2 Matrizen und Vektoren

Grundlegende Begriffe der „linearen Algebra“ und „linearen Optimierung“ sind die Begriffe Matrix, Vektor, Determinante und lineares Gleichungssystem. Wir werden sie am Beispiel des Leontief-Modells für volkswirtschaftliche Verflechtungsbilanzen einführen.

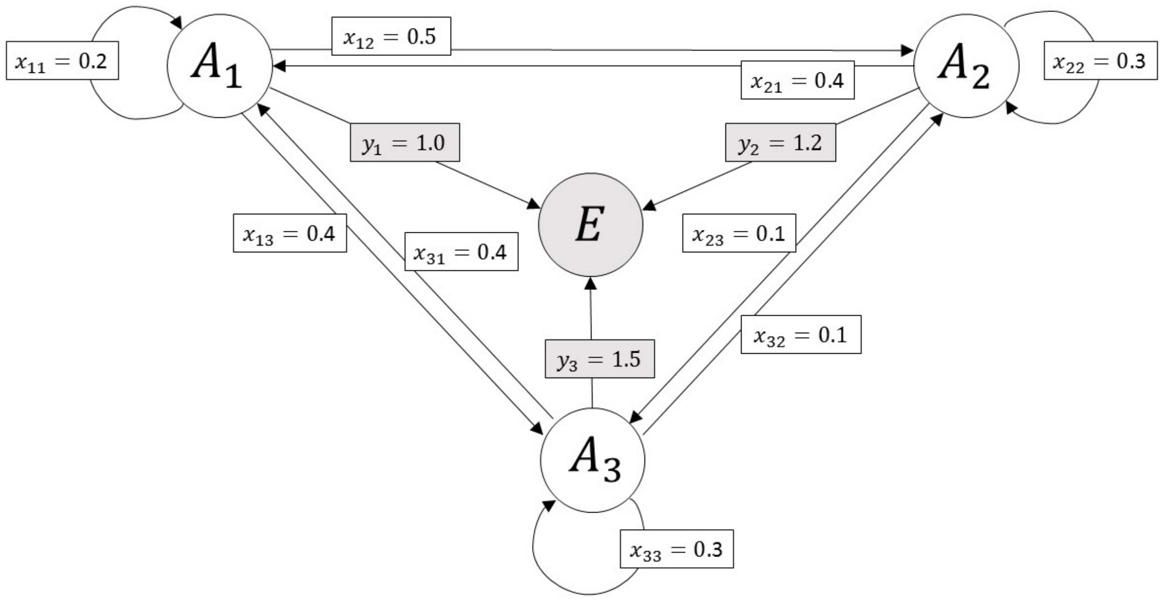
2.1 Einführung

Das Leontief-Modell

Notiz. Eigentliche Abschnittsüberschrift in WiMa

Das Leontief-Modell beschreibt elementare Zusammenhänge (Verflechtungen) zwischen Produktion und Nachfrage in einer Volkswirtschaft / Unternehmen. Zur Illustration betrachten wir drei Firmen (oder Sektoren) A_1, A_2, A_3, die verschiedene Güter produzieren, z.B. A_1: Energie, A_2: Getreide und A_3 Düngemittel und Chemikalien. Die Firmen beliefern einander und einen (nicht-produzierenden) Endverbraucher E entsprechend des folgenden *Gozinto-Graphen* (Angaben in entsprechenden Mengeneinheiten):

(! „Gozinto” ist ein Kunstwort, welches von „goes into” abgeleitet wurde)



Bezeichnungen:

x_{ij} ... Menge, die A_i an A_j liefert $(i, j = 1, 2, 3)$

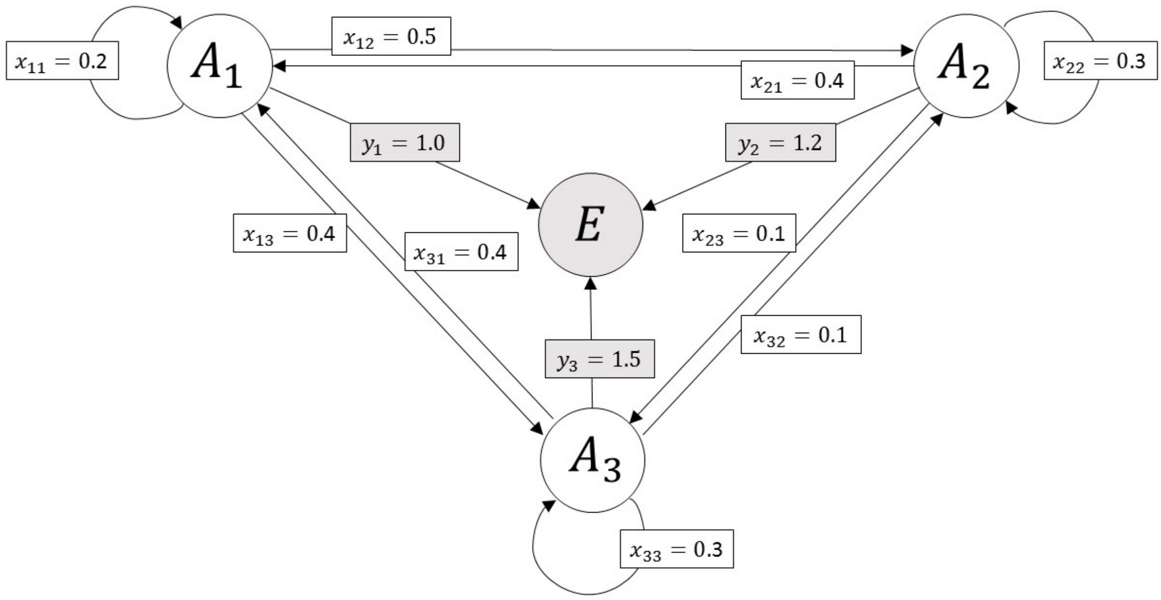
y_i ... Menge, die A_i an E liefert $(i = 1, 2, 3)$

x_i ... Gesamtproduktionsmenge von A_i $(i = 1, 2, 3)$

also
$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_3 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{aligned}$$

Die Informationen im Gozinto-Graphen können ebenso in einer Tabelle dargestellt werden:

Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
von A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
von A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3



Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	0.2	0.5	0.4	1.0	2.1
von A_2	0.4	0.3	0.1	1.2	2.0
von A_3	0.4	0.1	0.3	1.5	2.3

Fragestellung: Gegeben obige Verflechtungsstruktur, welche Gesamtproduktionen x_1, x_2, x_3 müssen erbracht werden, um eine Nachfrage y_1, y_2, y_3 abzudecken?

Wir werden sehen, dass diese Fragestellung mit Hilfe der linearen Algebra behandelt werden kann. Dazu zunächst weitere Bezeichnungen:

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Marktvektor / Nachfragevektor};$$

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Produktionsvektor};$$

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Verbrauchsmatrix};$$

Hier tauchen bereits die Begriffe ,,Matrix" für ein rechteckige Schema (mit 3 Zeilen und 3 Spalten)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

und ,,Vektor" für eine (dreizeilige) Spalte

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

auf, mit denen wir in der linearen Algebra umgehen werden.

Für das konkrete Beispiel, welches mit obigem Gozinto-Graphen gegeben wurde, gilt also

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Der Produktionsvektor $\mathbf{x}$ lässt sich daraus errechnen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.2 + 0.5 + 0.4 + 1.0 \\ 0.4 + 0.3 + 0.1 + 1.2 \\ 0.4 + 0.1 + 0.3 + 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.0 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

`Ende WiMa`
`30.10.2014`

Setzt man die Menge x_{ij}, die A_i an A_j liefert ins Verhältnis zur Gesamtmenge x_j, die A_j produziert, so erhält man die Liefermenge von A_i an A_j, die zur Produktion **einer** Einheit von A_j erforderlich ist

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,.$$

Die Zahlen z_{ij} heißen **Produktionskoeffizienten** oder **Input-Output-Koeffizienten** und können in der Praxis oftmals bestimmt oder geschätzt werden. Dabei beschreibt z_{ii} den Anteil der „Lieferung von A_i an sich selbst", der nötig ist, um eine Einheit zu produzieren. Die Produktion macht natürlich nur Sinn, wenn $z_{ii} < 1$ gilt.

Das rechteckige Schema (mit 3 Zeilen und 3 Spalten)

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$$

wird als **Input-Output-Matrix** bezeichnet.

Wir wissen bereits:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\
x_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\
x_2 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3
\end{aligned}$$

und können dies mit der Beziehung $z_{ij} \cdot x_j = x_{ij}$ umformulieren zu der sogenannten **Output-Bilanz** (O)

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_{11}x_1 + z_{12}x_2 + z_{13}x_3 + y_1 \\
x_2 &= z_{21}x_1 + z_{22}x_2 + z_{23}x_3 + y_2 \\
x_2 &= z_{31}x_1 + z_{32}x_2 + z_{33}x_3 + y_3
\end{aligned} \tag{O}$$

Durch Umstellen erhält man

$$\begin{array}{rrrl}
(1-z_{11})x_1 - & z_{12}x_2 - & z_{13}x_3 & = y_1 \\
-z_{21}x_1 + & (1-z_{22})x_2 - & z_{23}x_3 & = y_2 \\
-z_{31}x_1 - & z_{32}x_2 + & (1-z_{33})x_3 & = y_3
\end{array} \tag{L}$$

Die Gleichungen (L) beschreiben für gegebene Produktionskoeffizienten den Zusammenhang zwischen Nachfragevektor und Produktionsvektor. Man bezeichnet sie als **Leontief-Modell**. Ziel ist es nun, zu gegebener Nachfrage y_1, y_2, y_3 die Gesamtproduktionen x_1, x_2, x_3 zu bestimmen, so dass (L) erfüllt ist.

Vom mathematischen Standpunkt ist (L) ein **lineares Gleichungssystem** für x_1, x_2 und x_3 (mit der „rechten Seite" y_1, y_2 und y_3). Wir werden sehen, dass man (L) in **Matrixschreibweise** auch als **Matrixgleichung**

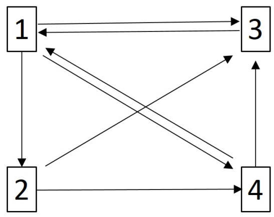
$$\mathbf{x} - \mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{L}$$

schreiben kann, wenn man für Matrizen und Vektoren geeignete Operationen „Addition" und „Multiplikation" definiert. Das Gleichungssystem (L) aufzulösen bedeutet dann, eine Matrixgleichung zu lösen. Dieser „Matrixkalkül" ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

Googles PageRank-Algorithmus (vereinfacht)

Für der Anzeige von Suchergebnissen bewertet Google die Wichtigkeit der einzelnen Seiten und zeigt wichtigere Seiten zuerst an. Dabei wird eine Webseite als umso wichtiger angesehen, je mehr Links von anderen (wichtigen) Seiten auf diese Seite verweisen.

Als Beispiel betrachten wir das folgende Web aus vier Seiten. Ein Pfeil repräsentiert dabei einen Link von einer Seite auf eine andere.



Wie lassen sich nun die Webseiten gemäß ihrer Bedeutung bewerten?

Die Informationen in obiger Grafik können ebenso in folgender Tabelle dargestellt werden

Link	auf 1	auf 2	auf 3	auf 4	$\sum$ (n_j)
von Seite 1	0	1	1	1	3
von Seite 2	0	0	1	1	2
von Seite 3	1	0	0	0	1
von Seite 4	1	0	1	0	2

Mathematische Modellierung:

x_i ... Wichtigkeit der Seite i, $\quad i = 1, 2, 3, 4$

Ansatz: $x_i \sim$ Summe der Links auf diese Seite, gewichtet durch Bedeutung der Seite, d.h. Links von wichtigen Webseiten haben höhere Bedeutung als Links von weniger wichtigen Webseiten. Links auf die eigene Seite werden nicht gezählt. Damit

$x_i \sim \sum_{j \neq i : j \to i} x_j$.

Jedoch: Seiten die gegenseitig aufeinander verweisen, erhöhen indirekt ihre eigene Bedeutung, z.B. Seiten 1 und 4 im Beispiel. Deshalb folgende Korrektur:

$$x_i = \sum_{j \neq i : j \to i} \frac{x_j}{n_j}, \tag{GPR}$$

wobei $n_j \geq 0$ die Anzahl aller von j ausgehender Links ist.

! In obiger Summe werden nur solche Webseiten j betrachtet, die auf i verweisen, deshalb ist für diese Seiten $n_j \geq 1$.)

Interpretation: Jede Seite hat eine 'Stimme' vom Gewicht x_j , die sie gleichmäßig auf alle Seiten aufteilt, zu denen sie verlinkt ist.

Bei Berücksichtigung dieser Korrektur erhalten wir aus obiger Tabelle folgende Tabelle für die 'Stimmenverteilung':

Stimmenanteil	auf 1	auf 2	auf 3	auf 4	$\sum$
von Seite 1	0	1/3	1/3	1/3	1
von Seite 2	0	0	1/2	1/2	1
von Seite 3	1	0	0	0	1
von Seite 4	1/2	0	1/2	0	1

Wir bezeichnen das 'Innere' der Tabelle als **Google-Bewertungsmatrix** und schreiben

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Einträge bezeichnen wir als **Koeffizienten** a_{ij}. Dabei bezeichnet der erste Index die Zeilen- und der zweite Index die Spaltenposition. Für die Google-Bewertungsmatrix gilt also $a_{ij} = \frac{1}{n_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

Die einzelnen Seitenbewertungen müssen also folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 &= \frac{1}{3}x_1 \\
x_3 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_4 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2.
\end{aligned}$$

Dies kann man noch umformen zu

$$\begin{array}{rrrrl}
x_1 & & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = 0 \\
-\frac{1}{3}x_1 & +x_2 & & & = 0 \\
-\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = 0 \\
-\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & = 0.
\end{array}$$

Gesucht sind also Werte $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ bzw. ein **Lösungsvektor**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

so dass alle obigen Gleichungen erfüllt sind.

Vom mathematischen Standpunkt handelt es sich um ein **lineares Gleichungssystem** für x_1, x_2, x_3 und x_4 (mit der ,,rechten Seite" $0, 0, 0, 0$). Wir werden sehen, dass man es in **Matrixschreibweise** auch als **Matrixgleichung**

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{GPR}$$

schreiben kann, wenn man für Matrizen und Vektoren geeignete Operationen ,,Addition", "Transponieren" und ,,Multiplikation" definiert. Das Gleichungssystem (GPR) aufzulösen bedeutet dann, eine

Matrixgleichung zu lösen. Dieser ,,Matrixkalkül" ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

`Ende Ma 1 IM 11.11.2014`

2.2 Matrix-Kalkül - Rechnen mit Matrizen

Eine $m \times n$ - **Matrix** A ist ein rechteckiges Schema reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrizen können auch (in der verkürzten Schreibweise) in der Form

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

durch Angabe ihrer $m \cdot n$ **Koeffizienten** a_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ angegeben werden. Die Anzahl $n \times m$ von Zeilen und Spalten bezeichnet man als das **Format der Matrix** A. Falls $m = n$, so nennt man die Matrix A **quadratisch**.

Ein m-dimensionalen **Vektor a** ist eine m-zeilige Spalte reeller Zahlen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{...}\textbf{Spaltenvektor.}$$

Zeilen

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

mit n Einträgen reeller Zahlen werden als n-dimensionale **Zeilenvektoren** bezeichnet.

Für eine $m \times n$- Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bezeichnet man die die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots \ , \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

als **Spalten** (oder **Spaltenvektoren**) von A und

$$\begin{array}{c} (a_{11}, \ \dots \ , a_{1n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, \ \dots \ , a_{mn}) \end{array}$$

als **Zeilen** (oder **Zeilenvektoren**) von A.

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ deren Koeffizienten alle Null sind, also

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n,$$

heißt **Nullmatrix**, $\qquad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Unter der **transponierten Matrix** (oder **Transponierten**) A^T einer $m \times n$- Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

versteht man die $n \times m$ - Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{(sprich: „}A \text{ transponiert") .}$$

Sie entsteht durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Die $n \times n$-Matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \ \text{ mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

heißt $n \times n$ - **Einheitsmatrix**.

(Die Koeffizienten

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

werden als **Kronecker-Symbole** bezeichnet und finden an vielen Stellen der Mathematik Anwendung.) Eine quadratische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ heißt **symmetrisch**, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ d.h. falls $A = A^T$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} = A^T$$

Notiz. Inhaltliches Beispiel für Symmetrie finden; Besser: Unter Überschrift quadratische Matrizen behandeln.

2.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

Es seien $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ zwei $m \times n$ Matrizen (mit gleichem Format). Also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Dann heißt die $m \times n$ - Matrix

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

die **Summe von** A **und** B. Die $m \times n$ - Matrix

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \ldots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \ldots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \ldots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt **die Differenz von** A **und** B. **Addition und Subtraktion von zwei Matrizen sind nur für Matrizen mit gleichem Format erklärt und erfolgen komponentenweise.**

Beispiele:

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -7 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} = & \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 16 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 24 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies motiviert die nachfolgend erklärte Multiplikation mit einem Skalar.

`Ende WiMa`
`4.11.2014`

2.2.2 Multiplikation mit einer reellen Zahl (Skalar)

Unter dem Produkt einer reellen Zahl (auch Skalar genannt) $\lambda \in \mathbb{R}$ und einer $m \times n$-Matrix A versteht man

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

d.h. jeder Koeffizient von A wird mit λ multipliziert.

Folgende **Rechenregeln** gelten für die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar. Dabei sind A, B, C $m \times n$-Matrizen (gleiches Format!) und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Skalare).

Notiz. Auf Folie kopieren!

- $A + \underbrace{\mathbf{0}}_{\uparrow \text{ Nullmatrix}} = A$
- $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
  (d.h. auf Klammern kann verzichtet werden)
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Beispiel:

Notiz. Folie!

Ein Unternehmen stellt vier Produkte E_1, E_2, E_3, E_4 her und liefert sie an drei Verkäufer V_1, V_2, V_3. Die Stückzahlen der Lieferungen in zwei Quartalen eines 1. Halbjahres werden durch zwei 4×3 - Matrizen A_1 und A_2 angegeben:

Lieferungen 1. Quartal		V_1	V_2	V_3
	E_1	17	101	13
A_1 :	E_2	23	34	51
	E_3	45	16	53
	E_4	58	17	42

Lieferungen 2. Quartal		V_1	V_2	V_3
	E_1	18	120	14
A_2 :	E_2	29	37	53
	E_3	46	18	60
	E_4	59	19	50

Dann gibt $A_1 + A_2$ die Lieferungen für das Halbjahr und $A_2 - A_1$ gibt den Zuwachs im 2. gegenüber dem 1. Quartal an.

Lieferungen 1.Halbjahr		V_1	V_2	V_3
	E_1	35	221	27
$A_1 + A_2$:	E_2	52	71	104
	E_3	91	34	113
	E_4	117	36	92

Zuwachs im 2. Quartal		V_1	V_2	V_3
	E_1	1	19	1
$A_2 - A_1$:	E_2	6	3	2
	E_3	1	2	7
	E_4	1	2	8

Soll der Unternehmer den durch $A_2 - A_1$ gegebenen Zuwachs im dritten Quartal verdoppeln, so muss gelten

$$A_3 - A_2 = 2(A_2 - A_1)$$

wobei A_3 die Lieferungen im dritten Quartal bezeichnet. Es ist

Zuwachs im 3. Quartal		V_1	V_2	V_3
	E_1	2	38	2
$A_3 - A_2 =\overset{=}{!}\ 2(A_2 - A_1)$:	E_2	12	6	4
	E_3	2	4	14
	E_4	2	4	16

und deshalb

Lieferungen im 3. Quartal		V_1	V_2	V_3
	E_1	20	158	16
	E_2	41	43	57
$A_3 = (A_3 - A_2) + A_2$:	E_3	48	22	74
	E_4	61	23	66

2.2.3 Multiplikation von Matrizen

Es seien $A = (a_{ik})$ eine $m \times p$-Matrix und $B = (b_{ik})$ eine $p \times n$-Matrix. Dann heißt

$$\begin{aligned} C &= (c_{ik}) \\ &:= A \cdot B \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1p}\, b_{p1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1p}\, b_{pn} \\ \vdots & & \\ a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mp}\, b_{p1} & \dots & a_{m1}b_{1n} + \ldots + a_{mp}\, b_{pn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das **Produkt der Matrizen** A **und** B (oder: **Produktmatrix**).

Der Koeffizient c_{ik} in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Produktmatrix $C = (c_{ik})$ ist also das **Skalarprodukt** des i-ten Zeilenvektors $(a_{i1}, \ldots, a_{ip})$ von A und des k-ten Spaltenvektors $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}$ von B, d.h.

$$c_{ik} = (a_{i1}, \ldots, a_{ip}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{ip}b_{pk} \; .$$

Kurzschreibweise:

$$C = A \cdot B \quad \text{mit} \quad C = (c_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

und

$$c_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \cdot b_{\ell k} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m \;\text{ und }\; k = 1, \ldots, n \; .$$

Falkschema zur Berechnung eines Matrixprodukts

Gegeben: $A = (a_{ik})$ ... $m \times p$-Matrix, $B = (b_{ik})$ ... $p \times n$ - Matrix

Gesucht: $C := A \cdot B$ ... **Produkt von** A **und** B

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & b_{p1} & \ldots & b_{pn} \\
\hline
a_{11} & \ldots & a_{1p} & a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1p}\,b_{p1} & \ldots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1p}\,b_{pn} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mp} & a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mp}\,b_{p1} & \ldots & a_{m1}b_{1n} + \ldots + a_{mp}\,b_{pn}
\end{array}
$$

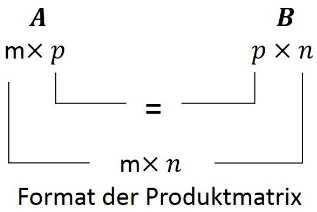
alternative Darstellung:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & | & & | \\
 & & & \mathbf{b}_{\bullet 1} & \ldots & \mathbf{b}_{\bullet n} \\
 & & & | & & | \\
\hline
--- & \mathbf{a}_{1\bullet} & --- & \mathbf{a}_{1\bullet}\mathbf{b}_{\bullet 1} & \ldots & \mathbf{a}_{1\bullet}\mathbf{b}_{\bullet n} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
--- & \mathbf{a}_{m\bullet} & --- & \mathbf{a}_{m\bullet}\mathbf{b}_{\bullet 1} & \ldots & \mathbf{a}_{m\bullet}\mathbf{b}_{\bullet n}
\end{array}
$$

! $C = A \cdot B = (c_{ik})$ mit

$$c_{ik} = \mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b}_{\bullet k} = (a_{i1}, \ldots, a_{ip}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{ip}b_{pk} \ .$$

Das Produkt zweier Matrizen A und B ist nur erklärt, falls die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt. Die Produktmatrix hat genauso viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B:



Beispiele:

Notiz. Falk-Schema verwenden, siehe Skript von B. Jung FS ET

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A{\cdot}B = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 12 & 34 & 26 \end{pmatrix}$

  ! BA ist nicht erklärt.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow\ A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A$
-

Leontief-Modell in Matrix-Schreibweise

Leontief-Modell:

$$\begin{aligned} (1-z_{11})x_1 - \quad z_{12}x_2 - \quad z_{13}x_3 &= y_1 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - \quad z_{23}x_3 &= y_2 \\ -z_{31}x_1 - \quad z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 &= y_3 \end{aligned} \qquad \text{(L)}$$

Bezeichnungen:

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Marktvektor / Nachfragevektor};$$

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Produktionsvektor};$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Input-Output-Matrix};$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{Zx}: & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} z_{11}x_1 + z_{12}x_2 + z_{13}x_3 \\ z_{21}x_1 + z_{22}x_2 + z_{23}x_3 \\ z_{31}x_1 + z_{32}x_2 + z_{33}x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Also

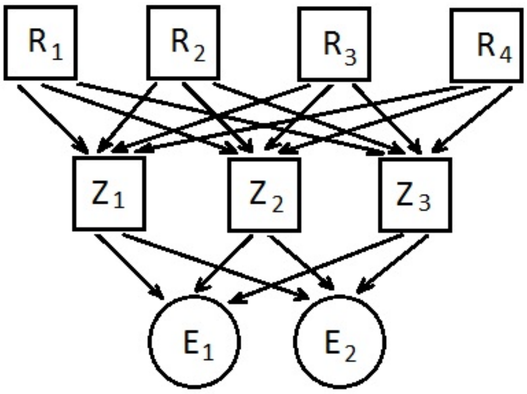
$$\mathbf{x} - \mathbf{Zx} = \begin{pmatrix} (1-z_{11})x_1 - z_{12}x_2 - z_{13}x_3 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - z_{23}x_3 \\ -z_{31}x_1 - z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 \end{pmatrix}$$

und somit $\mathbf{x} - \mathbf{Zx} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad$ (L).

Ende WiMa
6.11.2014

Anwendung: Materialverflechtungsmatrizen

Ein Betrieb stellt aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 über drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 zwei Endprodukte E_1, E_2 her.



Die Materialverflechtungsmatrizen $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,4\\j=1,\dots,3}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,2,3\\k=1,2}}$ seien durch folgende Tabellen gegeben:

A:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	14	0	3
R_2	6	1	7
R_3	3	2	0
R_4	2	1	10

B:

	E_1	E_2
Z_1	6	3
Z_2	0	2
Z_3	11	7

Der Betrieb benötigt z.B. 6 Einheiten des Rohstoffes R_2, um eine Einheit des Zwischenproduktes Z_1 herzustellen, und z.B. 11 Einheiten des Zwischenproduktes Z_3, um 1 Einheit des Endproduktes E_1 herzustellen.

Man benötigt für 1 Einheit von E_1 6 Einheiten von Z_1 und 11 Einheiten von Z_3, die zu ihrer Produktion wiederum

$$6 \cdot 14 + 3 \cdot 11 = 117 \quad \text{Einheiten von } R_1$$

erforderlich machen.

Die Koeffizienten c_{ik} $(i = 1, \ldots, 4;\ k = 1, 2)$ der 4×2-Produktmatrix $C := A \cdot B$

				E_1	E_2
			Z_1	6	3
			Z_2	0	2
			Z_3	11	7
	Z_1	Z_2	Z_3		
R_1	14	0	3	117	63
R_2	6	1	7	113	69
R_3	3	2	0	18	13
R_4	2	1	10	122	78

geben die Einheiten des Rohstoffes R_i $(i = 1, \ldots, 4)$ an, die zur Herstellung einer Einheit des Endproduktes E_k $(k = 1, 2)$ erforderlich sind.

$$C = A \cdot B : \quad \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline R_1 & 117 & 63 \\ R_2 & 113 & 69 \\ R_3 & 18 & 13 \\ R_4 & 122 & 78 \end{array}$$

Anwendung: Übergangsmatrizen in der Marktforschung

Auf einem Markt konkurrieren drei Produkte P_1, P_2, P_3 mit den Marktanteilen von 0.6, 0.3 bzw. 0.1 zu einem Zeitpunkt T_0.
Bezeichne α_{ik} $(0 \leq \alpha_{ik} \leq 1, \sum_k \alpha_{ik} = 1)$ den Anteil der Käufer von Produkt P_i zum Zeitpunkt T_0, der zum Zeitpunkt T_1 das Produkt P_k kauft, dann heißt die quadratische Matrix

$$A = (\alpha_{ik})_{i,k=1,2,4}$$

die Matrix der Käuferfluktuation. (Dabei ist z. B. $\alpha_{22} \cdot 100\%$ die prozentuale Markentreue bzgl. P_2 und $(\alpha_{21} + \alpha_{23}) \cdot 100\%$ ist der prozentuale Markenwechsel bzgl. P_2.)

Beschreibt beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

jeweils die Matrix der Käuferfluktuation von T_0 zu T_1 und vom Zeitpunkt T_1 zum Zeitpunkt T_2, so stellt $A \cdot A =: A^2$ die Matrix der Kundenfluktuationen von T_0 zu T_2 dar:

Notiz. Skizze: Zeitstrahl mit Zeitpunkten T_0, T_1 und Übergängen zwischen Vektoren (x_1^0, x_2^0, x_3^0) und (x_1^1, x_2^1, x_3^1) zu entsprechenden Zeitpunkten.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.27 & 0.24 \\ 0.15 & 0.82 & 0.03 \\ 0.36 & 0.48 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt T_0 haben sich im Zeitpunkt T_2 folgendermaßen geändert:

$$
\begin{aligned}
P_1 &: \ 0.6 \to 0.375 \\
P_2 &: \ 0.3 \to 0.456 \\
P_3 &: \ 0.1 \to 0.169
\end{aligned}
$$

wie die Rechnung zeigt:

$$
\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.49 & 0.27 & 0.24 \\ 0.15 & 0.82 & 0.03 \\ 0.36 & 0.48 & 0.16 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0.375 & 0.456 & 0.169 \end{pmatrix}
$$

Satz (Rechenregeln für die Matrixmultiplikation):

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$\begin{array}{ll} A \dots & m \times p - \text{Matrix}, \\ B \dots & p \times q - \text{Matrix}, \\ C \dots & q \times n - \text{Matrix}, \\ D \dots & p \times q - \text{Matrix}. \end{array}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C) && \text{(Assoziativität)} \\ A \cdot (B + D) &= A \cdot B + A \cdot D && \text{(Distributivität)} \\ (B + D) \cdot C &= B \cdot C + D \cdot C && \text{(Distributivität)} \\ I_m A &= A \\ A I_p &= A \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \end{aligned}$$

Achtung: Bei der Distributivität muss die Reihenfolge der Faktoren beachtet werden. Der Ausdruck $AB + BC$ lässt sich weder zu $(A + C)B$ noch zu $B(A+C)$ umformen, da dann beim Ausmultiplizieren eine anderen Reihenfolge der Matrixfaktoren entstünde!

Ende Ma 1 IM
20.11.2014

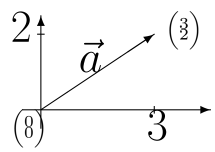
2.3 Vektoren

Notiz. Evtl. auch auf Vektorräume eingehen oder Begriff vorbereiten

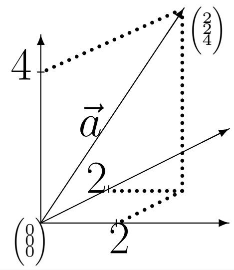
Im Folgenden geben wir noch Eigenschaften von $n \times 1$ - Matrizen, d.h. von Vektoren an. Dabei werden wir vor allem auf die geometrische Interpretation eines Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ als eine gerichtete Strecke im $\mathbb{R}^n$ vom Nullpunkt $(0, \ldots, 0)$ zum Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ eingehen.

Beispiele:

- $n = 2: \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



- $n = 3: \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

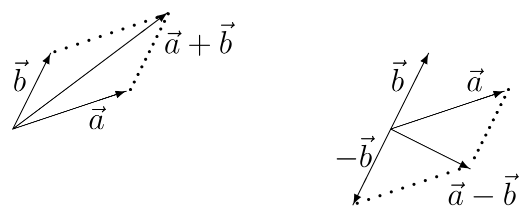


Notiz. Außerdem: $\mathbf{o} = (0, 0, ...0)^T$... **Nullvektor**, $\mathbf{1} = (1, ..., 1)^T$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (Eins an i-ter Stelle)...**i-ter Einheitsvektor**) einführen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren a und b sind definiert durch den Matrizenkalkül:

$$a \pm b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Dies ist geometrisch anschaulich interpretierbar im sogenannten **Kräfteparallelogramm**:



Als **Betrag** (oder **Länge**) eines Vektors a bezeichnet man

$$|a| := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

In der geometrischen Interpretation gibt der Betrag den Abstand des Punktes $a = (a_1, ..., a_n)$ vom Nullpunkt an. (Dieser Definition liegt der Satz des Pythagoras zugrunde.) Man überlegt sich leicht, dass $|a - b|$ den Abstand zwischen den Punkten a und b bezeichnet.

Notiz. Bsp. $(3, 2)^T$ vorführen

Notiz. Multiplikation mit Skalar einführen und geometrisch interpretieren.

Für den Betrag erhält man unmittelbar die folgenden Eigenschaften:

- $|a| = |-a|$
- $|\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (d.h. λ reell)
- $|a| = 0 \iff a = 0$ $\left(\text{d.h. } a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Als **Skalarprodukt** zweier Vektoren a und b bezeichnet man

$$a^T b = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

(vgl. Multiplikation von Matrizen).

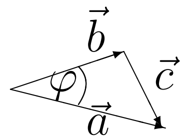
Das Skalarprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

- $a^T b = b^T a$
- $a^T a = a_1^2 + \ldots + a_n^2 = |a|^2$
- $a^T b = |a||b| \cos \varphi$, wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren a und b bezeichnet.

  Mit dem Skalarprodukt kann also der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet werden, denn

$$\cos\varphi = \frac{a^T b}{|a| \cdot |b|}$$

$$\varphi = \arccos\frac{a^T b}{|a| \cdot |b|}$$



- $a^T b = 0 \iff a \perp b \quad (\text{für } a, b \neq 0)$
  (d. h., das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b ist gleich Null, wenn a und b aufeinander senkrecht stehen, d. h. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und also $\cos\varphi = 0$)

Notiz. Bsp. $(3, 2)^T$, $(2, -3)$ vorführen; Begriffe parallel und antiparallel einführen

2.3.1 Lineare Unabhängigkeit

... (Material 'Vektoren' aus FS ET)

Ende WiMa
11.11.2014

2.4 Lösung allgemeiner linearer Gleichungssysteme

2.4.1 Definition von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition. Ein **lineares Gleichungssystem** aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, ..., x_n$ (kurz: $m \times n$-**Gleichungssystem**) hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dabei sind die a_{ij} und b_i gegebene reelle Zahlen.

- Die a_{ij} heißen **Koeffizienten** des Gleichungssystems.
- Sind alle b_i gleich null, so heißt das Gleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Gesucht sind **alle Lösungen des Gleichungssystems**, d.h. alle n-Tupel $x_1, \dots, x_n$ reeller Zahlen, für die alle m Gleichungen erfüllt sind.

Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

lässt sich als Matrixgleichung schreiben:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Dabei sind

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \dots \text{die } \textbf{Koeffizientenmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \dots \text{der } \textbf{Vektor der Unbekannten},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \dots \text{die } \textbf{rechte Seite bzw. der inhomogene},$$

des linearen Gleichungssystems.

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich in verkürzter Form durch Angabe der **erweiterten Koeffizienzenmatrix** schreiben:

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2.4.1 Der Gauß-Algorithmus

Es zeigt sich, das in einem LGS manchmal verschiedene Gleichungen

- auf die gleiche Gleichung reduziert werden können

oder

- widersprüchlich sind.

Dies kann an der sogenannten Zeilenstufenform des LGS abgelesen werden und spiegelt sich im Lösungsverhalten des LGS wieder. Der Gauß-Algorithmus ist ein systematisches Verfahren, um **alle** Lösungen eines LGS zu finden.

Äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems

Die **Lösungsmenge** eines linearen Gleichungssystems **bleibt** bei Anwendung der folgenden Operationen **unverändert erhalten** (sogenannte äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems):

(1) Vertauschen von zwei Gleichungen,

(2) Multiplikation einer Gleichung mit einer beliebigen Zahl ungleich 0 (oder Division einer Gleichung durch eine beliebige Zahl ungleich Null),

(3) Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Die äquivalenten Umformungen eines Gleichungssystems entsprechen folgenden **elementaren Zeilenumformungen** in der zugehörigen **erweiterten Koeffizientenmatrix**:

(1) Vertauschen von zwei Zeilen,

(2) Multiplikation einer Zeile mit einer beliebigen Zahl ungleich 0 (oder Division einer Zeile durch eine beliebige Zahl ungleich Null),

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Achtung: Diese Operationen dürfen nicht auf die Spalten der erweiterten Koeffizientenmatrix angewendet werden!

Beispiel (1).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ -9x_1 & + & 10x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & + & 28x_2 & - & 27x_3 & - & 22x_4 & = & -36 \\ & & & + & 8x_3 & + & 11x_4 & = & 14 \end{array}$$

In verkürzter Form:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ -9 & 10 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

Unendliche viele Lösungen (1 Parameter):

$$x_4 = t, x_3 = \frac{11t - 14}{8}, x_2 = \frac{-121t + 90}{224}, x_1 = \frac{-117t + 50}{112}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel (2).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ -9x_1 & + & 10x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 6 \end{array}$$

In verkürzter Form:

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \\ -9 & 10 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Unendliche viele Lösungen (1 Parameter):

$$x_4 = t, x_3 = \frac{11t - 14}{8}, x_2 = \frac{-121t + 90}{224}, x_1 = \frac{-117t + 50}{112}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel (3).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ -9x_1 & + & 10x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 14x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \end{array}$$

In verkürzter Form:

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ -9 & 10 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 14 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 16 & 22 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Keine Lösung!

Beispiel (4).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ -9x_1 & + & 10x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 12x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \end{array}$$

In verkürzter Form:

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ -9 & 10 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 12 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Eindeutige Lösung:

$$x_4 = 5, x_3 = -\frac{41}{8}, x_2 = -\frac{515}{224}, x_1 = -\frac{535}{112}.$$

Zeilenstufenform einer Matrix

Definition. Eine Matrix A ist in **Zeilenstufenform**, falls sie die folgende Form hat:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\
0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right)$$

Dabei gilt: $\alpha_{11} \dots \alpha_{rr} \neq 0$.

Bemerkungen:

(1) Die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\
0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn}
\end{array}\right)$$

mit $\alpha_{11} \dots \alpha_{rr} \neq 0$ ist ebenfalls in Zeilenstufenform!

(2) **Schematische Darstellung einer Matrix in Zeilenstufenform:**

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} * & \circ & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ 0 & * & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & \circ & \dots & \circ \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

wobei $*$ **eine Zahl ungleich Null** und $\circ$ eine beliebige Zahl bezeichnet.

Es gilt:

- Das $*$-Element steht in der Diagonale oder rechts davon.
- In jeder **Zeile** sind alle Element **links von $*$ null**.
- In jeder **Spalte** sind alle Elemente **unterhalb von $*$ null**.

(3) Berechnung der Zeilenstufenform mit Casio-TR über Befehl **ref(A) im Menü Aktion/Matrix/Berechnungen**

Gauß-Algorithmus

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ wird mit Hilfe **elementarer Zeilenumformungen**, also durch

(1) Vertauschen von zwei Zeilen,

(2) Multiplikation einer Zeile mit einer beliebigen Zahl ungleich 0 (oder Division einer Zeile durch eine beliebige Zahl ungleich Null),

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

in **Zeilenstufenform** gebracht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right)$$

Das Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems kann direkt aus dieser Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix abgelesen werden.

2.4.2 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei ein **lineares** (m, n)**-Gleichungssystem**, welches sich in folgende **Zeilenstufenform** bringen lässt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & ... & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \alpha_{22} & ... & ... & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Das Gleichungssystem ist **unlösbar**, falls **eine** der Zahlen $\beta_{r+1}, ..., \beta_m$ ungleich 0 ist, denn dann enthält diese Gleichung einen Widerspruch.

(2) Das Gleichungssystem ist **lösbar**, falls $\beta_{r+1} = ... = \beta_m = 0$ oder wenn diese letzten $m - r$ Zeilen gar nicht auftreten, weil $r = m$ ist. Es gilt:

- Falls $r = n$, dann gibt es eine **eindeutige Lösung**, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt.
- Falls $r < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Fall gibt es also **unendlich viele Lösungen.**

2.4.3 Der Rang einer Matrix

Definition. Die Maximalzahl r der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix A heißt **Rang der Matrix** A**.**

Bezeichnung: $\text{rang}(A) = r$

Satz.

(1) Der Rang einer Matrix A ist gleich dem Rang der transponierten Matrix A^T. Das bedeutet: Die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen(vektoren) einer Matrix ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten(vektoren) von A.

(2) Elementare Zeilenumformungen (und analog elementare Spaltenumformungen) lassen den Rang einer Matrix unverändert.

Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen einer Matrix

Der Rang r einer Matrix ändert sich nicht bei Anwendung der folgenden **elementaren Umformungen**:

(1) Zwei Zeilen oder Spalten werden miteinander vertauscht.

(2) Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen, von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert.

(3) Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert.

Mit Hilfe elementarer Umformungen lässt sich jede Matrix A in Zeilenstufenform überführen:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} * & \circ & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ 0 & * & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & \circ & \dots & \circ \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

mit $\alpha_{11} \dots \alpha_{rr} \neq 0$.

Es gilt dann:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A}) = r = \text{Anzahl der Nicht-Null-Zeilen von } \tilde{A}.$$

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei ein **lineares** (m,n)**-Gleichungssystem**, welches sich in folgende **Zeilenstufenform** bringen lässt:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & \beta_r \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Das Gleichungssystem ist **unlösbar**, falls der Rang der Koeffizientenmatrix echt kleiner ist als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, denn dann enthält es einen Widerspruch.

Kurz: LGS $(A|b)$ **unlösbar, falls rang**$(A) <$ **rang**$(A|b)$

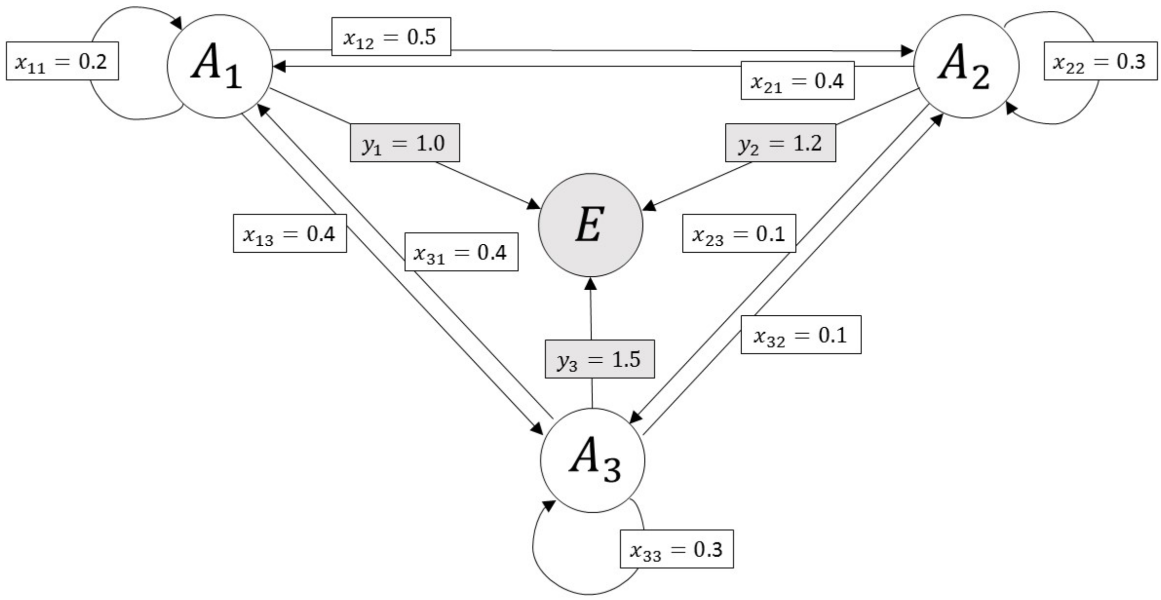
(2) Das Gleichungssystem ist **lösbar**, falls der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

Kurz: LGS $(A|b)$ **lösbar, falls rang**$(A) =$ **rang**$(A|b)$

Es gilt:

- **Falls rang**$(A) = n$, dann gibt es eine **eindeutige Lösung**, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt.
- **Falls rang**$(A) < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Fall gibt es also **unendlich viele Lösungen.**

2.4.4 Anwendung: Das Leontief-Modell



Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	0.2	0.5	0.4	1.0	2.1
von A_2	0.4	0.3	0.1	1.2	2.0
von A_3	0.4	0.1	0.3	1.5	2.3

Fragestellung: Gegeben obige Verflechtungsstruktur, welche Gesamtproduktionen x_1, x_2, x_3 müssen erbracht werden, um eine Nachfrage

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

abzudecken?

Wir wissen bereits, dass das Leontief-Modell

$$\begin{aligned} (1-z_{11})x_1 - \quad z_{12}x_2 - \quad z_{13}x_3 &= y_1 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - \quad z_{23}x_3 &= y_2 \\ -z_{31}x_1 - \quad z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{L}$$

als Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{x} - \mathbf{Z}\mathbf{x} = (I - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

geschrieben werden kann mit

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Marktvektor / Nachfragevektor, gegeben};$$

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Produktionsvektor, gesucht};$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{ Input-Output-Matrix}.$$

Dabei gilt

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}^0}{x_j^0} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

mit x_{ij}^0, x_j^0 ... Produktionskoeffizienten zum Zeitpunkt der Marktbeobachtung.

Im Beispiel sind die Produktionskoeffizienten x_{ij}^0, x_j^0 zum Zeitpunkt der Marktbeobachtung gegeben durch die Tabelle

Lieferung	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
von A_1	0.2	0.5	0.4	1.0	2.1
von A_2	0.4	0.3	0.1	1.2	2.0
von A_3	0.4	0.1	0.3	1.5	2.3

.

Damit

$$\mathbf{X}^0 = \left(x_{ij}^0\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x^0} = (x_i^0)_{i=1,2,3,} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.0 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0.2/2.1 & 0.5/2.0 & 0.4/2.3 \\ 0.4/2.1 & 0.3/2.0 & 0.1/2.3 \\ 0.4/2.1 & 0.1/2.0 & 0.3/2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/21 & 5/20 & 4/23 \\ 4/21 & 3/20 & 1/23 \\ 4/21 & 1/20 & 3/23 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\mathbf{I} - \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 - 2/21 & -5/20 & -4/23 \\ -4/21 & 1 - 3/20 & -1/23 \\ -4/21 & -1/20 & 1 - 3/23 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19/21 & -5/20 & -4/23 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 \end{pmatrix}.$$

Somit hat das Leontief-Modell $(\mathbf{I} - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ für gegebenes

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

die Form

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z}|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 19/21 & -5/20 & -4/23 & 10 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 & 10 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 & 10 \end{array}\right)$$

Die zugehörige Zeilenstufenform (TR)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -21/76 & -84/437 & 210/19 \\ 0 & 1 & -700/6969 & 4600/303 \\ 0 & 0 & 1 & 10580/637 \end{array}\right)$$

führt zur **eindeutigen(!) und positiven(!)** Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1720/91 \\ 4600/273 \\ 10580/637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.90 \\ 16.84 \\ 16.61 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Lösung kann mit dem Casio-TR über den Befehl rref($(\mathbf{I}-\mathbf{Z}|\mathbf{y})$) direkt aus der reduzierten Zeilenstufenform abgelesen werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18.90 \\ 0 & 1 & 0 & 16.84 \\ 0 & 0 & 1 & 16.61 \end{array}\right)$$

Satz: Das Leontief-Modell $(\mathbf{I}-\mathbf{Z})\mathbf{x} = \mathbf{y}$ hat genau dann eine eindeutige positive Lösung, wenn in der Matrix $\mathbf{Z}$ alle Spaltensummen kleiner als Eins sind, d.h. wenn

$$\sum_{j=1}^{3} z_{ij} < 1.$$

2.5 Quadratische Matrizen und quadratische lineare Gleichungssysteme

2.5.1 Grundbegriffe

Der folgende Text muss noch überarbeitet werden entsprechend Papula, Bd. 2, S. 11ff bzw. handschriftlichen Ergänzungen/Notizen

Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl, d.h. $n \times n$-Matrizen heißen **quadratische Matrizen.** Sie spielen in den Anwendungen eine besondere Rolle, z.B. als lineare Abbildungen (..., Basiswechsel)

Quadratische Matrizen besitzen die Gestalt (wie Papula, Bd. 2, S. 11ff):

... (Hauptdiagonale, Nebendiagonale)

Transponieren bedeutet bei einer quadratischen Matrix die Spiegelung der Koeffizienten an der Hauptdiagonalen.

Einige spezielle quadratische Matrizen spielen eine besondere Rolle:

Notiz. Vgl. Papula, Bd. 2, §2.4

Diagonalmatrix ... , Sonderfälle: **Multiplikatormatrix**, **Einheitsmatrix**,

$M_{\lambda,k} = (x_{ij})$ ... Multiplikatormatrix, falls

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \neq k \\ \lambda & i = j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

symmetrische Matrix, lineare Abb., Basiswechsel

Eine quadratische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ heißt **symmetrisch**, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ d.h. falls $A = A^T$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} = A^T$$

Notiz. Inhaltliches Beispiel für Symmetrie finden; Besser: Unter Überschrift quadratische Matrizen behandeln.

2.5.2 Determinanten

Notiz. Start wie Papula, Bd. 2, S. 23 ff:

Anwendungsbeispiel Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Mit der sogenannten Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \text{...„rechte Seite”}$$

und

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{...„Vektor der Unbekannten”}$$

lässt sich dieses LGS in Matrixform auch schreiben als

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Notiz. ! Mittels Falk-Schema vorrechnen.

Wir gehen davon aus, dass die Koeffizienten von A sowie die rechte Seite $\mathbf{y}$ gegeben sind, und eine **Lösung $\mathbf{x}$** der Matrixgleichung bzw. des LGS gesucht ist.

Um diese Lösung zu finden, eliminieren wir zunächst x_2 und erhalten ein Bestimmungsgleichung für x_1. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung mit a_{22} und die zweite mit $(-a_{12})$.

...

Dies führt zu

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Analog erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für x_2:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Damit haben wir je eine Bestimmungsgleichung für x_1 und x_2:

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - b_2a_{12}\\(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= b_2a_{11} - b_1a_{21}.\end{aligned}$$

Falls $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \neq 0$, besitzt das LGS die **eindeutige** Lösung

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Der Faktor

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

der aus den Koeffizienten von A gebildet wird, heißt **Determinante** der Koeffizientenmatrix A.

Das LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt also genau eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet.

Notiz. Def zweireihige Determinanten, Beispiele wie Papula, Bd. 2, §3.2.1

Notiz. Def dreireihige Determinanten über Sarrussche Regel und Beispiele wie Papula, Bd. 2, §3.3.1

Determinanten

Definition. Die **Determinante** $D = \det(A)$ einer **quadratischen** n-reihigen Matrix $A = (a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ ist gegeben durch folgende **rekursive Berechnungsvorschrift**:

(1) Falls $n = 1$, also $A = (a_{11})$, dann ist

$$\det(A) = \det\left(a_{11}\right) = a_{11}$$

.

(2) Falls $n > 1$, dann gilt

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + - \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n},$$

wobei $D_{ij} = \det\left(A^{ij}\right)$ die **Unterdeterminante** ist, **die aus** D **durch Streichen den** i**-ten Zeile und der** j**-ten Spalte entsteht**.

(Entwicklung nach der 1. Zeile.)

Bemerkungen:

(1) Determinanten sind **nur für quadratische Matrizen** erklärt!

(2) Durch diese Entwicklungsvorschrift wird die Berechnung einer n-reihigen Determinante auf die Berechnung von n $(n-1)$-reihigen Determinanten zurückgeführt **(rekursive Vorschrift)**.

(3) Für 2- und 3-reihige Determinanten kann man daraus **vereinfachte Berechnungsvorschriften** ableiten. Höhere Determinanten $n > 3$ werden zunächst mit **Determinantengesetzen** vereinfacht und dann nach einer Zeile (oder Spalte) entwickelt.

Unterdeterminante.

Die aus einer n-reihigen Determinante $D = \det(A)$ durch **Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte** entstehende $(n-1)$-reihige Determinante heißt **Unterdeterminante** $D_{ik} = \det\left(A^{ik}\right)$, $i, k = 1, ..., n$.

$$D_{ik} = \left| \begin{array}{llll:llll} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \hdashline a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

2- und 3-reihge Determinanten

Satz:

(1) Die Determinante $D = \det A$ einer 2×2 - Matrix $A = (a_{ik})$ lässt sich (außer durch Entwicklung nach einer Reihe oder Spalte) vereinfacht berechnen durch

$$D := \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) Die Determinante $D = \det A$ einer 3×3 - Matrix $A = (a_{ik})$ lässt sich (außer durch Entwicklung nach einer Reihe oder Spalte) vereinfacht berechnen durch

$$D := \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

(Regel von Sarrus).

Diese Regeln gelten nur für 2- bzw. 3-reihige Determinanten!

Beispiele ...

`Ende WiMa1`
`13.11.2014`

Beispiele:

- $n = 4$

$$\begin{vmatrix} 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)} \cdot 12 \cdot D_{12} + (-1)^{(1+4)} \cdot 1 \cdot D_{14}$$

$$= ...$$

$$= (-12) \cdot 9 + (-1) \cdot (-6) = -102$$

Notiz. Für dieses Bsp. siehe auch Papula, Bd. 2, S.46, Bsp (1) mit vertauschter 1. und 2. Zeile!

- $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(a_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $n = 3$: Für eine 3×3- Matrix ist

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & \, a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} \\ = & \, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \\ = & \, a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \, a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & + \, a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Laplacescher Entwicklungssatz:

Die rekursive Berechnung von D ist für beliebige Determinanten bzgl. **jeder** Zeile und **jeder** Spalte möglich. Die entsprechenden Rekursionsformeln (mit den durch Streichen der i-ten Zeilen und k-ten Spalten aus D entstandenen $(n-1)\times(n-1)$ - Unterdeterminanten) lauten:

Entwicklung nach der k-ten Spalte:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} D_{lk} \qquad (k = 1, \dots, n)$$

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} D_{il} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Die Faktoren $(-1)^{(1+l)}, \dots, (-1)^{(n+l)}$ bzw. $(-1)^{(l+1)}, \dots, (-1)^{(l+n)}$ ergeben dabei die **„Schachbrettregel" für die Vorzeichenwahl**

+	−	+	−	+	
−	+	−	+	−	
+	−	+	−	+	
−	+	−	+	−	

Notiz. zusätzliche Bsp.: $\det(I_3)$, det(Diagonalmatrix), det(Dreiecksmatrix)

Beispiele: Entwicklung nach 2. Zeile:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{(2+2)} \cdot 12 \cdot D_{22} + (-1)^{(2+4)} \cdot 1 \cdot D_{24} \\ &= \ldots \\ &= 12 \cdot 9 + 1 \cdot (-6) = 102\end{aligned}$$

Notiz. Vgl. mit obigem Beispiel: Vertauschung von Zeilen führt zu Vertauschung des Vorzeichens

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= 1 \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-3) = -27$$

Determinantengesetze

- **Wenn die zugrundeliegende Matrix transponiert wird, bleibt die Determinante unverändert.**

$$\det A = \det A^T \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- **Multiplikationssatz für Determinanten**

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$$

- **Wird die n-reihige <u>Matrix</u> A mit einem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich der Wert der Determinante mit λ^n.** D.h.

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

  (! dann werden <u>alle</u> n Zeilen der Determinante mit λ multipliziert).

- **Die Determinante einer n-reihigen Dreiecksmatrix $A = (a_{ik})$ ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente**, d.h.

$$\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn} \quad \text{falls } A \text{ Dreiecksmatrix.}$$

- **Beim Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert die Determinante ihr Vorzeichen.**

- **Multipliziert man eine Zeile oder eine Spalte von A mit einer reellen Zahl λ, so multipliziert sich der Wert der Determinante ebenfalls mit λ.**

  Beispielsweise

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  Umgekehrt gilt also:

  - **Eine Determinante wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder einer beliebigen Spalte) mit λ multipliziert.**

  - **Besitzen die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) einen gemeinsamen Faktor λ, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.**

- **Addiert man zu einer Zeile (oder Spalte) einer Determinante das Vielfache einer weiteren Zeile (oder Spalte), so ändert sich der Wert der Determinante nicht.**

  Beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+\lambda a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- **Der Wert einer Determinante ist Null, falls alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) Null sind.**

- **Der Wert einer Determinante ist Null, falls zwei Zeilen (oder Spalten) zueinander proportional sind.**

  Beispielsweise, für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \lambda a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- **Der Wert einer Determinante ist Null, wenn eine Zeile (oder Spalte) als Linearkombination der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar ist.**

- **Genau dann ist der Wert einer Determinante von Null verschieden, wenn alle Zeilen (oder Spalten) linear unabhängig sind.**

2.5.3 Die Cramersche Regel

Satz. Gegeben sei das **quadratische** lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

welches in Matrixform die Gestalt

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, ...x_n)^T$ Vektor der Unbekannten, $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)^T$ rechte Seite und $A = (a_{ik})$ **quadratische** Koeffizientenmatrix hat.

Falls

$$D := \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

so hat das lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

genau eine Lösung. Diese Lösung lässt sich wie folgt berechnen:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, ..., n,$$

wobei $D = \det A$ ... **Koeffizientendeterminante** und
D_i ... **Hilfsdeterminante,** die aus D hervorgeht, indem man die i-te Spalte durch die rechte Seite $\mathbf{b}$ ersetzt:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Damit Falls

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

dann

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{D}$$

Beispiel: Die eindeutige Lösung von

$$\begin{array}{rcrcl} & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

ist $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -1,$

$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = 1,$ da $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ ist.

Beispiel: Leontief-Modell

Notiz. ! komplett auf Folie

Wir wissen bereits, dass das Leontief-Modell

$$\begin{aligned} (1-z_{11})x_1 - \quad z_{12}x_2 - \quad z_{13}x_3 &= y_1 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - \quad z_{23}x_3 &= y_2 \\ -z_{31}x_1 - \quad z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{L}$$

als Matrixgleichung der Form

$$\mathbf{x} - \mathbf{Z}\mathbf{x} = (I_3 - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

geschrieben werden kann mit

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Marktvektor / Nachfragevektor};$$

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Produktionsvektor};$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \quad \ldots \ \textbf{Input-Output-Matrix};$$

Falls im Leontief-Modell die Matrix $(I_3 - \mathbf{Z})$ **regulär ist**, dann ergibt sich nach der Cramerschen Regel, dass die Lösung von (L) für den jeweiligen Output x_1, x_2, x_3 der Sektoren A_1, A_2, A_3 bei vorgegebenen Lieferungen y_1, y_2, y_3 an die Endverbraucher die folgende Form besitzt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & -z_{12} & -z_{13} \\ y_2 & (1-z_{22}) & -z_{23} \\ y_3 & -z_{32} & (1-z_{33}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-z_{11}) & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & (1-z_{22}) & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & (1-z_{33}) \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} (1-z_{11}) & y_1 & -z_{13} \\ -z_{21} & y_2 & -z_{23} \\ -z_{31} & y_3 & (1-z_{33}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-z_{11}) & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & (1-z_{22}) & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & (1-z_{33}) \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} (1-z_{11}) & -z_{12} & y_1 \\ -z_{21} & (1-z_{22}) & y_2 \\ -z_{31} & -z_{32} & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-z_{11}) & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & (1-z_{22}) & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & (1-z_{33}) \end{vmatrix}}$$

Für **reguläre** Matrix $(I_3 - \mathbf{Z})$ lässt sich auch die sogenannte **Leontief-Inverse** $(I_3 - \mathbf{Z})^{-1}$ berechnen. Mit ihrere Hilfe lässt sich zu beliebigem Nachfragevektor $\mathbf{y}$ der Produktionsvektor $\mathbf{x}$ ermitteln über

$$\mathbf{x} = (I_3 - \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{y}.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Leontief-Inverse existiert, falls eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_{ik} < 1 \quad i = 1, 2, 3$

d.h. alle Zeilensummen der Input-Output-Matrix sind kleiner Eins oder

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{ik} < 1 \quad k = 1, 2, 3$

d.h. alle Spaltensummen der Input-Output-Matrix sind kleiner Eins.

Notiz. Vgl. Skript von M. Steinbach für Herleitung der letzten Behauptung.

2.5.4 Matrixinversion

Ist die Determinante $D = \det A$ einer n-reihigen **quadratischen** Matrix $A = (a_{ik}$ verschieden von Null, d. h. $\det A \neq 0$, so heißt die Matrix A **regulär**. Genau dann, wenn A regulär ist, existiert eine $n \times n$ - Matrix A^{-1} mit den Eigenschaften

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \qquad (I_n \ldots n \times n - \text{Einheitsmatrix}) \, .$$

Die Matrix A^{-1} heißt **die zu A inverse Matrix** oder **Umkehrmatrix**.

Die Koeffizienten $\alpha_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n)$ der inversen Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch

$$\alpha_{ik} = \frac{(-1)^{k+i} D_{ki}}{D} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

wobei $D = \det A$ ist und D_{ik} (wie oben) die durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte aus D entstandenen $(n-1)$-reihigen **Unterdeterminanten** bezeichnet $(i, k = 1, ..., n)$:

$$D_{ik} = \left| \begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ \hdashline a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Achtung: Man beachte die Reihenfolge der Indizes. In der i-ten Zeile und k-ten Spalte befindet sich das Produkt aus dem Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ und der Unterdeterminante D_{ki} und nicht etwa D_{ik} (Vertauschung der beiden Indizes!)

Es gilt also

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{21} & \ldots & (-1)^{n+1} D_{n1} \\ -D_{12} & +D_{22} & \ldots & (-1)^{n+2} D_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} D_{1n} & (-1)^{n+2} D_{2n} & \ldots & +D_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{12} & \ldots & (-1)^{n+1} D_{1n} \\ -D_{21} & +D_{22} & \ldots & (-1)^{n+2} D_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} D_{n1} & (-1)^{n+2} D_{n2} & \ldots & +D_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

```
Ende WiMa1
18.11.2014
```

Beispiel:

Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so ergibt sich $D = \det A = 6$,

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Damit

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir prüfen, ob die Matrix

$$B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

invers zu A ist.

Notiz. Falk-Schema verwenden.

Die inversen Matrizen von regulären $n \times n$ - Matrizen besitzen folgende **Eigenschaften**. Dabei sind sowohl A als auch B n-reihige quadratische Matrizen.

(1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

(2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Leontief-Inverse

Das Leontief-Modell $(\mathbf{I} - Z)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ hat für gegebenes

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$$

die Form

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Z}|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 19/21 & -5/20 & -4/23 & y_1 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 & y_2 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 & y_3 \end{array}\right)$$

Die Inverse der Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Z}|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 19/21 & -5/20 & -4/23 & y_1 \\ -4/21 & 17/20 & -1/23 & y_2 \\ -4/21 & -1/20 & 20/23 & y_3 \end{array}\right)$$

berechnet sich (TR!) als

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Z})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.242 & 0.381 & 0.267 \\ 0.293 & 1.270 & 0.122 \\ 0.289 & 0.156 & 1.216 \end{pmatrix}$$

(Bezeichnung: **Leontief-Inverse**).

Damit können nun für beliebigen Output-Vektoren $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ die zugehörigen Produktionsvektoren berechnet werden. Z.B. ergibt sich für $\mathbf{y} = (10, 10, 10)^T$, dass

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z})^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.90 \\ 16.84 \\ 16.61 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Im Casio-TR existiert kein Befehl zur Berechnung der Inversen. Jedoch kann die Matrix $(A|I)$ mittels **rref**$((A|I)$ in die reduzierte Zeilenstufenform $(I|A^{-1})$ gebracht werden, aus der die Inverse A^{-1} auf der rechten Seite abgelesen werden kann.

3 Komplexe Zahlen

Zahlenbereiche

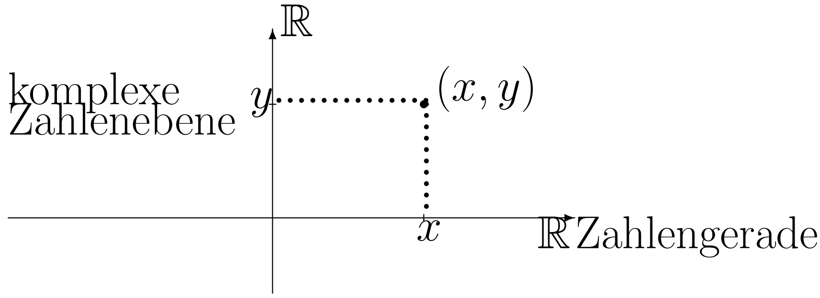
Der Aufbau der Zahlenbereiche lässt sich in folgendem Schema darstellen:

Zahlenbereich	Ausführbare Rechenoperationen
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$	$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $a + b \in \mathbb{N}$ (Addition) $a \cdot b \in \mathbb{N}$ (Multiplikation)
$\downarrow$	
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen	$a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ $a + b \in \mathbb{Z},\ a \cdot b \in \mathbb{Z}$ und $a - b \in \mathbb{Z}$ (Subtraktion)
$\downarrow$	
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\vert\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ Menge der rationalen Zahlen	$a, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ $a + b \in \mathbb{Q},\ a \cdot b \in \mathbb{Q},\ a - b \in \mathbb{Q}$ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (für $b \neq 0$) (Division)
$\downarrow$	
$\mathbb{R} \ldots$ Menge der reellen Zahlen := Menge **aller** Dezimalzahlen := Menge aller möglichen Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen aus $\mathbb{Q}$	$a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ $a + b \in \mathbb{R},\ a \cdot b \in \mathbb{R},\ a - b \in \mathbb{R}$ $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ (für $b \neq 0$) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ falls $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergent

Die Tatsache, dass die quadratische Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt, führte bereits Gauß dazu, die Zahlengerade zur komplexen Zahlenebene zu erweitern:



Auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ können wir für $x, y \in \mathbb{R}$ Addieren $x + y$, Subtrahieren $x - y$, Multiplizieren $x \cdot y$ und Dividieren $\frac{x}{y}$, falls $y \neq 0$.

Wir wollen die Rechenregeln auf der Zahlengeraden erweitern auf die komplexe Zahlenebene, und zwar so, dass das Rechnen auf der Zahlengerade als Spezialfall enthalten ist.

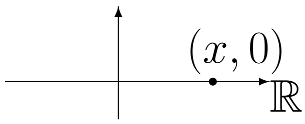
Ähnlich wie bei den Matrizen definieren wir in der komplexen Zahlenebene eine **Addition** durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und führen eine neue **Multiplikation** ein durch

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\ .$$

Die Punkte der Form $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen auf der Zahlengeraden



und wegen

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

und

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$$

bekommen wir auf der Zahlengeraden die bekannten Rechenregeln.

Die Menge $\{(x, 0) :\ x \in \mathbb{R}\}$ heißt reelle Achse,

die Menge $\{(0, y) :\ y \in \mathbb{R}\}$ heißt imaginäre Achse.

Es gilt

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 \cdot y_2, 0).$$

Allgemein gilt die folgende Beziehung

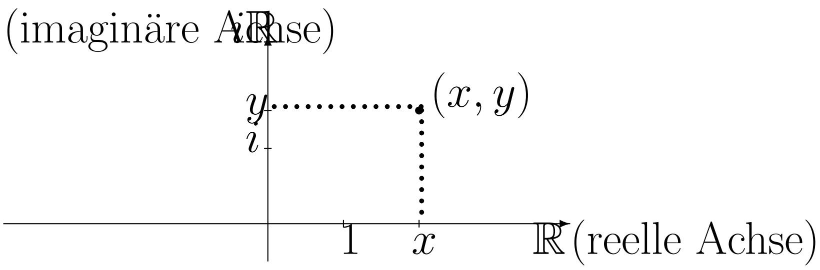
$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).\end{aligned}$$

Wir identifizieren $(x, 0)$ und $(y, 0)$ mit x bzw. y auf der Zahlengeraden und defnieren die **imaginäre Einheit**

$$i := (0, 1)$$

also

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\widehat{=}\, x} + \underbrace{(0, 1)}_{=\, i} \cdot \underbrace{(y, 0)}_{\widehat{=}\, y} = x + iy$$



Wir nennen

$$\mathbb{C} = \{x + iy |\ x \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der **komplexen Zahlen**.

$x = \mathrm{Re}(z)$ heißt **Realteil** von $z = x + iy$ und

$y = \mathrm{Im}(z)$ heißt **Imaginärteil** von z.

Die Darstellung $z = x + iy$ nennen wir **algebraische Form** der komplexen Zahl z.

Für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{und} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Insbesondere für $z = i = 0 + i \cdot 1$ erhält man

$$i^2 = -1 \quad \text{und} \quad (-i)^2 = -1,$$

d. h. die quadratische Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

besitzt in $\mathbb{C}$ die Lösung $\pm i$.

Zwei komplexe Zahlen heißen gleich, wenn ihr Real- und Imaginärteil übereinstimmen, d. h.

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Das Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

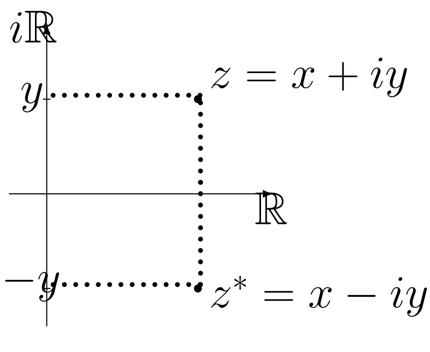
zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ erhält man auch durch „Ausmultiplizieren" unter Beachtung von

$$i^2 = -1.$$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z}^* := x - iy$ die **konjugiert komplexe Zahl**.

In der komplexen Zahlenebene entspricht die konjugierte komplexe Zahl z^* der an der reellen Achse gespiegelten Zahl z.



Es gelten die Regeln:
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$\ulcorner$

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Dann ist
$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_z} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

und

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

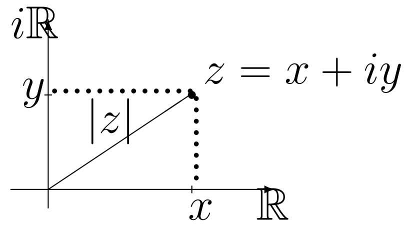
$\lrcorner$

Für $z = x + iy$ heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z.
Dann gilt

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \ .$$



$\ulcorner$
$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$
$\lrcorner$

Aus der letzten Beziehung folgt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

und für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} \ .$$

Eigenschaften des Betrages

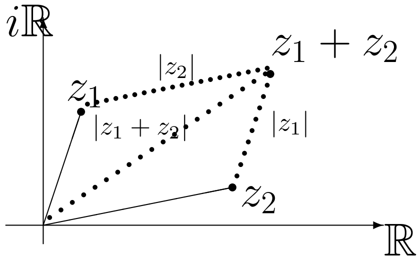
(1) $|z| \geq 0$

(2) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Zur Dreiecksungleichung



Beispiele: $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 1 + 3i$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2-i) + (1+3i) \; = 3 + 2i \\ z_1 - z_2 &= (2-i) - (1+3i) \; = 1 - 4i \\ z_1 \cdot z_2 &= (2-i) \cdot (1+3i) \\ &= 2 + 6i - i - 3i^2 \\ &= 5 + 5i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2-i}{1+3i}\\
&= \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\\
&= \frac{-1-7i}{10}.
\end{aligned}
$$

Wir haben schon gesehen, dass $\pm i$ die Gleichung $x^2+1=0$ lösen. Allgemeiner läßt sich die quadratische Gleichung

$$z^2+az+b=0 \qquad \text{in } \mathbb{C} \tag{$*$}$$

stets lösen.

$$z^2+az+b=0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot z+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+b=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b$$

Damit gilt:

(i) Ist $\frac{a^2}{4}>b$, so besitzt $(*)$ die zwei reellen Lösungen

$$z_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\,.$$

(ii) Ist $\frac{a^2}{4} = b$, so besitzt $(*)$ die reelle Lösung $\qquad z_0 = -\frac{a}{2}$.

(iii) Ist $\frac{a^2}{4} < b$, so besitzt $(*)$ die komplexen Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\ .$$

Zur Probe rechnen wir nach, dass $z_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
& z_1^2 + az_1 + b \\
=\ & \left(-\frac{a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right) + b \\
=\ & \frac{a^2}{4} - 2 \cdot i \cdot \frac{a}{2}\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} + i^2\left(b - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{2} + ia\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} + b \\
=\ & \frac{a^2}{4} - b + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Rechnung liefert

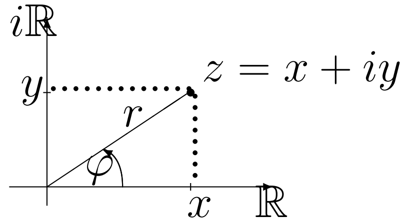
$$z_2^2 + az_2 + b = 0\ .$$

3.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Die algebraische Form $z = a + ib$, die trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und die Exponentialform $z = re^{i\varphi}$ einer komplexen Zahl und die Umwandlungen in einander.

Die Darstellung $z = a + ib$ heißt algebraische Form einer komplexen Zahl z.

Eine komplexe Zahl lässt sich auch eindeutig beschreiben durch den Abstand vom Ursprung r und dem Winkel φ



zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Usprung (Nullpunkt) zum Punkt z.

Durch $r = 0$ ist – unabhängig vom Winkel φ – die komplexe Zahl $z = 0$ im Ursprung beschrieben.

Um für $r > 0$ die Darstellung eindeutig zu machen, wird der Winkel φ festgelegt auf

$$-\pi < \varphi \leq \pi$$

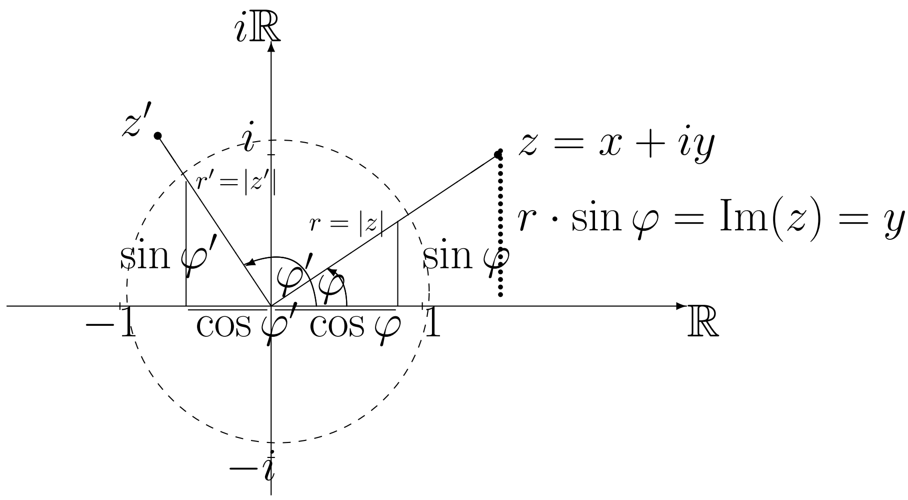
(im Gradmaß entspricht dies $-180° < \varphi \leq 180°$)

(manchmal auch $0 \leq \varphi < 2\pi$, d. h. $0° \leq \varphi \leq 360°$).

Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

darstellen. Diese Darstellung heißt trigonometrische Form oder Polarkoordinaten.



Dabei ist

$$r = |z| \geq 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= r \cdot \cos\varphi \\ \mathrm{Im}(z) &= r \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Für $\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad$ heißt der Winkel φ das Argument von z.

Aus den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus erhält man für

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{und} \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

für das Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

Begründung:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot r_2)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= (r_1 \cdot r_2)\big[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\qquad\qquad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big] \\ &= (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) \end{aligned}$$

Die algebraische Form einer komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

in Polarkoordinaten läßt sich einfach angeben durch

$$z = \underbrace{r\cos\varphi}_{\mathrm{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{r\sin\varphi}_{\mathrm{Im}(z)}$$

d. h. $\quad \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \qquad$ und $\qquad \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi.$

Ist andererseits eine komplexe Zahl

$$z = x + iy$$

in algebraischer Form gegeben, so gilt für die Darstellung in trigonometrischer Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

die Beziehung

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

sowie

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (entspricht $90°$), $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (entspricht $-90°$) oder $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (entspricht $270°$) gilt

$$\cos\varphi = 0\ .$$

In diesem Fall kann man den Winkel anhand des Vorzeichens von y bestimmen

$$\begin{aligned} &y > 0, \ \text{d. h.} \ \varphi = \frac{\pi}{2} \\ &y < 0, \ \text{d. h.} \ \varphi = -\frac{\pi}{2} \ \left(\text{oder } \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Andernfalls gilt

$$\cos\varphi \neq 0$$

und wegen

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{r\cdot\sin\varphi}{r\cdot\cos\varphi} = \frac{y}{x}$$

gilt für das Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ die Beziehung

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & \text{für } z \text{ im 1. oder 4. Quadranten} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{für } z \text{ im 2. Quadranten} \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & \text{für } z \text{ im 3. Quadranten.} \end{cases}$$

Will man jedoch den Winkel φ zwischen 0 und 2π laufen lassen, $0 \leq \varphi < 2\pi$, so ergeben sich folgende Berechnungsformeln:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & \text{für } z \text{ im 1. Quadranten} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{für } z \text{ im 2. und 3. Quadranten} \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi, & \text{für } z \text{ im 4. Quadranten.} \end{cases}$$

Beispiele: Bestimmen der trigonometrischen Form

- $z = i + 1 \quad \Longrightarrow \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

  z liegt im 1. Quadrant: $\quad \varphi = \arctan \frac{1}{1} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

  $\Longrightarrow \quad z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

- $$z = i + \frac{1+i}{3+i} = i + \frac{(1+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = i + \frac{3 - i + 3i + 1}{3^2 + 1^2}$$

  $$= i + \frac{4+2i}{10} = i + \frac{2}{5} + i \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + i \cdot \frac{6}{5}$$

  $$|z| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

  z liegt im 1. Quadrant: $\quad \varphi = \arctan \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{5}} = \arctan 3 = 1.2490$

  (entspricht $71.5651°$ im Gradmaß)

  $\Longrightarrow \quad z = \sqrt{\tfrac{8}{5}}(\cos 1.249 + i \sin 1.249)$

- $$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^3$$

  $$= \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\right]^3 = i^3 = -i \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1$$

  $\Longrightarrow \quad z = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})\right)$

Exponentialform

Man kann zeigen, dass man durch sogenannte Potenzreihen für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z, \quad \sin z, \quad \exp(z) \quad \in \mathbb{C}$$

definieren kann. Dabei erfüllt die sogenannte Exponentialfunktion

$$z \mapsto \exp(z)$$

die Gleichung

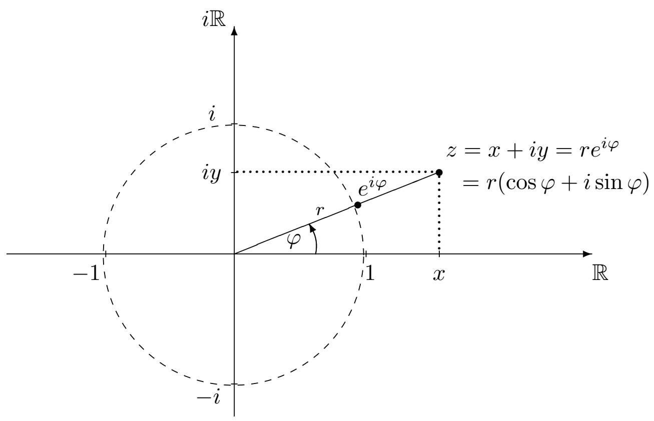
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

und es gilt die Beziehung

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

(sog. Eulersche Formel)

Statt $\exp(z)$ schreibt man auch e^z.



Die komplexen Zahlen $e^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) liegen auf dem komplexen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Es gilt

$$1 = e^{2\pi n i} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0, \text{ d. h. } 1 = e^0 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \dots$$

und $\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}.$

Beispiel:

- $\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2 \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Allgemein gilt für $z = x + iy$:

$$i^z = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{(x+iy)} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^x \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{iy} = e^{-\frac{\pi}{2}y} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}x}.$$

Zusammenfassung:

$$z = x + iy$$

$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$
+ Korrekturwinkel
je nach Quadrant
von z

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Polarkoordinaten (trigonometrische Form, Exponentialform) sind besonders geeignet beim Potenzieren von komplexen Zahlen

$$z = re^{i\varphi}.$$

Dann ist

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

d. h.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Beispiel:

- $$z = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{18} = 2^{18} \cdot e^{i \cdot 18 \cdot \frac{\pi}{6}} = 2^{18} e^{i3\pi} =$$

  $$= 2^{18}(\underbrace{\cos 3\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin 3\pi}_{=0}) = -2^{18}$$

In $\mathbb{C}$ besitzen Gleichungen n-ten Grades stets Lösungen:

1) Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt genau n verschiedene Lösungen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln

$$\xi_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

2) Allgemeiner gilt:

Die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad (*)$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, lässt sich stets in der Form

$$(z - b_1)(z - b_2) \cdot \ldots \cdot (z - b_n) = 0$$

schreiben, so dass die Zahlen $b_i \in \mathbb{C}$ Lösungen von $(*)$ sind.

3) Spezialfall: Wurzelziehen von komplexen Zahlen

Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ besitzt für $n \in \mathbb{N}$ genau n voneinander verschiedene n-te Wurzeln, d. h. die Gleichung

$$z^n = c$$

hat n voneinander verschiedene Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$:

Für $c = re^{i\varphi}$ sind dies

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi}{n}\right)\\
z_1 &= \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi}{n}\right)\\
&\;\vdots\\
z_k &= \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\\
&\;\vdots\\
z_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

D.h. diese n verschiedenen Wurzeln bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis um 0 mit Radius $\sqrt[n]{r}$.

Beispiele:

- $z^2 = i, \quad \text{also} \quad z^2 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{d.h.} \quad r = 1,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \qquad z_0 = 1 \cdot e^{i\frac{1}{4}\pi}$$
$$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}} = 1 \cdot e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

Also $\left(e^{i\frac{1}{4}\pi}\right)^2 = \left(e^{i\frac{5}{4}\pi}\right)^2 = i.$

- $z^3 = 1 + i, \quad \text{also} \quad z^3 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ d. h.} \quad r = \sqrt{2},\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad z_0 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{1}{12}\pi}$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{3}{4}\pi}$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

- $z^2 = -4 = 4 \cdot e^{i\pi}, \quad \text{d.h.} \quad r = 4,\ \varphi = \pi$

$$\Longrightarrow \qquad z_0 = 2\ e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 2i$$
$$z_1 = 2\ e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = -2i$$