4. Prädikatenlogik

4.1 Formeln der Prädikatenlogik (1. Stufe)

- **Erweiterungen gegenüber der Aussagenlogik**:

I	....	Menge von **Individuen** (**Individuenbereich**)
K	....	Menge von Symbolen für die Individuen
V	....	Menge von **Variablen**
F	....	Menge von Symbolen für **Operatoren** in I, d.h. es gibt für jedes dieser Symbole f eine natürliche Zahl n und eine Abbildung $f : I^n \to I$.
P	....	Menge von Symbolen für die **Prädikate** in I, d.h. für jedes dieser Symbole p gibt es eine natürliche Zahl n und einen Abbildung $p : I^n \to \{0,1\}$.

Eine Variable steht für ein Individuum.
Es gibt auch **Quantoren** (s. u.)

- **Basisterme**

(1) Jede Variable und jede Konstante $k \in K$ ist ein Basisterm.
(2) Sind $z_1, z_2, \cdots z_n$ Basisterme und ein f ein Operationssymbol mit der zugeordneten natürlichen Zahl n , dann ist die Zeichenkette $f(z_1, z_2, \cdots z_n)$ auch ein Basisterm.
(3) Eine Zeichenkette ist nur dann ein Basisterm, wenn sie dies auf grund von (1) oder (2) ist.

- **Formeln der Prädikatenlogik**

(1) Ist p ein Symbol für ein Prädikat und n die zugeordnete natürliche Zahl und $z_1, z_2, \cdots z_n$ sind Basisterme, dann ist $p(z_1, z_2, \cdots z_n)$ eine prädikatenlogische Formel.
(2) Sind z_1, z_2 Basisterme, so ist $z_1 = z_2$ eine prädikatenlogische Formel.
(3) Sind x und y prädikatenlogische Formeln, dann sind es auch die Zeichenketten $\neg(x), (x \wedge y), (x \vee y), (x \to y), (x \leftrightarrow y)$.
(4) Sei x eine prädikatenlogische Formel und v eine Variable. Falls in x keine der Teilzeichenketten $\exists v$ und $\forall v$ vorkommt, dann sind die Zeichenketten $\exists v\ (x)$ und $\forall v\ (x)$ prädikatenlogische Formeln.
(5) Eine Zeichenkette ist nur dann eine prädikatenlogische Formel, wenn sie dies auf grund von (1), (2), (3) oder (4) ist.

Bei der **Schreibweise** sind die gleichen Vereinfachungen bzw. Abkürzungen bzw. Prioritäten wie bei den aussagenlogischen Formeln zulässig und üblich.

4.2 Eigenschaften prädikatenlogischer Formeln

- **Bezeichnungen der Quantoren**
  $\forall$ …. Allquantor, Generalisator
  $\exists$ …. Existenzquantor, Partikularisator

- **Belegung**, **Erfüllbarkeit** und **Allgemeingültigkeit** (**Identität**, **Tautologie**) sind analog zur Aussagenlogik definiert.

- **Zusätzlich:**

  (1) Eine Formel der Gestalt $\forall x(H)$ heißt genau dann allgemeingültig, wenn H allgemeingültig ist.

  (2) Eine Formel der Gestalt $\exists x(H)$ heißt genau dann allgemeingültig, wenn es für x ein Individuum gibt, so dass H ’ allgemeingültig ist. H' entsteht aus H, indem an allen Stellen x durch das betreffende Individuum ersetzt wird.

- **Sprechweisen:**

  $\exists a(H)$ es gibt/existiert ein (Inividuum) *a*, so daß *H* gilt
  es gibt/existiert mindestens ein Individuum *a*, so dass *H* gilt

  $\overline{\exists a(H)}$ es gibt kein (Individuum) *a*, so dass *H* gilt
  für kein (Individuum) *a* gilt *H*

  $\forall a(H)$ für alle (Individuen) *a* gilt *H*
  für jedes (Individuum) *a* gilt *H*

  $\overline{\forall a(H)}$ nicht für alle (Individuen) *a* gilt *H*
  nicht für jedes (Individuum) *a* gilt *H*

- **Gebunden und frei vorkommende Variable**
  Falls in der (Teil-)Formel H eine Variable x vorkommt, dann heißt sie in den Formeln $\forall x(H)$ und $\exists x(H)$ **gebunden vorkommend**. Eine nicht in einer Formel der Gestalt $\forall x(H)$ oder $\exists x(H)$ gebunden vorkommende Variable heißt innerhalb dieser Formel **frei vorkommend**.

  Bsp.: $\exists x\left(x^2 + ax + b = 0\right)$
  x .... gebunden vorkommend
  a .... frei vorkommend
  b .... frei vorkommend

4.3 Ableitregeln für allgemeingültige Formeln

- Die **Einsetzungsregel** der Aussagenlogik gilt auch in der Prädikatenlogik, allerdings mit einer Einschränkung:

> Falls eine Variable gebunden vorkommt, dann darf für sie höchsten eine Variable eingesetzt werden, die in der Formel **überhaupt noch nicht** vorkommt.

- Die **Ersetzungsregel** der Aussagenlogik gilt auch in der Prädikatenlogik

- Weitere spezielle Schlussregeln:

(1) **Abtrennregel**

Wenn die Formeln H und $H \to G$ allgemeingültig sind, dann ist es auch die Formel G.

(2) Vordere Generalisierung
Wenn die Formel $H \to G$ allgmeingültig ist, dann ist auch die Formel $\left(\forall x(H)\right) \to G$ eine allgemeingültige Formel.

(3) Hintere Partikularisierung

Wenn die Formel $H \to G$ allgemeingültig ist, dann ist auch die Formel $H \to \left(\exists x(G)\right)$ eine allgemeingültige Formel.

4.4 Rechenregeln /Identitäten

Vor.: In H_1, H_2, H sind die Variablen *x* und *y* höchstens ohne Quantoren enthalten.
H^* enthalte die Variable *x* nicht.

- **Einfache allgemeingültige Ausdrücke:**

$$H(x) \to H(x)$$
$$\forall x\big(H(x)\big) \to \exists x\big(H(x)\big)$$
$$\forall x H^* = H^*$$
$$\exists x H^* = H^*$$

- **Quantorenvertauschung:**

$$\forall x \forall y\ H = \forall y \forall x\ H$$
$$\exists x \exists y\ H = \exists y \exists x\ H$$
$$\exists x \forall y\ H \to \forall y \exists x\ H$$

- **Quantorenverteilung:**

$$\forall x\left(H_1 \wedge H_2\right) = \left(\forall x\ H\right)_1 \wedge \left(\forall x\ H_2\right)$$
$$\left(\forall x\ H_1\right) \vee \left(\forall x\ H_2\right) \to \forall x\left(H_1 \vee H_2\right)$$
$$\exists x\left(H_1 \vee H_2\right) = \left(\exists x\ H_1\right) \vee \left(\exists x\ H_2\right)$$
$$\exists x\left(H_1 \wedge H_2\right) \to \left(\exists x\ H_1\right) \wedge \left(\exists x\ H_2\right)$$

- **DeMorgan:**

$$\exists x\ \overline{H} = \overline{\forall x\ H}$$
$$\forall x\ \overline{H} = \overline{\exists x\ H}$$

- **Quantorenverschiebung:**

$$\forall x\left(H \wedge H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \wedge H^*$$
$$\forall x\left(H \vee H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \vee H^*$$
$$\forall x\left(H \to H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \to H^*$$
$$\forall x\left(H^* \to H\right) = H^* \to \left(\forall x\ H\right)$$

$$\exists x\left(H \wedge H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \wedge H^*$$
$$\exists x\left(H \vee H^*\right) = \left(\exists x\ H\right) \vee H^*$$
$$\exists x\left(H \to H^*\right) = \left(\forall x\ H\right) \to H^*$$
$$\exists x\left(H^* \to H\right) = H^* \to \left(\exists x\ H\right)$$

- **Auflösen der Quantoren bei endlichen Individuenbereichen:**

Seien $I = \{x_1, x_2, \cdots n_n\}$ der Individuenbereich (*n>0*) und H eine Formel. Dann gelten:

$\forall x(H) = H(x_1) \wedge H(x_2) \wedge \cdots H(x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} H(x_i)$ und

$$\exists x(H) = H(x_1) \vee H(x_2) \vee \cdots H(x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} H(x_i)$$

- **Auflösen der Quantoren bei Einschränkung des Individuenbereiches auf die Wahrheitswerte:**

  Seien $I = \{0,1\}$ der Individuenbereich (*n>0*) und H eine Formel. Dann gelten:

  $\forall x(H) = H(0) \wedge H(1)$ und

  $\exists x(H) = H(0) \vee H(1)$

Man beachte:

Bei Anwendungen möchte man sich oft nicht auf den gesamten Individuenbereich *I*, sondern nur auf eine Teilmenge $M \subseteq I$ beziehen. Deshalb benutzt man in der Literatur folgende Schreibweisen:

$\forall x \in M(H)$ bzw. $\forall_{x \in M}(H)$ anstelle von $\forall x(x \in M \to (H))$

$\exists x \in M(H)$ bzw. $\exists_{x \in M}(H)$ anstelle von $\exists x(x \in M \wedge (H))$

4.5 Weitere Quantoren

In der Literatur werden weitere prädikatenlogische Quantoren definiert und verwendet (Bspe.: $\exists!\, x(H)$, $\exists!!\, x(H)$, $\iota x(H)$).

4.6 Prädikatenlogik 2. Stufe

Die Prädikatenlogik 1.Stufe wird wie folgt erweitert:

Variable stehen nicht nur für Individuen sondern auch für Prädikate und Operatoren.

Bsp.: $\forall p\big(\exists x \forall y\big(p(x.y)\big) \to \forall y \exists x\big(p(x,y)\big)\big)$