『物理…原理』#12 19^{10}_{16}水

Thm 4.10　　$\dim V \geq 3$

$L(t;x_0) = L \neq 0$, $t \in I$　$:= (X(t)-x_0)\wedge p(t) \in \Lambda^2(V)$

$\{0\} \neq {}^\exists W_L \subset V$ s.t. ${}^\forall t \in I$　$(X(t)-x_0) \perp W_L$.

<proof>

(4.75)より.

$$\underset{V}{\underset{\cap}{(X(t)-x_0)}} \wedge \underset{\Lambda^2(V)}{\underset{\cap}{L}} = 0, \quad t \in I.$$

$$\therefore {}^\forall \eta \in \Lambda^3(V) \quad \langle (X(t)-x_0)\wedge L, \eta \rangle_{\Lambda^3(V)} = 0.$$

p.87 Prop 2.26 より.

${}^\exists T_L : \Lambda^3(V) \longrightarrow V$ s.t.

F_T

$$\underbrace{\langle (X(t)-x_0)\wedge L, \eta \rangle_{\Lambda^3(V)}}_{0} = \langle X(t)-x_0, T_L(\eta) \rangle_V, \quad \eta \in \Lambda^3(V).$$

$\langle u \wedge T, S \rangle_{\Lambda^3(V)}$　$\langle u, F_T(S) \rangle$

$*$

$\langle S, T\wedge u \rangle = \langle F_T(S), u \rangle$

?

$\Rightarrow \langle u\wedge T, S \rangle = \langle u, F_T(S) \rangle$

したがって.

$$\langle X(t)-x_0, \underset{\underset{W_L}{\Psi}}{T_L(\eta)} \rangle_V = 0.$$

そこで.

$\mathrm{Ran}(T_L) =: W_L$

とおけば. W_L は V の部分空間 であって.

${}^\forall y \in W_L$　$\langle X(t)-x_0, y \rangle_V = 0$

Prop 2.26.　$L \neq 0 \Rightarrow W_L \neq \{0\}$　□

Cor 4.11　　$\dim V = 3$.

$L(t;x_0) = L \neq 0$.

${}^\forall t \in I$ ($X(t)-x_0$ は V の中の，原点を含む同一平面上にある)

<proof>

$\dim V = 3$ より.　$\dim \Lambda^3(V) = 1$.　　$T_L : \underset{\dim 1}{\Lambda^3(V)} \longrightarrow \underset{\dim 3}{V}$

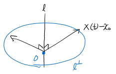
Thm 4.10 の proof における T_L について.

$\dim \mathrm{Ran}(T_L) = 1$.

よって，$\mathrm{Ran}(T_L) =: \ell$ は 原点を通る直線.

Thm 4.10 より.　$X(t)-x_0$ は ℓ と直交するから，

$\ell^\perp$，すなわち 原点を含む平面上にある.

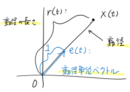


4.4.4. 動径単位ベクトルによる軌道角運動量の表示

$X : I \longrightarrow V \setminus \{0\}$

$r(t) := \|X(t)\|$

$e(t) := X(t)/r(t)$



とすると，

$X(t) = r(t)\,e(t)$.

両辺を t で微分.

$\dot{X}(t) = \dot{r}(t)\,e(t) + r(t)\,\dot{e}(t)$

よって，

$$X(t)\wedge\dot{X}(t) = r(t)\,e(t)\wedge(\dot{r}(t)\,e(t) + r(t)\,\dot{e}(t)) = r(t)^2\,e(t)\wedge\dot{e}(t)$$

よって，

$$L(t) = L(t;0) = X(t)\wedge p(t) = m(t)\,X(t)\wedge\dot{X}(t) = m(t)\,r(t)^2\,e(t)\wedge\dot{e}(t) \quad \text{———} (4.83).$$

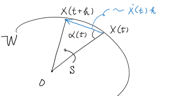
4.4.5. 面積速度

$X : I \longrightarrow V$

: 1個の質点 m の運動

$X(t) \in W \subset V$

: V の2次元部分空間.



$$S \sim \frac{1}{2}|h|\,\|\dot{X}(t)\|\,\|X(t)\|\sin\alpha(t)$$

where

$$\cos\alpha(t) = \frac{\langle X(t), \dot{X}(t) \rangle}{\|X(t)\|\,\|\dot{X}(t)\|}$$

単位時間あたり 掃く面積

$$s(t) := \frac{1}{2}\|\dot{X}(t)\|\,\|X(t)\|\sin\alpha(t).$$

: 面積速.

他方，

$$s(t)^2 = \frac{1}{4}\|\dot{X}(t)\|^2\,\|X(t)\|^2\,(1-\cos^2\alpha(t))$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\|\dot{X}(t)\|^2\|X(t)\|^2 - \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle^2\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\|\dot{X}(t)\wedge X(t)\|^2$$

$$\therefore s(t) = \frac{1}{2}\|\dot{X}(t)\wedge X(t)\|$$

そこで，

$$S(t) := \frac{1}{2}\dot{X}(t)\wedge X(t)$$

: X の面積速度

(4.74)より，

$$L(t) = X(t)\wedge p(t) = m(t)\,X(t)\wedge\dot{X}(t) = 2m(t)\cdot\frac{1}{2}\dot{X}(t)\wedge X(t) = 2m(t)\,S(t)$$

$m(t) \equiv m$ ならば.

$L(t) \propto S(t)$

4.4.6. 面積速度の極座標表示

$X : I \longrightarrow V$

$W \subset V$: 2次元部分空間.

(e_1, e_2) : W の O.N.B.

$$\phi : \mathbb{R}^2 \supset D_p := (0,\infty)\times[0,2\pi) \longrightarrow W\setminus\{0\} \quad : \text{bij}.$$

$$(r, \theta) \longmapsto \phi(r,\theta) := (r\cos\theta)\,e_1 + (r\sin\theta)\,e_2$$

(W, ϕ^{-1}) : W の極座標系

$\phi^{-1}(x) = (r, \theta)$: x の極座標

☆

$e(t) = \cos\theta(t)\,e_1 + \sin\theta(t)\,e_2$

where　$\theta : I \longrightarrow [0, 2\pi)$

$$\dot{e}(t) = -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\,e_1 + \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\,e_2$$

$$\|\dot{e}(t)\|^2 = (-\dot{\theta}(t)\sin\theta(t))^2 + (\dot{\theta}(t)\cos\theta(t))^2 = \dot{\theta}(t)^2$$

$$e(t)\wedge\dot{e}(t) = \dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)\;e_1\wedge e_2 + (-\dot{\theta}(t))\sin^2\theta(t)\;e_2\wedge e_1 = \dot{\theta}(t)\;e_1\wedge e_2$$

(4.82)に代入

$$X(t)\wedge\dot{X}(t) = r(t)^2\,e(t)\wedge\dot{e}(t) = r(t)^2\,\dot{\theta}(t)\;e_1\wedge e_2$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2}r(t)^2\,\dot{\theta}(t)\;e_1\wedge e_2 \qquad \text{(面積速度の極表示)}$$

$$\|S(t)\| = \frac{1}{2}r(t)^2\,|\dot{\theta}(t)| \qquad \text{(面積速の 〃)}$$