

4.2.1 Grundbegriffe der Rentenrechnung

Definition. Eine **Rente** ist eine Zahlung, die in vorgegebener Höhe in regelmäßigen Zeitabschnitten (periodisch) wiederkehrt

Rentenperiode ... Zeitabstand zwischen zwei Rentenzahlungen, oft: ein Jahr

Rentenrate R ... Höhe **einer** Zahlung

Laufzeit n **der Rente** ... Zeitabschnitt (in Rentenperioden), während dessen Rente gezahlt wird

Finanzmathematisch interessante Fragestellungen:

(A) Die Rentenbeträge werden auf ein Konto mit Zinseszins eingezahlt.

→ Zu welchem Betrag R_n können die Einzahlungen bis zum Ende der n -ten Rentenzahlung anwachsen?

(B) Die n Rentenzahlungen erfolgen aus einem Kapital, das auf Zinseszins angelegt ist.

→ Welches Kapital K_0 ist dafür heute vonnöten?

Vereinbarung:

Vereinfachend nehmen wir an, dass

- Rentenperiode = Zinsperiode = 1 Jahr
- Gleicher Zinssatz i (bzw. Aufzinsfaktor $q = 1 + i$) für Kapitalanlage gemäß (A) oder (B)

Bezeichnungen:

- R ... konstanter Rentenrate
 n ... Laufzeit der Rente (in Jahren)
 i ... Zinssatz der Kapitalanlagen
 q ... Aufzinsfaktor der zinseszinslichen Verzinsung, $q = 1 + i$
 R_n ... **Renten(end)wert**,
d.h. Wert von n Renteneinzahlungen nach der n -ten Rentenperiode
 R_0 ... **Barwert der Rente**,
d.h. Zeitwert der Rente zu Beginn der Ratenzahlungen
 K_0 ... Kapital, aus dem die Rentenzahlung erfolgt
 K_n ... Kapital, das nach n Jahren noch vorhanden ist

Finanzmathematisch interessante Fragestellungen:

(A) Die Rentenbeträge werden auf ein Konto mit Zinseszins eingezahlt.

→ Zu welchem Betrag R_n können die Einzahlungen bis zum Ende der n -ten Rentenzahlung anwachsen?

(B) Die n Rentenzahlungen erfolgen aus einem Kapital, das auf Zinseszins angelegt ist.

→ Welches Kapital K_0 ist dafür heute vonnöten?

Da es (gedanklich) egal ist, ob Geld auf Konto (A) oder Konto (B) verzinst wird, entwickeln sich die Kontostände von (A) und (B) zusammen wie zu jedem Zeitpunkt n nach dem Zinseszinsmodell, d.h. beide Kontostände summieren sich jeweils zu $K_0 q^n$ auf:

Satz.

$$K_n + R_n = K_0(1 + i)^n.$$

4.2.2 Konstante nachschüssige Renten

Der Rentenbetrag R wird am Ende der Rentenperiode bezahlt.

Satz:

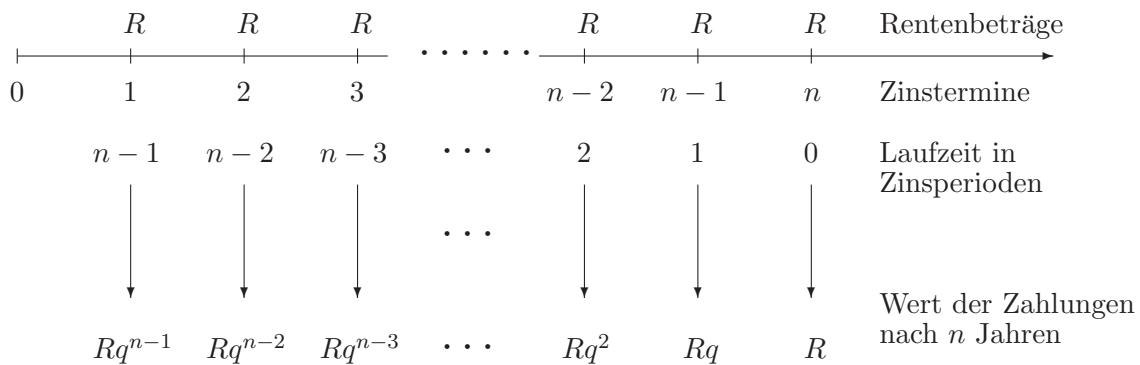
Werden die (jährlich) konstanten Rentenbeträge R nachschüssig auf ein Konto mit (jährlichem) Zinssatz i eingezahlt, so ergibt sich folgender Rentenendwert nach n Rentenperioden:

$$R_n = R \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (4.9)$$

Erfolgt die Rentenzahlung dagegen aus einem Kapital K_0 , so hat das Kapital nach n Rentenperioden noch einen Wert von

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= K_0 q^n - R_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zum Beweis:



Folglich gilt für den nachschüssigen Rentenendwert:

$$\begin{aligned} R_n &= Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + Rq^{n-3} + \dots + Rq^2 + Rq + R \\ &= R \sum_{k=0}^{n-1} q^k \stackrel{*}{=} R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$