### 2.4.2 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei ein **lineares** $(m, n)$**-Gleichungssystem**, welches sich in folgende **Zeilenstufenform** bringen lässt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Das Gleichungssystem ist **unlösbar**, falls **eine** der Zahlen $\beta_{r+1}, ..., \beta_m$ ungleich 0 ist, denn dann enthält diese Gleichung einen Widerspruch.

(2) Das Gleichungssystem ist **lösbar**, falls $\beta_{r+1} = ... = \beta_m = 0$ oder wenn diese letzten $m - r$ Zeilen gar nicht auftreten, weil $r = m$ ist. Es gilt:

- Falls $r = n$, dann gibt es eine **eindeutige Lösung**, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt.
- Falls $r < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Fall gibt es also **unendlich viele Lösungen.**