物理…原理 #20 19.12.17

6.1.1. スカラー場の座標変換

Def 6.1. V: finite real vect. sp.
$\Phi \subset V$: open
$F : \Phi \to \mathbb{R}$
$k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ & $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

(e_i) : ONB of V
$\downarrow_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$x \mapsto \sum_i x^i e_i = \downarrow_V(x) := (x^1, \dots, x^n)$
$\hat{F} := \downarrow_V(\Phi) \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \hat{F}(x^1, \dots, x^n) := F(\sum_i x^i e_i)$

Then, $\hat{F} = \downarrow_V(\Phi) \subset \mathbb{R}^n$ C^k級
$\Rightarrow F : \Phi \subset V$ C^k級
$:\Leftrightarrow \{F : \Phi \to \mathbb{R} : \hat{F} \in C^k\text{級}\}$

$\downarrow_V$: $\Phi \to \mathbb{R}^n$, $\hat{F} : \downarrow_V(\Phi) \to \mathbb{R}$, $F = \hat{F} \circ \downarrow_V$
$\downarrow_{\text{Euc}}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\hat{F} : \downarrow_V(\Phi) \to \mathbb{R}$
C^k級を持ち

6.1.2. 双対形式

Def. V^* : dual sp. of V

$\Phi : \Phi \longrightarrow \bigwedge^p V^*$
: 点 $x \in \Phi$ 毎に x 対応 x 多重線形交代写像
(∘ p 次双対形式)

★ その意味

(e_i) を V の ONB. $\{f^i\}$ を双対 V 上線形関数.
$\hat{f}^i \circ x$ は $x \in \Phi$ に対する双対基底 x 線形.
$(\hat{f}^i(x)) = -(\hat{f}x^i)$

Φ は (e_i) の dual basis ⊗ $\{\hat{f}^i\}$ は $\{\hat{f}^i\}$.
$\hat{E}_{\mathbf{i}} := \{\hat{f}^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{f}^{i_p} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_p \le n\}$
は $\bigwedge^p V^*$ の basis を形成.
点 x は Φ 上 p 次双対形式 Φ は

$$\Phi(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \Phi_{i_1 \dots i_p}(x) \, \hat{f}^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{f}^{i_p} \quad ; x \in \Phi.$$

$\Phi_{\mathbf{i}}$ は関数 Φ 毎の x 依存. (6.2)

$\hat{E}_{\mathbf{i}}$ を基底とする.

例. $V = \mathbb{R}^3$, $p = 2$
$\hat{E}_2 = \{\hat{f}^1 \wedge \hat{f}^2, \hat{f}^1 \wedge \hat{f}^3, \hat{f}^2 \wedge \hat{f}^3\}$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi_{12}(x) \hat{f}^1 \wedge \hat{f}^2 \\ &+ \Phi_{13}(x) \hat{f}^1 \wedge \hat{f}^3 \\ &+ \Phi_{23}(x) \hat{f}^2 \wedge \hat{f}^3\end{aligned}$$

?

$\Phi_{12}(x) = \Phi(x)(\hat{f}x^1, \hat{f}x^2)$

⊗ $(\hat{f}x^i) := -(\hat{f}^i x^i) \underset{?}{=} (\hat{f}^i(x)) = (\langle e_i | x \rangle$ dual basis$)$.

∵ 1 行目 P.133 の 3 より. $\hat{f}^i : \Phi \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{f}^i(x)(1) &= \hat{f}^i(1, x) \\ &= \hat{f}^i(1, \sum_j x^j e_j) \\ &= \sum_j x^j \hat{f}^i(1, e_j) \\ &= \sum_j x^j \frac{\partial}{\partial x^j} f(1) \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} f(x) \, \delta^i{}_j(1) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \, \delta^i(1).\end{aligned}$$

$\therefore \hat{f}^i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \, \delta^i$. (3.25).

$\hat{f}^i : \Phi \to \mathbb{R}$

$\hat{f}^i(x) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(x) \, \delta^j$

$\frac{\partial}{\partial x^i}$

$= \sum_j \sum_k \delta^i{}_k \, \delta^j$

$= \delta^i$

P.134

$\hat{f}^i(x) = \delta^i$

$f^i = x^i$

$\hat{f}x^i(x) = \delta^i$

Def 6.2. Φ : 点 x 毎に双対形式
$k \in \{0\} \cup \mathbb{N}^*$ (∞)

Φ : C^k級 ; $\Phi : \Phi \to K$
: $\Leftrightarrow \forall (i_1, \dots, i_p)$ with $1 \le i_1 < i_2 \quad \forall i_{i_1 \dots i_p} \in C^k(\Phi)$
$A^p(\Phi) := \{\Phi : \Phi$ 点 x 毎に p 次双対形式 $\mid \forall \Phi : C^k$級$\}$

6.2.1. 座標テンソル場の対する外微分演算

★ $A^p(\Phi)$: dual vect sp. ⟶ 普通 vect. sp.
$A(\Phi) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} A^p(\Phi)$
$= \{(\Phi_0, \dots, \Phi_n) \mid \forall \Phi_i \in A^p(\Phi)\}$

$\dim V = 7$.
$\{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, x^2 z, x^2 z^2\}$

$\dim A^2(\Phi) = 21$

$\dim A(\Phi) = 28$

$x^2 y^2 z^2 x^2 z^2 z^2 z^2$

$x^2 z^2 = z^2$

以下まとめる. 2 E.L.
$A^k(\Phi) := C^k_{\mathbb{R}}(\Phi) = \{f : \Phi \to \mathbb{R} : C^k\text{級}\}$
なる.
$A^1(\Phi) = \{\omega : \Phi \to \bigwedge^1 V^* : C^k\text{級}\}$
は 点 $x \in C^k$級 双対ベクトル場 と呼ばれる.

(復習) Def 2.24 (P.121)
V : fin. dim. real sp. over K.
$\Phi \subset V$: open.
$f : \Phi \to K \in C^1(\Phi)$.

$d f : \Phi \to V^*$; f の双対形式
$x \mapsto d f(x) : V \to K$; x における f の微分演算.
$\quad v \mapsto d f(x)(v) = f'(x, v)$

★ $d : A^0(\Phi) \to A^1(\Phi)$
$f \longmapsto d f$

は 点 x 毎に V^* 上の「線形」
p 次微分形式 ⟶ $(p+1)$ 次微分形式
と考える.

Thm 1.5. 次の $(d.1) \sim (d.4)$ を満たす d の唯一つ存在.
(d.1). $\forall p \in \{0, \dots, n\}$ $d \in L(A^p(\Phi) \to A^{p+1}(\Phi))$
$\text{とにて } A^{n+1}(\Phi) := \{0\}$.
(d.2) $\forall f \in A^0(\Phi)$ $d f$ は f の微分演算.
(d.3) $\forall \phi \in A^p(\Phi)$, $(p = 0, \dots, n)$
$\forall \psi \in A^q(\Phi)$, $(0 \le q \le n)$,
$d(\phi \wedge \psi) = (d\phi) \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge (d\psi)$
(d.4) $\forall \phi \in A^p(\Phi)$ $(p = 0, \dots, n)$ $d(d\phi) = 0$.

proof?
(一意性) …
$d(d\phi \wedge \dots \wedge d\phi^p)$
$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} d\phi^1 \wedge \dots \wedge d(d\phi^k) \wedge \dots \wedge d\phi^p$ ⟶ (*)
$\quad \Downarrow$
⊗ Φ は $\mathbb{R}$ 上線形演算
(d.4) より. (*) = 0. I.T.

$$d\phi = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p} (d\phi_{i_1 \dots i_p}) \wedge d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_p} \quad (6.7).$$

…
(存在性) …
$\forall \phi \in A^p(\Phi)$. $d\phi$ を (6.7) で定義.

Def 6.4.
Thm 6.3 により d を $A(\Phi) \circlearrowleft$ 作用 $\mathbb{R}$ 線形演算
$\forall \phi \in A^p(\Phi) \subset A^q(\Phi)$ $d\phi$ を外微分 という

Prop 6.5. $(d\phi \wedge \psi)$ の定義 Φ.

(d.1) $\dim V = 3$. $p = 2$.

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_{23}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

(d.2) $\forall f \in A^0(\Phi)$ $d f$ は f の微分演算.

(d.3) $\forall \phi \in A^p(\Phi)$, $(p = 0, \dots, n)$
$\forall \psi \in A^q(\Phi)$, $(0 \le q \le n)$,
$d(\phi \wedge \psi) = (d\phi) \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge (d\psi)$

(d.4) $\forall \phi \in A^p(\Phi)$ $(p = 0, \dots, n)$ $d(d\phi) = 0$.

6.2.2. 座標テンソル場の対する外微分演算

$$\begin{tikzcd}
\text{非変} \arrow[r, "\text{im}_p"] & \text{変変} \\
A^p(\Phi) \arrow[r] \arrow[d] & A^p(\Phi \times V) \arrow[d] \\
A^{p+1}(\Phi) \arrow[r, "\text{im}_{p+1}"'] & A^{p+1}(\Phi \times V)
\end{tikzcd}$$

$\text{im}_p : \bigwedge^p V^* \longrightarrow \bigwedge^p V : \text{iso}$
s.t. $\text{im}_p(f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p}) = (\underset{\text{P.84}}{(f^{i_1})^{\wedge \dots \wedge (f^{i_p})}})$

$$\begin{tikzcd}
A^p(\Phi) \arrow[r, "\text{im}_p"] & A^p(\Phi \times V) \\
A^p(\Phi \times V) \arrow[u, "\text{im}_p"] \arrow[r, "\text{im}_p"] & A^p(\Phi \times V) \arrow[u, "\text{im}_p"'] \\
A^p(\Phi \times V) \arrow[u, "\text{im}_p"] \arrow[r, "\text{im}_p"] & A^p(\Phi \times V) \arrow[u, "\text{im}_p"']
\end{tikzcd}$$

$\cong_{\text{im}_p}$ $\bigwedge^p V^* \cong_{\text{im}_p} \bigwedge^p V$

$\mathcal{F} : A(\Phi \times V) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} A_p(\Phi \times V)$
は $\mathbb{R}$ 上線形演算.

★ $\mathcal{F}$ の基礎的な作用.

…
他方に
$(\mathcal{F}\phi)(x) = \sum_{i_1 \dots i_p} (\phi_{i_1 \dots i_p}(x)) \, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$
$= \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi^{i_1 \dots i_p}(x)}{\partial x^j}\right) \dot{x}^j \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$?

P.97 計算ルールより

6.2.3. Euc. vec. sp. ハイパ.

V : Euc. vec. sp.
$E(e_i) = 1$
$(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$
$\forall \phi \in \bigwedge^p V^*$ の基底 $\forall i_{i_1 \dots i_p}$
$\text{im}_p \phi \in \bigwedge^p V$ の ϕ $\quad \phi^{i_1 \dots i_p}$
は K 上.