Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
University of Applied Sciences

Fakultät
Informatik und Mathematik

Script zur Vorlesung
Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2015 / 2016

Hinweis: Das folgende Material geht auf die Mitschrift des Studenten Markus Söhnel zu der für den Studiengang „Wirtschaftsinformatik“ an der HTW Dresden gehaltenen Vorlesung „Wirtschaftsmathematik“ zurück. Es fasst alle Inhalte der Vorlesung ohne Anspruch auf Vollständigkeit und Fehlerfreiheit zusammen.

Autor: Markus Söhnel
s74639@htw-dresden.de

Letzte Aktualisierung: 23. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen **3**
- 1 Mengen und Mengenkalkül . . . 3
  - 1.1 Häufig vorkommende Mengen in der Mathematik . . . 4
  - 1.2 Grundlegende Mengenverknüpfungen . . . 6
- 2 Produktmengen und Relationen . . . 11
  - 2.1 Das kartesische Produkt . . . 11
  - 2.2 Relationen . . . 12
- 3 Funktionen . . . 19
  - 3.1 Die Umkehrabbildung . . . 24
  - 3.2 Verknüpfungen von Funktionen . . . 25
- 4 Reelle Funktionen . . . 29
- 5 Mathematische Beweisverfahren und Schlussweisen . . . 48
  - 5.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion . . . 48
  - 5.2 Direkter Beweis . . . 50

2 Matrizen **53**
- 1 LEONTIEF-Modell . . . 53
- 2 Rechnen mit Matrizen . . . 55
  - 2.1 Addition/Subtraktion von Matrizen . . . 57
  - 2.2 Multiplikation mit reellen Zahlen (Skalar) . . . 58
  - 2.3 Multiplikation von Matrizen . . . 59
- 3 Vektoren . . . 63
  - 3.1 Linearkombination von Vektoren und lineare Unabhängigkeit . . . 69
- 4 Lineare Gleichungssysteme . . . 79
  - 4.1 Der Gauß-Algorithmus . . . 79
  - 4.2 Der Rang einer Matrix . . . 84
- 5 Quadratische Matrizen und quadratische lineare Gleichungssysteme . . . 88
  - 5.1 Grundbegriffe . . . 88
  - 5.2 Determinanten . . . 90
  - 5.3 Die Inverse Matrix . . . 94
  - 5.4 Ergänzung: Produkte von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ auf Basis von Determinanten 98

3 Komplexe Zahlen **101**
- 1 Zahlenbereiche . . . 101
- 2 Die komplexe Zahlenebene . . . 101
- 3 Rechnen mit Komplexen Zahlen . . . 103
  - 3.1 Addition und Subtraktion . . . 103

3.2 Multiplikation und Division . . . 104
4 Weitere Darstellungsformen komplexer Zahlen . . . 106
4.1 Bestimmung der Polarform aus der Normalform . . . 110
4.2 Bestimmung der Normalform aus der Polarform . . . 111
5 Rechnen mit Polarformen . . . 113
6 Potenzieren und Radizieren von komplexen Zahlen . . . 116
6.1 Radizieren (Wurzelziehen) . . . 117
7 Anwendung komplexe Eigenwerte quadratischer Matrizen . . . 120
8 Komplexe Funktionen . . . 121

4 Finanzmathematik 123
1 Zins- und Zinseszinsrechnung . . . 123
1.1 Einfache Verzinsung . . . 123
1.2 Zinseszinsrechnung . . . 124
1.3 Grundaufgabe der Zinsesszinsrechnung . . . 126
1.4 Gemischte Verzinsung . . . 128
1.5 Unterjährige Verzinsung und Konforme Umrechnung . . . 129
2 Rentenrechnung . . . 129
2.1 Grundbegriffe . . . 129
2.2 Konstante nachschüssige Renten . . . 130
2.3 Ewige Renten . . . 132
2.4 Jährliche vorschüssige Renten . . . 133
3 Tilgunsrechnung . . . 134
3.1 Grundbegriffe . . . 134
3.2 Annuitätentilgung . . . 135
3.3 Effektivzinssatz . . . 137

5 Folgen und Reihen 139
1 Zahlenfolgen . . . 139
1.1 Eigenschaften von Folgen . . . 140
1.2 Konvergenz . . . 141
1.3 Konvergenzkriterien für Folgen . . . 144
1.4 Das Cobweb-Modell . . . 145
2 Reihen . . . 146
2.1 Kriterien für die Konvergent/Divergenz von Reihen . . . 148
2.2 Potenzreihen . . . 150

1 Mathematische Grundlagen

1 Mengen und Mengenkalkül

Definition
Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Darstellung von Mengen

- Explizit, d.h. durch Aufzählung aller Elemente $\longrightarrow \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$

  z.B. $\{2, 4, 6, 8\}$

- Implizit, d.h. mittels eines definierenden Ausdruckes $A \longrightarrow \{x \mid A(X)\}$

  z.B. $\{x \mid x$ ist gerade Zahl und kleiner als 10$\}$

1. Eine Menge ist immer auf eine Grundgesamtheit bezogen, aus der die Elemente der Menge stammen.
   Bezeichnung M, Ω, S, X
2. Eine Menge die kein Element enthält, heißt leere Menge
   Bezeichnung $\emptyset$

Wichtig
Bei expliziten Darstellungen spielt die Reihenfolge der Darstellung keine Rolle. Auch die Anzahl des Auftretens eines Elements ist irrelevant.

Beispiel

- $\{4,6,2,8\}$ und $\{2,4,6,8\}$ stellen die selbe Menge dar
- $\{2,2,4,6,6,6,8,8\}$ und $\{2,4,6,8\}$ stellen die selbe Menge dar

Definition
Jedes Objekt einer Menge wird Element genannt
Bezeichnung

$$x \in A$$

1.1 Häufig vorkommende Mengen in der Mathematik

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null
- $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x$ ist rationale Zahl, d.h. darstellbar als $x = \frac{p}{q}$ mit $p,q \in Z\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x$ ist reelle Zahl$\}$

Definition

1. A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
   Bezeichnung $A \subset B$
2. Zwei Mengen A und B sind gleich wenn $A \subset B$ und $B \subset A$
   Bezeichnung $A = B$
3. A heißt echte Teilmenge von B, falls $A \subset B$ aber $B \neq A$
   Bezeichnung $A \subsetneq B$

Beispiel

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. $\{2,4,6,8\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10$ und x ist gerade$\}$

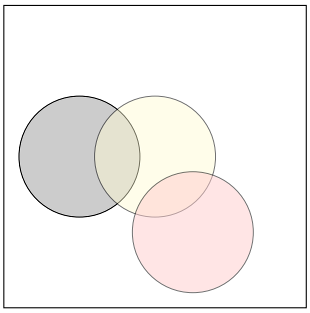
Bezeichnung Durchstreichen eines Mengenvergleich Operators bzw. des Elementoperators bedeutet, dass diese Beziehung nicht gilt.

- $A \not\subset B$ A ist nicht Teilmenge von B
- $A \neq B$ A ist nicht gleich B
- $x \notin A$ x ist kein Element von A

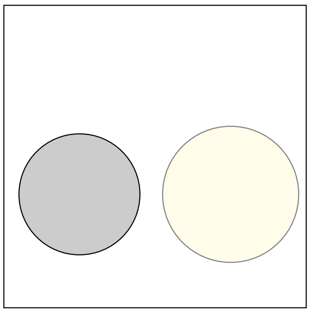
Beispiel

- $\mathbb{N}_0 \not\subset \mathbb{N}$
- $0 \notin \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}_0 \not\mathbb{N}$

Grafische Darstellung von Mengenbeziehungen im Venn-Diagramm



Definition
Zwei Mengen A und B heißen disjunkt wenn kein Element von A zu C gehört und kein Element von B zu A gehört.



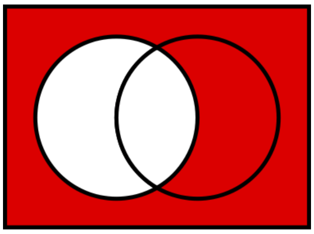
Beispiel

- $A = \{2, 4, 6, \}$
- $B = \{1, 3, 5\}$
  $\rightarrow$ A und B sind disjunkt

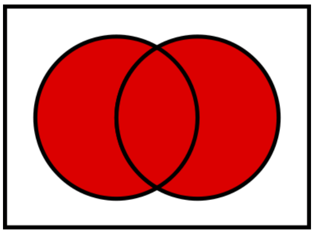
1.2 Grundlegende Mengenverknüpfungen

Vereinigung (Mengen-Oder)	$A \vee B := \{x \mid x \subseteq A$ oder $x \in B\}$
Durchschnitt (Mengen-Und)	$A \wedge B := \{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B := \{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$
Komplement	$\overline{A} := \{x \mid x \notin A\}$

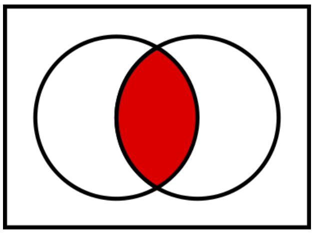
- Komplement $\overline{A}$ $\rightarrow$ auch A^C



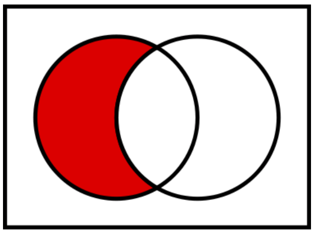
- Vereinigung $A \cup B$



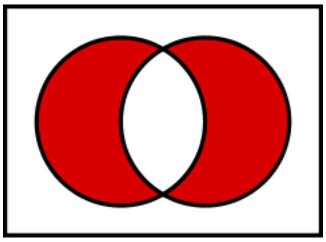
- Durchschnitt $A \cap B$



- Differenz $A \setminus B \equiv A \cap \overline{B}$



- Symmetrische Differenz $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  $= \{x \in M \mid \text{Entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\}$



Beispiel

$M = \mathbb{N}_0$

- $A = \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$
- $B = \{x \mid x \leq 5\}$
- $\overline{A} = \{x \mid x \text{ ist ungerade}\}$
- $\overline{B} = \{x \mid x \geq 5\}$
- $A \cup B = \{x \mid \text{gerade oder } x \leq 5\}$
  $= \{0, 1, 2, 3, 4, , 6, 8, 10, 12, \dots\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \text{ ist gerade und } x \leq 5\}$
  $= \{0, 2, 4\}$
- $A \setminus B = \{x \mid x \text{ ist gerade aber nicht } x \leq 5\}$
  $\equiv A \cap \overline{B} = \{x \mid x \text{ ist gerade und } x \geq 5\}$
  $= \{6, 8, 10, 12, \dots\}$
- $B \setminus A = \{x \mid x \leq 5 \text{ aber nicht } x \text{ ist gerade}\}$
  $= \{1, 3\}$

- $A \triangle B = \underbrace{\{6, 8, 10, 12\}}_{A \setminus B} \cup \underbrace{\{1, 3\}}_{B \setminus A}$
  $= \{1, 3, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

1.2.1 Gesetze von deMorgan

1. $\overline{A \cap B} = \{x \mid$ Es gilt nicht: x ist gerade und $x \leq 5\} \underbrace{=}_{\text{s. oben}} \overline{\{0, 2, 4\}} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$

   $\equiv \overline{A} \cup \overline{B} = \{x \mid \underbrace{x \text{ ist ungerade}}_{\overline{A}}\}$ oder $\underbrace{x \geq 5}_{\overline{B}} \to \{1, 3, 5, 7, \dots\} \cup \{5, 6, 7, 8, \dots\}$

2. $\overline{A \setminus B} = \{x \mid$ Es gilt nicht: (x ist gerade aber nicht kleiner 5)$\}$
   $\equiv \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$
   $= \{x \mid x$ ist ungerade oder $x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

Definition

1. Zwei Mengen A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$
2. Zwei Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen Zerlegung von M, falls
   a) $A_i \subset M, i = 1, \dots, n$
   b) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
   c) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = M$

Definition
Die Potenzmenge einer Menge M ist die Zusammenfassung der Menge aller Teilmengen.
Bezeichnung: $\mathcal{P}(M)$

Beispiel

1. $M = \{0, 1\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M, \{0\}, \{1\}\}$
2. $M = \{1, 2, 3\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Definition
Die Anzahl der Elemente einer Menge A nennt man Mächtigkeit oder Kardinalität von A
Bezeichnung: $|A|$

Falls A unendlich viele Elemente hat, schreiben wir

$$|A| = \infty$$

Achtung: In diesem Fall wird in der Regel in abzählbar unendlich (z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) und überabzählbar unendlich (z.B. Intervalle, $\mathbb{R}$) unterschieden.

Definition
Falls I eine beliebige Menge ist, sogenannte Indexmenge und $A_i, i \in I$ Mengen, dann heißt

$$(A_i)_{i \in I}$$

Familie von Mengen. Die Vereinigung und der Durchschnitt dieser Mengen werden mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{Vereinigung über alle } i \in I \text{ und}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \qquad \text{Durchschnitt über alle } i \in I A_i$$

bezeichnet.

Beispiel

1. Vereinigung
   $I = \{1, 2, 3, 4\}$
   $A_i = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < i\}, i \in I$
   $A_1 = \{0\}, A_2 = \{0, 1\}, A_3 = \{0, 1, 2\}, A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x \mid x \text{ liegt in mindestens einem } A_i\}$$

2. Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{x \mid x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$$

Dabei gilt:

- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

3. **Bsp.**

- $A_i = \{$ Studenten, die in Klausur i eine Note 1 haben$\}$
- $I = \{$ Menge der betrachteten Klausuren$\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\ldots$ Studenten, die in allen Klausuren eine 1 haben$\}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\ldots$ Studenten, die in mindestens einer Klausur eine 1 haben $\}$

2 Produktmengen und Relationen

2.1 Das kartesische Produkt

Definition
Sind X, Y Mengen, so heißt $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ das kartesische Produkt oder die Produktmenge von X und Y.

Beispiel

1. $X = \{a, b\}; Y = \{1, 2, 3\} \qquad X \times Y$

	1	2	3
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$

$\equiv \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

2. $X = [0,1], Y = [1,3] \longrightarrow X \times Y = \{(x, y) \mid x \in [0,1], y \in [1,3]\}$

Ähnlich definiert man das Kartesische Produkt von endlich vielen Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ als

$$X_1 \times X_2 \times \ldots X_n = \bigotimes_{i=1} X_i = \prod_{i=1}^{n} X_1$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_3) \mid x_i \in X_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

Beispiel
$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \{0, 1\}$

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \in \{0,1\}\}$$

$$= \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1),$$
$$(1,0,0,0),1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

Bezeichnung:

- $(x_1, x_2, x_3) \ldots$ „Trippel“
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) \ldots$ „Quadtupel“
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots$ „n-Tupel“
  Zeilenvektor der Dimensionen

Stimmen die Mengen $X_1, \ldots, X_n$ überein, gilt also

$$X = X_1 = X_2 = \cdots = X_n$$

(so wie im Bsp. oben), so schreiben wir

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X^n$$

Beispiel
$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \ | \ x_i \in \mathbb{R}\}$

2.2 Relationen

Definition
Eine Teilmenge $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ der Produktmenge von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt n-stellige Relation zwischen den Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Falls $X_1 = X_2 = \ldots X_n$, so spricht man von einer n-stelligen Relation auf X.

Beispiel

1. $X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}$
   $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (Alle Punkte der Kugel im Ursprung mit Radius 1)

2. Die folgende Tabelle beschreibt eine 4-stellige Relation zwischen den Mengen

    - $P = \{$Schneider, Meier, Schulze, ...$\}$
    - $V = \{$Mathe 1, Mathe 2, Physik, Informatik, ...$\}$
    - $S = \{$IM, IW, II, ...$\}$
    - $U = \{$1, ..., 7$\}$

Professor	Vorlesung	Studiengang	ECTS
Schmidt	Mathe 1	IM	5
Schmidt	Mathe 2	IM	7
Schulze	Informatik	IW	4
⋮	⋮	⋮	⋮

3. Für eine beliebige, nicht leere Menge M ist die Teilmengenbeziehung

$$C : \{(A; B) \mid A \subset B \subset M\} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$$

eine Relation (zweistellig) auf $\mathcal{P}(M)$

z.B. $M = \{1, 2\}, \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\emptyset \subset \{13, \emptyset \subset \{2\}, \emptyset \subset \{1, 2\}, \emptyset \subset \emptyset$
$\{13 \subset \{1, 2\}, \{23 \subset \{1, 2\}, \{13 \subset \{1\}, \{2\} \subset \{2\}, \{1, 2\} \subset \{1, 2\}$

$C = \{(\emptyset, \emptyset), (0, \{13\}, (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), \dots\} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$

2.2.1 Zweistellige Relationen

Bei zweistelligen Relationen bedient man sich der Regel der sogenannten Infix-Schreibweise

$$xRy \text{ genau dann wenn } (x, y) \in R$$

Beispiel

$A \subset B$ statt $(A, B) \in \subset$

Zweistellige Relationen auf endlichen Mengen können durch Relationspfeile in einen Relationsgraphen dargestellt werden.

Beispiel

Teilmengenbeziehung, $M = \{1, 2\}$ auf $\mathcal{P}(M)$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \{1\} \arrow[loop right] \arrow[d] \\
\{2\} \arrow[loop left] \arrow[r] & \{1,2\} \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Jedes Element von $\mathcal{P}(M)$ wird durch einen sogenannten Knoten dargestellt. Falls xRy, dann zeichnet man einen Pfeil von x nach y. Eine Schlinge entsteht, falls xRx.

Beispiel

Relation „Ist Kind von“ führt zum Stammbaum.

Ist R eine zweistellige (binäre) Relation auf M, so ist

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

ebenfalls eine binäre Relation auf M. Sie wird die zu R inverse Relation genannt.
Beim Übergang von R zu R^{-1} werden im Relationsgraphen die Pfeilrichtungen umgekehrt.

Beispiel

1. „Kind von“ ist inverse Relation zu „Elternteil von“
2. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
   $R^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$

Da Relationen Mengen sind (Teilmengen der Produktmenge $M \times M$), können wir die klassischen Mengenoperationen anwenden.

- $\overline{R} = \{(x, y) \mid x \not R y\} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\}$
- $R \subset \tilde{R} = \{(x, y) \mid xRy$ oder $x\tilde{R}y\}$
- $R \cap \tilde{R} = \{(x, y) \mid xRy$ und $x\tilde{R}y\}$
  wobei $R, \tilde{R}$ zwei Relationen auf M sind

Beispiel

- $R =$ „Sohn von", $\tilde{R} =$ „Tochter von"
- $R \cup \tilde{R} =$ „Kind von"
- $R \cap \tilde{R} = \emptyset$
- $\overline{R} =$ „nicht Sohn von"

Sind R_1 und R_2 zwei Relationen auf M, so heißt die Relation

$$R_1 \circ R_2 := \{(x, z) \mid \text{Es existiert ein } z_i \text{ so dass } (x, y) \in R_1 \text{ und } (y, z) \in R_2\}$$

das Produkt oder die Komposition der Relationen R_1 und R_2. Es gilt also

$$x\,(R_1 \circ R_2)\,z$$

genau dann, wenn xR_1y und yR_2z für ein $y \in M$

Beispiel
$R_1 =$„Vater von", $R_2 =$ „Elternteil von" auf der Menge aller Menschen
$R_1 \subset R_2$

$$x(R_1 \circ R_2)z = \{(x, z) \mid \text{Es gibt ein y so dass } \underbrace{(x, y) \in R_1}_{\text{x ist Vater von y}} \text{ und } \underbrace{(y, z) \in R_2}_{\text{y ist Elternteil von z}}\}$$

$$= \{(x, z) \mid x \text{ ist Opa von } z\}$$

$$x(R_2 \circ R_1)z = \{(x, z) \mid \text{Es gibt y ein so dass } \underbrace{(x, y) \in R_2}_{\text{x ist Elternteil von y}} \text{ und } \underbrace{(y, z) \in R_1}_{\text{y ist Vater von z}}\}$$

$$= \{(x, 2) \mid x \text{ ist Großelternteil väterlicherseits}\}$$

Eigenschaften binärer Relationen auf eine Menge M

Eine binäre Relation $R \subset M^2$ heißt

- reflexiv, falls $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$.
- irreflexiv, falls $(x, x) \notin R$ für alle $x \in M$
- symmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ folgt, dass $(y, x) \in R$ (d.h. $R = R^{-1}$)
- asymmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ folgt, dass $(y, x) \notin R$ (also $R \cap R^{-1} = \emptyset$)
- antisymmetrisch, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt dass $x = y$
- transitiv, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt dass $(x, z) \in R$ (also $R \circ R \subset R$)

Beispiel

Relation	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch	transitiv
$<$ auf $\mathbb{R}$	nein	ja	nein	ja	nein	ja
$\leq$ auf $\mathbb{R}$	ja	nein	nein	nein	ja	ja
$=$ auf $\mathbb{R}$ gewinnt auf {Schere, Stein, Papier}	nein	ja	nein	ja	nein	nein

2.2.2 Ordnung und Äquivalenzrelationen

$M \ldots$ Menge
$R \subset M^2 \ldots$ binäre Relation auf M

Definition

Eine binäre Relation R auf M heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung
Äquivalenzrelationen kann man als Gleichheit bzgl. eines Merkmals verstehen, d.h. xRy falls x und y in betrachteten Merkmal gleich sind.

Beispiel

1. Die Identität ist eine Äquivalenzrelation.

$$I = \{(x, x) : x \in M\}$$

   denn:

   - I ist reflexiv: Für alle $x \in M$ mit $(x, x) \in I$
   - I ist symmetrisch: Für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in I \Rightarrow x = y$
     $\Rightarrow (y, x) = (x, y) \in I$
   - I ist transitiv: Für alle $x, y, z \in M$ mit $\underbrace{(x, y) \in I}_{x=y}$ und $\underbrace{(y, z) \in I}_{y=z}$
     $\Rightarrow x = y = z$, also $(x, z) = (x, x) \in I$
     (Identität = Gleichheit in allen Merkmalen)

2. $M = \mathbb{Z}, R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x$ und y lassen bei Division 3 den gleichen Rest$\}$
   $(x, y) \in R$ genau dann, wenn $x \equiv y \mod 3$ ist eine Äquivalenzrelation ist, denn:

   - reflexiv: Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv y \mod 3$
   - symmetrisch: Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x \equiv y \mod 3$, dann auch $y \equiv x \mod 3$
   - transitiv: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x \equiv y \mod 3$ und $y \equiv z \mod 3$ dann $x \equiv z \mod 3$

3. Die Relation „parallel zu“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Geraden im Raum (Gleichheit bzgl. Richtung).

4. Die Relation „schneiden sich“ ist keine Äquivalenzrelation

Definition
Ist R eine Äquivalenzrelation auf M, so bezeichnet man mit

$$R[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in R\} = \{y \in M \mid xRy\}$$

die Äquivalenzrelation von x.

$R[x] \ldots$ Menge aller Elemente die gleich sind mit x bzgl. des betrachteten Merkmals.

Satz
Zwei Äquivalenzklassen $R[x]$ und $R[y]$ sind entweder identisch oder disjunkt. Die Menge aller zu einer Äquivalenzrelation R gehörenden Äquivalenzklassen bildet deshalb eine Zerlegung der Menge M.

Beispiel

1. $R = \{(x,y) \mid x \equiv y \mod 3\}$
   - $R[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$
   - $R[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$
   - $R[-1] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} = R[2] = R[-4]$

$$\mathbb{Z} = \underbrace{R[0] \cup R[1] \cup R[2]}_{\text{Zerlegung von } \mathbb{Z}}$$

Definition
Eine binäre Relation R auf M heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung
Eine Relation ist eine Ordnungsrelation, wenn sie den Vergleich bzgl. eines Merkmals beschreibt.

Beispiel

1. $\leq$ auf $\mathbb{R}$: $R = \{(x, y) \leq \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ ist
   - reflexiv, denn $(x, x) \in R$, weil $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   - antisymmetrisch: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{(x, y) \in R}_{x \leq y}$ und $\underbrace{(y, x) \in R}_{y \leq x}$ gilt $x \equiv y$
   - transitiv: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\underbrace{(x, y) \in R}_{x \leq y}$ und $\underbrace{(y, x) \in R}_{y \leq x}$, dann

   $\underbrace{(x, z) \in R}_{x \leq z}$

2. $\subset$ auf der Potenzmenge von der Menge Ω

$$M = \mathcal{P}(\Omega), R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega\}) \ \mid \ A \subset B \subset \Omega\}$$

   ist eine Ordnungsrelation, denn:
   - reflexiv: Für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $A \subset A$
   - antisymmetrisch: Falls $A \subset B$ und $B \subset A$ dann gilt immer $A \equiv B$
   - transitiv: Falls $A \subset B$ und $B \subset C$, dann ist immer $A \subset C$

3 Funktionen

Definition
Es seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element $x \subset X$ genau ein Element $y = f(x) \subset Y$ zuordnet, heißt eine Funktion oder Abbildung von X nach Y.

Bezeichnung $f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$

Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$
   ordnet jeder reellen Zahl x die Zahl $f(x) = x^2$ zu.

2. $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{P} : n \longmapsto n^2$
   ordnet jeder natürlichen Zahl n einschließlich der Null die Zahl $g(n) = n^2$ zu.

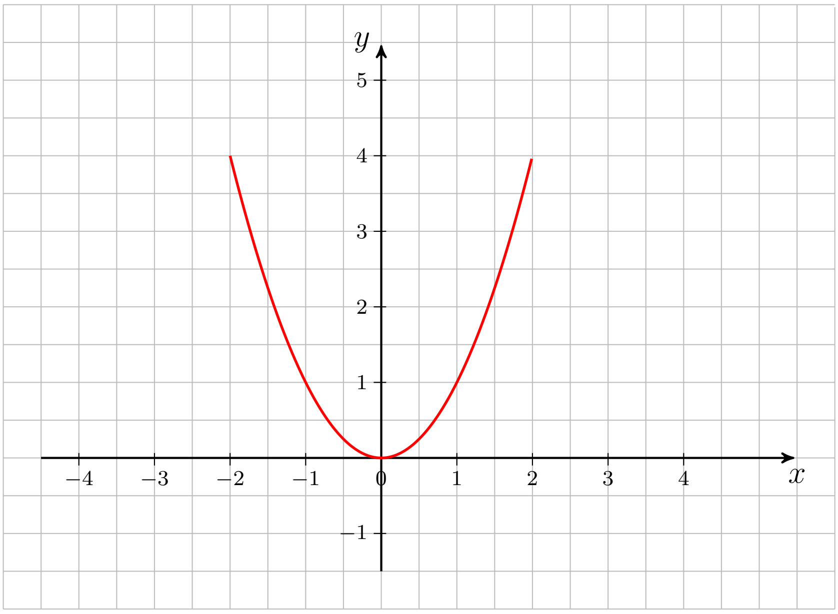
Bezeichnung

Sei $f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$ eine Funktion

1. Die Menge X heißt Definitionsbereich von f. Die Menge Y heißt Wertebereich von f
2. Das einem Element $x \in X$ zugeordnete Element $f(x)$ heißt Funktionswert an der Stelle x
3. Die Elemente des Definitionsbereiches X heißen Argument von f
4. Die Menge $f(X) = \{y \in Y \mid \text{Es gibt ein } x \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt Bild von X unter f.
5. Die Relation $graph(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ heißt Graph von f

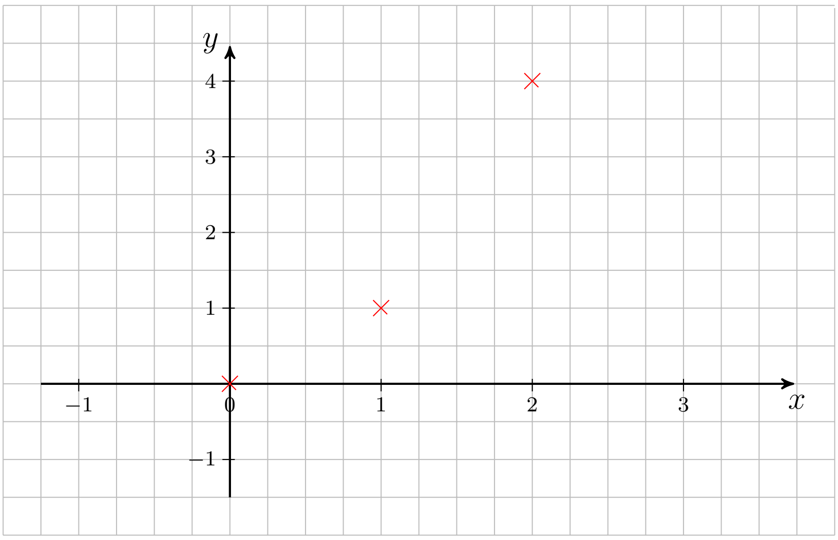
Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$
   - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
   - Wertebereich: $\mathbb{R}$
   - Funktionswert an der Stelle $2.5 : f(2.5) = 2.5^2 = 6.25$
   - Bild von $\mathbb{R} : f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$
   - $graph(f) = \{(x, y) \mid y = x^2\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$



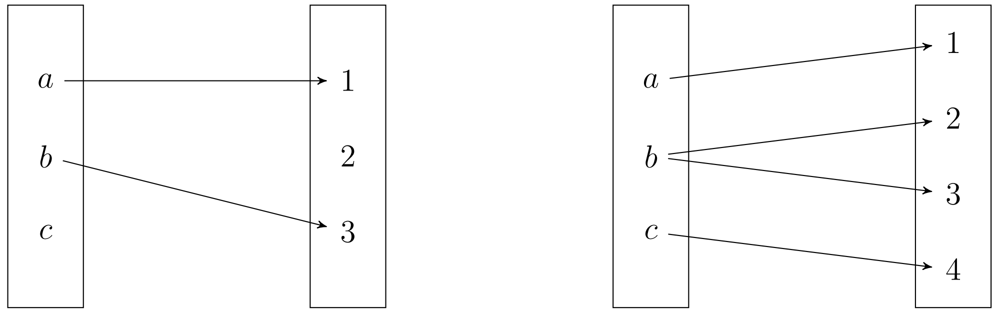
2. $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto n^2$

   - Definitionsbereich: $\mathbb{N}_0$
   - Wertebereich $\mathbb{R}$
   - $g(\mathbb{N}_0) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
   - $graph(g) = \{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}^0\} = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$



3. Die Zuordnungen

   sind keine Funktionen, denn bei (a) ist nicht f jeden Wert $x \in X$ ein Funktionswert erklärt und bei (b) ist der Funktionswert f b nicht eindeutig.



4. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto xy^2$ ist eine reeölwertige Funktion von zwei Variablen.

   z.B.

$$g(1, 2) = 1 * 2^2 = 4 \qquad g(-1, 3) = (-1) * 3^2 = -9$$

5. Die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto (x, x^2)$ ist eine vektorwertige Funktion (mit einem gesicherten Paar reeller Zahlen (Vektor) als Funktionswert)

   z.B

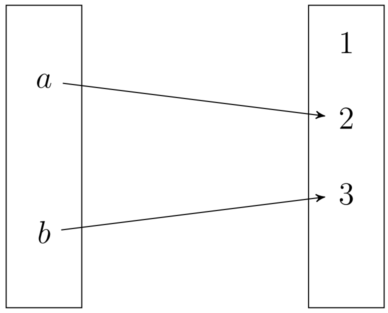
$$h(1) = \left(1, 1^2\right) = (1, 1) \qquad h\left(0.5\right) = \left(0.5, 0.5^2\right) = (0.5, 0.25)$$

Definition
Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- injektiv (eineindeutig), wenn gilt:
  Ist $x_1 \neq x_2$, so ist auch $f(x_1) \neq f(x_2), x_1, x_2 \in X$ (zu jedem Funktionswert gibt es ein eindeutig bestimmtes Argument)
- surjektiv („auf Y“), wenn gilt:
  Für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. ($f(X) = Y$ bzw. jeder Wert aus Y ist tatsächlich ein Funktionswert.
- bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

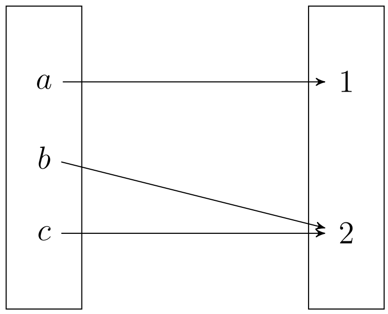
Bsp. 1:

- ist eine Funktion
- ist injektiv
- ist nicht surjektiv, denn 1 ist kein Funktionswert
- ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv

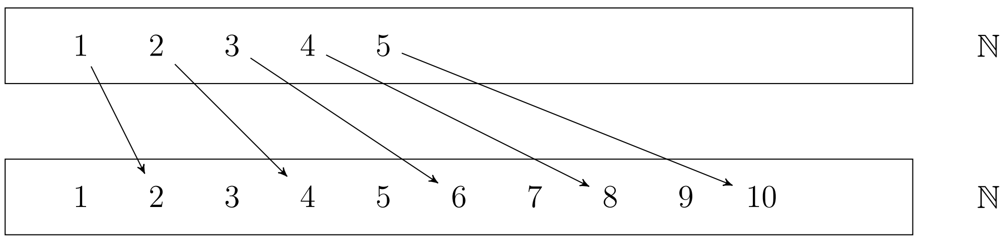


Bsp. 2:

- nicht injektiv, da $b \longmapsto 2$ und $c \longmapsto 2$
- ist surjektiv
- nicht bijektiv, da nicht injektiv



Bsp. 4:



Bsp. 5:

$f : [0,1] \longrightarrow [0,2] : x \longmapsto 2x$

Lösung: $\underbrace{y = 2x}_{x=\frac{y}{2}}$ $\quad y \in [0,2]$ fest gewählt.

Also: Für alle $y \in [0,2] = Y$, existiert ein Argument $x = \frac{y}{2}$, sodass $f(x) = y \longrightarrow$ surjektiv und dieses x ist eindeutig bestimmt $\longrightarrow$ bijektiv und damit auch bijektiv.

3.1 Die Umkehrabbildung

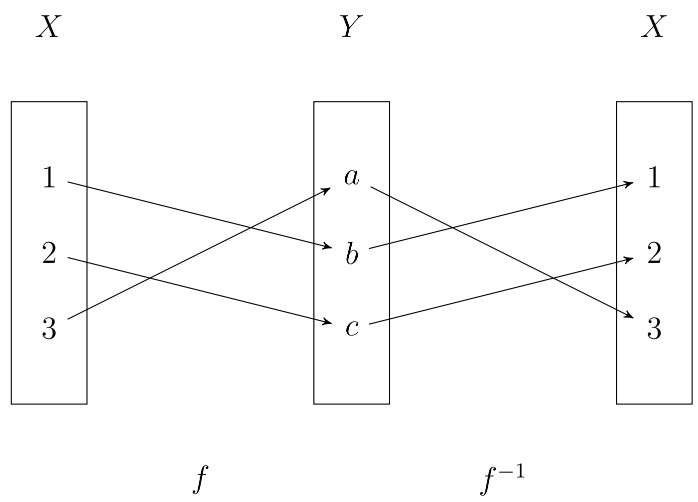
Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit ist die Zuordnung

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X : y \longmapsto x \text{ falls } y = f(x)$$

eine Funktion (lies: f invers oder f hoch -1). Sie heißt die zu f inverse Funktion der auch Umkehrfunktion (Umkehrabbildung) von f.

Beispiel

1. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}, f, f^{-1}$ sind gegeben durch folgende Zuordnungsgraphen:



2. Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x + 1$
   f ist bijektiv, denn zu jeden $y \in \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige bestimmte Lösung der Gleichung.

$$\begin{aligned}
y &= f(x) \\
y &= 2x + 1 \ \mid \ -1 \\
y - 1 &= 2x \ \mid : 2 \\
x &= \frac{y-1}{2}
\end{aligned}$$

Damit ist f^{-1} gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \frac{y-1}{2}$$

oder äquivalent

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x-1}{2}$$

Definition
Die Abbildung $I_x : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$ heißt Identität auf X (oder identische Abbildung).

- I_x ist bijektiv
- $I_x^{-1} = I_x$

3.2 Verknüpfungen von Funktionen

Gegeben:
$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen

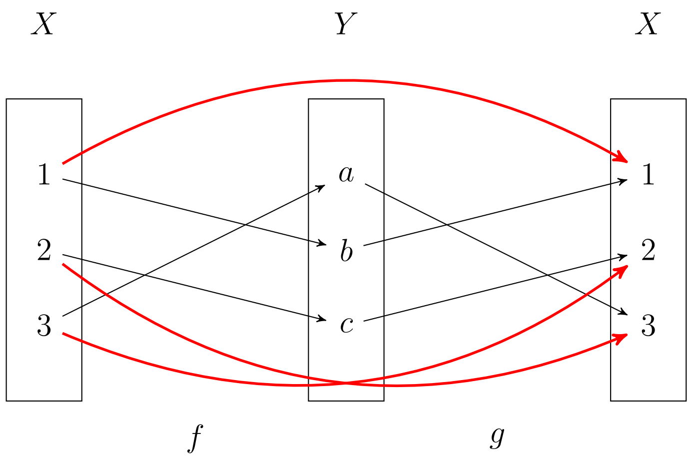
Definition
Die Funktionen $f \circ g : X \longrightarrow Z : x \longmapsto f(g(x))$ heißt Verknüpfung oder Komposition von f mit g (lies $f \circ g$: „f Kringel g“)

$f \circ g$:

$$\underbrace{X \overset{\text{f}}{\Longrightarrow} Y \overset{\text{g}}{\Longrightarrow} Z}_{f \circ g}$$

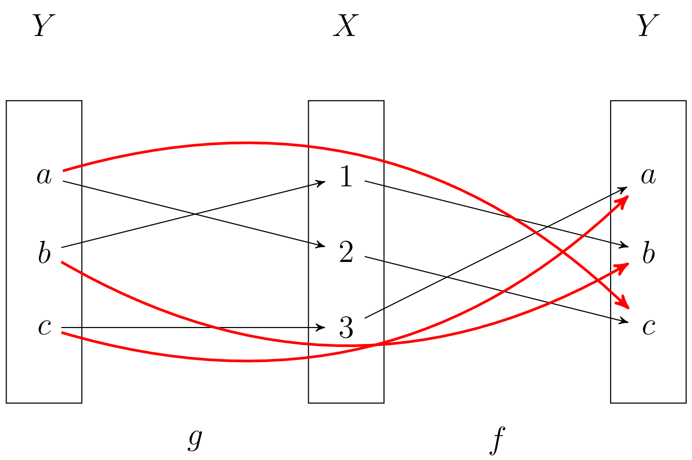
Beispiel

1. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}, f, g$ sind gegeben durch folgende Zuordnungsgraphen



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f : X \longrightarrow Y$
$g : Y \longrightarrow Z$
$f \circ g : Y \longrightarrow X$



Im Allgemeinen sind $f \circ g$ und $g \circ f$ völlig unterschiedliche Funktionen!

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x - 1$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)+1 = 2x$$
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(gx) - 1 = 2(x+1) - 1 = \underline{\underline{2x+1}}$$
$$f \circ g \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{DB von g}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Wertebereich von f}} : x \longmapsto 2x+1$$

Satz
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Funktion und bezeichne $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ die Umkehrfunktion von f. Dann gilt

1. $f^{-1} \circ f = I_x$

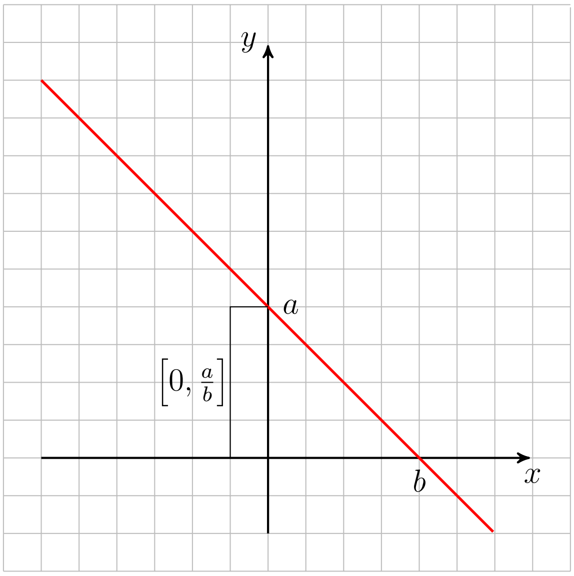
2. $f \circ f^{-1} = I_y$

Beispiel
Aus langjähriger Marktbeobachtung sei bekannt, dass die Nachfragemenge eines Guts linear vom Preis p abhängt, d.h. dass $x = a - bp$, wobei $x \ldots$ Nachfragemenge, $p \ldots$ Preis und $a, b > 0$ Parameter (fest, gesamt).
Inwiefern lässt sich der Preis p vorhersagen, der sich bei Nachfragemenge (Absatz) x erweitern lässt?

Mathematische Modellierung
$x \in [0, \infty)$
$p \in [0, \frac{a}{b}] \qquad a - bp \geq 0 \Rightarrow p < \frac{a}{b}$

$$D : \left[a, \frac{a}{b}\right] \longrightarrow [0, \infty) : p \longmapsto a - bp$$

Gesucht: D^{-1}. Problem: Funktion ist nicht bijektiv. Nachfragemenge $x > a$ kann nicht am Markt abgesetzt werden (Werte $x > a$ tauchen nicht als Funktionswerte von D auf).



Wir suchen die Umkehrfunktion $D^{-1} : [0, a\} \longmapsto [0, \frac{a}{b}]$
Weg: Auflösen der Gleichung $x = a - bp$ nach p
$x - a = -bp \;\; |: (-b) \neq 0$
$\frac{x-a}{-b} = p$
$\underline{p = -\frac{x}{b} + \frac{a}{b}}$

Also:

$$D^{-1}\, [0, a] \longrightarrow \left[0, \frac{a}{b}\right] : x \longmapsto -\frac{x}{b} + \frac{a}{b}$$

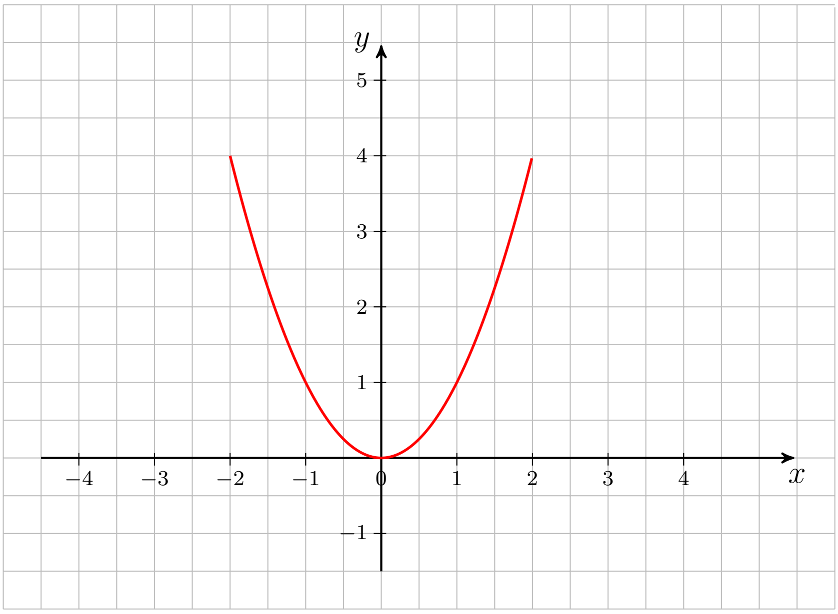
4 Reelle Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion.

Beispiel

1. $f : R \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

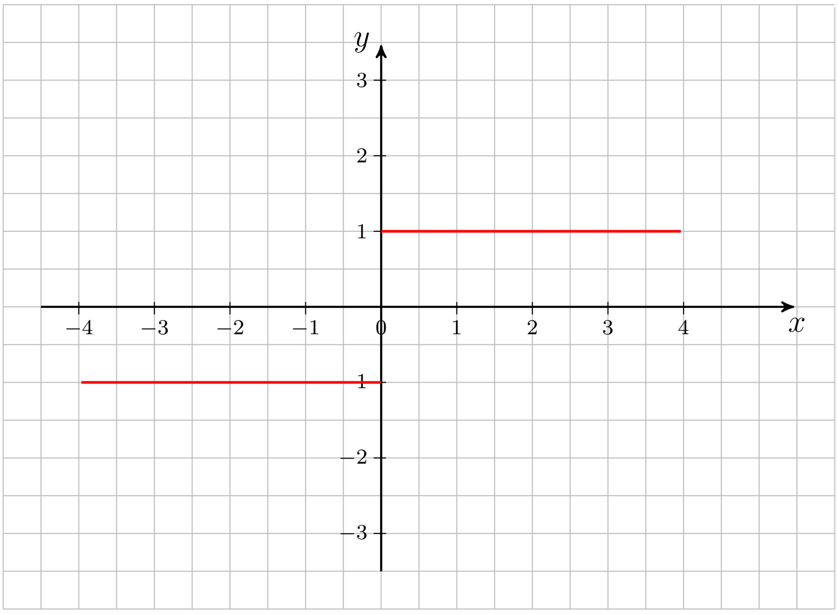


alternative Schreibweise:

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

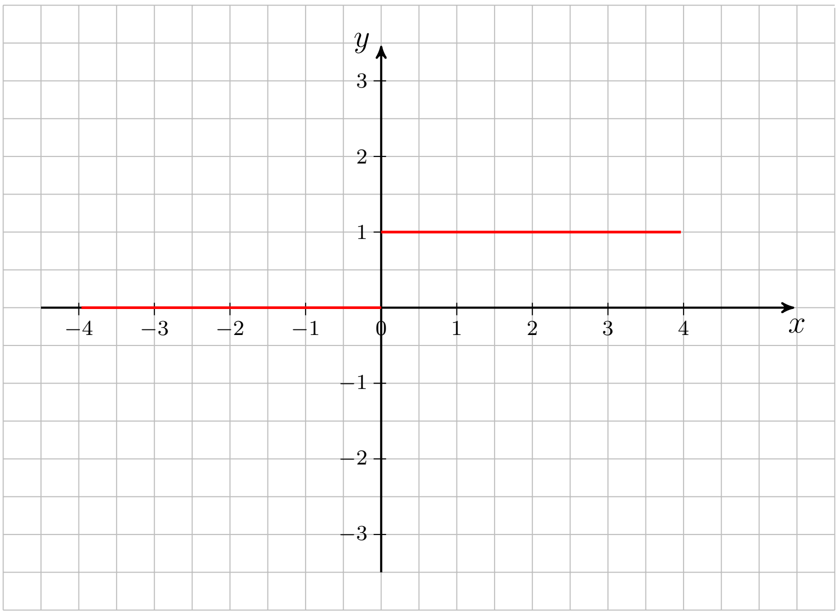
2. $sign(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

z.B. $sign(5) = +1; sign(-3.2) = -1$



3. Heaviside-Funktion (Einschaltfunktion)

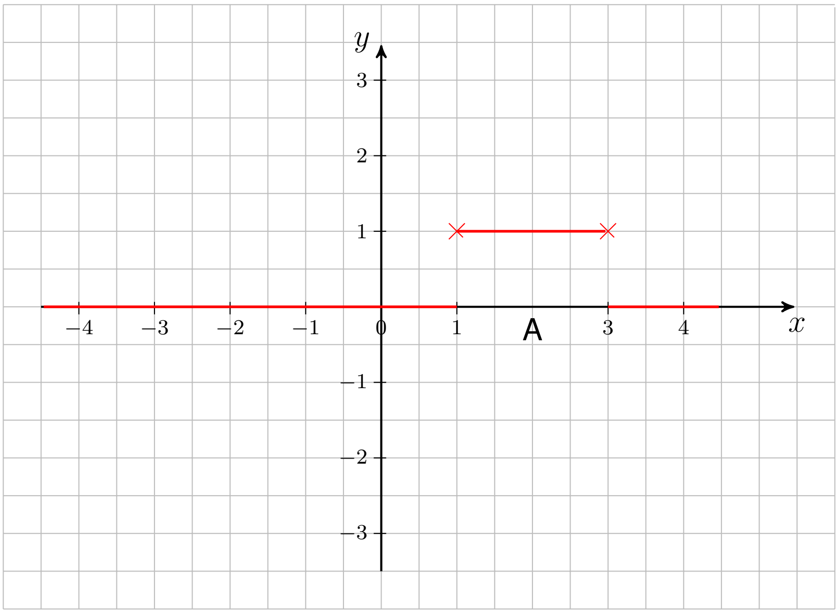
$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



4. Indikatorfunktion , $A \subset \mathbb{R}$

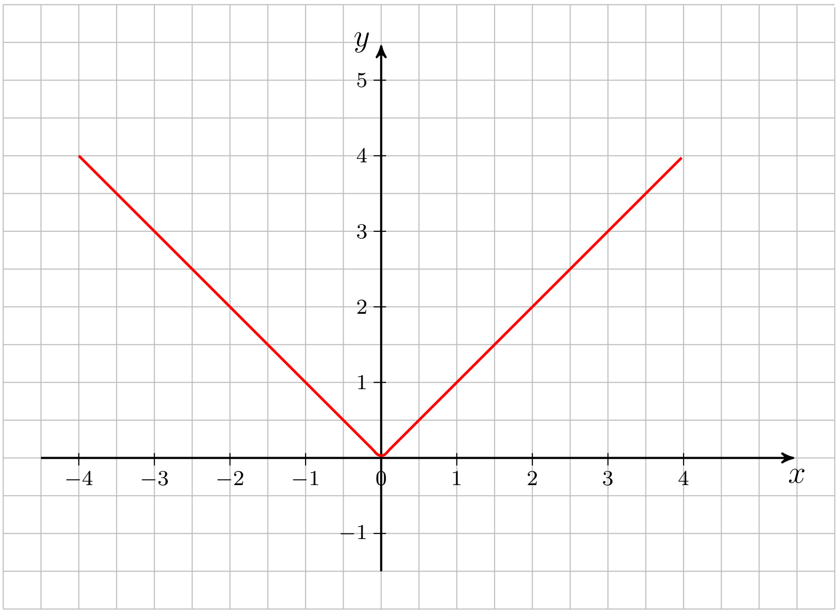
$$X_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

z.B. $A = [1,3], X_{[1,3]} = \begin{cases} 1 & 1 \leq X \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



5. Betragsfunktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



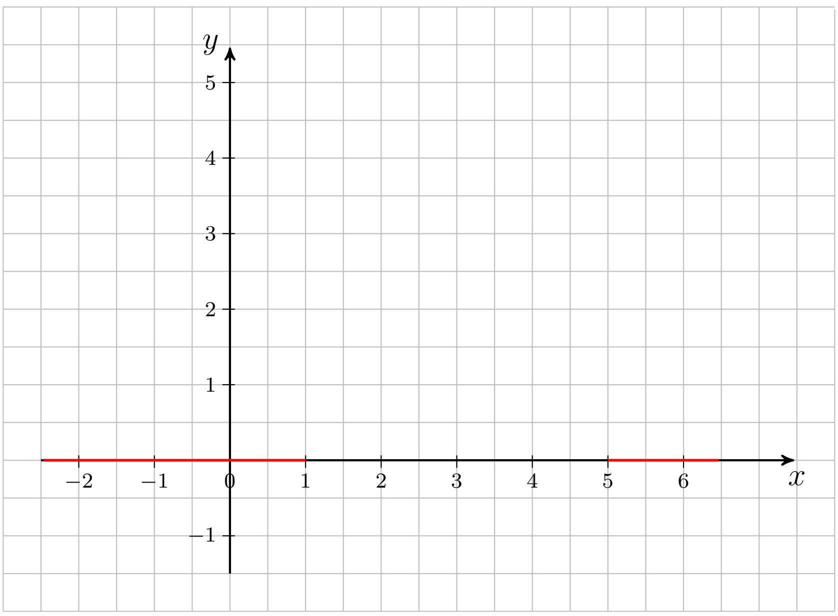
Es gilt $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{falls } x \geq a \\ -(x-a) = a * x & \text{falls } x < a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

Also: $|x-a| \ldots$ Abstand zu x und a (auf der Zahlengerade)

Beispiel

Gesucht ist die Menge aller Lösungen von $|x-3| \geq 2 \Rightarrow L = \{x \mid x < 1 \text{ oder } x \geq 5\}$

Grafische Lösung



analytische Lösung: über Fallunterscheidung

- $\underbrace{x-3 \geq 0}_{x\geq 3} \Rightarrow x-3 \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$ auflösen nach x

$$L_1 = \underbrace{\{x \mid x-3 \geq 0\}}_{\text{Bedingung der Fallunterscheidung}} \cap \underbrace{\{x \mid x \geq 5\}}_{\text{Bedingung aus der Ungleichung}} = \{x \mid x \geq 5\}$$

- $x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) \geq 2$ auflösen nach x
  $(x-3) \leq -2 \Rightarrow x \leq 1$

$$L_2 = \underbrace{\{x \mid 3 < 0\}}_{\text{Bedingung der Fallunterscheidung}} \cap \underbrace{\{x \mid x \leq 1\}}_{\text{Bedingung aus der Ungleichung}} = \{x \mid x = 1\}$$

Gesamtlösung:

$$\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \geq 5 \text{ oder } x \leq 1\} = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)}}$$

Definition

1. Eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_0 \quad , x \in R$$

   mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $n (a_n \neq 0)$

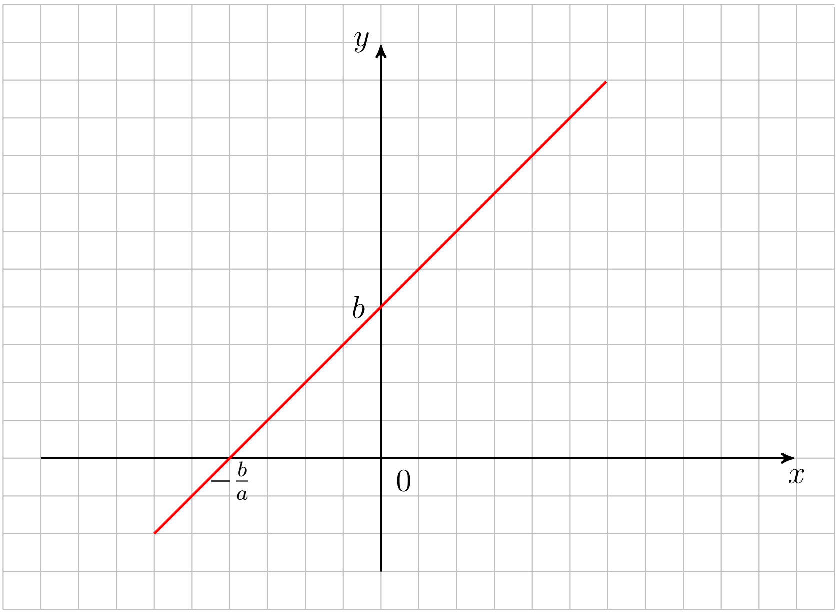
2. Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

   mit $p(x), q(x)$ Polynomen, heißt rationale Funktion

Beispiel

1. $p(x) = ax + b, a \neq 0$, Polynom vom Grad 1, lineare Funktion.
   Grafische Darstellung über zwei Punkte $p(0) = b$ und
   $p(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 (\Rightarrow x = -\frac{b}{a})$



2. $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, Polynom 2. Grades, quadratische Funktion
   $= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

   $$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{=D} \right)$$ Scheitelpunktform der Parabel

   $$p(x) = \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + D \right)$$

Definition
Die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ werden Nullstellen von f genannt.

Beispiel
$f(x) = x^2 + px + q \qquad p, q \in \mathbb{R}$

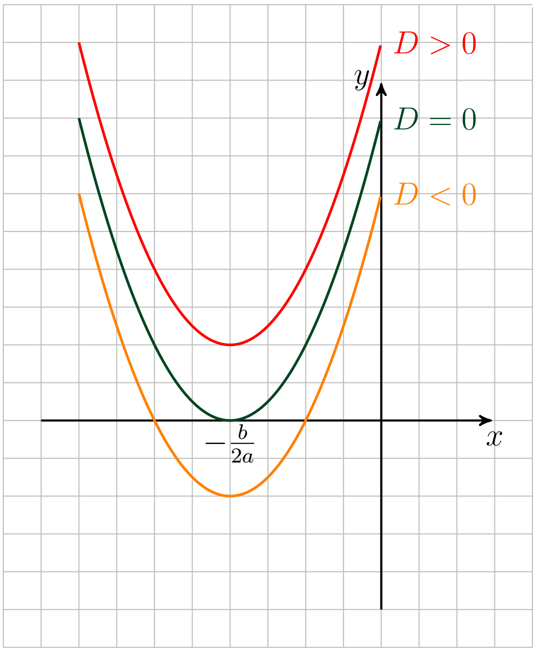


Abbildung 1.1: $a > 0$

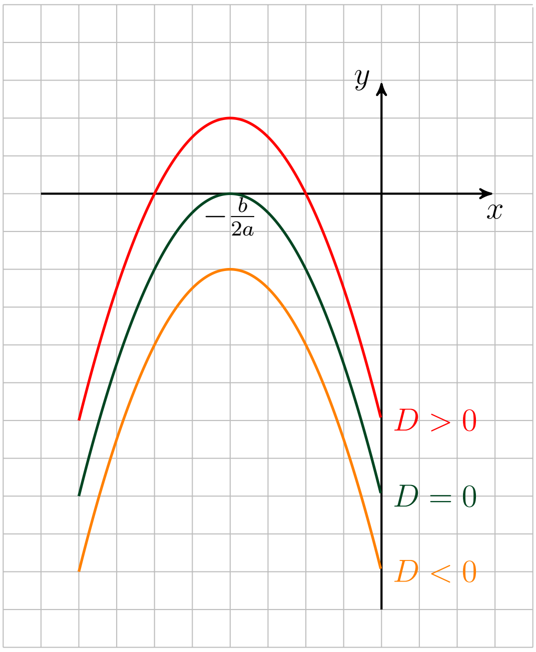


Abbildung 1.2: $a < 0$

- $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
  Nullstellen von f, falls $\frac{p^2}{4} - q > 0$

- $x_1 = -\frac{p}{2}$
  Nullstelle von f, falls $\frac{p^2}{4} - q = 0$
- Keine Nullstelle falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$

Definition Verknüpfung von reellen Funktionen
Seien $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann sind auch

- $f + g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) + g(x)$
- $f - g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) - g(x)$
- $f * g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) * g(x)$
- $\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$
  mit $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ und $c * f : D_g \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c * f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$
  reelle Funktionen

Beachte: $fg\dots$ ist die sogenannte punktweise Multiplikation von f und g. Dies darf nicht verwechselt werden mit der Hintereinanderausführung (Komposition) $f \circ g$

Beispiel
$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad , g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

$f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) * g(x) = x^2(2x-1) = 2x^3 - x^2$

- kurz: $(fg)(x) = 2x^3 - x^2, x \in \mathbb{R}$
- klar: $(gf)(x) = 2x^3 - x^2, x \in \mathbb{R}$

$f \circ g : D_g \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x-1)^2)4x^2 - 4x + 1$
(falls der Wertebereich von g enthalten ist in D_f)

- kurz: $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}$
$g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$
$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-4}{x^4-2x^3-x^2+2x} \quad , x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x^4 - 2x^3 + 2x = 0\}$

Satz
Ist

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom n-ter Ordnung (d.h. $a_n \neq 0$), dann besitzt f höchstens n reelle Nullstellen. Ist x_0 eine Nullstelle von f, dann existiert ein Polynom g von (n-1)-ter Ordnung, so dass

$$f(x) = (x - x_0) * g(x)$$

Das Polynom $g(x)$ lässt sich mittels Polynomdivision ermitteln.

Beispiel
$g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$

$= x(x^3 - 2x^2 - x + 2) \qquad \Rightarrow x_0 = 0$
$= (x - 0)(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

Durch probieren: $x_1 = 1$ ist eine NS von $x^3 - 2x^2 - x + 2$, denn $1^3 - 2 * 1^2 - 1 + 2 = 0$

1. Ausmultiplizieren mit Koeffizientenvergleich

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = ax^2 + bx^2 + cx = ax^2 - bx - c = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$$

Koeffizientenvergleich: x^3: $1 = a$
x^2: $-2 = b - a$
x: $-1 = c - b$
x^0: $2 = -c$

führt auf ein Gleichungssystem. Auflösen liefert:

- $a = 1$
- $b = -1$
- $c = -2$

Also:

$$\underline{\underline{g(x) = x(x-1)(x^2 - x - 2)}}$$

2. $\Rightarrow$ Polynomdivision anwenden, wie in Schule gelernt.
$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$

$$\underline{\underline{\Rightarrow g(x) = x(x-1) \quad \underbrace{x^2 - x - 2}_{\text{quadratische Gleichung}}}}$$

$$\Rightarrow x_{1|2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (2-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

Damit sind die Nullstellen von $g: x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$:

Beispiel Anfang

$h(x) = \frac{2x-4}{x^4-2x^3-x^2+2x} \quad , x \neq -1, 0, 1, 2$

$= \frac{2(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \quad , x \neq -1, 0, 1, 2$

Definition

Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

eine gebrochen rationale Funktion. Dann heißt ein Punkt $x_0 \in D$

1. $\underset{q_n(x) \neq 0}{\text{p-fache NS}}$ von $f, (1 \leq p \leq m)$, falls $q_n(x_0) \neq 0$ und $p_n(x) = (x - x_0)p * r(x)$ mit $r(x) \ldots$ Polynom und $r(x_0) \neq 0$

2. q-fache Nullstelle von $f, (1 \leq q \leq n)$, falls $p_n(x_0 \neq 0$ und $q_n(x) = (x_0)^q * R(x)$ mit $R(x) \ldots$ Polynom und $R(x_0) \neq 0$

Beispiel Fortsetzung

$h(x) = \frac{2(x-2)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$ hat keine Nullstellen. Die Punkte $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1$ sind Polstellen (1. Ordnung, einfach).

Beispiel

$$\frac{(x-1)^2(x+2)(x-5)}{(x+3)^3(x-5)} = f(x) \quad , x \neq 5, x \neq -3$$

ist eine gebrochen rationale Funktion. Der Linearfaktor ($x = 5$) kann gekürzt werden $\rightarrow x_0 = 5$ ist kein besonderer Punkt.

- $x_1 = 1$ ist doppelte Nullstelle
- $x_2 = -2$ ist einfache Nullstelle
- $x_3 = -3$ ist dreifache Nullstelle

Definition

Eine gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ heißt echt gebrochen, falls $m < n$ und unecht gebrochen falls $m \geq n$.

Satz
Jede unecht gebrochene rationale Funktion kann zerlegt werden in die Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 2}{x^2 + 1} \quad , x \in \mathbb{R}$$

ist unecht gebrochen. Zerlegung mit Hilfe von Polynomdivision

$(x^6 + x^4 + x^2 + 2) : (x^2 + 1) = x^4 + 1$

$$\Rightarrow \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 2}{x^2 + 1} = \underline{\underline{(x^4 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1}}}$$

Definition
Unter dem mathematischen Definitionsbereich einer Zuordnungsvorschrift $f(x)$ verstehen wir die Menge aller reellen Zahlen x, für die $f(x)$ einen eindeutigen, reellen Wert liefert.
Bezeichnung: $D_{math} \ldots$ „maximaler Definitionsbereich", so dass $f : D_{math} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist.

Beispiel
$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad , D_{math} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$

Definition
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset D$. Dann ist $f\mid_I : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$ ebenfalls eine Funktion und wird als Einschränkung von f auf den Bereich I bezeichnet.

Sprich: $f\mid_I \ldots$ „f eingeschränkt auf I"

Beispiel
$f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

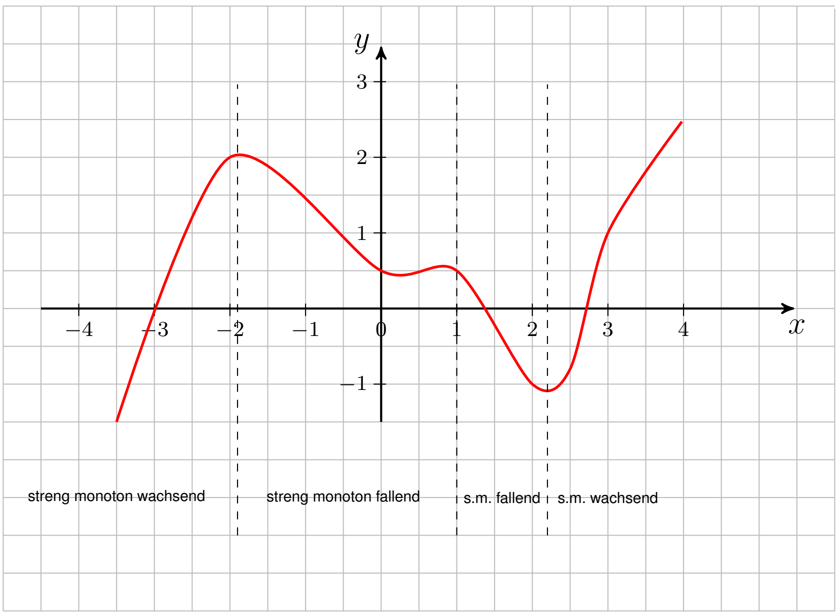
$$f\mid_{(0,2\pi)}: (0, 2\pi) \longrightarrow R : x \longmapsto \frac{1}{\sin(x)}, \text{ kurz: } f\mid_{(0,2\pi)}(x) = \frac{1}{\sin x} \quad , 0 < x < 2\pi$$

Definition
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

1. f heißt streng monoton wachsend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$
2. f heißt streng monoton fallen, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt dass $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$.

Gilt in (1) oder (2) anstelle von $<$ und $>$ jeweils $\leq$ und $\geq$ so heißt f monoton wachsend bzw. fallend.

Beispiel



f ist nicht monoton aber

- $f\mid_{I_1}$ monoton wachsend (streng)

- $f\mid_{I_3}$ monoton wachsend (streng)
- $f\mid_{I_2}$ monoton fallend (streng)

Satz

Eine reelle Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv (eindeutig umkehrbar), wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. In diesem Fall existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x erhalten werden kann. f^{-1} hat dasselbe Monotonieverhalten wie f. Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung des Graphens von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Beispiel

Die Potenzfunktion $f(x) = x^n, x \geq 0$ ist streng monoton wachsend.

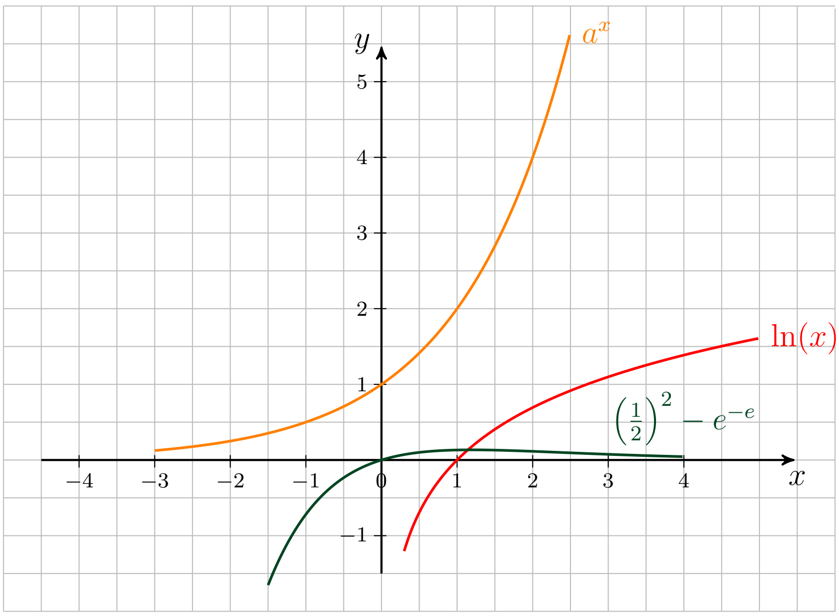
Also existiert eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend.

Beispiel

Die Expontentialfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ mit $f(x) = a^x$ ist für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a > 1$ streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ wird als Logarithmusfunktion bezeichnet.



Satz

1. Eine streng monoton wachsende Funktion enthält die Ordnung:
   - Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so ist die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $f(a) < f(b)$ und $f^{-1} < f^{-1}(b)$.

2. Eine streng monoton fallende Funktion kehrt die Ordnung um:
   - Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallend, so ist die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $f(a) > f(b)$ und $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$.

Beispiel

1. Gesucht ist die Menge aller x für die $2^x > 3$ gilt.
   $\log_2(x), x > 0$ ist streng monoton wachsend (denn $2 > 1$)
   $\Rightarrow$ Ordnung bleibt erhalten

   $$\Rightarrow \underbrace{\log_2(2^x)}_{x} > \underbrace{\log_2(3)}_{\log_2(x)=\frac{\ln 2}{\ln 3}} \Rightarrow \underline{\underline{x > \tfrac{\ln 3}{\ln 2}}}$$

2. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\frac{1}{x+1} < 4. \qquad x \neq -1 \ \mid \ \frac{1}{(\dots)}$
   Ansatz: Anwendung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf beiden Seiten der Gleichung.
   Also für Ungleichung Fallunterscheidung:

   - $$\frac{1}{x+1} > 0 \quad (4 > 0) \qquad \text{Anwendung von } f\mid_{(0,\infty)}$$
     (monoton fallend) $\longrightarrow$ Relationszeichen wird umgestellt:
     $$\frac{1}{x+1} > 4 \quad \mid \ \frac{1}{(\dots)} \Rightarrow x + 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{x < -\frac{3}{4}}$$
     Zusammen mit der Bedingung $\frac{1}{x+1} > 0$, also $x > -1$ ergibt sich
     $L_1 = \{x : -1 < x < -\frac{3}{4}\}$
   - $\frac{1}{x+1} < 0$, also $x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0 < 4$. Also ist die Ungleichung immer erfüllt
     $$\Rightarrow \underline{L_2 = \{x : x < -1\}}$$
     $$\Rightarrow \underline{\underline{L = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)}}$$

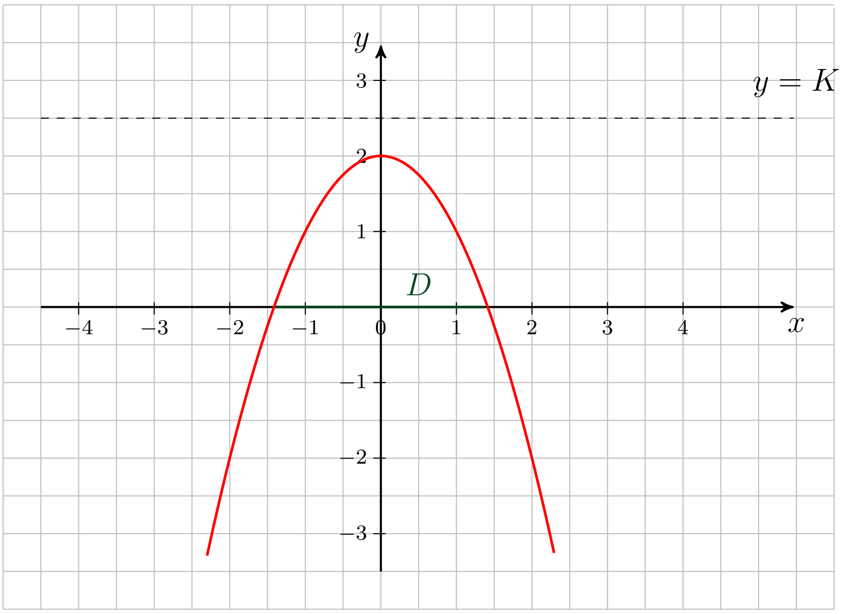
3. $-4 < -3 \mid ()^2$ dreht das Relationszeichen um, denn $f(x) = x^2, x < 0$ ist monoton fallend.

Definition

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. f heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq K$ für alle $x \in D$

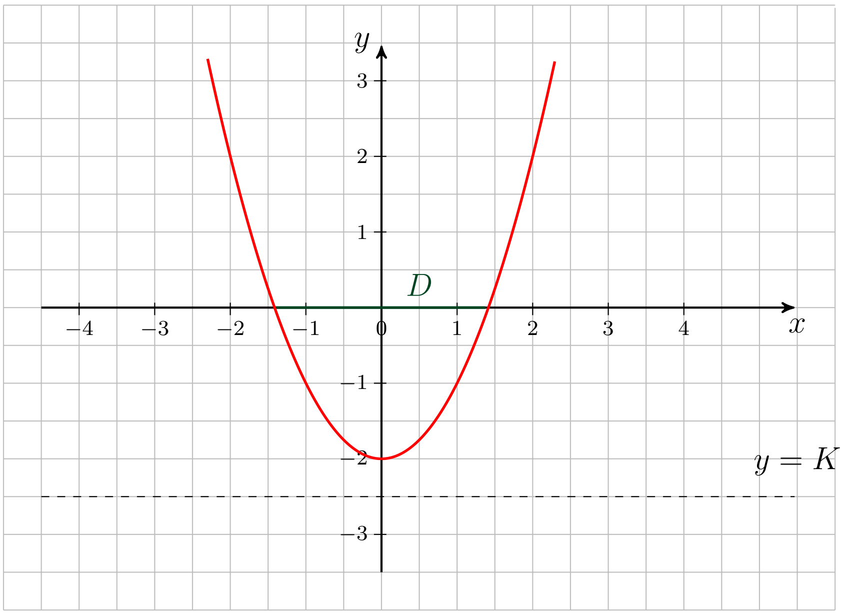
   Bezeichnung: $K \ldots$ obere Schranke von f



Anschaulich: Graph von f liegt unterhalb der Geraden $y = K$

2. f heißt nach unten beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \geq K$ für alle $x \in D$

   Bezeichnung: $K \ldots$ untere Schranke.

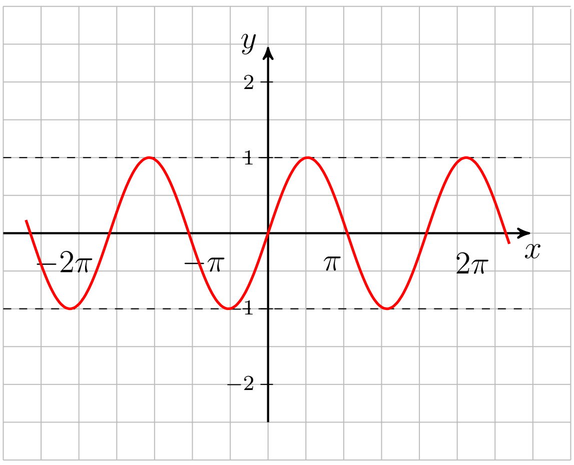


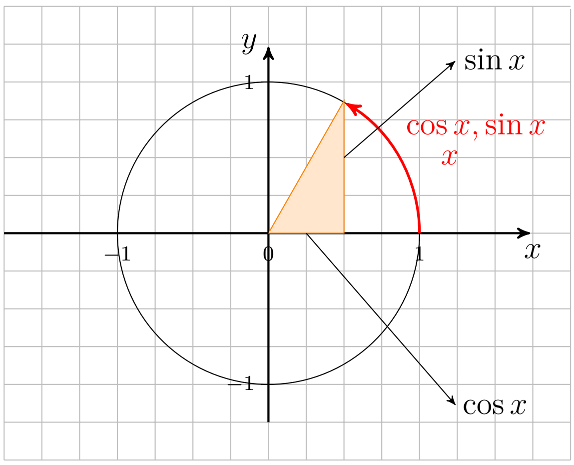
Anschaulich: Graph von f liegt oberhalb der Geraden $y = K$

3. f heißt beschränkt, falls es eine obere Schranke K_1 und eine untere Schranke K_2 gibt, so dass
$$K_2 \leq f(x) \leq K_1$$
für alle $x \in D$

Beispiel

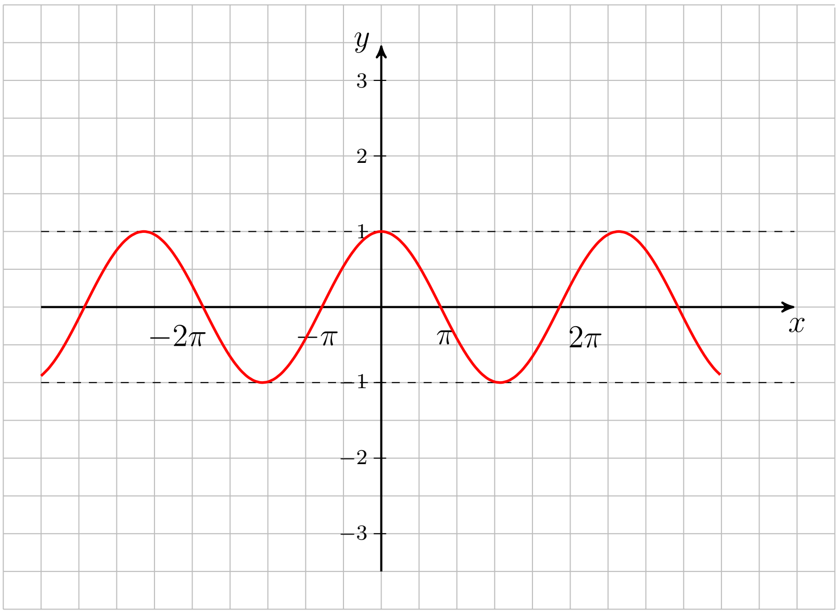
1. $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$





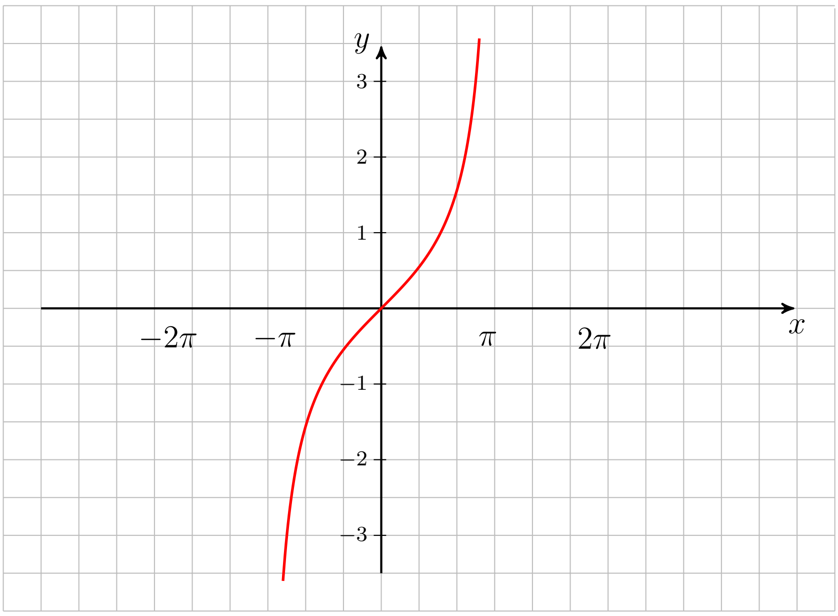
Es gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, also ist $\sin(x), x \in \mathbb{R}$ beschränkt mit der unteren und oberen Schranke -1 bzw. $+1$

2. $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R}$



$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow$ g ist beschränkt.

3. $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

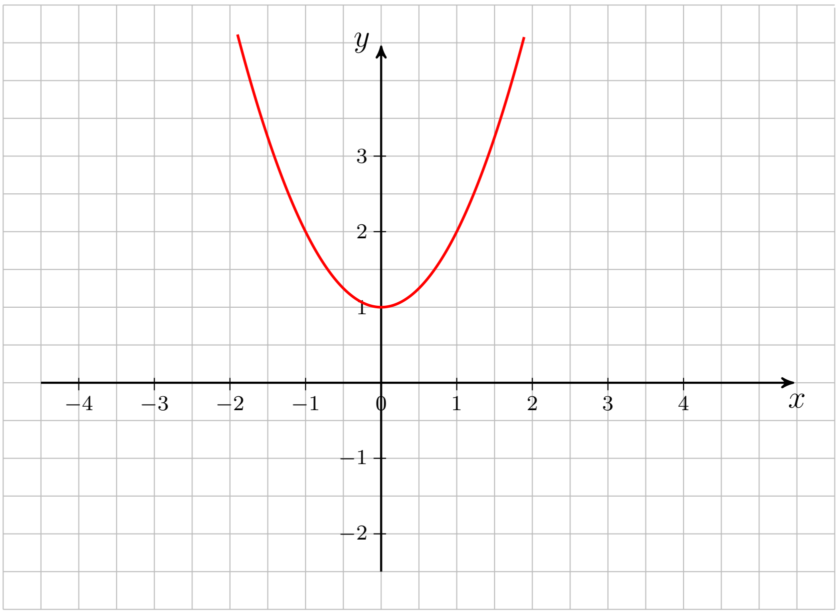


$\tan(x)$ ist unbeschränkt!

Definition

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ und f heißt gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

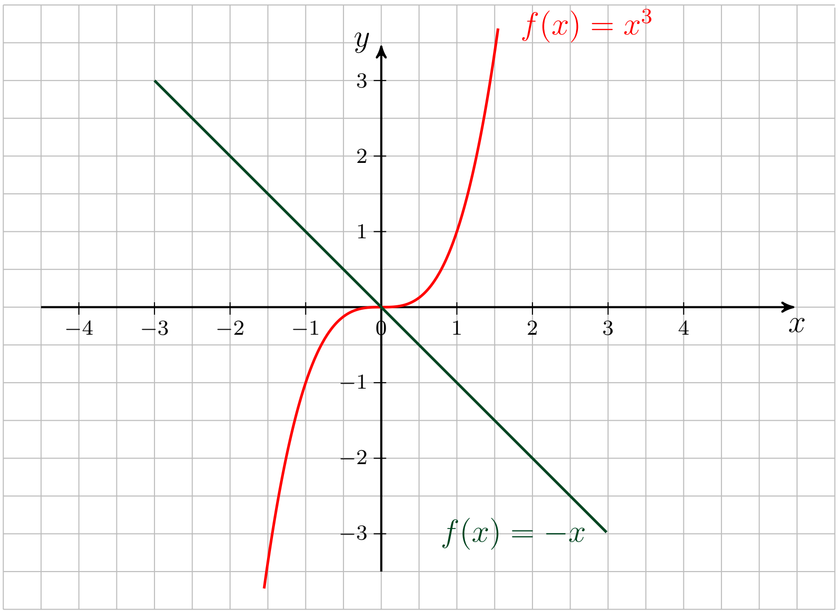
Anschaulich:



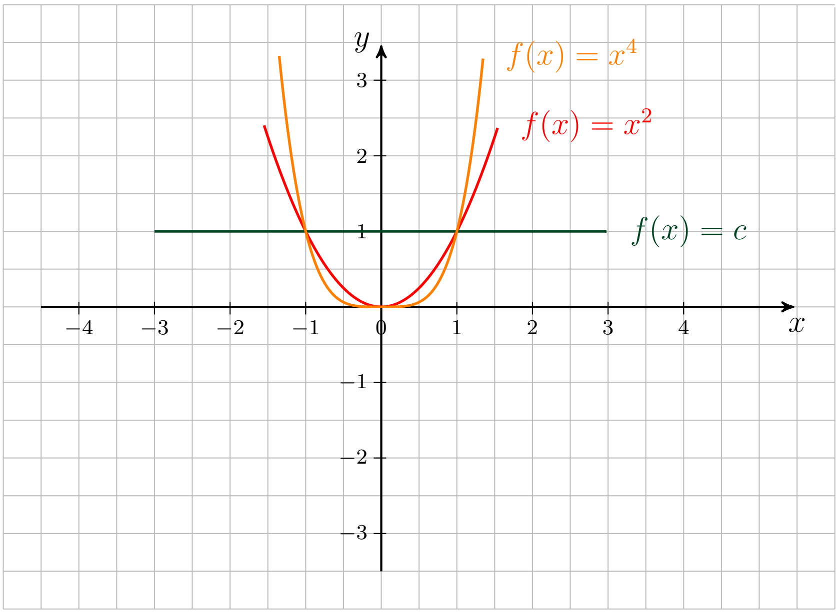
- f ist gerade
- Spiegel symmetrisch zur y-Achse

Beispiel

1. $\sin(x), x \in \mathbb{R}, \tan(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + \pi * k \mid k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = -x, f(x) = x^n$ mit n ungerade sind ungerade Funktionen



2. $\cos(x), x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2, f(x) = c, f(x) = x^n$ mit n gerade sind gerade Funktionen



5 Mathematische Beweisverfahren und Schlussweisen

5.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Ausgangspunkt

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist eine Vorgänger und Nachfolger-Relation

$$V := \Big\{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \;\mid\; m = n - 1\Big\}$$

und

$$\mathbb{N} = \Big\{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \;\mid\; m = n + 1\Big\}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ eine mathematische Aussage

$$A(0)\ A(1)\ \ A(2)\ \ \dots\ \ A(n)\ \ A(n+1)\ \ \dots$$

Zu jeder Aussage $A(n)$ gibt es eine nächste Aussage $A(n+1)$ und eine vorhergehende Aussage $A(n-1)(n \geq 1)$. $A(0)$ ist die „erste Aussage".

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ eine von n abhängende mathematische Aussage. Falls sich beweisen lässt, dass

1. $A(0)$ wahr ist und
2. aus der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist auch die Aussage $A(n+1)$ folgt

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Schritt (1) heißt Induktionsanfang und Schritt (2) heißt Induktionsschritt.

Beispiel

Zu zeigen ist, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Vorüberlegung:

- $n = 0:\quad (1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 * x = 1 \Rightarrow$ stimmt
- $n = 1:\quad (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 * x \Rightarrow$ stimmt
- $n = 2:\quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x \Rightarrow$ stimmt

- $n = 3: \quad (1+x)^3 = \underbrace{(1+x)^2}_{\geq 1+2x}\underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+2x)(1+x) = 1+3x+2x^2 \geq 1+3x \Rightarrow$ stimmt
- $n = 4: \quad (1+x)^4 = \underbrace{(1+x)^3}_{\geq 1+3x}\underbrace{1+x}_{\geq 0} \geq (1+3x)(1+x) = 1+4x+3x^2 \geq 1+4x \Rightarrow$ stimmt

Nun: Der Schritt von $A(n)$ auf $A(n+1)$ wird allgemein für festes aber bei wählbares n getan:

Beweis über vollständige Induktion

1. Induktionsanfang:
   $n = 0 : (1+x)^0 = 1 = 1 + 0 * x$ ist wahr
   Daraus wollen wir schlussfolgern, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

2. Induktionsschritt:
   $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Wir gehen davon aus, dass $A(n)$ für ein fest gewähltes $n \in N_0$ wahr ist.
   Aus $A(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$ Induktionsvoraussetzung schließen wir auf
   $A(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ Induktionsbehauptung

   n fest:

$$A(n+1) : (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx}(1+x) = (1+nx)(1+x)$$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr}$$

Damit gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

5.2 Direkter Beweis

Definition

Sei A eine Aussage, von der behauptet wird, dass sie unter der Bedingung B gelte. Falls durch logisches schließen aus B die Aussage A abgeleitet werden kann, so nennt man dies einen direkten Beweis von $B \Longrightarrow A$. B heißt dann hinreichende Bedingung für A.

Beispiel

„Die Summe von 3 natürlichen Zahlen die aufeinander folgen ist durch 3 teilbar“

B:	n_1, n_2, n_3 aufeinander folgende natürliche Zahlen
A:	$n_1 + n_2 + n_3$ ist durch 3 teilbar
Behauptung	$B \Longrightarrow A$
Beweis	$B \Rightarrow n_2 = n_1 + 1, n_3 = n_2 + 1 = n_1 + 1 + 1 = n_1 + 2$
	$\Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = n_1 + n_1 + 1 + n_1 + 2 = 3n_1 + 3 = 3(n_1) + 1$
	$\Rightarrow n_1 + n_2 + n_3$ ist durch 3 teilbar, denn $n_1 + 1 := n_2 \in \mathbb{N}_0$
A	$\diamond$ (Anmerkung: $\diamond$ bedeutet Beweis fertig)

5.2.1 Widerspruchsbeweis

Definition

Sei A eine Aussage, von der behauptet wird, dass sie unter der Bedingung B gelte,. Falls durch logisches schließen gezeigt werden kann, dass das Gegenteil von A im Widerspruch zu B steht, dann nennt man das einen indirekten Beweis der Aussage $B \Longrightarrow A$.

Beispiel

Behauptung	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
B:	$(\sqrt{2})^2 = 2$
A:	$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{N}$
Beweis	Wir nehmen an, das $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ für ein Paar $m, n \in \mathbb{N}$

Indem wir gegebenenfalls kürzen, können wir weiter annehmen, dass m und n keinen gemeinsamen Teiler haben. Quadrieren liefern:

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \;\mid\; *n^2 \quad \Rightarrow 2n^2 = m2(*)$

Da $2n2$ gerade ist, muss auch m^2 und damit m gerade sein. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $m = 2k$. Dann ist $m^2 = 4k^2$ und deshalb nach einsetzten in (*) $2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Da $2k^2$ gerade ist ist auch n^2 und damit n gerade. Dann sind aber m und n beide durch 2 teilbar. Dies steht im Widerspruch zu m und n teilerfremd.
D.h. Das Gegenteil von A und B können nicht gleichzeitig wahr sein.
Also gilt $B \Longrightarrow A$, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

5.2.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Definition

Seien A, B Aussagen. ($A \ldots$ Aussage, $B \ldots$ Bedingung)

1. Falls A immer wahr ist, wenn B wahr ist, dann heißt B hinreichende Bedingung für A.
   Bezeichnung: $B \Longrightarrow A$

   „B ist Ursache von A aber nicht unbedingt die einzig mögliche."

2. Falls B immer wahr ist, wenn A wahr ist, so heißt B notwendige Bedingung für A.
   Bezeichnung: $B \Longleftarrow A$ oder $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$ (wenn B nicht wahr ist, dann kann auch A nicht wahr sein.)

   „B ist eine Eigenschaft von A"

3. Eine notwendige und hinreichende Bedingung heißt äquivalente Bedingung.
   Bezeichnung: $A \Longleftrightarrow B$

Beispiel

1. Wenn ich ausreichend Nudeln gegessen habe, bin ich satt.
   Kehrsatz: Wenn ich satt bin, habe ich ausreichend Nudeln gegessen ist in diesem Fall falsch.

A:	„Ich bin satt“
B:	„Ich habe ausreichend Nudeln gegessen“
C:	„Ich habe ausreichend gegessen“
$B \Longrightarrow A$	aber $A \not\Longrightarrow B$

   Weiter: $A \Longrightarrow C, C \Longrightarrow A$, also $A \Longleftrightarrow C$

2. Viereck

A :	Alle Seiten eines Vierecks sind gleich lang
B :	Das Viereck ist ein Quadrat
$B \Longrightarrow A$	aber $A \not\Longrightarrow B$ (z.B. eine Raute)

   D.h. Bedingung A ist notwendig für die Aussage B

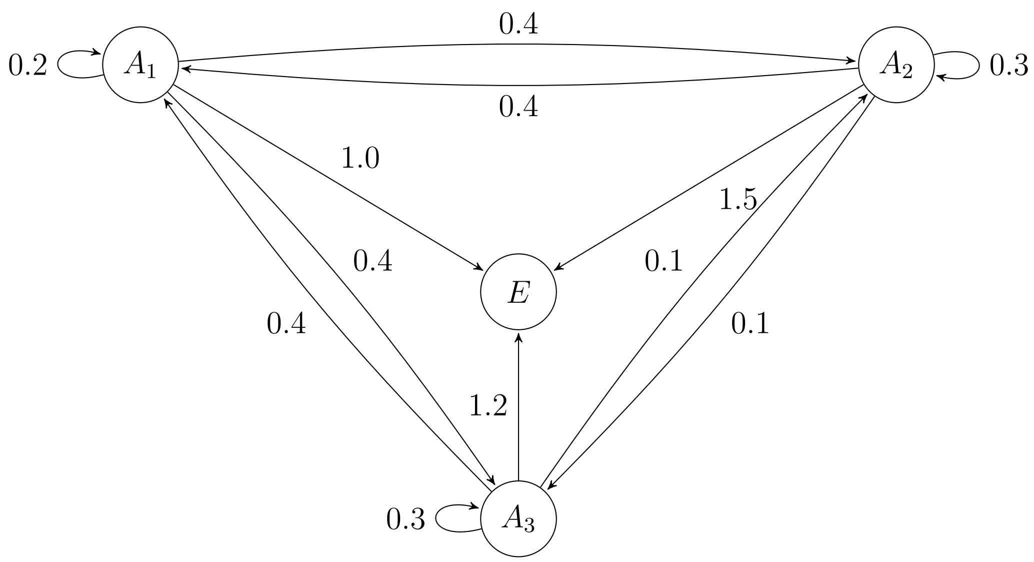
3. Genau dann wenn $a^2 + b^2 = c^2$ für die Seitenlängen eines Dreiecks gilt, ist das Dreieck rechtwinklig.

A :	Für die Seitenlängen eines Dreiecks gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
B :	Das Dreieck ist rechtwinklig
$B \Longrightarrow A$	$A \Longrightarrow B$

2 Matrizen

1 LEONTIEF-Modell

Beispiel Anfang
Drei Firmen (oder Sektoren einer Volkswirtschaft) produzieren verschiedene Güter, z.B. A_1: Energie; A_2: Getreide; A_3: Düngemittel und Chemikalien. Die Firmen beliefern einander und einen nicht-produzierenden Endverbraucher E entsprechend des folgenden Gozinto-Graphen (Alle Angaben sind entsprechend Mengeneinheiten (ME))



Gozinto-Graph ist ein Kunstwort und kommt von „goes-into“

Bezeichnungen

- $x_{ij} \ldots$ Menge, die A_j und A_i erhält $(i, j = 1, 2, 3)$
- $y_i \ldots$ Menge, die E von A_i enthält $(i = 1, 2, 3)$
- $x_i \ldots$ Gesamtproduktmenge von A_i $(i = 1, 2, 3)$

Lieferung von	an A_1	an A_2	an A_3	an E	$\sum$
A_1	$x_{11} = 0.2$	$x_{12} = 0.5$	$x_{13} = 0.4$	$y_1 = 1.0$	$21 = x_1$
A_2	$x_{21} = 0.4$	$x_{22} = 0.3$	$x_{23} = 0.1$	$y_2 = 1.5$	$2.3 = x_2$
A_3	$x_{31} = 0.4$	$x_{32} = 0.1$	$x_{33} = 0.3$	$y_3 = 1.2$	$2.0 = x_3$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ Marktvektor $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Produktionsvektor

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiel Fortsetzung

$$y = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.2 + 0.5 + 0.4 + 1.0 \\ 0.4 + 0.3 + 0.1 + 1.2 \\ 0.4 + 0.1 + 0.3 + 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.0 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

Satz
Setze Menge x_{ij}, die A_i an A_j liefert ins Verhältnis zur Menge x_j, die A_j insgesamt produziert.

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

- z_{ij}: Lieferung von A_i nach A_j nötig für Produktion einer Einheit von A_j
- $z_{ij} \ldots$ Produktionskoeffizienten
- z_{ii} beschreibt den Anteil der Lieferung von A_i an sich selbst um eine Einheit zu produzieren

$\rightarrow$ nur sinnvoll, wenn $z_{ii} < 1$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Input-Output-Matrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & z_{ij} * x_j = x_{ij} \\ \Rightarrow \quad & x_1 = z_{11}x_1 + z_{12}x_2 + z_{13}x_3 \\ & x_2 = z_{21}x_1 + z_{22}x_2 + z_{23}x_3 \\ & x_3 = z_{31}x_1 + z_{32}x_2 + z_{33}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (1 - z_{11})x_1 - z_{12}x_2 - z_{13}x_3 = y_1 \\ & -z_{21}x_1 + (1 - z_{22})x_2 - z_{23}x_3 = y_2 \\ & -z_{31}x_1 - z_{32}x_2 + (1 - z_{33})x_3 = y_3 \end{aligned}$$

y_1, y_2, y_3 stellen die Nachfrage dar und ist der Zusammenhang zwischen Marktnachfrage und der Produktion x_1, x_2, x_3

Ziel

Bestimme bei gegebener Nachfrage $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ die Gesamtproduktion $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, so dass

(L) erfüllt ist. (L) ist dabei ein Lineares Gleichungssystem.

Matrixgleichung

Sei $x - 2 * x = y$ gegeben. Das ist die Motivation für das Matrixkalkül.

2 Rechnen mit Matrizen

Definition

Eine $m \times n$ Matrix A ist ein rechteckiges Schema von reellen Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder kurz:

$$A = (a_{ij})_{i=1,m \quad j-1,n}$$

$m \times n \dots$ Format der Matrix A, falls $m = n \dots A$ ist quadratisch.

Definition
Ein m-dimensionaler Vektor a ist eine m-zeilige Spalte reeller Zahlen. $m \times 1$ Matrix $\Rightarrow$ Spaltenvektor

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Definition
Eine Nullmatrix, ist eine Matrix, die 0 ist.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Definition
Eine Matrix A heißt Transponierte Matrix A^T wenn Zeilen und Spalten getauscht werden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{Format: } 2 \times 3 \qquad \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \text{Format: } 3 \times 2$$

$(A^T)^T = A$

Definition
Eine Matrix A heißt Einheitsmatrix, wenn die in der Diagonale jeweils eine 1 steht

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition
Eine Matrix A heißt symmetrisch, falls A eine $n \times m$ Matrix und $A = A^T$ ist.

2.1 Addition/Subtraktion von Matrizen

Definition
Seien $A = (a_{ij})_{i=1,m \quad j=1,n}$ und $B = (b_{ij})_{i=1,m \quad j=1,n}$ Matrizen vom selben Format. Dann ist

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A \pm B$ nur wenn A und B das selbe Format besitzen.

Beispiel

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
2. $3 * \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 24 & 6 \end{pmatrix}$

2.2 Multiplikation mit reellen Zahlen (Skalar)

Definition

Sei $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,m \quad j=1,n}$, d.h. jeder Eintrag A wird mit λ multipliziert.

Rechenregeln

$A, B, C \ldots m \times n$-Matrizen
$\lambda, \mu \dots \in \mathbb{R}$ (Skalare)

- $A + 0 = A$
- $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (Distributionsgesetz)
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Beispiel

Ein Unternehmen stellt 4 Produkte E_1, E_2, E_3, E_4 her und liefert an 3 Verkäufer V_1, V_2, V_3

A_1

1 Quartal	V_1	V_2	V_3
E_1	17	101	13
E_2	23	16	51
E_3	45	16	53
E_4	58	17	42

A_2

2 Quartal	V_1	V_2	V_3
E_1	18	120	14
E_2	29	37	53
E_3	46	18	60
E_4	59	19	450

- $A_1 + A_2 \ldots$ Lieferung im ersten Halbjahr
- $A_2 - A_1 \ldots$ Zuwachs im 2 Quartal im Vergleich zum 1 Quartal

$$A_3 - A_2 = 2(A_2 - A_1)$$

$$\Leftrightarrow A_3 = 2(A_2 - A_1) + A_2$$

Soll 3 Quartal	V_1	V_2	V_3
E_1	20	138	16
E_2	41	43	57
E_3	48	22	74
E_4	61	23	60

2.3 Multiplikation von Matrizen

Bsp.: Materialverflechtung

					E_1	E_2
				Z_1	6	3
				Z_2	0	2
				Z_3	11	7
	Z_1	Z_2	Z_3			
R_1	14	0	3		117	63
R_2	6	1	7		113	69
R_3	3	2	0		18	13
R_4	2	1	0		122	78

Also z.B.
$c_{11} = 6 * 14 + 0 * 0 + 11 * 3 = 117$
$c_{32} = 3 * 3 + 2 * 2 + 7 * 0 = 13$
$c_{22} = 2 * 6 + 2 * 1 + 7 * 7 = 69$

Definition

1. Seien $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ ein Zeilenvektor und $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ein Spaltenvektor, dann heißt

$$\overline{a} * \overline{b} = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p$$

das (Skalar-) Produkt von $\overline{a}$ und $\overline{b}$

2. Seien $A = (a_{ik})$ eine $m \times p$- Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \overline{a}_{1\bullet} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{a}_{m\bullet} & - \end{pmatrix}$$

und $B = (b_{ij})$ eine $p \times n$ Matrix,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_{\bullet 1} & \dots & b_{\bullet n} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

dann heißt $C = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = \overline{a}_{i\bullet} * \overline{b}_{\bullet k}, \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ das Produkt der Matrix A und B.
Bezeichnung: $C = A * B$

Bemerkung

a) Die Berechnung von $C = A * B$ ist einfach über das sogenannte Falk-Schema.

b) Das Produkt von zwei Matrizen A und B ist nur erklärt, falls die Anzahl der Spalten von A und die Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt. Die Produktmatrix $A * B$ hat so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B.

Kurz: $A \dots m \times p$ Matrix, $B \dots p \times n$ Matrix. $A * B$ ist erklärt, falls $A * B$ ist eine $m \times n$ Matrix

$$\underbrace{m \times \underbrace{p \qquad p}_{=} \times n}_{\text{Format } A * B}$$

3. In der Regel ist $B * A$ nicht erklärt, obwohl $A * B$ definiert ist. Selbst wenn $B * A$ und $A * B$ existieren, gilt zumeist $B * A \neq A * B$!

Beispiel

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad AB : 2 \times 2 \quad 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 3$ Matrix für AB

		4	7	6
		−2	3	1
0	3	−6	9	3
4	2	12	34	26

$BA : 2 \times 3 \neq 2 \times 2 \longrightarrow BA$ ist nicht erklärt!

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB : 2 \times 2 \quad 2 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$ Matrix

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$BA : 2 \times 2 \quad 2 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$ Matrix

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Es gilt hier: $AB \neq BA$!

3. LEONTIEF-Modell

x_i Gesamtproduktmenge von A_i
$\overline{y_i}$ Menge die A_i an E_i liefert
$\overline{x_{ij}}$ Menge, die A_i an A_j liefert
$\overline{z_{ij}}$ $= \frac{x_{ij}}{x_i}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} (1-z_{11}) & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & (1-z_{22}) & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & (1-z_{33}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (1-z_{11})x_1 - z_{12}x_2 - z_{13}x_3 \\ -z_{21}x_1 + (1-z_{22})x_2 - z_{23}x_3 \\ -z_{31}x_1 - z_{32}x_2 + (1-z_{33})x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Also:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-z_{11} & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & 1-z_{22} & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & 1-z_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizienten Matrix}} * \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{32} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-z_{11} & -z_{12} & -z_{13} \\ -z_{21} & 1-z_{22} & -z_{23} \\ -z_{31} & -z_{32} & 1-z_{33} \end{pmatrix}$$

Damit wurde gezeigt, dass $(L) \Leftrightarrow (I - Z)\overline{x} = \overline{y}$

Satz (Rechenregeln für die Matrixmultiplikation)

A	$m \times p$ Matrix
B, D	$p \times q$ Matrix
C	$q \times n$ Matrix

Dann gilt

1. $(A * B) * C = A * (B * C)$
2. $A(B + D) = A * B + A * D$
   $(B + D)C = B * C + D * C$

   Aber: $B * C + A * B$ kann nicht zu $B * (A + C)$ oder $(C + A) * B$ vereinfacht werden! (Reihenfolge der Faktoren passt nicht!)
3. $I_m * A = A, A * I_p = A$
4. $(A * B)^T = B^T * A^T$ (Reihenfolge der Faktoren ändert sich!)

Beispiel LEONTIEF-Modell

$(I - Z)\overline{x} = \overline{y}$

$I_{\overline{x}} - Z_{\overline{x}} = \overline{y}$

$\underline{\underline{\overline{x} - Z\underline{y} + I\underline{y}}}$

3 Vektoren

Definition

Eine $n \times 1$ Matrix heißt Vektor (Spaltenvektor), eine $1 \times n$ Matrix heißt Zeilenvektor.

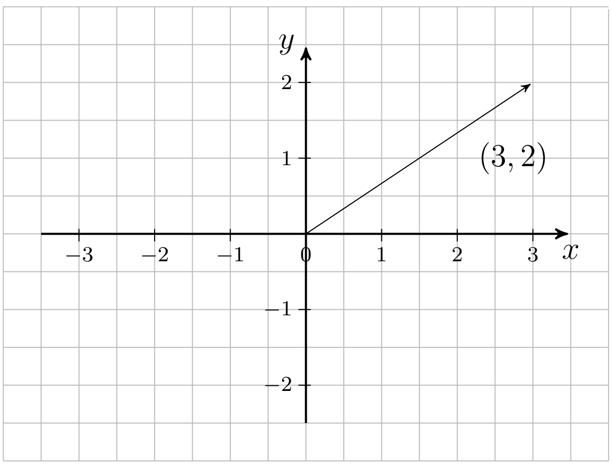
Bemerkung

1. Falls $n = 1, 2, 3$ können wir uns Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ als gerichtete Strecke im $\mathbb{R}^n$

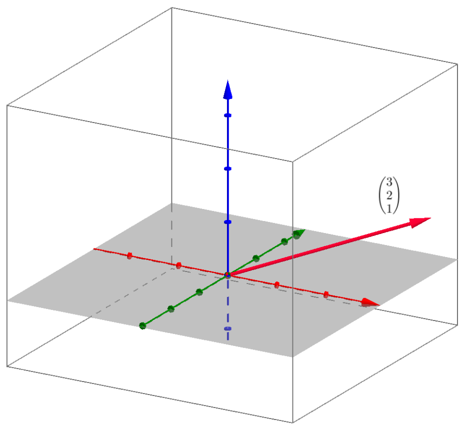
   vom Nullpunkt $(0, \ldots, 0)$ zum Punkt $(a_n, \ldots, a_n)$ vorstellen.

   Beispiel

   $n = 2, \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $n = 3, \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Falls $n > 3$ ist eine geometrische Vorstellung nicht mehr möglich, viele Begriffe werden jedoch aus dem $\mathbb{R}^2 \mid \mathbb{R}^3$ übertragen.
3. Viele Vektoren haben keine geometrische Bedeutung (z.B. $n = 1$), jedoch ist die geometrische Begrifflichkeit (Länge, Richtung usw.) trotzdem sinnvoll.

Beispiel

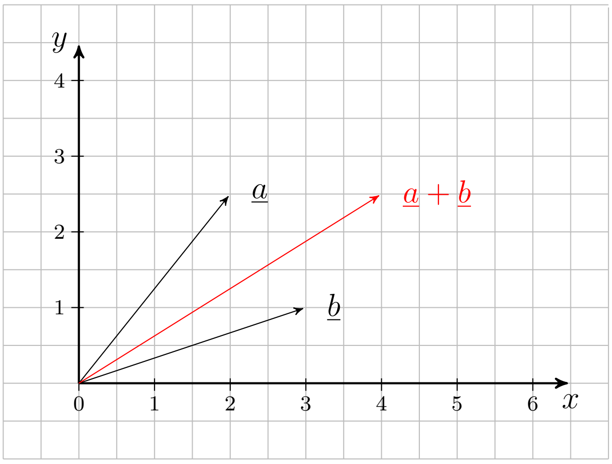
Produktionsvektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eines Unternehmens mit n produzierenden Sektoren,

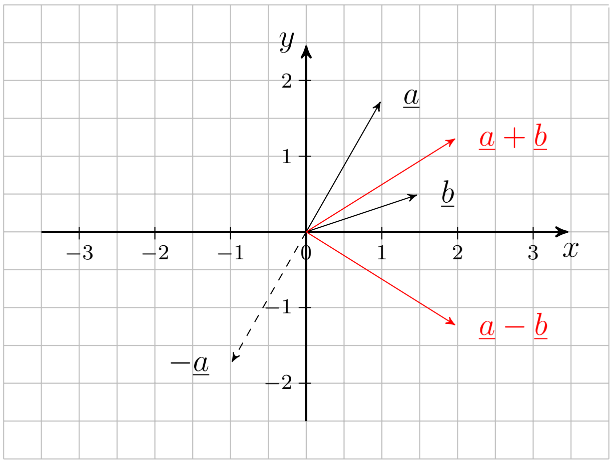
$x_i \ldots$ Produktmenge pro Monat im Sektor i.

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind definiert durch den Matrizenkalkül

$$\underline{a} \pm \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Dies ist geometrisch interpretierbar im sogenannten Kräfteparallelogramm.



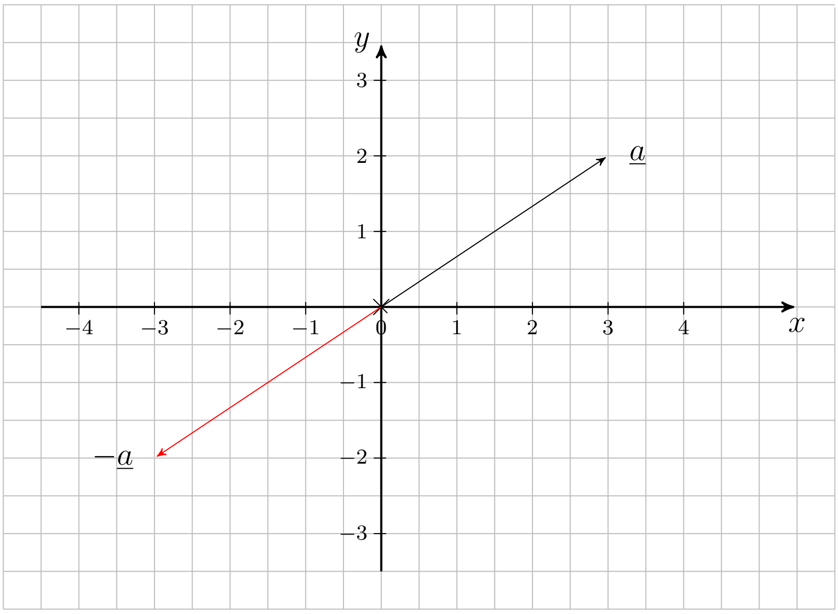


Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalar) ist ebenfalls durch das Matrizenkalkül definiert.

$$\lambda * \underline{a} = \lambda * \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

- $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = -1 \qquad \lambda\underline{a} = (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$



- $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 1.5$

  $\lambda\underline{a} = 1.5 * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}$

  Also geometrische Interpretation einer Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

  - $\lambda > 0$: Streckung/Stauchung von $\underline{a}$ um den Faktor λ
  - $\lambda < 0$: Streckung/Stauchung von $\underline{a}$ um den Faktor $|x|$ und zusätzliche Spiegelung um Koordinatenursprung.

Definition

Als Betrag (oder Länge) eines Vektors $\underline{a}$ bezeichnet man

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

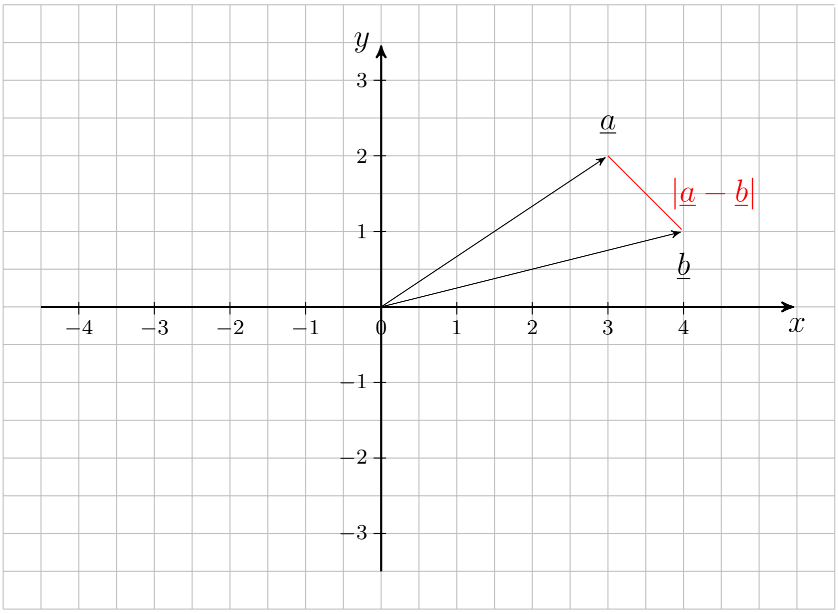
Bemerkung

1. In der geometrischen Interpretation gibt der Betrag von $\underline{a}$ den Abstand der Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vom Nullpunkt an (Satz des Pythagoras)

2. $|\underline{a} - \underline{b}|$ bezeichnet den Abstand zwischen den Punkten $\underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{\underline{a}}$ und $\underbrace{(b_1, \ldots, b_n)}_{\underline{b}}$.

Beispiel

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Satz

Für den Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ gilt

- $|\underline{a}| = |-\underline{a}|$
- $|\lambda\underline{a}| = |\lambda||\underline{a}|$
- $|\underline{a}| = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$
- $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$ (Dreiecksgleichung)

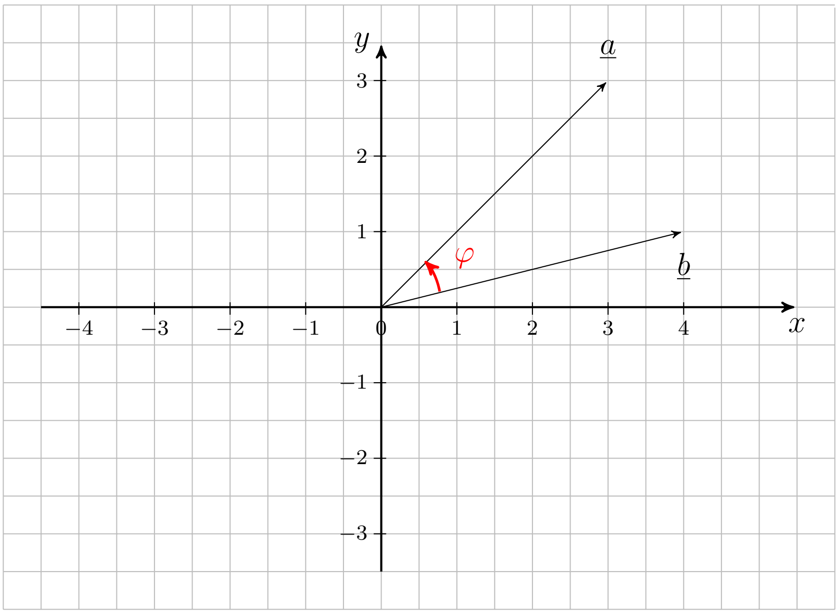
Definition
Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bezeichnet man

$$\underline{a}^T\underline{b} = (a_1, \dots, a_n) * \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad \in \mathbb{R}$$

Satz
Seien $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

dann gilt für das Skalarprodukt

1. $a^T b = b^T a$
2. $a^T a = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = |a|^2$
3. $a^T b = |a||b| \cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist



Bemerkung

1. Mithilfe von (3) lässt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ berechnen.

$$\cos\varphi = \frac{a^T b}{|a||b|} = \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{a^T b}{|a||b|}\right)$$

2. Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ stehen senkrecht aufeinander (sind zueinander orthogonal) falls $a^T b = 0$ (Denn $\cos\varphi = \cos 90° = 0$ in diesem Fall).

Definition

1. Der Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ wird als Nullvektor bezeichnet.

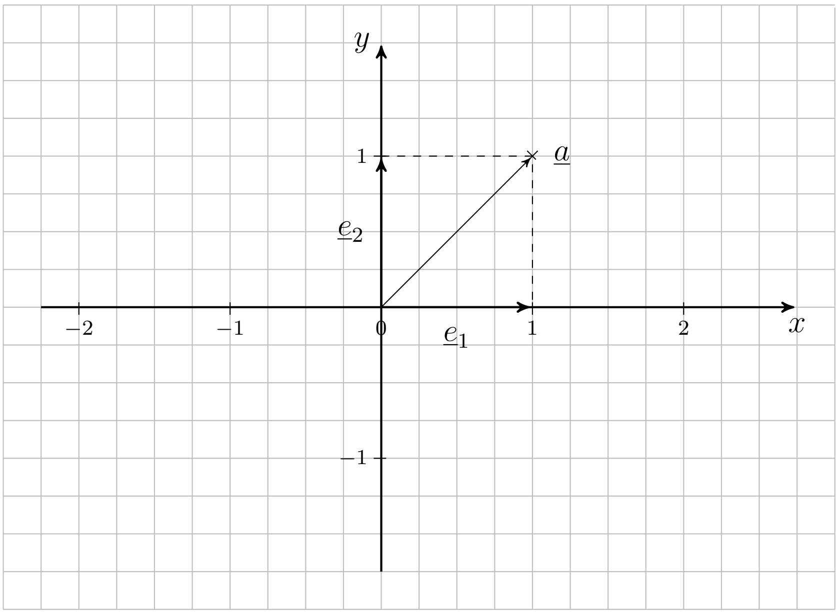
2. Ein Vektor der Länge Eins wird Einheitsvektor genannt. Insbesondere sind das Vektoren $e_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)^T$ Einheitsvektoren.
   Bezeichnung: $e_i := (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{i-te Position}}, 0, \ldots, 0)^T$ heißt i-ter Einheitsvektor an i-ter Position.

Beispiel

1. $n = 2, \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, gesucht. Einheitsvektor, der dieselbe Richtung hat wie $\underline{a}$

$$\Rightarrow \underline{a}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}}}$$



3.1 Linearkombination von Vektoren und lineare Unabhängigkeit

Definition

Ein Ausdruck der Form

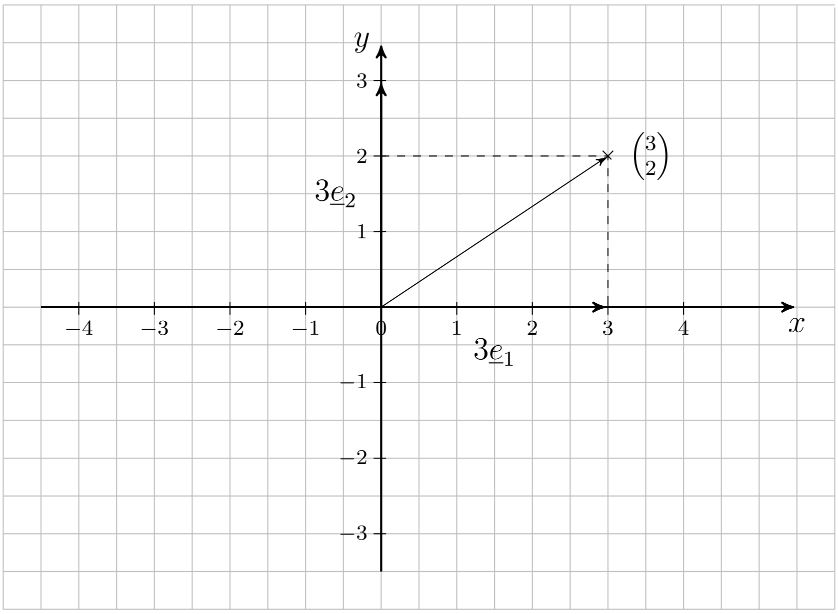
$$\sum_{j=1}^{m} k_j \underline{a}_j = k_1 \underline{a}_1 + k_2 \underline{a}_2 + \cdots + k_m \underline{a}_m$$

mit beliebigen Skalaren $k_1, \ldots, k_m$ und Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^m$ nennt man eine Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$.

Beispiel

1. Gegeben sind $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen $3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



2. Gegeben sind $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. Lässt sich $\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ schreiben?

   Ansatz: $x\underline{a}_1 + y\underline{a}_2 = \underline{b}$

   gesucht: c_1, c_2, so dass $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 = \underline{b}$, also $c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}2c_1 - 2c_2\\c_1 + 2c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

   Also:
   $2c_1 - 2c_2 = 1$
   $c_1 + 2c_2 = 5$

$$3c_1 = 6 \Rightarrow c_1 = 2, \Rightarrow 2 + 2c_3 = 5 \Rightarrow 2c_2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = \frac{3}{2}}}$$

   $\Rightarrow$ Ja, $\underline{b} = 2\underline{a}_1 + \frac{3}{2}\underline{a}_2$

Gegeben: Seien m beliebige Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Lässt sich der Nullvektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination (LK) von $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ ausdrücken?
$\rightarrow$ Gibt es $c_1, \ldots, c_m$, so dass

$$c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \cdots + c_m\underline{a}_m = \underline{a} \qquad (*)$$

Natürlich ist (*) immer erfüllt, wenn $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Diese Lösung heißt trivale Lösung und ist in der Regel nicht von Interesse. Gibt es nicht trivale Lösungen von (*), d.h. $c_1, c_2, \ldots, c_m$ so dass wenigstens ein $c_i \neq 0$?

Beispiel

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
Gesucht ist c_1, c_2, so dass $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 = \underline{0}$

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also:
$2c_1 - 2c_2 = 0 \quad (+)$
$\underline{c_1 + 2c_2 = 0}$
$3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$ Einsetzen

$$0 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, die trivale Lösung $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ Es gibt keine nicht trivale Lösung.

Beispiel

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht ist c_1, c_2, so dass $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 = \underline{0}$

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2c_1 + 4c_2 = 0 \quad (+)$
$\underline{c_1 + 2c_2 = 0}$
$3c_1 + 6c_2 = 0$

Nur eine Gleichung „zählt“, z.B. $c_1 + 2c_2 = 0; c_1 = -2c_2$

Also: $c_2 = t, t \in \mathbb{R} \qquad c_1 = -2t$

$$-2t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist für $t \neq 0$ eine nicht trivale LK die den Nullvektor ausgibt.

Definition
Wenn $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ die einzige Möglichkeit ist, um die Vektorgleichung

$$c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \cdots + c_m\underline{a}_m = \underline{0}$$

zu erfüllen, dann heißen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ linear unabhängig (l.u.), andernfalls heißen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ linear abhängig (l.a.).

Beispiel
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig

Satz
Die Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^m$ sind linear abhängig genau dann, wenn sich (irgend)einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

Beispiel

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\underline{a}_1$$

also $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ sind linear abhängig.

Beispiel

1. Sind $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ lineare unabhängig oder linear abhängig?

   Ansatz:
   $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + c_3\underline{a}_3 = \underline{0}$

   Gesucht:
   Alle c_1, c_2, c_3

   $$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Gleichungssystem

   $$\begin{array}{llll} 2c_1+ & c_2 & & = 0 \\ & 2c_2 & & = 0 \\ c_1 & & +2c_3 & = 0 \end{array}$$

   $c_1 = c_2 = c_3 = 0$
   $\Rightarrow$ nicht trivale Lösungen $\Rightarrow$ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ sind l.u.

2. $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}$

Ansatz:

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem lösen

$$\begin{array}{llll l} & -c_2 & -3c_3 & = 0 & \Rightarrow c_2 = -3c_3 \\ c_1 & +4c_2 & +14c_3 & = 0 & \\ -3c_1 & & -6c_3 & = 0 & \Rightarrow c_1 = -2c_3 \end{array}$$

Einsetzen in zweite Gleichung liefert:

$$-2c_3 + 4(-3c_3) + 14c_3 = 0 \Rightarrow 0 * c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & c_2 = -3c_3 = -3t \\ & c_1 = -2c_3 = -2t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 3t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $t = 1$

$$-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\Rightarrow \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ sind linear abhängig.

Umstellen nach $\underline{a}_3$: $\underline{a}_3 = 2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_3} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2}$$

Satz

Seien $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ n linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann lässt sich jeder Vektor $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ auf eindeutige Weise als LK schreiben

$$\underline{a} = \sum_{j=1}^{n} c_1 \underline{a}_j = c_1 \underline{a}_1 + \cdots + c_n \underline{a}_n$$

Beispiel

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Also lässt sich $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

auf eindeutige Weise als LK von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ schreiben.

Bemerkung

1. Die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ werden in diesem Zusammenhang als Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
   Beachte: Anzahl der l.u. Vektoren muss mit den Dimensionen n des Raumes $\mathbb{R}^n$/Anzahl der Einträge (Koeffizienten) der Vektoren übereinstimmen.

2. Die Koeffizienten $c_j \in \mathbb{R}$ in der Darstellung

   $$\underline{a} = c_1 \underline{a}_1 + \cdots + c_n \underline{a}_n$$

   heißen Koordinaten von $\underline{a}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$. Sie sind eindeutig bestimmt (siehe Satz)

3. Die Vektoren $\underline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, \underline{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
   Bezeichnung: Standardbasis oder Kanonische Basis.

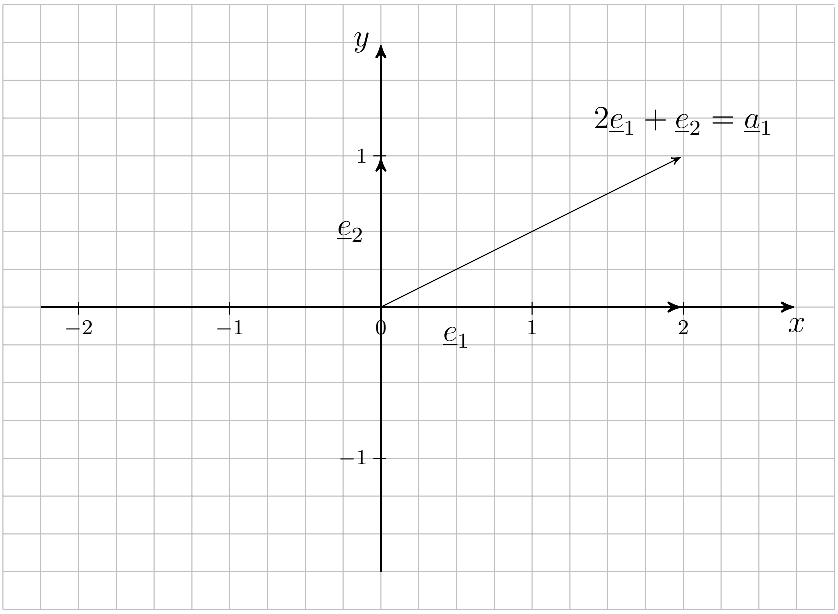
Die Darstellung eines Vektors $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ bezüglich der Standardbasis ist besonders einfach:

$$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + \cdots + a_n\underline{e}_n$$

D.h. die Koeffizienten von $\underline{a}$ sind die Koordinaten bezüglich der Standardbasis.

Beispiel

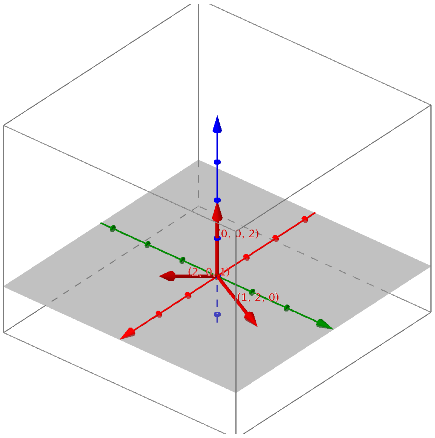
$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2$$



Beispiel

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ sind l.u.

Beliebiger Vektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ kann auf eindeutige Weise als LK von $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ ausgedrückt werden



z.B. $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ lässt sich darstellen als $\underline{b} = 2\underline{a}_1 - 5\underline{a}_2 + \frac{1}{2}\underline{a}_3$

Was passiert, wenn wir auf die Bedingung der linearen Unabhängigkeit verzichten?

Beispiel

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Klar: $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \Rightarrow \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ sind l.a. Lassen sich $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (eindeutig) als LK von $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ darstellen?

Lösung:

$$\underline{b} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} c_1+ & & +c_3 & = 2 \\ 2c_1+ & & 2c_3 & = 4 \\ & 2c_2+ & 2c_3 & = 2 \\ \hline 0+ & & 0 & = 0 \end{array}$$

1. und 2. Gleichung enthalten gleiche Informationen.
$c_3 = t; c_2 = 1 - t; c_1 = 2 - t, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{b} = (2-t)\underline{a}_1 + (1-t)\underline{a}_2 + t\underline{a}_3 \qquad t \in \mathbb{R}$
Darstellung existiert, ist aber nicht eindeutig.

Nun Darstellung von $\underline{c}$:

Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem dazu:

$$\begin{array}{llll@{\quad}l} c_1 + & & c_3 & = 1 & \Leftrightarrow \quad 2c_1 + 2c_3 = 2 \quad (-) \\ 2c_1 + & & 2c_3 & = 0 & \quad 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ & 2c_2 & 2c_3 & = 0 & \quad 0 = -2 \text{ Widerspruch!} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Keine Lösung, $\underline{c}$ ist als LK von $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ darstellbar.

Definition
Gegeben seien beliebige Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^n$ (gleichgültig ob l.u. oder nicht). Die Menge aller Linearkombinationen von $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ heißt lineare Hülle dieser Vektoren.
Schreibweise:

$$LH\{\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{a}_j : c_j \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Beispiel

$$LH \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(Ebene, die von $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ aufgespannt wird)

4 Lineare Gleichungssysteme

4.1 Der Gauß-Algorithmus

Definition

Ein System aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_2$ heißt lineares Gleichungssystem ($m \times n-$LGS).

Beispiel

1. GLS

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{3}x + z & = & 0 \\ 2x + 3y - 5z & = & 0 \\ 4x - 9y & = & 0 \end{array}$$

- $x, y, z \ldots$ Unbekannte
- Alle Gleichungen linear
- $\rightarrow (3,3) - LGS, 3 \times 3 - LGS$ homogen

In Matrix-Schreibweise:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ldots \text{ Vektor der Unbekannten}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & -9 & 0 \end{pmatrix}}_{A\text{...Koeffizientenmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{homogener Vektor } \underline{b}}$$

Verkürzte Form

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 3 & -5 & | & 0 \\ 4 & -9 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{erweiterte Koeffizientenmatrix}$$

2. GLS

$$\begin{array}{lcl} xy + 2y & = & 3 \\ 3x - 9y & = & 1 \end{array}$$

Erste Gleichung ist nicht linear, da Produkt aus zwei Unbekannten enthalten $\rightarrow$ kein GLS!

3. GLS

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4 &= -4 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$(2,3)-$GLS, inhomogen

Als Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & -4 \\ 3 & -9 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

Satz

Ein GLS hat immer entweder Keine Lösungen oder genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Ein homogenes Gleichungssystem hat stets die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, die trivale Lösung. Ein homogenes LGS ist also immer lösbar und hat entweder nur die trivale Lösung oder unendliche viele Lösungen.

Bemerkung

Die unendlich vielen Lösungen kommen zustande, wenn man eine oder mehrere Variable frei wählen kann. Diese frei wählbaren Unbekannten heißen Parameter der Lösung.

Ziel

Über systematisch, äquivalente Umformungen des LGS zur sogenannten $\triangle$-Gestalt des LGS kommen.

Beispiel

- $\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & | & -4 \\ -9 & 10 & 0 & -4 & | & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 12 & | & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & | & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} | \cdot 9 \quad -4 \quad -3 \\ + \\ + \\ + \end{array} \end{array}$

- $\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & | & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & | & -36 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & | & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & | & 14 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ | * (-\frac{1}{2}) \\ + \end{array} \end{array}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & | & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & | & -36 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & | & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$

  - $\underline{\underline{x_4 = 5}}$

- $16x_3 + 20x_4 = 18$
  $16x_3 + 20 * 5 = 18$
  $\underline{\underline{x_3 = -5.125}}$

- $28x_2 - 27x_3 - 22x_4 = -36$
  $28x_2 - 27(-5.125) - 22 * 5 = -36$
  $\underline{\underline{x_2 = 2.23}}$

- $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4$
  $x_1 + 2 * 2.23 - 3 * (-5.125) - 2 * 5 = -4$
  $\underline{\underline{x_1 = 4.77}}$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & | & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & | & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \qquad 0 * x_4 = 5 \Rightarrow \text{Keine Lösung!}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & | & -4 \\ 0 & 28 & -27 & -22 & | & -36 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- $0 * x_4, x_4 = t \in \mathbb{R}$

- $8x_3 + 11x_4 = 14$
  $8x_3 + 11t = 14$
  $\underline{\underline{x_3 = \frac{14}{8} - \frac{11}{8}t}}$

- $28x_2 = 27x_3 - 22x_4 = -36$
  $28x_2 - 27(\frac{14}{8} - \frac{11}{8}t) - 22 * t = -36$
  $\underline{\underline{x_2 = \frac{45}{4} - \frac{121}{8}t}}$

- $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4$
  $x_1 + 2(\frac{45}{8} - \frac{121}{8}t) - 3(\frac{14}{8} - \frac{11}{8}t) - 2 * t = -4$
  $\underline{\underline{x_1 = -\frac{85}{4} + \frac{225}{8}t}}$

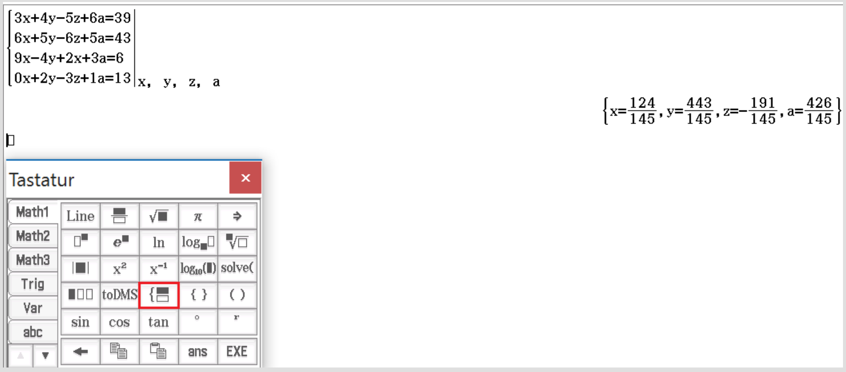
→ unendlich viele Lösungen

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{85}{4} \\ \frac{45}{4} \\ \frac{14}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{225}{8} \\ -\frac{121}{8} \\ -\frac{111}{8} \\ 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit dem Classpad lösen

Main Menü → Math1 → 3 Spalte, 4 Zeile

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 6 & | & 39 \\ 6 & 5 & -6 & 5 & | & 43 \\ 9 & -4 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & | & 13 \end{pmatrix}$



4.1.1 Zeilenstufenform einer Matrix

Definition

Eine Matrix A ist in Zeilenstufenform, falls sie die folgende Form hat

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & | & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & | & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & | & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & | & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $\alpha_{11} \dots \alpha rr \neq 0$

Bemerkung

1. Schematische Darstellung einer Matrix in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} * & \circ & \dots & \circ & | & \circ & \dots & \circ \\ 0 & * & \dots & \circ & | & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & | & \circ & \dots & \circ \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & | & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei * eine Zahl $\neq 0$ ist und $\circ$ eine beliebige Zahl bezeichnet. Es gilt

- Das *-Element steht in der Diagonale oder rechts davon
- In jeder Zeile sind alle Elemente links von * 0
- In jeder Spalte sind alle Elemente unterhalb von * 0

Zeilenstufenform mit dem Classpad lösen
Aktion $\rightarrow$ Matrix $\rightarrow$ Berechnung $\rightarrow$ ref(A)

4.1.2 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei ein lineares (m, n)-Gleichungssystem, welches sich in folgende Zeilenstufenform bringen lässt.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & | & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & | & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & | & \beta_r \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

1. Das Gleichungssystem ist unlösbar, falls eine der Zahlen $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$ ungleich 0 ist, denn dann enthält diese Gleichung einen Widerspruch.

2. Das Gleichungssystem ist lösbar, falls $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$ oder wenn diese letzte $m - r$ Zeilen gar nicht auftreten, weil $r = m$ ist. Es gilt:

   - Falls $r = n$, dann gibt es eine eindeutige Lösung, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt.

   - Falls $r < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Falls gibt es also unendlich viele Lösungen

4.2 Der Rang einer Matrix

Definition
Die Maximalzahl r der linear unabhängigen Zeilenvektoren einer Matrix A heißt Rang der Matrix A.
Bezeichnung: $rang(A) = r$

Satz

1. Der Rang einer Matrix A ist gleich dem Rang der transponierten Matrix A^T. Das bedeutet: Die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen(Vektoren) einer Matrix ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten(Vektoren) von A.

2. Elementare Zeilenumformung (und analog elementare Spaltenumformung) lassen den Rang einer Matrix unverändert.

Der Rang r einer Matrix ändert sich nicht bei Anwendung der folgenden elementaren Umformungen

1. Zwei Zeilen oder Spalten werden miteinander vertauscht

2. Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen, von Null verschiedenen Zahlen multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert.

3. Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert.

4.2.1 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystem unter Beachtung des Rangs

Gegeben sei ein lineares (m, n)-Gleichungssystem, welches sich in folgende Zeilenstufenform bringen lässt.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} & | & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} & | & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} & | & \beta_r \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & | & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt

1. Das Gleichungssystem ist unlösbar, falls der Rang der Koeffizientenmatrix echt kleiner ist als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, denn dann enthält es einen Widerspruch

   Kurz: LGS $(A|b)$ unlösbar, falls $rang(A) < rang(A|b)$

2. Das Gleichungssystem ist lösbar, falls der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

   Kurz: LGS $(A|b)$ lösbar, falls $rang(A) = rand(A|b)$.
   Es gilt

   - Falls $rang(A) = n$, dann gibt es eine eindeutige Lösung, weil es genauso viele Bedingungen wie Unbekannte gibt
   - Falls $rang(A) < n$, dann kann man $n - r$ Unbekannte frei wählen (Parameter), denn es sind weniger Bedingungen als Unbekannte. In diesem Falls gibt es also unendlich viele Lösungen.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_j(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_g(B) = 2$$

- $A \ldots$ Koeffizientenmatrix $\longrightarrow R_g(A) = r$
- $(A|B) \ldots$ erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\longrightarrow R_g(A|B) = \begin{cases} r & \text{falls } \beta_{r+1} \ldots \beta_n = 0 \\ r+1 & \text{falls } \beta_{r+1} \ldots \beta_n \neq 0 \end{cases}$$

Bsp: (Fortführung des LEONTIEF-Models S. 51 und S. 59)

$$I - Z = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{21} & -\frac{5}{20} & -\frac{4}{23} \\ -\frac{4}{21} & 1 - \frac{3}{20} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{4}{21} & -\frac{1}{20} & 1 - \frac{3}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{21} & -\frac{5}{20} & -\frac{4}{23} \\ -\frac{4}{21} & \frac{17}{20} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{4}{21} & -\frac{1}{20} & \frac{20}{23} \end{pmatrix}$$

Somit hat das Leontief-Models $(I - Z)x = y$ für gegebenes $y = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ die Form

$$(I - Z|y) = \begin{pmatrix} 1\frac{19}{21} & -\frac{5}{20} & -\frac{4}{23} & | & 10 \\ -\frac{4}{21} & \frac{17}{20} & -\frac{1}{23} & | & 10 \\ -\frac{4}{21} & -\frac{1}{20} & \frac{20}{23} & | & 10 \end{pmatrix}$$

Die dazugehörige Zeilenstufenform (siehe Taschenrechner)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{21}{76} & -\frac{84}{437} & | & \frac{210}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{700}{6969} & | & \frac{4600}{303} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{10580}{637} \end{pmatrix}$$

führt zu einer eindeutigen und positiven Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1720}{91} \\ \frac{4600}{273} \\ \frac{10580}{637} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.90 \\ 16.84 \\ 16.61 \end{pmatrix}$$

reduzierte Zeilenstufenform mit dem Classpad lösen
Aktion $\rightarrow$ Matrix $\rightarrow$ Berechnung $\rightarrow$ rref(I-Z|y)

Satz
Das Leontief-Models $(I - Z)x = y$ hat genau dann eine eindeutige positive Lösung, wenn in der Matrix Z alle Spaltensummen kleiner als Eins sind, d.h. wenn

$$\sum_{j=1}^{3} z_{ij} < 1$$

5 Quadratische Matrizen und quadratische lineare Gleichungssysteme

5.1 Grundbegriffe

Definition

1. Eine $n \times n$ Matrix heißt quadratisch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente $a_{11}, \dots, a_{nn}$ heißen Hauptdiagonalargumente, die Elemente $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ heißen Nebendiagonalargumente.

2. Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, falls alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen verschwinden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{d.h. } a_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k$$

3. Eine n-reihige quadratische Matrix heißt

- obere Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- untere Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen verschwinden

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, falls

$$A^T = A$$

Beispiel

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 5 & & 0 \\ & 0 & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

   Diagonalmatrix ist symmetrisch und hat eine obere und untere Dreiecksmatrix

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ untere Dreiecksmatrix

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonale $\Rightarrow$ symmetrisch

5. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$

5.2 Determinanten

Definition

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} = 1, \dots, n$ eine quadratische Matrix.

1. Falls $n = 1$, also $A(a_{11})$, dann ist die Determinante von A gegeben durch den Wert a_{11}.

   Kurz: $det(A) = a_{11}$

2. Falls $n > 1$ dann ist die Determinante von A geben durch die Formel

$$det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}det(A^{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A^{i2}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}det(A^{in})$$

   wobei A^{ij} jene $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist, die aus A durch streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. (Entwicklungssatz von Laplace)

Beispiel

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1 * 4 - 2 * 3 = -2$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21} \Longrightarrow$

   Hauptdiagonalprodukt - Nebendiagonalprodukt

Satz

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so gilt

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beispiel

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 * 2 - 0 * 3 = 2$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) * 0 - 2 * 0 = 0$
3. $det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 * \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{1*1-2*3} -0 * \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{2*1-0*3} +0 * \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{2*2-1*0}$

   $= -5 - 0 * 2 + 0 * 3 = \underline{\underline{-5}}$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left(1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) * 12$$

$$+ \left(2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 12 \left(\underbrace{-5 - (-13) + (-1) * (-1)}_{9} \right) + ((-2) * 1 - 2 * 2)$$

$$= 108 - 6 = \underline{\underline{102}}$$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 1^+ & 2 & 3 \\ 0^- & 1 & 3 \\ 0^+ & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * 1 = 1$

Allgemein:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^+ & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11}a_{22} * \dots * a_{nn}$$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-3}}$

Satz (Regel von Sarruss)

Sei $A = (a_{ik})_{i,k=1,2,3}$ dann lässt sich die Determinante $det(A)$ berechnen über

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= ((a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{31}a_{32})) - ((a_{13}a_{22}a_{31}) + (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21} + a_{33}))$$

„Summer der Hauptdiagonalprodukte - Summe der Nebendiagonalprodukte“

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1*(-1)*1+2*0*0+3*2*1)-(3(-1)*0+1*0*1+2*2*1) = -1+6-4 = \underline{\underline{1}}$$

Satz

1. Die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig (bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$), wenn
$$det\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Ein $(n \times n)$ Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $det(A) \neq 0$. Insbesondere hat das homogene Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{0}$ genau dann nur die trivale Lösung, falls $det(A) \neq 0$

Beispiel
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die trivale Lösung?

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 4 \neq 0$$

1. Fall: $\lambda = 1$
2. Fall: $\lambda = -3$

$\Rightarrow$ Für $\lambda \neq -1$ und $\lambda \neq 3$ hat das Gleichungssystem nur die trivale Lösung. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda = 3$ nennt man die Eigenwerte der Matrix $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Beispiel

$$\begin{array}{llll} & 2x_2 & 3x_3 & = 1 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & 1 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - (0 + 0 + 4) = -1 + 0$$

$\Rightarrow$ genau eine Lösung

- $x_1 : \begin{vmatrix} 1^+ & 2 & 3 \\ 0^- & 0^+ & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(1-2) = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{-1} = \underline{\underline{1}}$

- $x_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2-3) = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{(-1)} = \underline{\underline{-1}}$

- $x_3 : \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$

5.3 Die Inverse Matrix

Gegeben

Ein quadratisches Gleichungssystem $\underline{Ax} = \underline{b}$. Dieses LGS ist eindeutig lösbar, genau dann wenn

$$det(A) \neq 0$$

Wir wollen für eine beliebige rechte Seite $\underline{b}$ die zugehörige Lösung $\underline{x}$ finden, also die Matrixgleichung $\underline{Ax} = \underline{b}$ nach $\underline{x}$ auflösen.

Zwischenüberlegung

$a, x, b \in \mathbb{R}$, Auflösen von $ax = b$ nach x durch Division mit $a \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

Definition
Wenn es zu einer quadratischen Matrix A eine Matrix A^{-1} gibt mit $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$, dann heißt die Matrix A inventierbar oder regulär und die Matrix A^{-1} wird „inverse Matrix" oder kurz „Inverse von A" genannt.

Satz
Wenn es eine Inverse gibt, dann ist sie eindeutig.

Bemerkung

1. Falls A eine Inverse A^{-1} besitzt (also regulär ist) dann lässt sich das LGS $A\underline{x} = \underline{b}$ auflösen durch Multiplikation von links mit A^{-1}:

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\,\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{\underline{x} = A^{-1}\underline{b}}}$$

   Multiplikation von rechts mit A^{-1} liefert kein Ergebnis:

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underbrace{A\underline{x}A}_{\text{Keine Vereinfachung}} = \underbrace{\underline{b} * A^{-1}}_{\text{nicht erklärt}}$$

2. Falls B eine Matrix ist, von der vermutet wird, dass sie die Inverse A sein könnte, dann kann dies durch einsetzen überprüft werden. Falls $AB = I$, dann $A^{-1} = B$ und $B * A = I$.

Beispiel

Ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ inventierbar und wenn ja, wie lautet die Inverse?

Lösung:
Wir suchen $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, so dass

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} + 4b_{21} & 2b_{12} + 4b_{22} \\ -b_{11} + 3b_{21} & -b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf vier Gleichungen für vier Unbekannte

$$\begin{array}{lll} 2b_{11} & +4B_{21} & =1 \\ -b_{11} & +3b_{21} & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 2b_{12} & +4b_{22} & =0 \\ -b_{12} & +3b_{22} & =1 \end{array}$$

bzw. in verkürzter Form

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 \\ -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 0 \\ -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ gleiche Koeffizientenmatrix A, unterschiedliche rechte Site e_1, e_2. Auflösen des LGS mittels Gauß

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad * (2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 10 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Auflösen bezüglich erster rechten Seite $\longrightarrow$ erste Spalte von A^{-1}

- $10 * x_2 = 1 \longrightarrow x_2 = \frac{1}{10}$
- $2x_1 + 4x_2 = 1 \longrightarrow 2x_1 + 4 * \frac{1}{10} = 1 \longrightarrow 2x_1 = \frac{6}{10} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{10}$
- $\longrightarrow b_{11} = \frac{3}{10}, b_{21} = \frac{1}{10}$

Auflösen bezüglich zweiter rechter Seite $\longrightarrow$ zweite Spalte von A^{-1}

- $10x_2 = 2 \longrightarrow x_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $2x_1 + 4x_2 = 0 \longrightarrow 2x_1 + 4 * \frac{1}{5} = 0 \longrightarrow 2x_1 = -\frac{4}{5} \longrightarrow x_1 = -\frac{2}{5}$
- $\longrightarrow b_{12} = -\frac{2}{5}, b_{22} = \frac{1}{5}$

Also: Lösung existiert, ist eindeutig und

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 10 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A^{-1}A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = I$$

Satz

1. Eine quadratische Matrix A ist genau dann inventierbar, wenn $det(A) \neq 0$
2. Um die Inverse einer $n \times n$ Matrix A zu berechnen, müssen n Gleichungssysteme mit jeweils n Unbekannten gelöst werden. Die j-te Spalte von A ist die Lösung des Gleichungssystems

$$A : \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-te Stelle}$$

Diese n Gleichungssysteme können simultan gelöst werden über die verkürzte For

$$\left(A| \underbrace{I}_{\text{n rechte Seiten}} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und Transformation in die Zeilenstufenform mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Satz (Regel zur Matrixinversion)

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(KA)^{-1} = \frac{1}{K}A^{-1} \qquad k \in \mathbb{R}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^-)^T$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$

5.4 Ergänzung: Produkte von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ auf Basis von Determinanten

Definition

Seien $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} \perp \underline{a}, \underline{c} \perp \underline{b}$$

das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Beispiel

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} e_1^+ & e_2^- & e_3^+ \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{e}_1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \underline{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \underline{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \underline{e}_1 * 4 - \underline{e}_2 * 2 + \underline{e}_3 * 0 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung

1. $\underline{a} \times \underline{b}$ ist ein Vektor
2. Für $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$ gilt
   a) $\underline{c} \perp \underline{a}, \underline{c} \perp \underline{b}$
   d.h. $\underline{c}$ steht senkrecht auf der von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Ebene
   b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem
   c) $|\underline{c}| = |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist.

$h = |\underline{a}| * \sin\varphi$

$\underline{b}h = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi = F = |\underline{a} \times \underline{b}|$

d) Falls $\underline{a} = \lambda\underline{b}$, dann ist $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

Bei drei Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ wird ein Spat oder Parallelepiped aufgespannt.

Definition

Seien $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ und $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt die reelle Zahl

$$V = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \underline{a}^T * (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

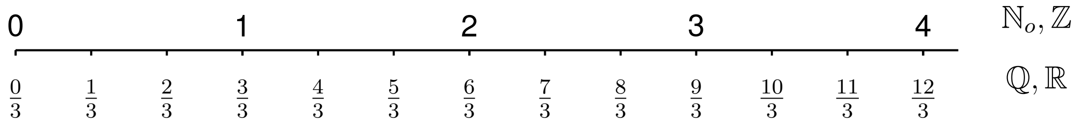
das Spatprodukt von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

Bemerkung

1. Das Spatprodukt ist eine reelle Zahl.
2. $|V| = |[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]|$ gibt das Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spat an
3. Bilden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ein Rechtssystem, dann ist $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] \geq 0$. Bilden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ (in dieser Reihenfolge) ein Linkssystem, so ist $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] \leq 0$.
4. Genau dann sind $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ linear unabhängig, wenn $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] \neq 0$

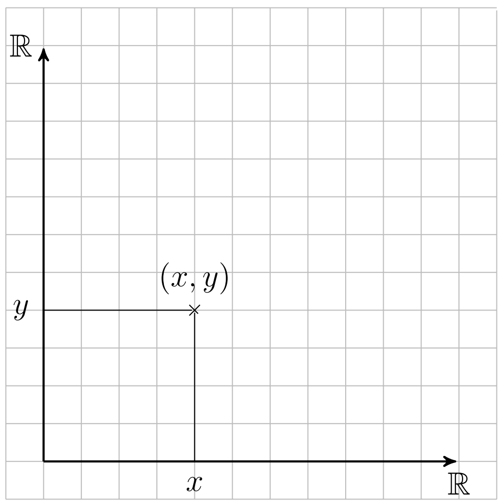
3 Komplexe Zahlen

1 Zahlenbereiche



2 Die komplexe Zahlenebene

Da $x^2 = -1$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat, wird die reelle Zahlengerade erweitert zur komplexen Zahlenebene.



Unter einer Komplexen Zahl z versteht man ein ungeordnetes Paar (x, y) aus zwei reellen Zahlen x und y. Symbolische Schreibweise:

$$z = x + iy$$

wobei i als imaginäre Einheit bezeichnet wird. Die Komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch den Punkt

$$P(z) = (x, y)$$

der x, y- Ebene eindeutig repräsentiert.

Bemerkung

1. Die reellen Bestandteile x und y der komplexen Zahl $z = x + iy$ werden als Realteil und Imaginärteil von z bezeichnet.

   - $Re(z) = x$ Realteil von z
   - $Im(z) = y$ Imaginärteil von z

2. Die Darstellung $z = x + iy$ wird als algebraische (Kartesische) oder Normalform oder komplexe Zahl z bezeichnet.

3. Die Menge

   $$\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

   heißt Menge der komplexen Zahlen.

4. Der Pfeil, der vom Koordinatenursprung zum Punkt (x, y) gerichtet ist, heißt Zeiger der komplexen Zahl $z = x + iy$.

Bezeichnung

1. Alle Punkte $z = x + yi$ mit $y = 0$, also $z = x + i * 0$ liegen auf der x-Achse und werden mit den reellen Zahlen identifiziert.

   $$z = x + i * 0 = x \in \mathbb{R}$$

   Die x-Achse heißt deshalb auch reelle Achse.

2. Alle Punkte $z = x + iy$ mit $x = 0$, also $z = 0 + iy$ liegen auf der y-Achse. Sie werden als (rein) imaginäre Zahl bezeichnet:

   $$z = 0 + iy = iy$$

   Die y-Achse heißt deshalb auch imaginäre Achse.

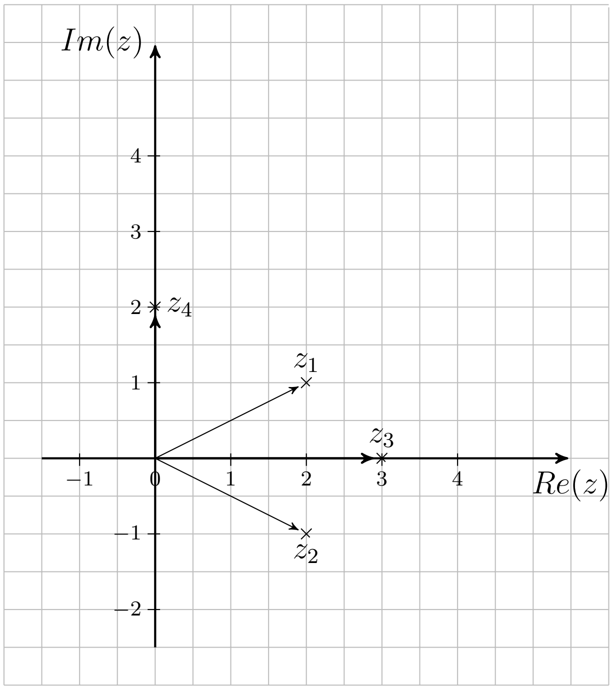
Beispiel

1. $z_1 = 2 + i$
   - $Re(z_1) = 2$
   - $Im(z_1) = 1$

2. $z_2 = 2 - i = 2 + i(-1)$
   - $Re(z_2) = 2$
   - $Im(z_2) = -1$

3. $z_3 = 3 = 3 + 0 * i$
   - $Re(z_3) = 3$
   - $Im(z_3) = 0$

4. $z_4 = z_i = 0 + i * 2$
   (rein) imaginäre Zahl
   - $Re(z_4) = 0$
   - $Im(z_4) = 2$



3. Die Komplexe Zahl $\overline{z} = x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl.

   Beispiel
   $\overline{z}_1 = \overline{(2+i)} = 2 - i = z_2 \qquad \overline{z}_2 = \overline{(2-i)} = 2 + i = z_1$

   Es gilt
   $$\overline{(\overline{z})} = z, z \in \mathbb{C}$$

3 Rechnen mit Komplexen Zahlen

3.1 Addition und Subtraktion

Definition

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Dann heißt $z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ Summe von z_1 und z_2 und $z_1 - z_2 := x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)$ Differenz von z_1 und z_2.

Beispiel

1. $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 - 3$

   $$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 2i) = 3 + i$$
   $$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

2. $z_1 = 3 + 0i = 3, z_2 = -1 + 0i = -1$
   $z_1 + z_2 = 3 + 0i - 1 + 0i = 2 = 3 + (-1)$
   Also Addition und Subtraktion reeller Zahlen ist als Sonderfall enthalten.

Bemerkung

1. In der komplexen Zahlenebene entspricht die Addition von $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ der Vektoraddition (Kräfteparallelogramm) der Zeiger von z_1 und z_2

2. Die Addition ist kommutativ, d.h. $z_1 + z_2 \equiv z_2 + z_1$

3.2 Multiplikation und Division

Definition
Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$z_1 z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Produkt von z_1 und z_2

Bemerkung

1. Für $z_1 = i$ und $z_2 = i$ erhalten wir nach obiger Regel ($i = 0 + 1i$)

   $$i * i = 0 * 0 - 1 + i(0 * 1 + 1 * 0) = -1$$

   Also

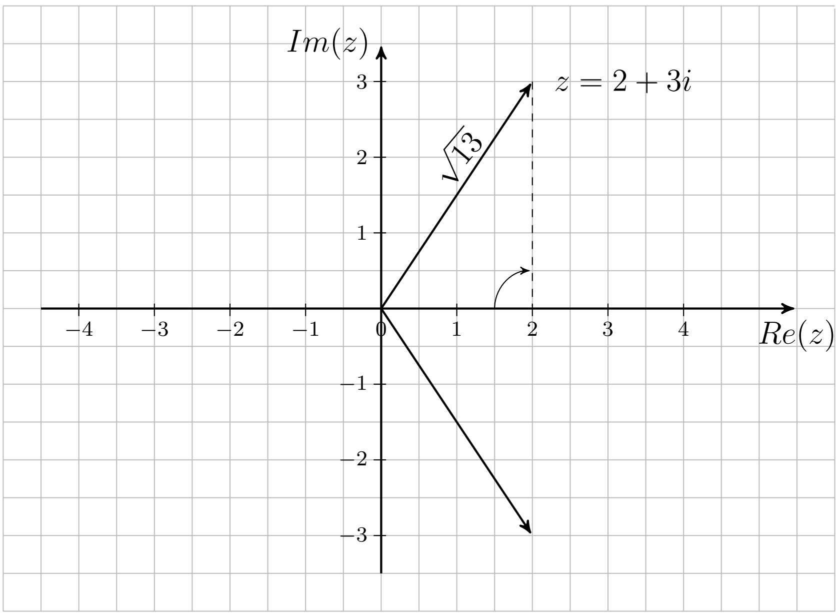
   $$i^2 = -1$$

Die nutzen wir für folgende Multiplikation

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1 * iy_2 + iy_1 * x_2 + iy_1 * iy_2 \\ &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)^{-1}\end{aligned}$$

Beispiel

1. $(2+3i)(1-2i) = 2*1 - 2*2i + 3i - \underbrace{3i*2i}_{6i^2=-6}$
   $= 2 + 6 - 4i + 3i = 8 + i(-4+3) = \underline{\underline{8-i}}$
2. $(2+3i)*4 = 8 + 12i$
3. $(2+3i)*2i = 4i + \underbrace{6i^2}_{-6} = -6 + 4i$
4. $2*4 = 8$
5. $(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$



Definition
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z.

Vorüberlegung zur Division

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ist gegeben

Gesucht: $\frac{z_1}{z_2}$

Definition

Seien $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

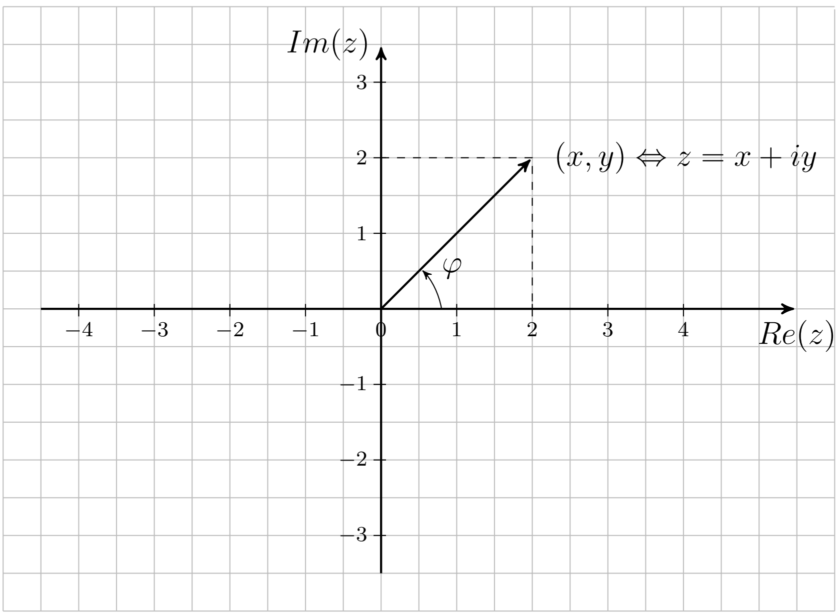
der Quotient von z_1 und z_2.

Beispiel

1. $z_1 = 4 - 3i, z_2 = 2 + 2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 3i}{2 + 2i} = \frac{(4 - 3i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{8 - 6i - 8i + 6i^2}{4 + 4} = \frac{2 - 14i}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4} - \frac{7}{4}i}}$$

4 Weitere Darstellungsformen komplexer Zahlen

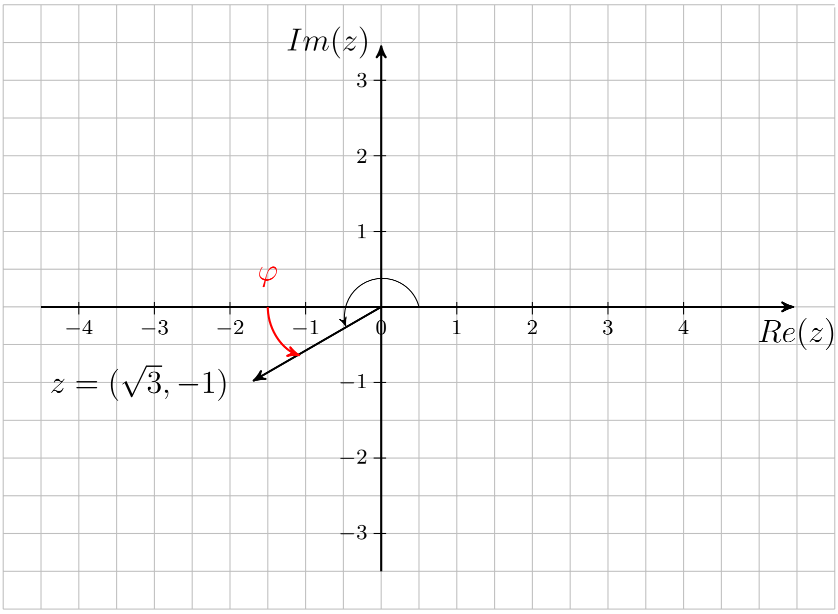


Die komplexe Zahl $z = x + iy$ korrespondiert mit dem Punkt (x, y) in der komplexen Zahl. Dieser Punkt kann ebenso durch Angabe der Polarkoordinaten r und φ beschrieben werden. Dabei ist

- $r = |z|$ der Betrag von z
- $\varphi = arg(z)$ das Argument von z, Winkel oder Phase von z. Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Zeiger von z (entgegen dem Uhrzeiger)

Bemerkung
Wenn $z = x + iy$ gegeben ist, dann ist φ eindeutig bestimmt bis auf Ganzzahlige Vielfache von 2π. Unter dem Argument verstehen wir deshalb den Hauptwert aus dem Intervall $[0, 2\pi)$.

Beispiel
$z = -\sqrt{3} - i$ liegt im 3. Quadranten, d.h. φ liegt zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$



- Bestimmen von α

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{Im(z)}{Re(z)}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Also:
$\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi$
$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Definition

Ist $z = x + iy$ eine komplexe Zahl in Normalform und $r = |z|$ sowie $\varphi = arg(z)$ die Darstellung des Punktes (x, y) in Polarkoordinaten, so heißt

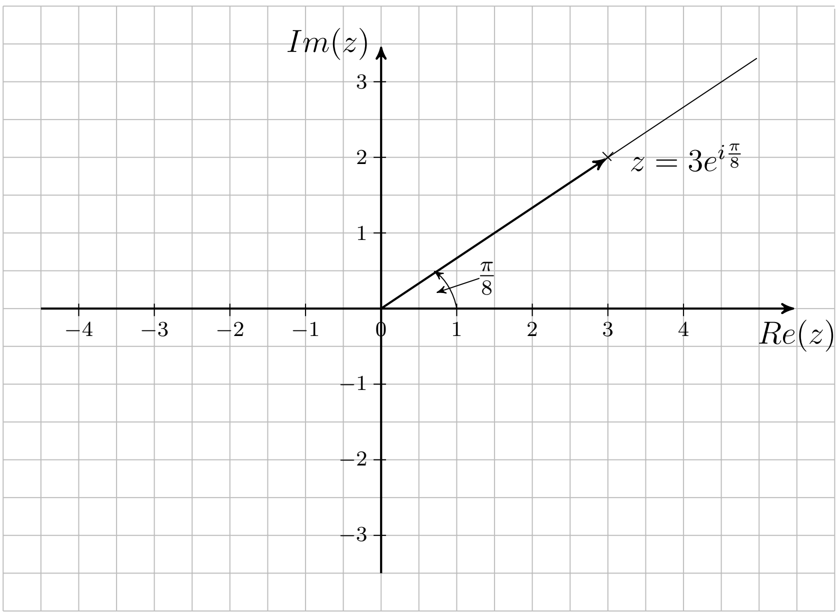
$$z = re^{i\varphi} \ldots \text{ die Exponentialform von } z$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ldots \text{ die trigonometrische Form von } z$$

Die Exponential- und die trigonometrische Form werden auch Polarform von z genannt.

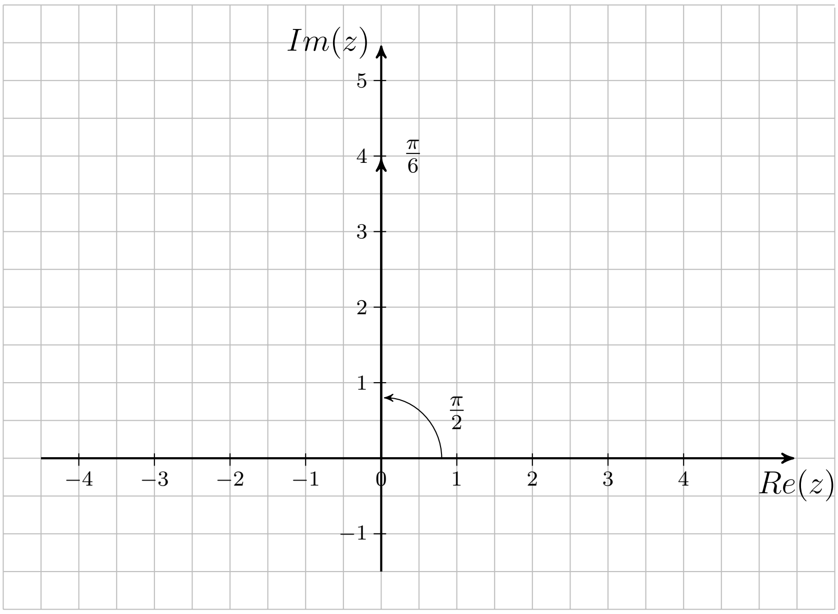
Beispiel

1. $z = 3e^{i\frac{\pi}{8}}$



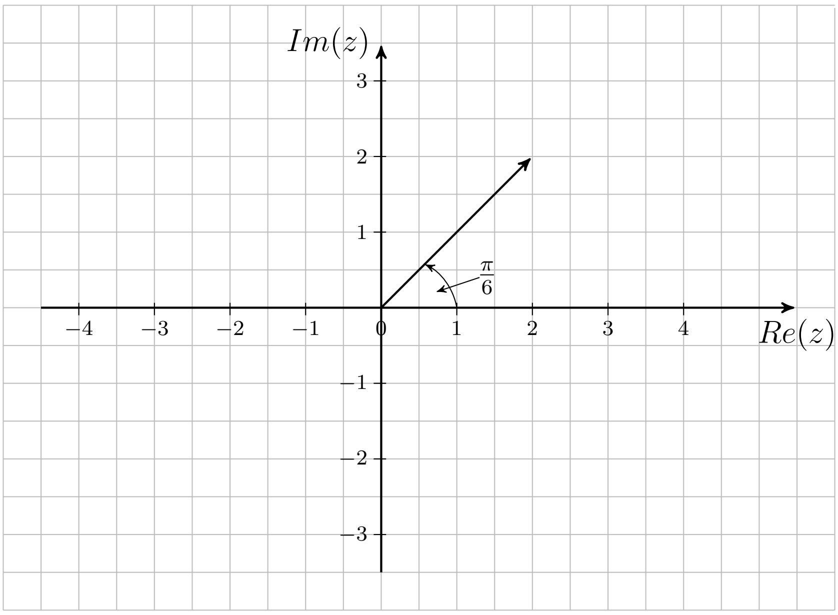
$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{8}, r = 3$

2. $z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$



$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, r = 4$

3. $z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$



$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}, r = 2$

4.1 Bestimmung der Polarform aus der Normalform

Gegeben

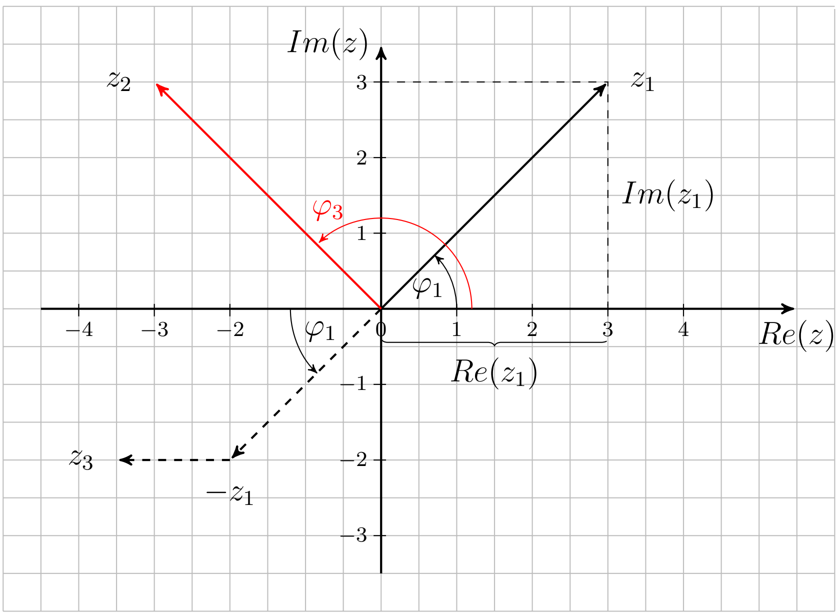
$z = x + iy$ (bzw. $z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2, \dots$)

Gesucht

Polarform, d.h. $arg(z) = \varphi, |z|$

1. Klar:
   $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Bestimmung von $arg(z) = \varphi$



$$\tan\varphi_1 = \frac{Im(z_1)}{Re(z_1)} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{Im(z_1)}{Re(z_1)}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan\varphi_3 = \pi + \arctan\left(\frac{Im(z_3)}{Re(z_3)}\right)$$

$$\tan(\pi - \varphi_2) = \frac{Im(z_2)}{-Re(z_2)} = \tan(-\varphi_2) = -\tan(\varphi_2) \Rightarrow \underline{\tan(\varphi_2) = \frac{Im(z_2)}{Re(z_2)}}$$

$$\varphi_2 = \underbrace{\arctan\left(\frac{Im(z_2)}{Re(z_2)}\right)}_{\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]} + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

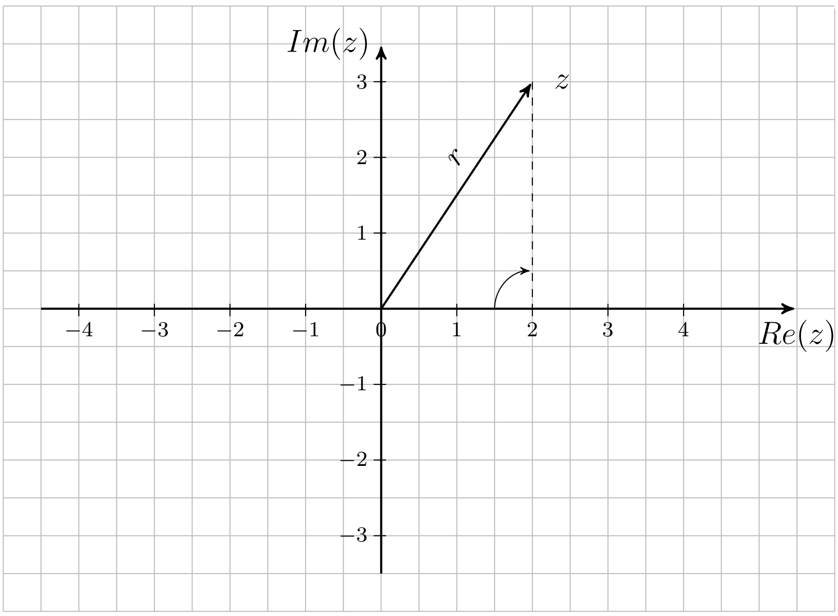
Im 4. Quadranten:

$$\varphi_4 = \arctan\left(\frac{Im(z_4)}{Re(z_4)}\right) + 2\pi$$

4.2 Bestimmung der Normalform aus der Polarform

Gegeben

$z \in \mathbb{C}$ in Polarform, also $z = re^{i\varphi} \ldots$ Exponentialform bzw. $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi) \ldots$ trigonometrische Form. $\rightarrow |z| = r, arg(z) = \varphi$



Gesucht

Normalform von z, d.h. $Re(z) = x, Im(z) = y$, so dass $z = x + iy$. Dabei gilt

- $\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi = Re(z)$
- $\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\varphi = Im(z)$

Satz

Ist $z = re^{i\varphi}$ gegeben, so kann über die trigonometrische Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cos\varphi + i * r\sin\varphi$$

die Normalform von z berechnet werden. Es gilt $z = x + iy$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

Zusammenfassung

Komplexe Zahlenebene	symbolische Schreibweise	Kartesische zu Polar	Polar zu kartesisch
(x, y)	$z = x + iy$	$r = \|z\|$ $\varphi = arg(z)$	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $= \underbrace{r\cos\varphi}_{x} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{y}$
(r, φ)	$z = re^{i\varphi}$		

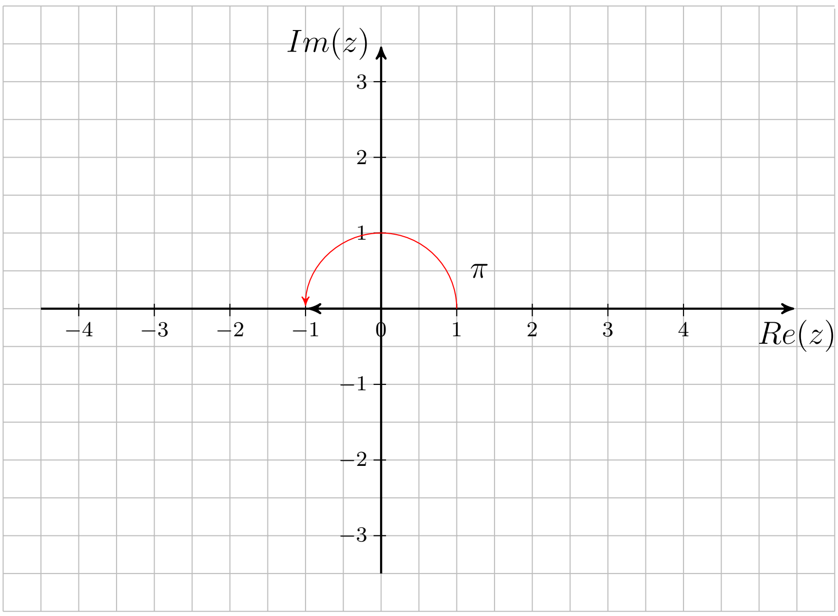
Beispiel

1. $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}, r = 3$

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i * \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} + i\frac{3}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{2.12 + 2.12i}}$$

2. $z = e^{\pi} \qquad \varphi = \pi, r = 1$

$$z = 1\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = \underline{\underline{-1}}$$



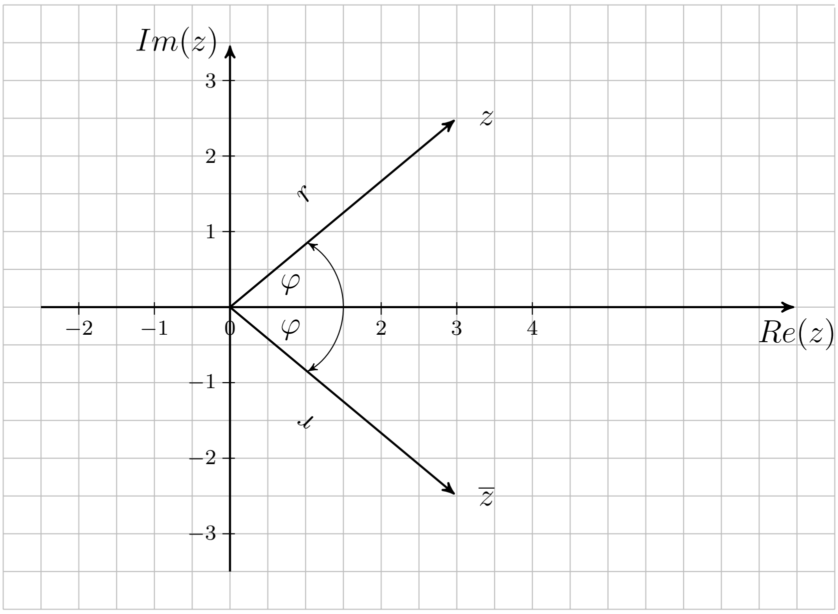
5 Rechnen mit Polarformen

Gegeben

$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bzw.

$$z_k = e_k e^{i\varphi_k} = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

5.0.1 Konjugation



$$\overline{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos(-\varphi) + i\sin varphi)) = r(\cos\varphi) - i\sin\varphi)$$

5.0.2 Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= r_1e^{i\varphi_1} + r_2e^{i\varphi_2} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion sind erst nach der Überführung in die Normalform möglich!

5.0.3 Multiplikation und Division

$$
\begin{aligned}
z_1 * z_2 &= \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) * r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) \\
&= r_1 r_2 = \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 * i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \underbrace{i\sin\varphi_1 * i\sin\varphi_2}_{=\sin\varphi_1\sin\varphi_2}\right) \\
&= r_1 r_2\left(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\right) \\
&= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) \Rightarrow r_1 r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}
\end{aligned}
$$

Also

$$\boxed{\left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

$$r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) * r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Analog die Division

$$
\begin{aligned}
\frac{r_1 e^{i\varphi_2}}{r_2 e^{i\varphi_2}} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)
\end{aligned}
$$

Bemerkung
Bei Multiplikation und Division müssen eventuell Vielfache von 2π zum resultierenden Winkel addiert werden, damit $f = \varphi$ tatsächlich der Hauptwert aus $\{0, 2\pi\}$ angeben wird.

Beispiel

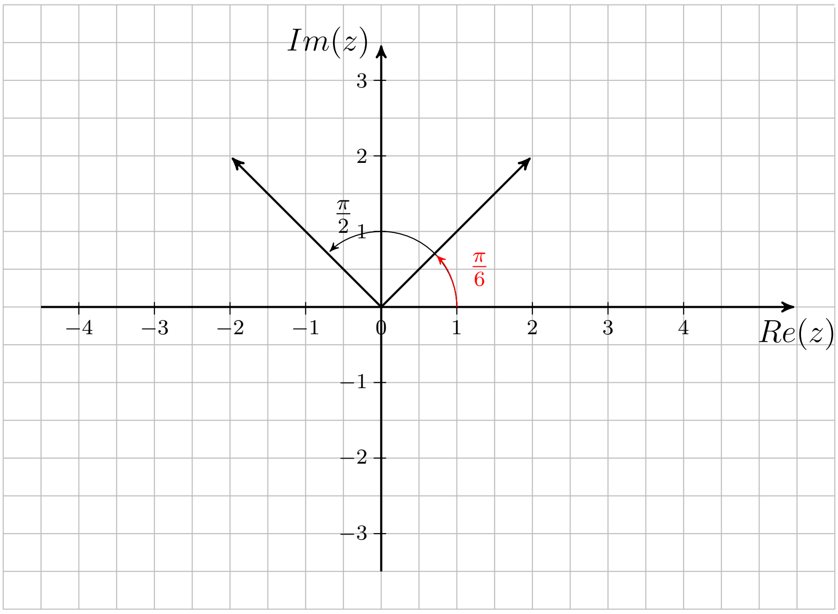
1. $z_1 = 2(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi)), z_2 = 3(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}))$

$$z_1 z_2 = 2e^{i\left(\frac{5}{4}\pi\right)} * 3e^{i\left(\frac{7}{4}\pi\right)} = \underline{\underline{6e^{i(3\pi)} = 6e^{i\pi} = -6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\left(\frac{5}{4}\pi\right)}}{3e^{i\left(\frac{7}{4}\pi\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{7}{4}\pi\right)} = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{3}{2}\pi\right)}}}$$

2. $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}, z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 z_2 = \underbrace{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} * 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{1*2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}} = 2e^{i\left(\frac{2}{3}\pi\right)}$$



Geometrische Interpretation der Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

1. Drehung des Zeigers von z_1 um (weiteren) Winkel φ_2
2. Verlängerung/Verkürzung (Streckung/Stauchung) der Länge des Zeigers von z_1 um Faktor r_2

Sonderfälle

a) Falls $\varphi_2 = 0$, also $z_2 = r_2 \in \mathbb{R}$, dann bedeutet Multiplikation mit $z_2 = r_2$ nur Streckung/Stauchung um den Faktor r_2

b) Falls $r_1 = 1$, also $z_2 = e^{i\varphi_2}$, dann bedeutet Multiplikation mit $z_2 = e^{i\varphi_2}$ nur Drehung um den Winkel φ_2

6 Potenzieren und Radizieren von komplexen Zahlen

Gegeben

$z \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}$

6.0.1 Potenzieren

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$zn = \underbrace{z * z * \cdots * z}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{re^{\varphi} * re^{i\varphi} * \cdots * re^{i\varphi}}_{n \text{ mal}} = r^n e^{i(n\varphi)}$$

Also

$$z^n = \left(r * e^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

bzw. in trigonometrischer Form

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right), n = 1, 2, 3, \ldots$$

Für $n = 0 \Rightarrow z^0 := 1(= r^0 e^{i\varphi 0} = 1)$

Falls $z = x + iy$ in Normalform gegeben ist, so muss z entweder zunächst in Potenzform umgewandelt werden oder mit Hilfe des Binomischen Satzes ausmultipliziert werden.

$$z^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (iy)^k x^{n-k} = \binom{0}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} * iy + \cdots + \binom{n}{k} (iy)^n$$

mit

- $i^2 = -1, i^4 = 1, i^6 = -1, \ldots$
- $i^3 = 9 = -i, i^5 = i, i^7 = -i, \ldots$

Beispiel

1. $z = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$z^3 = \left(3e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^3 = 3^3 e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 27e^{i\left(\frac{3}{4}\pi\right)}$$

2.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^3$$
$$=i\sqrt{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}=i\Rightarrow i^3=i^2*i=\underline{\underline{-i}}$$

Alternativer Weg: Über Polarform

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1,\varphi=\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\Rightarrow\arctan 1+0=\frac{\pi}{4}$$

$$z=1*e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow z^6=e^{i\frac{\pi}{4}*6}=e^{i\frac{3}{2}}=\underline{\underline{-i}}$$

6.1 Radizieren (Wurzelziehen)

Definition

Eine komplexe Zahl z wird als n-te Wurzel von $a\in\mathbb{C}$ bezeichnet, wenn sie der algebraischen Gleichung $z^n=a$ genügt.

Bezeichnung: $z=\sqrt[n]{a}$

Vorgehen

Gegeben
$a=a_0e^{i\alpha}\in\mathbb{C}$

Gesucht
$z=re^{i\varphi}$, so dass $z^n=a$

Lösung

$$\begin{aligned} z^n &= a\\ (re^{i\varphi})^n &= a_0e^{i\varphi}\\ r^ne^{i\varphi_n} &= a_0e^{i\varphi}\end{aligned}$$

$\Rightarrow r^n=a_0$, also

$$r=\sqrt[n]{a_0}$$

und $\varphi*n=\alpha+2\pi k \qquad k\in\mathbb{Z}$

Damit ergibt sich

$$\varphi_k=\frac{\alpha}{n}+2\pi\frac{k}{n}\qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

Wir erhalten also insgesamt n verschiedene komplexe Wurzeln von a.

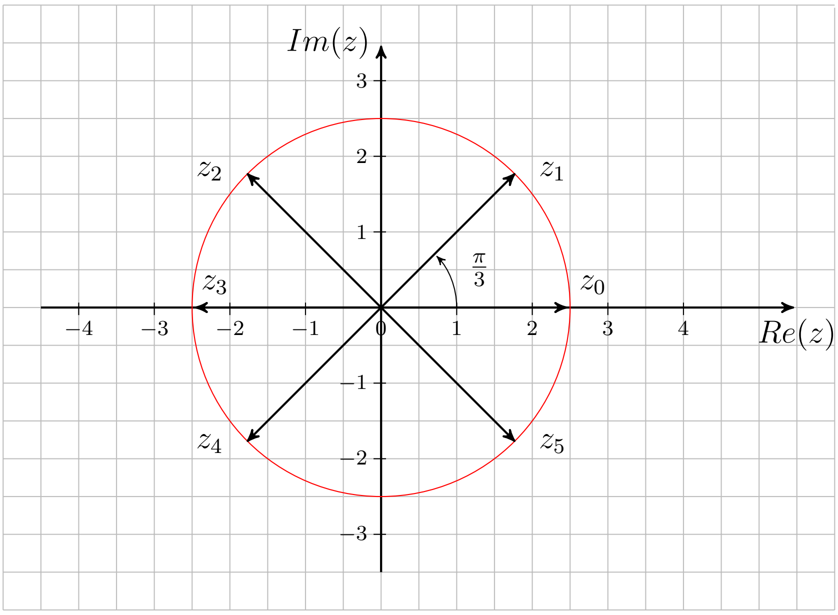
Wurzel von a

- $z_0 = \sqrt[n]{a_0} * e^{i\frac{\alpha}{n}}$
- $z_1 = \sqrt[n]{a_0} * e^{i\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}}$
- $z_k = \sqrt[n]{a_0} * e^{i\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}}$
- $z_{n-1} = \sqrt[n]{a_0} * e^{i\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}}$

Beispiel

$a = 1 = 1e^{i0}$

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{1} * e^{i\frac{0}{6}+\frac{2\pi k}{6}} \qquad k = 0, \ldots, 5$$



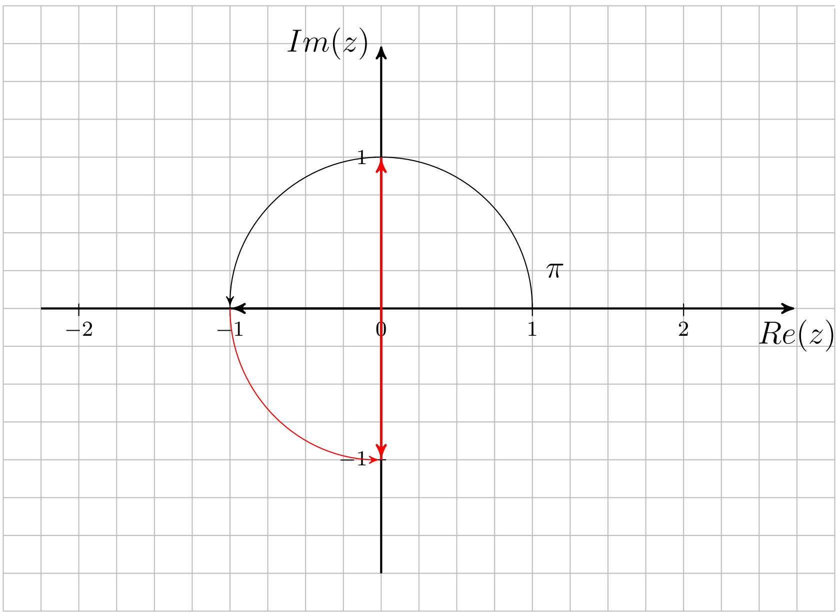
- $z_0 = 1e^{i0} = 1$
- $z_1 = 1e^{i(0+\frac{2\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_2 = 1e^{i(0+\frac{2\pi*2}{6})} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$
- $z_3 = e^{i\pi}$
- $z_4 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$
- $z_5 = e^{i\frac{5}{3}\pi}$

Bemerkung

1. Die n Komplexen n-ten Wurzeln $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ einer Zahl $a \in \mathbb{C}$ liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|a|}$ um den Ursprung und sind auf diesem regelmäßig verteilt.
2. Die n-ten Wurzeln von 1 (im Komplexen) nennt man n-te Einheitswurzel.
3. Wichtig ist der Unterschied zum Wurzelziehen im Reellen. Falls $a_0 \in \mathbb{R}$ dann ist $\sqrt[n]{a_0}$ nur für $a_0 \geq 0$ definiert, dann jedoch eindeutig bestimmt und $\sqrt[n]{a_0} \geq 0$. Im komplexen ist $\sqrt[n]{a}$ für alle $a \in \mathbb{C}$ definiert und liefert n Lösungen $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$
4. Es gilt:
$$z^{n-a} = (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_n)$$
die sogenannte Zerlegung in Linearfaktoren.

Bsp:

$\sqrt{(-1)} : a = -1 \Rightarrow 1 * e^{i\pi}$ (in Polarform))



$$z_k = \sqrt{1} * e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{2}\right)} \qquad k = 0, 1$$

- $z_0 = e^{i\frac{pi}{2}} = i$
- $z_1 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

Fundamentalsatz der Algebra

Die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (*)$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ lässt sich stets in der Form

$$(z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n) = 0$$

schreiben, so dass die Zahlen $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ Lösungen von $(*)$ sind. Die Lösungen sind dabei stets Nullstellen.

7 Anwendung komplexe Eigenwerte quadratischer Matrizen

Definition

Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix (mit reellen Einträgen). Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A_i falls ein Vektor $\underline{x} \in \mathbb{C}, \underline{x} \neq \underline{0}$ existiert (genannt Eigenvektor), so dass $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.

Bemerkung

1. Eigenwerte sind ein entschiedenes Hilfsmittel, um quadratische Matrizen zu untersuchen.
2. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert von A falls das LGS $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ bzw. $A\underline{x} = \lambda\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ ein homogene, quadratisches LGS eine nichttriviale Lösung hat. Das ist genau dann der Fall, wenn $det(A * \lambda I) = 0$.

   Also: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $det(A - \lambda I) = 0$. Die Eigenwerte sind somit Lösungen des charakteristischen Polynoms $det(A - \lambda I) = 0$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Lösungen: $\lambda^2 = -1, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
$\Rightarrow$ 2 komplexe Eigenwerte $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$

Satz
Eine quadratische $n \times n$ Matrix A hat genau n komplexe Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (diese können aber zusammenfallen).

8 Komplexe Funktionen

Definition
Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z)$ heißt komplexe Funktion.

Beispiel

1. $f(z) = z - 3 + i, z \in \mathbb{C}$ (Verschiebung um $z = -3 + i$)
2. $f(z) = 2z, z \in \mathbb{C}$ (Streckung um Faktor 2)
3. $f(z) = e^{i\frac{5}{8}\pi} * z, z \in \mathbb{C}$ (Drehung um Winkel $\frac{5}{8}\pi$)

Definition
Seien $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Die komplexe Funktion $f(z) = a * z + b, z \in \mathbb{C}$ heißt lineare komplexe Funktion.
Geometrisch: Winkeltreue Abbildungen (oder auch affine Abbildungen)

Definition

Die komplexe Funktion $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), z \in \mathbb{C}$ heißt komplexe Expotentialfunktion.

Bemerkung

1. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt mit den klassischen Expotentialgesetzen

$$e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\text{Expfkt. im Reellen}} \underbrace{e^{iy}}_{\text{Expfkt. der komplexen Zahl}} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

2. Die komplexe Expotentialfunktion ist die Grundlage für die Fourier-Transformation, einem wichtigen Werkzeug in der Mathematik, Stochastik, Elektrotechnik usw.

3. Es gilt: $e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi k)}$ denn

$$e^{x+y(y+2\pi k)} = e^x \left(\cos(y + 2\pi k) + i \sin(y + 2\pi k)\right)$$

$$e^x \left(\cos(y) + i \sin(y)\right) = e^{x+iy}, k \in \mathbb{Z}$$

Das bedeutet, die komplexe e-Funktion ist periodisch mit komplexer Periode $2\pi i$.

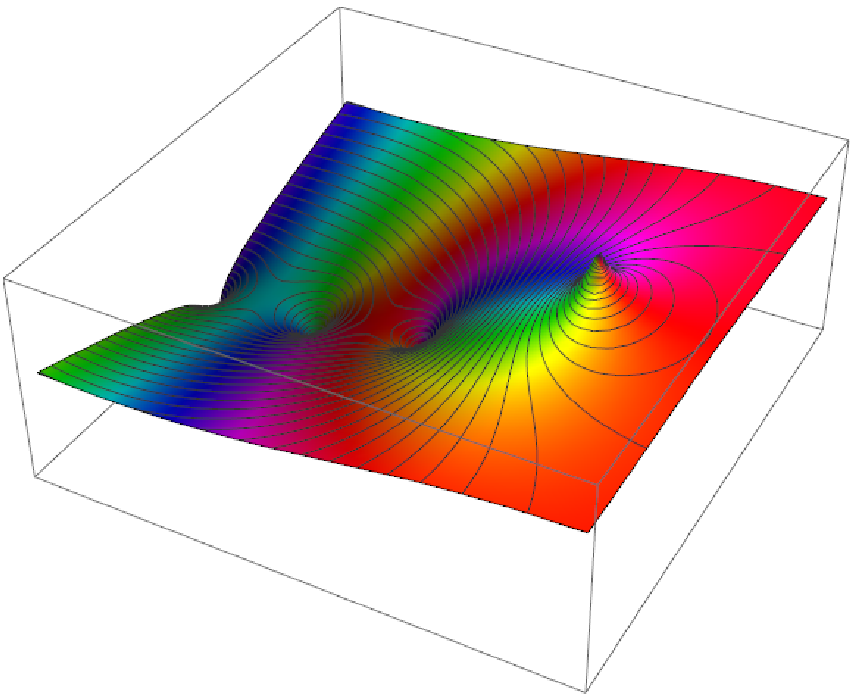


Abbildung 3.1: Plot einer komplexen Funktion

4 Finanzmathematik

1 Zins- und Zinseszinsrechnung

1.1 Einfache Verzinsung

In der Praxis nur von Bedeutung, wenn die Laufzeit kürzer als ein Jahr ist.

Bezeichnung: $K_0 \ldots$ Anfangskapital
$t \ldots$ Teil der Zinsperiode, für den das Kapital angelegt wird $t \in [0,1]$
$p \ldots$ Zinssatz (in Prozent)
$i = \frac{p}{100} \ldots$ Zinsrate
$z_t \ldots$ Zinsen für den Zeitraum t
$K_t \ldots$ Endkapital zum Zeitpunkt $t*$ Zinsperiode

Die Zinsen sind proportional zur Laufzeit t, Proportionalitätsfaktor: $i * K_0$

$$Z_t = K_0 * it = K_0 * \frac{p}{100} * t \Rightarrow K_t = K_0 + Z_t = K_0 + K_0 it = \underline{\underline{K_0(1+it) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}t\right)}}$$

In Deutschland wird das Jahr mit 360 Tagen und 12 Monaten berechnet, wobei jeder Monat 30 Tage hat. Falls T die Anzahl an Tagen bezeichnet, die das Kapital bei einfacher Verzinsung angelegt wird, dann ist das Endkapital

$$K_{\frac{T}{360}} = K_0\left(1 + i\frac{T}{360}\right)$$

Beispiel
Am 11. März werden 3000€ zum Zinssatz von 5% angelegt und am 16. August desselben Jahres wieder abgehoben. Welcher Betrag wird ausgezahlt? ($\longrightarrow$ Laufzeit unter einem Jahr $\rightarrow$ einfache Verzinsung.)

$K_0 = 3000, p = 5, i = 0.05$

$$T = \underbrace{5}_{\text{Anzahl der Monate}} *30 + 5 = 155$$

$$\Rightarrow K_{\frac{155}{360}} = K_0 \left(1 + i\frac{155}{360}\right) = 3000\left(1 + 0.05\frac{155}{360}\right) = \underline{\underline{3064.58€}}$$

Beispiel
Auf einer Handwerkerrechnung über die Summe S laufen die Bedingungen „Entweder Zahlung innerhalb von 10 Tagen mit 2% Skonto oder Zahlung innerhalb von 30 Tagen ohne Abzug“? Was ist vorteilhafter?

1. Variante: Zahlung von $0.98 * S$ nach 10 Tagen
2. Variante: Zahlung von S nach 30 Tagen und Anlage von S über 20 Tage

$$0.98S = -Z_{\frac{20}{360}} + S$$

$$0.98S = S * i\frac{20}{360} + S = 0.98S = S\left(1 - i\frac{20}{360}\right)$$

$$0.98 = 1 - i\frac{20}{360} = i\frac{20}{360} = 0.02 \Rightarrow i = \frac{0.02 * 360}{20} = \underline{\underline{0.36}}$$

Variante 1 ist besser, da die Bank mindestens 36% Zinsen zahlen müsste.

1.2 Zinseszinsrechnung

Kapital wird über weitere Zinsperioden angelegt, die Zinsen werden am Ende der Zinsperiode ausgezahlt und jeweils zum Kapital hinzugerechnet und dann mitverzinst.

Bezeichnung $K_0 \ldots$ Anfangskapital
$n \ldots$ Anzahl der Zinsperioden
$p \ldots$ Zinssatz, $i = \frac{p}{100}$ Zinsrate, $q = 1 + i \ldots$ Aufzinsfaktor
$K_n \ldots$ Endkapital nach n Jahren

Ende der Zinsperiode	**Kapital**
0	K_0
1	$K_0 + K_0 * i \Rightarrow K_0(1+i) = K_0 * q = K_1$
2	$K_1 + K_1 * i \Rightarrow K_1 * i = K_1 * q = K_0 * q * q = K_2$
3	$K_2 * q = K_0 * q^2 * q = K_0 * q^3 = K_3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$K_n = K_0 q^n$

Satz (Leibnizsche Zinseszinsformel)
Wird das Anfangskapital K_0 mit der Zinsrate i über n Zinsperioden verzinst, so beträgt das Kapital K_n am Ende des n-ten Jahres

$$K_n = K_0 \left(1+i\right)^n = K_0 * q^n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Bemerkung
Der Aufzinsungsfaktor über n Zinsperioden q^n gibt an, wie sich ein beliebiges Kapital in n Zinsperioden vervielfacht.

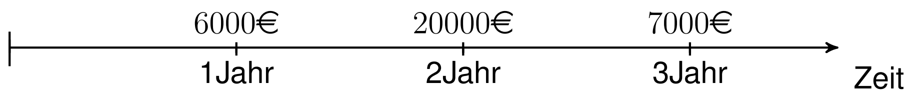
Beispiel

1. Variante: Kapitalanlage mit $K_0 = 30000, i = 0.04, q = 1.04, n = 3$

$$K_3 = q^3 = 30000 * (1.04)^3 = 33745.92€$$

2. Variante

   a) Investition - Gewinne werden wieder zu 4.5% p.a. angelegt



$$\tilde{K}_3 = 6000 * q^2 + 20000q + 7000 = \underline{\underline{34289.60€}} \,(> 33745.92€)$$

Investition (Variante 2) ist vorteilhafter.

b) Gewinne werden nicht angelegt:

$$\tilde{K}_3 = 6000 + 20000 + 7000 = 33000€ \ (33000€ \ < 33745.92€)$$

Investition ist nicht vorteilhaft.

1.3 Grundaufgabe der Zinsesszinsrechnung

In der Leibnizsche Zinsesszinsformel kommen 4 Größen vor: K_0, i, n, K_n. Sobald 3 Größen bekannt sind, kann die vierte Größe berechnet werden.

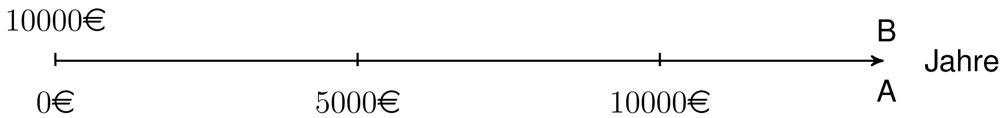
1. Berechnung von K_n aus $K_0, i, n)$ (siehe oben)
2. Berechnung von K_0 aus K_n, i, n

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{q^n} \qquad \text{Barwertformel der Zinsesszinsrechnung}$$

Bezeichnung: $\frac{1}{q^n} \ldots$ Abzinsungsfaktor für n Zinsperioden

Die Barwertformel gibt an, welchen heutigen Kapital K_0 ein Kapital K_n zum Zeitpunkt n entspricht, wenn man von einer Verzinsung (Inflation) von $p = i * 100\%$ ausgehen kann. Wichtig zum Vergleichen von Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Beispiel
Der Verkäufer einer Antiquität hat zwei potentielle Käufer. Käufer A bietet sofort $10000€$, Käufer B bietet $5000€$ in 3 Jahren und $10000€$ in 10 Jahren. Was ist vorteilhafter? (Annahme: Zinssatz von 6%)



Berechnung der Barwerte der Zahlungen von Käufer B

$$K_0^{(1)} = K_3^{(3)} * \frac{1}{q^3} = 5000\frac{1}{(1.06)^3} = 4198.10€$$
$$K_0^{(2)} = K_{10}^{(2)}\frac{1}{q^{10}} = 10000\frac{1}{(1.06)^{10}} = 5583.95€$$

Zahlungen von Käufer B entsprechen heute einem Kapital von $4198.10 + 5583.95 = 9782.05$€ (weniger als Käufer A) $\longrightarrow$ nicht vorteilhaft.

3. Berechnung des Zinssatzes zu dem aus dem Anfangskapital K_0 nach n Zinsperioden das Endkapital K_n wird.

$$K_n = K_0(1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} \Rightarrow (1+i) = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \Rightarrow \underline{\underline{i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1}}$$

Beispiel
Ein abgezinstes Wertpapier mit einer Laufzeit von 2 Jahren und Nominalwert von 5000€ wird zum Preis von 4441.60 € angeboten. Welche Verzinsung (Rendite) entspricht das?

$K_n = 5000, K_0 = 4441.60, n = 2$

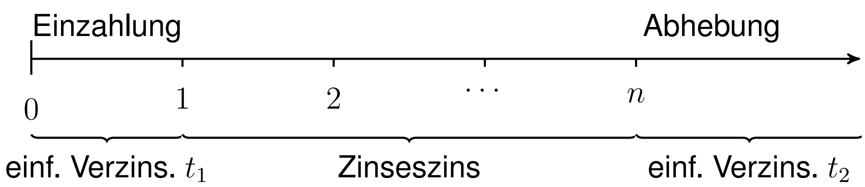
$$i = \sqrt[2]{\frac{5000}{4441.60}} - 1 = \underline{\underline{0.061 = 6.1\%}}$$

4. Berechnung der Laufzeit zu gegebenen K_0, K_n, i

$$N = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)}$$

1.4 Gemischte Verzinsung

In der Regel wird Kapital zwischen zwei Zinsterminen eingezahlt.



Endkapital

$$K_D = K_0(1 + it_1)(1 + i)^n(1 + it_2)$$

Beispiel

Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 2000€ auf das bei 6% p.a. vom 10.3.2016 $\rightarrow$ 19.7.2020 aufgelegt wird?

- $K_0 = 2000$[€]
- $t_1 \dots$ Zeit bis zum ersten Zinstermin:
  $30 - 10$ Tage $+9$ Monate

  $$= 20 + 9 * 30 = 290 \text{ Tage, also } t_1 = \frac{290}{360}$$

- $n = 3$[Jahre]
- $t_2 \dots$ Zeit vom letzten Zinstermin bis zur Abhebung
  6 Monate $+19$ Tage

  $$= 6 * 30 + 19 = 199 = \frac{199}{360}$$

- $i = 0.06$

$$K_D = 2000 * \left(1 + 0.06 * \frac{290}{360}\right)(1 + 0.06)^3 \left(1 + 0.06 * \frac{199}{360}\right) = \underline{\underline{2579.99€}}$$

1.5 Unterjährige Verzinsung und Konforme Umrechnung

Das Jahr wird in K Zinsperioden aufgeteilt, an deren Ende Zinsen ausgezahlt und dem Kapital aufgeschlagen werden (Zinseszins)

Bezeichnung: $K \ldots$ Anzahl der Zinsperioden pro Jahr
$i = i_{nom} \ldots$ Jahreszinssatz, Nominalzinssatz
$i_p = \frac{i}{k} \ldots$ Periodenzins
$K_n \ldots$ Kapital nach n Jahren bzw. $n * k$ Zinsperioden

$$\Rightarrow K_n = K_0(1 + i_p)^{n*k} = K_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n*k}$$

Welchem Zinssatz i_{eff} mit jährlicher Verzinsung entspricht das?

Jährliche Verzinsung	$\Leftrightarrow$	Unterjährliche Verzinsung
$K_0(1 + i_{eff})^n$	$=$	$K_0(1 + \frac{i}{k})^{n*k}$
$\Rightarrow 1 + i_{eff}$	$=$	$(1 + \frac{i}{k})^k$

Konforme Umrechnung

- $i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$ Effektivzins
- $i_p = \frac{i}{k} = \sqrt[k]{1 + i_{eff}} - 1$ Periodenzins
- $i = k * i_p = K\left(\sqrt[k]{1 + i_{eff}} - 1\right)$ Nominalzins

2 Rentenrechnung

2.1 Grundbegriffe

Definition

1. Eine Rente ist eine Zahlung, die in vorgegebener Höhe in regelmäßigen Zeitabschnitten (periodisch) wiederkehrt.
2. Die Rentenperiode ist der Zeitabstand zwischen zwei Rentenzahlungen
3. Es wird unterschieden zwischen
   - Die Rentenbeträge werden auf ein Konto mit Zinseszins eingezahlt

- Die Rentenzahlung erfolgen aus einem Kapital, das auf Zinseszins angelegt ist

  Bemerkung
  Rechnet man in beiden Fällen (1) und (2) mit dem gleichen Aufzinsfaktor q, und der gleichen Rente, so müssen sich zu jedem Zeitpunkt n die Kontostände von (1) und (2) zum Kapital Kq^n aufsummieren, wobei K das Anfangskapital in (2) ist.

Bezeichnungen

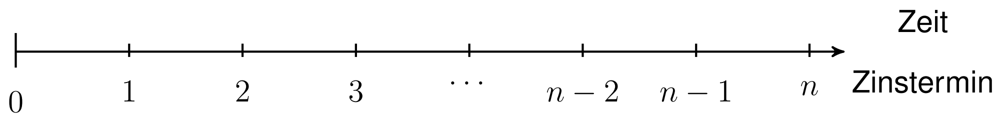
R	...	Konstanter Rentenbetrag
R_0	...	Barwert der nachschussigen Rente
n	...	Laufzeit der Rente (in Jahren)
R_n	...	nachschussiger Rentenentwert, d.h. Wert von n nachschussigen Renteneinzahlungen nach der n-ten Rentenperiode
i	...	Zinssatz
q	...	$q = 1 + i$
K	...	Kapital, aus dem die Rentenzahlung erfolgt
K_q	...	Kapital, das nach n Jahren noch vorhanden ist

Satz

$$K_n = R_n = K_0(1+i)^n$$

2.2 Konstante nachschüssige Renten

Nachschüssig = Rentenbetrag wird am Ende der Rentenperiode gezählt.



$$R_n = Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + Rq^{n-3} + \cdots + Rq^2 + Rq + R = R(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots)$$

$$R\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) = R * \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ denn}$$

i $q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = S$

ii $q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = q * S$

ii - i. $q^n - q^0 = qS - S$

$q^n - 1 = S(q-1)$

$\underline{\underline{S = \frac{q^n-1}{q-1}}}$

Beispiel

$n = 6; R = 12 * 100 = 1200[€]; i = 0.06 \rightarrow q = 1.06$

$$R_n = R\frac{q^n - 1}{q-1} = 1200\frac{(1.06)^6 - 1}{0.06} = \underline{\underline{8370.38€}}$$

Welchem heutigen Kapital entspricht das?

Rentenbarwert $R_0 = R_n * \frac{1}{q^n} = 8370.38 * \frac{1}{(1.06)^6} = \underline{\underline{5900.70€}}$

Satz

Der Rentenbarwert einer n-jährigen nachschüssigen Rente mit jährlicher Rate R beträgt

$$R_0 = \frac{1}{q^n} * R_n = \frac{q^n - 1}{(q-1)q^n} * R$$

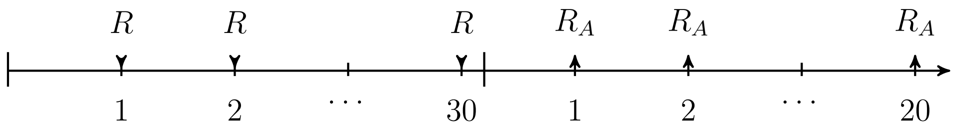
Wir können Rente und Kapital zu Beginn oder am Ende der Laufzeit vergleichen.

Beginn der Laufzeit	Barwert der Rente	Startkapital
	$R_0 = R * \frac{q^n-1}{(q-1)q^n}$	K_0
Ende der Laufzeit	Rentenendwert	aufgezinstes Startkapital
	$R_0 = \frac{q^n-1}{q-1} * R$	$K_0 * q^n$

Falls $K_0 = R\frac{q^n-1}{(q-1)q^n}$ bzw. $K_0 q^n = \frac{q^n-1}{q-1} * R$, dann ist das Kapital K_0 gleichwertig mit der Rente R bzw. K_0 ist genau ausreichend, um die Rente R zu zahlen.

Beispiel

Wie viel muss man 30 Jahre lang nachschüssig einzahlen, damit man anschließend 20 Jahre lang eine nachschüssige Rente von $20000€$ erhält? (Zinssatz für Anspar- und Auszahlphase sei $i = 0.06$)



1. Kapitalwert bestimmen, der zur Zahlung der jährlichen Rente von $24000€$ über 20 Jahre nötig ist.
   Gegeben: $R_A = 24000; q = 1.06; n = 20$

$$K_0 = R_0 = \frac{q^n - 1}{(q-1)q^n} * R_A = \underline{\underline{275278.11€}}$$

2. Dieser Wert muss Endwert der Einzahlungen sein
   Gegeben: $q = 1.06; n = 30; R_n = 275278.11$

$$R_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} R \Rightarrow R = R_n \frac{q-1}{q^n - 1} = \underline{\underline{3481.97€}}$$

2.3 Ewige Renten

Gegeben: Kapital K_0, Zinssatz i

Gesucht: Wie lange kann daraus eine Rente (jährlich, nachschüssig) mit der Rate R gezahlt werden?

1. Fall: Kapital wird nicht verbraucht
   $R \leq K_0 * i$ bzw. $K_n \geq K_0$

$$K_0 q^n - R\frac{q^n - 1}{q - 1} \geq K_0 \Longrightarrow K_0(\underbrace{q-1}_{i}) \geq R \text{ also } R \leq K_0 * i$$

   Satz

   Die maximale, ewige Rente beträgt $R_e = K_0 * i$ (Es werden gerade nur die Zinsen ausgezahlt).

2. Fall: Das Kapital wird im Laufe der Zeit verbraucht
   $R \geq K_0 * i$ und $R \leq K_0(1+i)$. Wann ist das Kapital verbraucht?
   Gesucht n, so dass $K_n = 0$, also

$$K_0 q^n - R\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0 \Longrightarrow n = \frac{\ln R - \ln(R - K_0 * i)}{\ln q}$$

   Satz
   Gilt $K_0 < R < K_0(1+i)$, dann ist das Kapital nach

$$n = \frac{\ln R - \ln(R - K_0 * i)}{\ln q}$$

   Jahren aufgebraucht.

Beispiel
$K_0 = 100000[€], i = 0.06, q = 1.06, R = 12000$

$$n = \frac{\ln 12000 - \ln(12000 - 6000)}{\ln 1.06} = 11.89 \text{ Jahre}$$

Nach 12 Jahren ist das Kapital aufgebraucht, wobei die letzte Rate

$$K_0 q = \left(K_0 q^{11} - \frac{q^{11} - 1}{q - 1} * R\right) q = 10780.35 \text{ € beträgt}$$

2.4 Jährliche vorschüssige Renten

Rentenbetrag wird am Anfang der Rentenperiode gezahlt.

0	R	R	R	$\dots$	R	R	Nachschüssig
							Zinstermin
0	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n	
R	R	R	R	$\dots$	R	0	Vorschüssig

Die Anzahl der Raten ist bei beiden Modellen gleich (n Raten). Bei vorschüssiger Zahlung wird jeder Rate eine Zinsperiode länger verzinst.

Es gilt also ein Äquivalenzprinzip
Falls $R_{vor} * q = R_{nach}$, dann ist die Kapitalentwendung gleich.

Satz

1. Vorschüssige Rentenwertformel

$$R_n^{vor} = q * R_n = R_q * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2. Vorschüssige Rentenbarwertformel

$$R_0^{vor} = q * R_0 = R_q \frac{q^n - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^n}$$

3. Alle anderen Formeln gelten sinngemäß, wenn jeweils für die nachschüssige Rentenrate der Wert Rq gesetzt wird ($R \ldots$ vorschüssige Rentenrate)

3 Tilgunsrechnung

3.1 Grundbegriffe

Definition
Bei der Tilgung wird ein von einem Gläubiger (z.B. Bank) an einen Schuldner ausgeliehener Geldbetrag S durch mehrere Teilzahlungen in konstanten Zeitabständen einschließlich anfallender Zinsen zurückgezahlt.

Begriffe:	Annuität A	... Höhe der einzelnen Zahlungen
	Tilgungsperiode	... zeitlicher Abstand zwischen den Zahlungen
	Laufzeit	... Zahl der Tilgungsperioden
	Zinsanteil Z	... Zinsen die für das (Rest-)Darlehen fällig sind
	Tilgungsanteil T	... Teil der Zahlung die für die Rückzahlung

Jede Annuität A lässt sich zerlegen in den Zinsanteil Z und den Tilgungsanteil T. Es gilt also

$$A = T + Z$$

Bezeichnungen

n ... Laufzeitin Tilgungsperioden
i ... Zinssatz
q ... Aufzinsfaktor; $q = 1 + i$
S_k ... (Rest-)Schuld am Ende der k-ten Tilgungsperiode
A_k ... Annuität für die k-te Tilgungsperiode; $A_k = Z_k + T_k$
Z_k ... Zinsen für die k-te Tilgungsperiode
T_k ... Tilgungsbetrag für die k-te Tilgungsperiode

Es gilt

$$Z_k = S_{k-1} * i \quad \text{und} \quad S_{k-1} - T_k$$

3.2 Annuitätentilgung

Annuitätentilgung kann als Sonderfall der Rentenrechnung behandelt werden.

$$\text{Schuldsumme } S \longrightarrow \text{ aufgezinste Schuldsumme } Sq^n$$

Endwert der Annuitätenrente

$$A * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert der Annuitätenrente

$$A * \frac{q^n - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^n}$$

Also gilt

$$S = A * \frac{q^n - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^n} \quad \text{bzw.} \quad Sq^n = A * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow A = S * \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} \ldots \text{ Annuität in Abhängigkeit der Laufzeit}$$

$$n = \frac{\ln A - \ln(A - S(q-1))}{\ln q} \ldots \text{ Laufzeit in Abhängigkeit der Annuität}$$

Beispiel

1. $S = 500000[€], i = 0.06, q = 1.06, n = 5$

$$A = 500000 * \frac{1.06^5 * (1.06 - 1)}{(1.06)^5 - 1} = \underline{\underline{118698.20€}}$$

2. $S = 500000[€], i = 0.06, q = 1.06, A = 60000[€]$

$$n = \frac{\ln 60000 - \ln(60000 - 500000 * 0.06)}{\ln 1.06} = \underline{\underline{11.896[\text{Jahre}]}}$$

$n = 12$[Jahre], wobei im letzten Jahr eine verminderte Annuität von nur

$$A_{12} = S_{11} * i + S_{11} = S_{11}q = \left(S_q^{11} - \frac{q^{11} - 1}{q - 1} * A\right) q = \underline{\underline{53901.76[€]}}$$

zu zahlen sind

Satz
Bei Annuitätentilgung einer Schuldsumme S zum Kreditzinssatz i berechnet sich

1. bei vorgegebener Laufzeit n die Annuität A über

$$A = S * \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1}$$

2. bei vorgegebener Annuität A die Laufzeit n über

$$n = \frac{\ln A - \ln(A - S(q - 1))}{\ln q}$$

3. Die Restschuld S_k nach k Tilgunsperioden über

$$S_k = \underbrace{Sq^k}_{\text{aufgezinste Schuld}} - \underbrace{A * \frac{q^k - 1}{q - 1}}_{\text{Wert der Tilgung zum Zeitpunkt } k}$$

Bemerkung
Falls in (2) kein ganzzahliger Wert für n berechnet wird, so wird in der Regel auf ein ganzzahliges n aufgerundet und nach der letzten Tilgungsperiode eine verminderte Abschlussannuität von

$$A_n = S_{n-1} * q = S * q^n - A * \frac{q}{q-1} * (q^{n-1} - 1)$$

gezahlt.

3.3 Effektivzinssatz

$S_B = 600TE, S_N = 96\% * 600TE = 576TE \qquad S_B q_{nom}^{20} = S_N q_{off}^{20}$

$$q_{eff} = \sqrt[20]{\frac{S_B}{S_N}} q_{nom} = \sqrt[20]{\frac{1}{0.96}} * 1.07 = 1.0722 \Longrightarrow i_{eff} = \underline{\underline{7.22\%}}$$

5 Folgen und Reihen

1 Zahlenfolgen

Definition

Eine Funktion $a : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Zahlenfolge.

Bezeichnung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n := a(n), n \in \mathbb{N}$

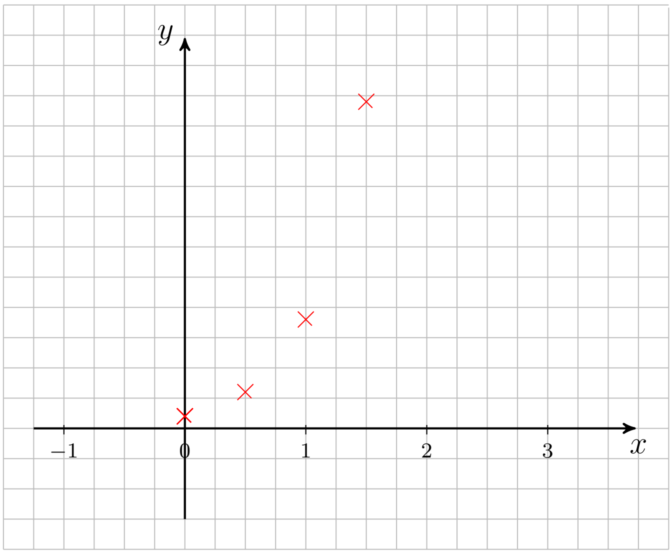
Beispiel

1. $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ (arithmetische Folge)
   $\longrightarrow a_0 = 1, a_1 = a_0 + 2 = 3, a_2 = a_1 + 2 = 5, a_3 = a_2 + 2 = 7$

   rekursiv definierte Zahlenfolge, d.h. auf den/die Vorgänger bezogen

2. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_0 = 1, a_1 = 1 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ (nicht geometrisch/ arithmetisch)
   $\longrightarrow a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, \dots$

3. $a_n = 3^n * 2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ (geometrische Folge)
   $\longrightarrow a_0 = 2, a_1 = 6, a_2 = 18, a_3 = 54, \dots$ explizit definierte Zahlenfolge



Explizite Zahlenfolgen sind definiert durch

- nach unten beschränkt, z.B. durch $K = 0$
- nach oben unbeschränkt
- streng monoton wachsend

1.1 Eigenschaften von Folgen

Definition

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt

- geometrisch, falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konstant ist
- arithmetisch, falls $a_{n+1} - a_0 =: d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konstant.
- konstant, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = konst$
- alternierend, falls sich jeweils das Vorzeichen ändert. Z.B.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^{n+1} * n$$

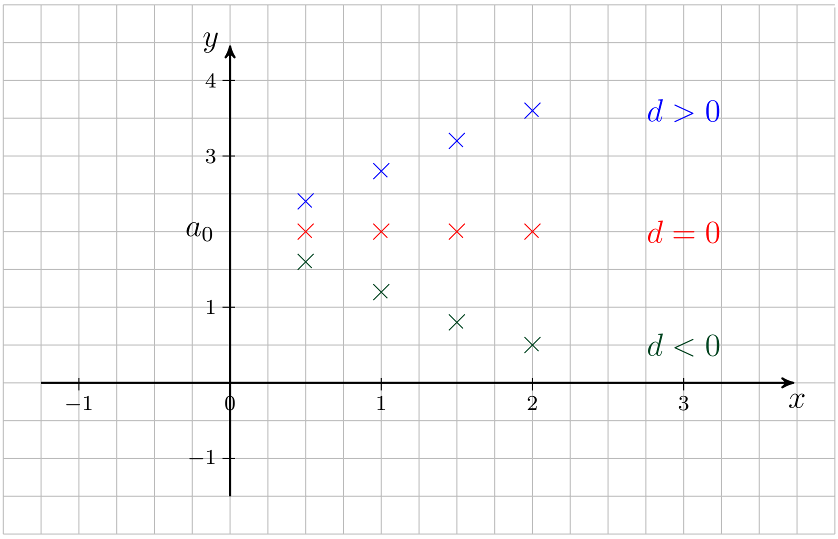
Satz

1. **Geometrische Folge**
   Eine geometrische Folge hat stets die Form
   - $a_{n+1} = a_n * q$ (rekursive Vorschrift)
   - $a_n = a_0 * q^n$ (explizite Vorschrift)

   Es gilt:
   Die Geometrische Folge mit $a_0 > 0$ ist
   - monoton wachsend für $q \geq 1$
   - monoton fallend für $0 < q < 1$
   - altenierend (d.h. abwechselndes Vorzeichen) für $q < 0$
   - beschränkt, falls $|q| \leq 1$

2. **Arithmetische Folge**
   Eine Arithmetische Folge hat stets die Form

   - $a_{n+1} = a_n + d$ rekursive Form
   - $a_n = a_0 + nd$ explizite Form



   Es gilt
   Eine Arithmetische Folge ist

   - monoton wachsend für $d \geq 0$
   - monoton fallend für $d \leq 0$
   - nach unten beschränkt für $d \geq 0$
   - nach oben beschränkt für $d \leq 0$

1.2 Konvergenz

Definition

1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt konvergent mit dem Grenzwert a, wenn es zu jedem (beliebig viele) $\epsilon > 0$ einen von ϵ abhängigen Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$
   Bezeichnung:
   $$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{oder } a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

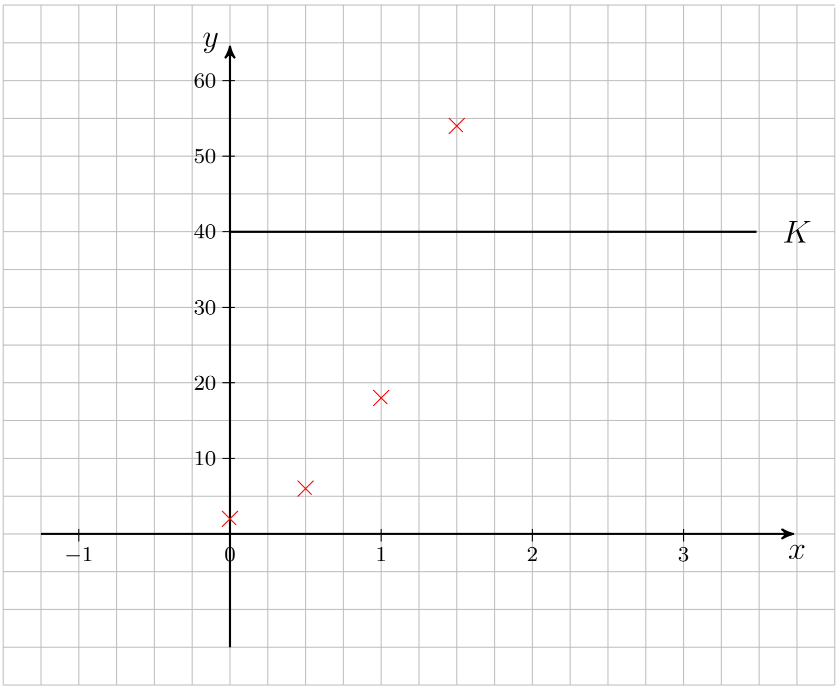
2. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ so heißt (a_n) Nullfolge
3. Ist (a_n) nicht konvergent, dann heißt (a_n) divergent
4. Falls (a_n) divergent ist und zu jedem $K > 0$ einen Index gibt, so dass
   - $a_n > K$ für $n \geq n_0$ bzw.
   - $a_n < K$ für $n \geq 0$

   so heißt (a_n) bestimmt divergent nach $+\infty$ im *Fall a* bzw. nach $-\infty$ im *Fall b*

   Bezeichnung: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ im *Fall a* bzw. $\lim_{n\to\infty} = -\infty$ im *Fall b*

Beispiel

1. $a_n = 2 * 3^n, n = 0, 1, 2, \ldots$



bestimmt divergent nach unendlich

$$\lim_{n\to\infty} (2 * 3^n) = \infty$$

2. $a_n = (-\frac{1}{2})^n$
   Vermutung: Grenzwert ist $a = 0$

   Nachweis
   Sei $\epsilon > 0$ beliebig (klein). Zu zeigen ist $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\epsilon)$. Wir bestimmen $n_0(\epsilon)$

   Einsetzen

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \epsilon \Rightarrow n * \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\epsilon \Rightarrow \underline{\underline{n > \frac{\ln\epsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\ln\epsilon}{\ln 2}}}$$

   Also wählen wir

$$n_0(\epsilon) = \left[-\frac{\ln\epsilon}{\ln 2}\right] + 1$$

   dann gilt $|(-\frac{1}{2}) - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. D.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \underline{\underline{0}}$$

3. $a_n = (-1)^n$
   Behauptung: a_n ist divergent

   Nachweis
   Indirekt: Angenommen es gibt ein a, so dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon)$ existiert mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq n_0$, also auch $|a_{n+1} - a| < \epsilon$ für $n \geq n_0$. Damit gilt

$$|a_{n+1} - a| = \left|\underbrace{a_{n+1} - a}_{x}\underbrace{+a + a_n}_{y}\right| = \left|\underbrace{a_{n+1} - a}_{x}\underbrace{-(a_n - a)}_{-y}\right|$$

$$|a_{n+1} - a - (a_n - a)| \leq \underbrace{|a_{n+1} - a}_{<\epsilon} + \underbrace{|a_n - 1|}_{<\epsilon} < 2\epsilon < 1 \text{ für alle } \epsilon \in (0, 0.5)$$

$$\text{Aber: } |a_{n+1} - a_n| = |(-1) - 1| = 2 \qquad 2 < 1 \text{ Widerspruch!}$$

   Also ist die Behauptung wahr.

1.3 Konvergenzkriterien für Folgen

Beispiel

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1)}_{=1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=0} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

2. $a_n = \frac{10^6}{n} \quad n = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^6}{n}\right) = 10^6 * \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{0}}$$

3. $a_n = \frac{n^2+1}{n^3} \quad n = 1, 2, \ldots$

   a) Versuch 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3} = \frac{\lim_{n\to\infty}(n^2+1)}{\lim_{n\to\infty} n^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

   Das ist nicht definiert, da ∞ keine Zahl ist. Weitere unbestimmte Ausdrücke sind $\frac{0}{0}, 0 * \infty$. „Definierte“ Ausdrücke: $\frac{0}{\infty} = 0; \frac{\infty}{0} = \infty; \infty * \infty = \infty$

   b) Lösung: In Zähler und Nenner die höchste Potenz ausklammern

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3} = \frac{1}{n} * \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) * \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 0 * 1 = \underline{\underline{0}}$$

4. $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$

$$\frac{n^2+1}{2n^2+5} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}$$

5. $a_n = \frac{1}{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \ldots; a_n \geq 0$ wobei $a_n = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \ldots$
   Da $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \underline{\underline{0}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

6. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

    - $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend

    - $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ existiert (Eulersche Zahl)}$$

1.4 Das Cobweb-Modell

- $A_n = ap_{n-1} - b \quad a, b > 0$ Angebot
- $N_n = c - dp_n \quad c, d > 0$ Nachfrage
- Gleichgewicht: Der Preis reguliert sich am Markt so, dass $A_n = N_n$

Wie ist die Preisentwicklung im Laufe der Jahre, wenn im Jahr 1 der Preis p_1 gezahlt wurde? (Gegeben: $a, b, c, d > 0$)

Lösung
$A_n = N_n$ liefert

$$ap_{n-1} - b = c - dp_n \Rightarrow dp_n = c + b - ap_{n-1} \Longrightarrow p_n = \frac{b+c}{1} - \frac{a}{d} p_{n-1} \quad n = 2, 3, \ldots$$

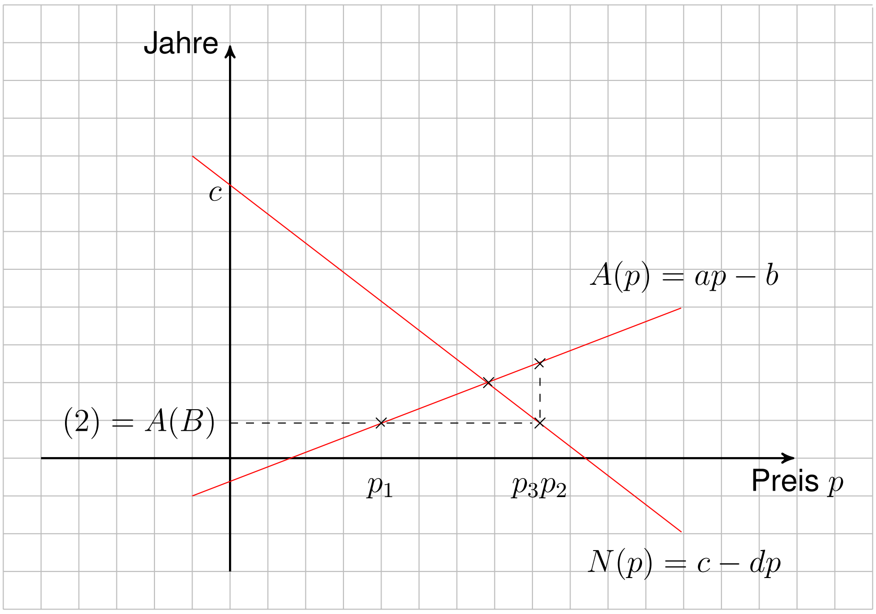
oder

$$p_n = \frac{b+c}{a+d} + \left(-\frac{a}{d}\right)^n \left(1 - \frac{b+c}{a+d}\right) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Langfristige Preisentwicklung
Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \begin{cases} \frac{b+c}{a+d} & \text{falls } a < d \\ \text{divergent} & \text{falls } a > d \end{cases}$$

1.4.1 Grafische Lösung



2 Reihen

Gegeben: $(a_n)\dots$ Zahlenfolge
Betrachtung von sogenannten Partialsummen

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Ist die so konstruierte neue Zahlenfolge (s_n) konvergent?

Beispiel

1. $a_n = (\frac{1}{2})^n \quad a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, \dots$

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- $s_0 = a_0 = 1$
- $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$
- $s_n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k, \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$

Konvergiert (s_n)?
$\Longrightarrow$ Ja: $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$

2. $a_k = \frac{1}{2} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = (n+1)\frac{1}{2} \longrightarrow \infty$$

3. $a_k = \frac{1}{k} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \Rightarrow a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3} \ldots$
   - $s_1 = a_1 = 1$
   - $s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
   - $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2*\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\geq 4*\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq 8*\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(s_n) = \infty$$

Dieser Wert ist divergent.

Definition
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

die n-te Pertialsumme der Folge (a_k). Die so entstandene Folge der Partialsumme heißt unendliche Reihe und wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Spezialfälle

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \ldots$ geometrische Reihe
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ldots$ harmonische Reihe

   Falls die Zahlenfolge (a_k) alternierend ist, also ein abwechselndes Vorzeichen besitzt, dann heißt

3. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ldots$ alternierende Reihe

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k * \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

Definition

1. Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_0 + \dots + a_n) =: s$$

   existiert.
   Bezeichnung: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$

2. Falls sogar $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ existiert, also $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beispiel

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 2$, denn

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = (-2)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \longrightarrow 2$$

   Die Reihe ist konvergent (sogar absolut konvergent) und hat den Grenzwert 2.

2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k * \frac{1}{k} \dots$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k * \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{also divergent}$$

2.1 Kriterien für die Konvergent/Divergenz von Reihen

Beispiel

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+10^9}$

$$\Rightarrow a_k = \frac{k^2}{k^2 + 10^9} \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{1 + \frac{10^9}{k^2}}\right) \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k^2+10^9}^{k^2} = \infty \quad \text{divergent}$$

2. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$
   $a_k = (-1)^k$ ist divergent $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ ist divergent

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} * (-1)^{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

   - $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = (-1)^{k+1} * \frac{1}{k} \longrightarrow 0$ ist eine Nullfolge
   - (a_k) ist alternierend
   - $|a_k| = \frac{1}{k}$ ist monoton fallend

$$\text{Leibnitz Kriterium} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} * \frac{1}{k} \text{ ist konvergent}$$

Beispiel

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ für $x \in \mathbb{R}$

$$a_k = \frac{x^k}{k} \longrightarrow \begin{cases} \text{divergent} & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

Also Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ist divergent für $|x| > 1$.
Für $x = 1 \rightarrow$ harmonische Reihe $\rightarrow$ divergent.
Für $x = -1 \rightarrow$ alternierende harmonische Reihe $\rightarrow$ Konvergent.

Quotientenkriterium: $a_k = \frac{x^k}{k}; a_{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{k+1}}{\frac{x^k}{k}}\right| = \left|\frac{x^{k+1} * k}{k+1 * x^k}\right| = \left|\frac{k}{k+1} * x\right| = \frac{k}{k+1}|x| \longrightarrow |x| < 1$$

Also $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ist konvergent.

a) Alternative: **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|} = \sqrt[k]{\left|\frac{|x|^k}{k}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[x]{k}} \longrightarrow |x| < 1$$

b) Alternative: **Majorantenkriterium**

$$0 < a_k = \frac{x^k}{k} \leq x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ist konvergent für $|x| < 1$ (geometrische Reihe)
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ist konvergent ($\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ ist konvergente Majorante.

Beispiel Achilles und die Schildkröte
Wettlauf: Achilles läuft doppelt so schnell wie die Schildkröte, $10\frac{m}{s}$. Die Schildkröte bekommt $10m$ Vorsprung.

Nr. des Zeit-Schritts	0	1	2	3	4
Position Achilles	0	10	15	17.5	18.75
Position Schildkröte	10	15	17.5	18.75	...
Zurückgelegter Weg A.		10	5	2.5	1.25
Zurückgelegter Weg S.		5	2.5	1.25	0.675

Abgelaufene Zeit bis zum k-ten Zeitschritt (einschließlich)

$$t_k = \sum_{j=1} k \left(\frac{1}{2}\right)^j s = 1s + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s + \cdots + (\frac{1}{2})^{k-1} s$$

$$\lim_{n \to \infty} t_k = 2$$

2.2 Potenzreihen

Definition

Unter einer Potenzreihe versteht man eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \ldots$$

Die reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Beispiel

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ (geometrische Reihe) ist eine Potenzreihe
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \ldots$ (exponential Reihe) ist eine Potenzreihe
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots$ (Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$)

Definition
Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ konvergiert heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Beispiel

1. geometrische Reihe: Konvergenzbereich: $\{x : |x| < 1\}$
2. exponential Reihe: Konvergenzbereich: $\{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Bemerkung
Der Entwicklungspunkt $x = x_0$ (i.d. R. $x_0 = 0$) gehört immer zum Konvergenzbereich.

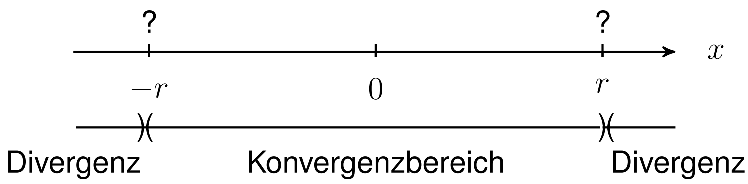
Satz (Konvergenzverhalten einer Potenzreihe)
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ gibt es eine positive Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit folgenden Eigenschaften

1. Die Potenzreihe konvergiert überall im Intervall $|x| < r$
2. Die Potenzreihe divergiert für alle x mit $|x| > r$
3. Falls $|x| = r$, dann können keine allgemeingültigen Aussagen gemacht werden. Hier müssen Einzeluntersuchungen gemacht werden

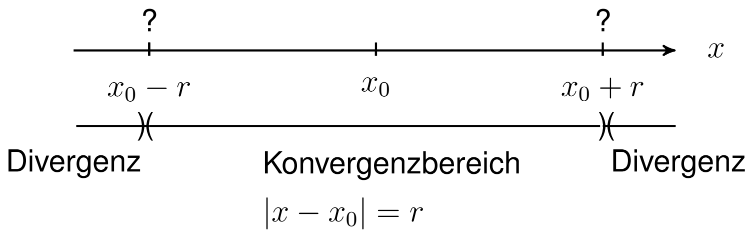
Bemerkung

1. Falls die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ nur für
   - $x = 0$ konvergiert, dann wird der Konvergenzradius $r = 0$ gesetzt.
   - für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann setzen wird $r = \infty$.

2. Grafisch



3. Die Aussagen gelten entsprechend für Potenzreihen mit allgemeinen Entwicklungspunkt x_0, also für $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n$



Beispiel

1. geometrische Reihe: $\longrightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$
2. exponential Reihe: $\longrightarrow r = \infty$

Um den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ zu bestimmen, wenden wir das Quotienten oder Wurzelkriterium an auf

$a_n = \alpha_n x^n, n = 0, 1, 2, \ldots$

$a_{n+1} = \alpha_{n+1} x^{n+1}$

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1} x^{n+1}}{\alpha_n x^n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1} * x}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| * |x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right) * |x| < 1$$

Damit ist die Reihe konvergent. Also folgt

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| =: r$$

Satz (Konvergenzradius r einer Potenzreihe)
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ lässt sich nach der Formel

1. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|$
2. $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$ berechnen

Voraussetzungen
Alle Ausdrücke sind erklärt und die Grenzwerte sind erklärt (d.h. sie existieren)

Beispiel

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \longrightarrow \alpha_n = 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\alpha_{n+1} = 1, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = \underline{\underline{1 = r}}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow \alpha_n = \frac{1}{n!}$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)n*(n-1)+\cdots*1}{n(n-1)*\cdots*1}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \underline{\underline{+\infty = r}}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \pm \ldots \longrightarrow \alpha_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

$$\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = \underline{\underline{1 = r}}$$

Konvergenzbereich: $|x-1| < 1$

Bemerkungen

1. Potenzreihen besitzen in vieler Hinsicht ähnliche Eigenschaften wie Polynomfunktionen. Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich beispielsweise gliederweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden (auch differenzieren und integrieren).

2. Eine vorgebende Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen in eine Potenzreihe entwickeln (Taylor-Reihe), so dass $f(x) = \sum_{n=0} \infty \alpha_n x^n$.
   Innerhalb des Konvergenzbereiches dieser Taylor-Reihe kann die Funktion f dann durch das sogenannte Taylor-Polynom approximiert werden,;
   $f(x) \approx \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, |x| < r$

Beispiel
$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, x \in \mathbb{R} \ldots$ Taylorpolynom vom 2. Grad

Index

Äquivalenzprinzip, 134
Äquivalenzrelation, 16
äquivalente Bedingung, 51

Abbildung, 19
abgezinstes Wertpapier, 127
Abschlussannuität, 137
absolut konvergent, 148
affine Abbildungen, 121
algebraische, 102
alternierend, 140
alternierende Reihe, 147
Anfangskapital, 123
Annuität, 134
Annuitätenrente, 135
Annuitätentilgung, 135, 136
antisymmetrisch, 16
Anzahl der Zinsperioden, 124
Argument, 20, 107
Arithmetische Folge, 141
asymmetrisch, 16
Aufzinsfaktor, 124
Aufzinsungsfaktor, 125

Barwertformel, 126
Basis, 75
bestimmt, 142
Betrag, 65, 105
Betragsfunktion, 31
bijektiv, 22
binäre, 14

Definitionsbereich, 20
Diagonalmatrix, 88
Differenz, 6, 7
Direkter Beweis, 50
disjunkt, 5, 8
divergent, 142, 143
Durchschnitt, 6

echt gebrochen, 38
echte Teilmenge, 4
Effektivzins, 129
Eigenwert, 120
Eigenwerte, 93
Einheitsmatrix, 57
Einheitsvektor, 68
Element, 4
elementare Umformungen, 84
Endkapital, 123
Entwicklungspunkt, 151
explizit definierte Zahlenfolge, 139
explizite Vorschrift, 140

Falk-Schema, 60
Fallunterscheidung, 33
Funktion, 19
Funktionswert, 20

Geometrische Folge, 140
geometrische Reihe, 147
gerade, 46
Gläubiger, 134
Gozinto, 53
Grenzwert, 141
Grundgesamtheit, 3

harmonische Reihe, 147, 149
Hauptdiagonalargumente, 88
Hauptwert, 107
Heaviside-Funktion, 30
hinreichende Bedingung, 50, 51
Hintereinanderausführung, 36

Identität, 25
imaginäre Achse, 102
imaginäre Einheit, 102
Imaginärteil, 102
Indexmenge, 9
Indikatorfunktion, 30
Induktionsanfang, 48, 49
Induktionsschritt, 48, 49
Infix-Schreibweise, 13
injektiv, 41
Input-Output-Matrix, 55
inventierbar, 95
inverse Matrix, 95
inverse Relation, 14
Inverse von A, 95
Investition, 125
irreflexiv, 16

Jahreszinssatz, 129

Kanonische Basis, 75
Kapitalentwendung, 134
Kardinalität, 9
Kartesische, 102
Kartesische Produkt, 11
Knoten, 14
Koeffizienten der Potenzreihe, 150
Koeffizientenvergleich, 37
Komplement, 6
komplexe Expotentialfunktion, 122
komplexe Funktion, 121
komplexen Zahlenebene, 101
Komposition, 15, 25
konjugiert komplexe Zahl, 103
konvergent, 141, 148
Konvergenzbereich der Potenzreihe, 151
Konvergenzradius, 151
Koordinaten, 75
Kräfteparallelogramm, 64
Kreuzprodukt, 98

Laufzeit, 134
leere Menge, 3
Leibnizsche Zinseszinsformel, 125
LEONTIEF-Modell, 53
linear abhängig, 72
linear unabhängig, 72
lineare Hülle, 78
lineare komplexe Funktion, 121
lineares Gleichungssystem, 79
Linearkombination, 69

m x n, 55
Mächtigkeit, 9
Majorantenkriterium, 150
Matrizen, 53
Matrizenkalkül, 64

n-stellige Relation, 12
n-te Partialsumme, 147
n-Tupel, 12
nach oben beschränkt, 43
nach unten beschränkt, 43

Nebendiagonalargumente, 88
nicht trivale Lösungen, 71
Nominalzins, 129
Nominalzinssatz, 129
Normalform, 102
Nullfolge, 142
Nullmatrix, 56
Nullstellen von f, 34
Nullvektor, 68

Ordnungsrelation, 18

Parallelepiped, 99
Partialsummen, 146
Periodenzins, 129
Phase, 107
Polarform, 108
Polarkoordinaten, 107
Polynom, 33
Polynomdivision, 36, 37
Potenzmenge, 8
Potenzreihe, 150
Produkt, 15
Proportionalitätsfaktor, 123
punktweise Multiplikation, 36

q-fache Nullstelle, 38
quadratisch, 88
Quadtupel, 12
Quotientenkriterium, 149

rationale Funktion, 33
Realteil, 102
reelle Achse, 102
reelle Funktion, 29
reflexiv, 16
regulär, 95
rein imaginäre Zahl, 102
rekursiv definiert Zahlenfolge, 139
rekursive Vorschrift, 140
Relationsgraphen, 14
Relationspfeile, 14
Rentenperiode, 129

Schlinge, 14
Schuldner, 134
Skalar, 58
Skalarprodukt, 67
Spaltenvektor, 59, 63
Spat, 99
Spatprodukt, 99
Standardbasis, 75
streng monoton fallen, 40
streng monoton wachsend, 40
surjektiv, 22
symmetrisch, 16
Symmetrische Differenz, 7

Taylor-Reihe, 154
Teilmenge, 4
Tilgungsanteil, 134
Tilgungsperiode, 134
Tilgunsperioden, 136
transitiv, 16
Trippel, 12
trivale Lösung, 71

unecht gebrochen, 38
unendliche Reihe, 147
ungerade, 46
Unterjährliche Verzinsung, 129

Vektor, 63
Vektorprodukt, 98
vektorwertige Funktion, 22
Venn-Diagramm, 5
Vereinigung, 6
Verknüpfung, 25

Vorschüssige Rentenbarwertformel, 134
vorschüssige Rentenrate, 134
Vorschüssige Rentenwertformel, 134

Wertebereich, 20
Widerspruchsbeweis, 50
Winkel, 107
Winkeltreue Abbildungen, 121
Wurzelkriterium, 150

Zahlenfolge, 139, 147
Zeiger, 102
Zeilenvektor, 59, 63
Zerlegung in Linearfaktoren, 119
Zinsanteil, 134
Zinsperiode, 123
Zinsperioden, 124, 129
Zinsrate, 123
Zinssatz, 123
Zinsterminen, 128