数理物理演習会 #4 1997 29月

問 2.2.(i)

V : n-dim. met. vec.sp.

$\mathcal{S}_p$: p次対称化作用素

(i) $\mathcal{S}_p^* \overset{?}{=} \mathcal{S}_p$ 「$\mathcal{S}_p$は対称作用素」

$\mathcal{S}_p^* = \mathcal{S}_p$

を言うには

$\forall S, T \in \otimes^p V \quad \langle T, \mathcal{S}_p(S) \rangle = \langle \mathcal{S}_p(T), S \rangle$

を示せばよい ← ?

$g^*(u,v) = g(v,u)$

↓ エルミート性 ↓

$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$\langle u_1 \otimes u_2, v_2 \otimes v_1 \rangle = \langle v_2 \otimes v_1, u_1 \otimes u_2 \rangle$

$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$

6つ

$\forall T := u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \ \in \otimes^p V$

$\forall S := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \ \in \otimes^p V$.

に対して、

$\langle T, \mathcal{S}_p(S) \rangle$ ☺ p83. (1.59)

$= \left\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p,\ \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \right\rangle$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p,\ v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \rangle$

☺ p.85 (2.37)

$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \langle u_1, v_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle u_p, v_{\sigma(p)} \rangle$

$\sigma^{-1} =: \tau$,

Σと積$\langle \ \rangle \cdots \langle \ \rangle$の順序を適当に変更

$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} \langle u_{\tau(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle u_{\tau(p)}, v_p \rangle$

$= \left\langle \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} u_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau(p)},\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \right\rangle$

$= \langle \mathcal{S}_p(T), S \rangle$. ▱

「S $(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 \cdots \otimes v_p), u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p)$

$\frac{1}{p!} \ g(u_{\sigma(1)}, v_1) \cdots g(u_{\sigma(p)}, v_{(p)})$

$\langle u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p,\ S_p(v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_p)$

$\frac{1}{p} \sum_{\sigma \in S_p} g(u_1, v_{\sigma(1)}) \cdots g(u_p, v_{(p)})$

$(v_{\sigma(n)}, v_{1} \sim 7)$

$S_p^* = S_p$

$\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 6$ } $\sigma(n) = 7$!

問 2.6.(i)

V : n-dim. real vec. sp.

$(e_i)_{i=1}^n$: basis of V.

$\bar{e}_i := \varepsilon_i e_i \quad (\varepsilon_i = 1 \text{ or } -1,\ i = 1, \cdots, n)$

(i) $(\bar{e}_i)_{i=1}^n \overset{?}{:}$ basis of V

$\bar{e}_j = \sum_{i=1}^n p_j^i e_i$

とおくと、

$(p_j^i)_{i,j} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{bmatrix} =: P$.

$\det P = \prod \varepsilon_i \neq 0$

より、Pは正則。Pは底変換の行列 (☺ p.25) で、

$(\bar{e}_i)_{i=1}^n$ は V の基底. ∎

(ii)

$u = \sum_i u^i e_i = \sum \bar{u}^i \bar{e}_i$

$\bar{u}^i \overset{?}{=} \varepsilon_i u^i$

$u = \sum \bar{u}^i \bar{e}_i = \sum \bar{u}^i (\varepsilon_i e_i) = \sum (\varepsilon_i \bar{u}^i) e_i$

これと

$u = \qquad \sum \ u^i \ e_i$

と成分表示の一意性より、

$\varepsilon_i \bar{u}^i = u^i$

両辺にε_iをかけて、

$\bar{u}^i = e_i u^i$ ∎.

(iii)

$\tau_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$: $\wedge^n V$ の basis

$\tau_n \longmapsto \bar{\tau}_n = \bar{e}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{e}_n$

$\Theta \in \wedge^n V$

$\Theta = \Theta_n \tau_n \overset{?}{=} (\prod \varepsilon_i \Theta_n) \bar{\tau}_n$

$\bar{\tau}_n = \bar{e}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{e}_n$

$= \varepsilon_1 e_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n e_n$

$\overset{?}{=} (\prod_i \varepsilon_i) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$

$= (\prod_i \varepsilon_i) \tau_n$

両辺に $(\prod_i \varepsilon_i)$ をかけて、

$(\prod_i \varepsilon_i) \bar{\tau}_n = \tau_n$ ▱.