Übung 9

Aufgabe 1: Stellen Sie mit **NOR** alle 15 restlichen aussagenlogischen Funktionen dar.

Aufgabe 2: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit des Modus Tollens $(P \leftarrow Q)$ and $Q \Rightarrow P$ durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 3: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit des Schlusses aus der Alternative **(A or B) and (A→C) and (B→C) ⇒ C** durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 4: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit des Schlusses auf Implikation **A and ((A and B) → C) ⇒ (B → C)** durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 5: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit des indirekten Schlusses **(not A → B) and (not A → not B) ⇒ A** durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 6: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit der Transitivität **(P → Q) and (Q → R) ⇒ (P → R)** durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 7: Weisen Sie die Allgemeingültigkeit von **((P and Q) → R) ⇒ ((not R and Q) → not P)** durch schrittweise Formelumstellung und Resolution nach.

Aufgabe 8: Gegeben sei folgende Schlußregel

$$\begin{array}{l} \mathbf{P \vee Q} \\ \mathbf{Q \mid R} \\ \underline{\mathbf{P\ xor\ R}} \\ \mathbf{P \wedge \neg R} \end{array}$$

, die durch schrittweise Formelumstellung, durch Resolution und durch eine Wahrheitstabelle zu beweisen ist.

Aufgabe 9: Im folgenden wird auf klassische Weise demonstriert, wie leicht es ist, mit einer sehr einfachen Aussage zu beginnen und nach einigen auf den ersten Blick schlichten und logischen Schritten zu zeigen, dass 2 = 1.

Es gelte $a = b$ mit $a, b \in \Re$, dann multiplizieren wir beide Seiten mit a und erhalten $a^2 = ab$. Addieren wir nun auf beiden Seiten $a^2 - 2ab$, dann erhalten wir $a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$. DIese Gleichung kann vereinfacht werden zu $2(a^2 - ab) = a^2 - ab$. Teilen wir beide Seiten durch (a^2-ab), so erhalten wir $2 = 1$. Wo liegt der Fehler ?

Aufgabe 10: Einer der größten Mathematiker vor ca. 2000 Jahren war Diophantos von Alexandria, der letzte große Vertreter der griechischen Mathematikertradition. Diophantos' Errungenschaften in der Zahlentheorie sind in seinen Büchern nachzulesen. Doch ansonsten weiß man fast nichts über diesen begnadeten Mathematiker. Passend für einen Problemlöser ist das einzige Detail aus Diophantos' Leben in Form eines Rätsels überliefert, das der Legende nach in seinen Grabstein gemeißelt war:

"Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens; noch ein Zwölftel dazu, und er kleidete seine Wangen in Flaum. Ein Siebtel noch, un Er entzündete ihm das Licht der Ehe; fünf Jahre nach der Heirat schenkte Er ihm einen Sohn. Doch ach! - das spätgeborene kränkliche Kind: die Hälfte der Lebensspanne des Vaters hatte es erreicht, da raffte das kalte Schicksal es hinweg. Vier Jahre lang fand er Trost in dieser Wissenschaft der Zahlen, dann beschloß sein Leben auch er."

Wie alt wurde Diopantos ?

Dieses Rätsel ist ein Beispiel für die Art von Problemen, für die Diophantos eine ausgesprochene Vorliebe hegte. Seine Spezialität waren Fragen, die ganzzahlige Lösungen erforderten - heute werden solche Fragen als diophantische Probleme bezeichnet.

Aufgabe 11: Anne sagt: "Bettina sagt die Wahrheit."
Bettina sagt: "Claudia lügt."
Claudi sagt: "Anne und Bettina sgen beide die Wahrheit oder lügen beide."

Wer lügt und wer sagt die Wahrheit ?

Aufgabe 12: Gegeben seien die folgenden beiden aussagenlogischen Formeln:

$\mathbf{F := AB \lor AC \lor BC}$

$\mathbf{G := AB \lor C(A \not\leftrightarrow B)}$

Es ist zu zeigen, dass F und G äquivalent sind, indem

a.) für beide Formeln eine Wahrheitstabelle aufgestellt wird

b.) G durch Anwendung der aussagenlogischen Umformungsregeln in **F** überführt wird.

c.) die Äquivalenz durch Anwendung der Resolution gezeigt wird

Aufgabe 13: Anja, Bernd und Claudia wollen nach Schweden fahren. Da dort insbesondere Alkohol sehr teuer ist, wollen sie Aquavit, Bier und Cognac mitnehmen. Wie jeder weiß, gehört zu jedem Gläschen Aquavit ein Bierchen, vertragen sich Bier und Cognac nicht , und ist Cogbac nicht gern allein im Magen. Man zeige, dass sich die drei die Flasche Cognac sparen können, indem man

a.) eine Wahrheitstafel aufstellt.

b.) mit den aussagenlogischen Umformungsregeln zeigt, dass obige Aussagen zusammengefasst werden können zu "Wenn Aquqvit, dann auch Bier, und niemals Cognac".

Aufgabe 14: Die Interpretation α sei gegeben durch $\alpha(A) = 1$, $\alpha(B) = 0$, $\alpha(C) = 0$. Entscheiden Sie, ob α ein Modell für

a.) $\neg(A \land (B \lor \neg C))$

b.) $\neg(A \land \neg B) \Rightarrow C$

Aufgabe 15: Donald war erbost: "Wer von euch hat von der Torte genascht ?" Seine Neffen blickten betreten auf das Backwerk, dessen kunstvolle Dekoration von kleinen Entenfingern (wie auch immer die aussehen) übel zugerichtet war. Einerseits wollten sie nicht petzen oder sich selbst beschuldigen, andererseits wollten sie ihren Onkel auch nicht belügen.

Nach einigen Anläufen quälte Tick aus sich heraus: "Trick oder ich waren es."
Dann druckste Trick: "Entweder war es Track oder ich."
Track gab an: "Entweder hat Tick oder ich nicht genascht."

Zum Erstaunen der drei wußte Donald sofort, wer genascht hatte. Nämlich ?

Aufgabe 16: Es ist zu entscheiden, ob es ein Modell für folgende Formeln gibt, ggf. ist ein solches anzugeben. Es ist der Erfüllbarkeitstest mit $\mathbf{Res^n}$**(**K**(F))** zu verwenden (vgl. Folie 2.11 aus der Datei Aussagenlogik.pdf)

a.) $(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)$

b.) $(A \land B) \land (\neg A \lor \neg B)$

Aufgabe 17: Die folgenden Äquivalenzen sind für folgende aussagenlogischen Formeln zu beweisen:

a.) $F \Leftrightarrow \neg G \equiv \neg F \Leftrightarrow G \equiv (F \lor G) \land \neg(F \land G) \equiv (F \Rightarrow \neg G) \land (\neg F \Rightarrow G)$

b.) $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$

Aufgabe 18: In einer Firma gibt es drei Abteilungen A, B, C, die für die Durchführung eines Projektes in Frage kommen. Sie begutachten sich gegenseitig wie folgt:

Abteilung A schreibt: "Die Abteilungen B und C schaffen das Projekt nicht."
Abteilung B schreibt: "Abteilung A kann das Projekt durchführen, Abteilung C aber nicht."
Abteilung C schreibt: "Abteilung A kann das Projekt durchführen, nicht aber Abteilung B."

Der Chef weiß, dass eine zu dem Projekt fähige Abteilung die andere Abteilungen korrekt einschaätzen kann und dass es mindestens eine fähige Abteilung gibt.

a.) Eine aussagenlogische Formel ist aufzustellen, deren Erfüllbarkeit damit äquivalent ist, dass der Chef eine geeignete Abteilung finden kann.

b.) Lösen Sie das Problem des Chefs mit der Wahrheitstabelle