Logik...

„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?“ wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.“ Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend. Können Sie ihn vereinfachen?

Atomare Aussagen: B = „Ich trinke Bier.“; E = „Ich habe Eiscreme.“; F = „Ich esse Fisch.“

Aussagenlogische Verknüpfungs-Operationen: wenn A, dann B ; nicht ; und; oder

Formalisierung: $((\neg B \rightarrow F) \wedge (F \wedge B \rightarrow \neg E)) \wedge (E \vee \neg B \rightarrow \neg F)$

Syntax der Aussagenlogik

Atomare Formeln: A_i **(**i $\in$ **N**) (auch: A, B, C,...; *Aussagenvariablen*, *Aussagensymbole*)

Wahrheitswertsymbole: 0, 1 (auch: *false*, *true*; F,W; 0,L)

Formeln:

(1) Atomare Formeln

(2) Wahrheitswertsymbole

(3) Sind F und G Formeln, so auch

- a) $(F \wedge G)$ (Konjunktion; „und“)
- b) $(F \vee G)$ (Disjunktion; „oder“)
- c) $(F \rightarrow G)$ („wenn F, dann G“)
- d) $(F \leftrightarrow G)$ („F genau dann, wenn G“)

(4) Ist F eine Formel, so auch $\neg F$ (Negation)

Beispiele:

$(\neg(A_1 \wedge A_3) \vee A_{4711})$

$((0 \leftrightarrow (A_1 \wedge \neg A_1)) \wedge (1 \leftrightarrow (A_1 \vee \neg A_1)))$

$(F \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((F \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G))$

Abkürzungen:

$\bigvee_{i=1}^{n} F_i$ statt $(...(F_1 \vee F_2) \vee ...) \vee F_n)$; $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ statt $(...(F_1 \wedge F_2) \wedge ...) \wedge F_n)$

Semantik der Aussagenlogik

Wahrheitswerte: 0, 1 (0 = falsch, 1 = wahr)

Wahrheitsfunktionen: $\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$; $j : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ ($j \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$)

F	$\neg F$
0	1
1	0

F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \to G$	$F \leftrightarrow G$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Eine *Belegung* ist eine Funktion **B** : D → {0, 1}, wobei D eine Menge von atomaren Formeln ist.

B *ist passend zur* Formel F, wenn F nur atomare Formeln aus D enthält.

Wert einer Formel: **B** wird erweitert zu einer Funktion **B‘**, die alle Formeln, zu denen **B** paßt, bewertet:

für atomare Formeln: **B‘**(A) = **B**(A)

B‘(¬ F) = 1 **-** **B‘**(F)

B‘(F j G) = **B‘**(F) j **B‘**(G) ($j \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$)

(im folgenden wieder **B** statt **B‘**)

Semantik der Aussagenlogik (Fortsetzung)

Table 1: Wahrheitswert bestimmen:

A	B	((A	$\wedge$	B)	$\vee$	($\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B))	$\leftrightarrow$	(A	$\leftrightarrow$	B)	Stufe
0	1	0		1			0			1		0		1	0
			0			1			0				0		1
								0							2
					0										3
											1				4

Table 2: Wahrheitstafel-Verfahren

A	B	((A	$\wedge$	B)	$\vee$	($\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B))	$\leftrightarrow$	(A	$\leftrightarrow$	B)	
		0	1	0	3	1	0	2	1	0	4	0	1	0	Stufe
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	

Wahrheitstafel zum Einführungsbeispiel

B	E	F	$((\neg B \rightarrow F) \wedge (F \wedge B \rightarrow \neg E)) \wedge (E \vee \neg B \rightarrow \neg F)$	zugehörige Formel
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$B \wedge \neg E \wedge \neg F$
1	0	1	1	$B \wedge \neg E \wedge F$
1	1	0	1	$B \wedge E \wedge \neg F$
1	1	1	0	

Äquivalent vereinfacht: $(B \wedge \neg E \wedge (\neg F \vee F)) \vee (B \wedge (\neg E \vee E) \wedge \neg F)$

$B \wedge \neg(E \wedge F)$

Vereinfachte Diätregel: „Ich trinke zu jeder Mahlzeit Bier, esse aber niemals Eis und Fisch zur selben Mahlzeit.“

Erfüllbarkeit, Modell, Tautologie, Folgerung

Belegung **B** *erfüllt* Formel F gdw **B**(F) = 1

B ist *Modell* der Formel F gdw **B** erfüllt F

B ist *Modell* der Formelmenge M gdw **B** ist Modell aller Formeln in M

Formel F ist *erfüllbar* gdw Es gibt eine Belegung **B**, die F erfüllt (gdw es gibt ein Modell von F)

Formelmenge M ist *erfüllbar* gdw Es gibt ein Modell von M

F ist eine *Tautologie (aussagenlogisch gültig;* $\models_{AL} F$*)*
gdw Jede zu F passende Belegung **B** erfüllt F

F ist *(aussagenlogische) Folgerung* der Formelmenge M ($M \models_{AL} F$)
gdw Für jede Belegung **B**, die zu jeder Formel in M und zu F passt, gilt: Wenn **B** Modell von M ist, dann ist **B** auch Modell von F.

F_1 und F_2 heißen *(semantisch) äquivalent* ($F_1 \equiv F_2$)
gdw Für alle zu F_1 und F_2 passenden Belegungen **B** gilt **B**(F_1) = **B**(F_2).

Satz: F ist Tautologie genau dann, wenn $\neg$F unerfüllbar ist.

Aussagenlogische Sätze

Satz:
F ist äquivalent zu G genau dann, wenn $F \leftrightarrow G$ Tautologie ist.
$((F \equiv G)$ gdw $(\models (F \leftrightarrow G)))$

Ersetzbarkeitstheorem:
Sind F und G äquivalente Formeln, H eine Formel, die (mindestens) ein Vorkommen von F als Teilformel hat und H‘ die aus H durch Ersetzen eines Vorkommens von F durch G entstehende Formel, so sind H und H‘ äquivalent.

Satz:
$\{F_1, ..., F_k\} \models G$ gdw $\models F_1 \wedge ... \wedge F_k \rightarrow G$ gdw $F_1 \wedge ... \wedge F_k \wedge \neg G$ ist unerfüllbar

Endlichkeitssatz (für Erfüllbarkeit):
Eine Formelmenge M ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist.

Disjunktive Normalform, Konjunktive Nf., Horn-F.

Literale: Aussagenvariablen sind *positive Literale*. Für jede Aussagenvariable A ist $\neg A$ (auch $\overline{A}$)ein *negatives Literal*.

Beispiele: A, $\neg A$, C, $\overline{C}$

F ist Formel in *konjunktiver Normalform* (**KNF**) gdw

F ist Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, also von der Form

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \qquad (L_{i,j} \text{ Literale})$$

F ist Formel in *disjunktiver Normalform* (**DNF**) gdw

F ist Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, also von der Form

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \qquad (L_{i,j} \text{ Literale})$$

F ist eine *Hornformel* gdw

$F = \bigwedge_{i=1}^{n} D_i$ ist in KNF und jedes D_i enthält höchstens ein positives Literal

Beispiel einer Hornformel: $(\neg C \vee \neg A \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge D \wedge \neg E$

äquivalent hierzu ist: $(C \wedge A \rightarrow D) \wedge (A \wedge B \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow 0)$