, z. B. wenn versucht wurde, die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl zu berechnen. Einige „unbestimmte Ausdrücke“ haben als Ergebnis „keine Zahl“, zum Beispiel 0,0/0,0 oder „Unendlich“ − „Unendlich“. Außerdem werden *NaN*s in verschiedenen Anwendungsbereichen benutzt, um „Kein Wert“ oder „Unbekannter Wert“ darzustellen. Insbesondere der Wert mit dem Bitmuster 111…111 wird oft für eine „nicht initialisierte Gleitkommazahl“ benutzt.

IEEE 754 fordert zwei Arten von Nichtzahlen: stille NaN (NaNq − *quiet*) und signalisierende NaN (NaNs − *signalling*). Beide stellen explizit keine Zahlen dar. Eine signalisierende NaN löst im Gegensatz zu einer stillen NaN eine Ausnahme (Trap) aus, wenn sie als Operand einer arithmetischen Operation auftritt.

IEEE 754 ermöglicht dem Anwender das Deaktivieren dieser Traps. In diesem Falle werden signalisierende NaN wie stille NaN behandelt.

Signalisierende NaN können genutzt werden, um uninitialisierten Rechnerspeicher zu füllen, so dass jedes Verwenden einer uninitialisierten Variable automatisch eine Ausnahme auslöst.

Stille NaN ermöglichen den Umgang mit Rechnungen, die kein Ergebnis erzeugen können, etwa weil sie für die angegebenen Operanden nicht definiert sind. Beispiele sind die Division Null durch Null oder der Logarithmus aus einer negativen Zahl.

Stille und Signalisierende NaN unterscheiden sich im höchsten Mantissenbit. Bei stillen NaN ist dieses 1, bei signalisierenden NaN 0. Die übrigen Mantissenbits können zusätzliche Informationen enthalten, z. B. die Ursache der NaN. Dies kann bei der Ausnahmebehandlung hilfreich sein. Allerdings schreibt der Standard nicht fest, *welche* Informationen in den übrigen Mantissenbits enthalten sind. Die Auswertung dieser Bits ist daher plattformabhängig.

Das Vorzeichenbit hat bei NaN keine Bedeutung. Es ist nicht spezifiziert, welchen Wert das Vorzeichenbit bei zurückgegebenen NaN besitzt.

Rundungen

IEEE 754 unterscheidet zunächst zwischen binären Rundungen und binär-dezimalen Rundungen, bei denen geringere Qualitätsforderungen gelten.

Bei binären Rundungen muss zur nächstgelegenen darstellbaren Zahl gerundet werden. Wenn diese nicht eindeutig definiert ist (genau in der Mitte zwischen zwei darstellbaren Zahlen), wird so gerundet, dass das niederwertigste Bit der Mantisse 0 wird. Dies passiert statistisch in 50% der Fälle, so dass der von Knuth beschriebene statistische Drift in längeren Rechnungen vermieden wird.

Eine zu IEEE 754 konforme Implementierung muss drei weitere vom Programmierer einstellbare Rundungen bereitstellen: Rundung gegen +Unendlich (immer aufrunden), Rundung gegen −Unendlich (immer abrunden) und Rundung gegen 0 (Ergebnis immer betragsmäßig verkleinern).

Operationen

Zu IEEE 754 konforme Implementierungen müssen Operationen für Arithmetik, Berechnung der Quadratwurzel, Konversionen und Vergleiche bereitstellen. Eine weitere Gruppe von Operationen wird im Anhang empfohlen, jedoch nicht verbindlich vorgeschrieben.

Arithmetik und Quadratwurzel

IEEE 754 verlangt von einer (Hardware- oder Software-)Implementierung exakt gerundete Ergebnisse für die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier Operanden sowie der Operation Quadratwurzel eines Operanden. Das heißt, das ermittelte Ergebnis muss gleich demjenigen sein, das bei einer exakten Ausführung der entsprechenden Operation mit anschließender Rundung entsteht.

Weiter ist die Berechnung des Restes nach einer Division mit ganzzahligem Ergebnis gefordert. Diese Restberechnung ist definiert durch $r = x - y * n$, n ganzzahlig, $\text{abs}(n - x/y) < 1/2$ oder $\text{abs}(n - x/y) = 1/2$ und n gerade. Dieser Rest muss ohne Rundung exakt ermittelt werden.

Konversionen

Konversionen werden zwischen allen unterstützten Gleitkommaformaten gefordert. Bei einer Konversion in ein Gleitkommaformat mit kleinerer Genauigkeit muss wie schon unter Arithmetik beschrieben exakt gerundet werden.

Zu IEEE 754 konforme Implementierungen müssen Konversionen zwischen allen unterstützten Gleitkommaformaten und allen unterstützen ganzzahligen Formaten bereitstellen. Die ganzzahligen Formate werden in IEEE 754 jedoch nicht genauer definiert.

Bei jedem unterstützten Gleitkommaformat muss eine Operation existieren, die diese Gleitkommazahl in die exakt gerundete ganze Zahl im selben Gleitkommaformat konvertiert.

Schließlich müssen Konversionen zwischen dem binären Gleitkommaformat und einem Dezimalformat existieren, die genau beschriebenen Mindestqualitätsforderungen genügt.

Vergleiche

Gleitkommazahlen nach IEEE 754 müssen verglichen werden können. Die Norm definiert die notwendigen Vergleichsoperationen und für alle möglichen Sonderfälle (vor allem NaN, Unendlich und 0) die geforderten Ergebnisse. Gegenüber den „schulmathematischen“ Vergleichen (kleiner, gleich oder größer) kommt als mögliches Ergebnis nach IEEE 754 vor allem *unordered* („nicht eingeordnet“) hinzu, wenn einer der Vergleichsoperanden NaN ist. Zwei NaN sind prinzipiell verschieden, auch wenn ihre Bitmuster übereinstimmen.

Empfohlene Operationen

Im Anhang der Norm werden zehn weitere Operationen empfohlen. Da sie in einer Implementierung im Grunde sowieso benötigt werden, läuft diese Empfehlung letztlich darauf hinaus, die Operationen an den Programmierer weiterzugeben. Diese Operationen sind (in C-Schreibweise): copysign (x, y), invertsign (x), scalb (y, n), logb (x), nextafter (x, y), finite (x), isnan (x), $x \neq y$, unordered (x, y), class (x). Die Details der Implementierung vor allem wieder bei den Sonderfällen NaN usw. sind ebenfalls vorgeschlagen.

Exceptions, Flags und Traps

Treten bei der Berechnung Ausnahmen (Exceptions) auf, werden Status-Flags gesetzt. Im Standard wird vorgeschrieben, dass der Benutzer diese Flags lesen und schreiben kann. Die Flags sind „sticky“: werden sie einmal gesetzt, bleiben sie so lange erhalten, bis sie explizit wieder zurückgesetzt werden. Das Überprüfen der Flags ist beispielsweise die einzige Möglichkeit, 1/0 (=Unendlich) von einem Überlauf zu unterscheiden.

Des Weiteren wird im Standard empfohlen, Trap Handler zu ermöglichen: Tritt eine Ausnahme auf, wird der Trap Handler aufgerufen, anstatt das Status-Flag zu setzen. Es liegt in der Verantwortung solcher Trap Handler, das entsprechende Status-Flag zu setzen oder zu löschen.

Ausnahmen werden im Standard in 5 Kategorien eingeteilt: Überlauf, Unterlauf, Division durch Null, ungültige Operation und Ungenau. Für jede Klasse steht ein Status-Flag zur Verfügung.

Geschichtliches

In der 1960er und frühen 1970er Jahren hatte jeder Prozessor sein eigenes Format für Gleitkommazahlen und seine eigene FPU oder Gleitkommasoftware, mit der das jeweilige Format verarbeitet wurde. Dasselbe Programm konnte auf verschiedenen Rechnern unterschiedliche Resultate liefern. Die Qualität der verschiedenen Gleitkommaarithmetiken war logischerweise ebenfalls sehr unterschiedlich.

Intel plante um 1976 für seine Mikroprozessoren eine eigene FPU und wollte die bestmögliche Lösung für die zu implementierende Arithmetik. Unter der Federführung der IEEE begannen 1977 Treffen, um FPUs für Gleitkommaarithmetik für Mikroprozessoren zu normieren. Das zweite Treffen fand im November 1977 unter dem Vorsitz von Richard Delp in San Francisco statt. Einer der richtungsweisenden Teilnehmer war William Kahan.

Um 1980 wurde die Anzahl der Vorschläge für die Norm auf zwei reduziert: Der K-C-S Vorschlag (nach seinen Autoren Kahan, Coonen und Stone, 1977) setzte sich letztlich gegen die Alternative von DEC (F-Format, D-Format und G-Format) durch. Ein bedeutender Meilenstein auf dem Weg zur Norm war die Diskussion über die Behandlung des Unterlaufs, der bis dahin von den meisten Programmierern vernachlässigt worden war.

Intel implementierte gleichzeitig mit der Entwicklung der Norm die Normvorschläge weitgehend in der Intel FPU 8087, die als Gleitkomma-Coprozessor zum 8088 Verwendung fand. Die erste Version der Norm wurde 1985 verabschiedet und 2008 erweitert.

Einzelnachweise

[1] IEEE 754-2008: Standard for Floating-Point Arithmetic, IEEE Standards Association, 2008, doi: 10.1109/IEEESTD.2008.4610935 (http://dx.doi.org/10.1109/IEEESTD.2008.4610935)

[2] David Goldberg: *What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic*. (http://docs.sun.com/source/806-3568/ncg_goldberg.html) In: *ACM Computing Surveys*. 23, 1991, S. 5–48. doi: 10.1145/103162.103163 (http://dx.doi.org/10.1145/103162.103163). Abgerufen am 2. September 2010.

[3] Shawn Casey (16. Oktober 2008): *x87 and SSE Floating Point Assists in IA-32: Flush-To-Zero (FTZ) and Denormals-Are-Zero (DAZ)* (http://software.intel.com/en-us/articles/x87-and-sse-floating-point-assists-in-ia-32-flush-to-zero-ftz-and-denormals-are-zero-daz/). Abgerufen am 3. September 2010.

Literatur

- IEEE 754: reprinted in SIGPLAN Notices Vol. 22, Nr. 2, Feb. 1987, Seiten 9-25
- Jean-Michel Muller: *Elementary functions - Algorithms and Implementation*. 2 Auflage. Birkhäuser, Lyon 2006, ISBN 0-8176-4372-9.

Weblinks

- IEEE 754-1985 (http://754r.ucbtest.org/standards/754.pdf) (PDF; 50 kB)
- Java-Applet zur Umrechnung zwischen Binär- und Dezimaldarstellung von IEEE 754-Gleitkommazahlen (http://www.h-schmidt.net/FloatApplet/IEEE754de.html)
- Java-Applet zur Umrechnung Dezimal -> IEEE754 und IEEE754 -> Dezimalzahl mit Erläuterungen für Windows-Internet-Explorer (http://www.30000010.wavelearn.de/IEEE754/IEEE_754_2.htm)
- Zur Geschichte: An Interview with the Old Man of Floating-Point (Reminiscences elicited from William Kahan by Charles Severance) (http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/754story.html)
- William Kahan: Lecture Notes on the Status of IEEE Standard 754 for Binary Floating-Point-Arithmetic (http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/ieee754.ps), 1996
- David Goldberg: What Every Computer Scientist Should Know About Floating Point Arithmetic (http://www.engr.pitt.edu/hunsaker/3097/floatingpoint.pdf), 1991 (PDF)