物理の原理 #15 19'11'06 水

4.7.5. 空間的対称性

$$A \in GL(V) := \{T \in \mathcal{L}(V) \mid T : \text{bij.}\}$$
$$= \{T : V \to V : \underset{\text{Iso.}}{\underbrace{\text{lin. bij.}}}\}$$

$$L(A) : Map(I;V) \longrightarrow Map(I;V)$$
$$X \longmapsto L(A)X : I \longrightarrow V$$
$$t \longmapsto (L(A)X)(t) := A(X(t))$$

A の lin. 性により，$L(A)$ は lin. であり，bij.

∵ $L(A)$: lin.

$$L(A)(aX+bY) \overset{?}{=} aL(A)X + bL(A)Y$$

∵ $Map(I;V)$: vec.sp

∵ p.210

$$L(A)(aX+bY)(t) = A((aX+bY)(t)).$$

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{aX+bY} & V & \xrightarrow{A} & V \\ t & \longmapsto & (aX+bY)(t) & \longmapsto & A((aX+bY)(t)) \end{array}$$

$= A(aX(t)+bY(t))$ ∵ V : vec.sp.

$= aA(X(t)) + bA(Y(t))$ ∵ A : lin.

$= a(L(A)X)(t) + b(L(A)Y)(t)$

$= (aL(A)X + bL(A)Y)(t)$

$\quad \in Map(I;V)$: vec.sp.

$L(A)$: surj.

$Y \in Map(I;V) \Rightarrow {}^{\exists}X \in Map(I;V)$ s.t. $L(A)X = Y$

$$X : I \longrightarrow V$$
$$t \longmapsto X(t) := A^{-1}(Y(t)).$$

と定義すると，

$$(L(A)X)(t) = A(X(t)) = A(A^{-1}(Y(t)))$$
$$= Y(t).$$

$\therefore L(A)X = Y$

$L(A)$: inj.

$\ker L(A) \overset{?}{=} \{0\}$

$L(A) : Map(I;V) \to$ //

$f : X \to Y$

$\ker f := \{x \in X \mid f(x) = 0_Y\}$

$\overset{?}{=} \{0_X\}$

$L(A)X = 0 \overset{?}{\Rightarrow} X = 0$

$0_{Map(I;V)} : I \longrightarrow V$

$t \longmapsto 0_V$

$A(X(t)) = 0_V \ (t \in I) \Rightarrow X(t) = 0_V \ (t \in I)$.

A^{-1} を左から作用させて，

$X(t) = A^{-1}(0_V) = 0_V \quad (t \in I)$.

$\therefore X = 0$

${}^{\forall}A, B \in GL(V)$. $L(A)L(B) = L(AB)$.

∵ $(L(AB)X)(t) = AB(X(t))$

$= A(B(X(t)))$.

$(L(A)L(B)X)(t) = L(A)\underbrace{(L(B)X)}(t)$

$\quad\quad Y(t) = B(X(t))$.

$= A(Y(t))$

$= A(B(X(t)))$.

よって，

$$L : GL(V) \longrightarrow GL(Map(I;V))$$
$$A \longmapsto L(A) : Map(I;V) \longrightarrow Map(I;V).$$
$$: \text{lin. bij.}$$

が　$L(A)L(B) = L(AB)$　をみたすから，Def 4.22 より，

L は $GL(V)$ の $Map(I;V)$ 上での表現。

とくに，

$$L(A)L(A^{-1}) = L(AA^{-1}) = L(id_V) = id_{Map(I;V)}$$
$$\therefore L(A^{-1}) = (L(A))^{-1}.$$

$\quad \in GL(Map(I;V))$.

Def.

$$F : V \longrightarrow V.$$
$$F_A : V \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto F_A(x) := A(F(A^{-1}x)).$$

: F の A-変換

Prop 4.27.

i) $X \in S_F(I) \Rightarrow L(A)X \in S_{F_A}(I)$

ii) $L(A)S_F(I) = S_{F_A}(I)$.

★ Prop. のイミ

力 F のもとで運動 X が可.

→ 力 F_A のもとで運動 $L(A)X$ が可.

⇝ 運動の空間的並行性.