物理…原理 #14 $19^{10}30$(金)

4.7. 運.方…の解空間の構造

Def. $\mathcal{V}$: d-dim. Euc. vec. sp.

$$S_F(\mathbb{I}) := \{ X : \mathbb{I} \to \mathcal{V} \mid \underbrace{m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = F(X(t))} \}$$

: 〰〰 の解空間

★ 解空間の構造？ ⤳ 対称性に注目 ⤳ 群.

Def 4.22. G : group
$\mathcal{W}$: vec. sp.

W上の一般線形群 = W上の全単射な線形作用素全体

$$\phi : G \longrightarrow GL(\mathcal{W}) := \{ T \in \underbrace{L(\mathcal{W})}_{\{T : \mathcal{W}\to\mathcal{W} : \text{linear}.\}} \mid T : \text{bij} \}$$

$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, $a, b \in G$

ϕ または $\phi(G)$ を, Gの$\mathcal{W}$上での表現という.

例 4.23 $\mathcal{W}$: vec. sp. over $\mathbb{K}$.
$a \in \mathcal{W}$

$$T_a : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}, \quad w \longmapsto T_a(w) := w + a$$

$T_{\mathcal{W}} := \{ T_a \mid a \in \mathcal{W} \}$

は$\mathcal{W}$上の変換群. これを$\mathcal{W}$上の並進群という.

Def 4.24 M : set
$\phi \neq D \subset M$.

(i) f : M上の変換に対して $f(D) = D$ ⇒ D : f-対称.

(ii) T : M上の変換群.
$^\forall f \in T$ D : f-対称 ⇒ D : T-対称.

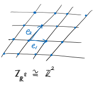
★ M, T を指定するごとに, ひとつの対称性が定まる.

例 4.26 $\mathcal{W}$: n-dim. vec. sp.
$(e_i)_{i=1}^n$: basis of $\mathcal{W}$.

$$\mathbb{Z}_{\mathcal{W}} := \{ \sum_{i=1}^n k_i e_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \}$$

: $\mathcal{W}$における格子空間

$\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$



$\mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2} \cong \mathbb{Z}^2$

$\mathcal{W}$の並進群

$$T_{\mathcal{W}} := \{ T_a : \mathcal{W} \to \mathcal{W} \mid a \in \mathcal{W} \}, \quad w \longmapsto T_a(w) := w + a$$

の部分集合

$$T_{\mathcal{W}}^{\mathbb{Z}} := \{ T_a \mid a = \sum_{i=1}^n l_i e_i,\ l_i \in \mathbb{Z} \}$$

Taは, 格子点がちょうど重なるように移す変換.

は, $\mathcal{W}$上の変換群で, $\mathbb{Z}_{\mathcal{W}}$ は $T_{\mathcal{W}}^{\mathbb{Z}}$-対称.

これを $\mathbb{Z}_{\mathcal{W}}$ の並進対称性という.

Prop 4.25 M : set
$\phi \neq Y$: set
f : M上の変換.
$Map(M;Y) := \{ \psi : M \to Y \}$

$$T_f : Map(M;Y) \longrightarrow Map(M;Y), \quad \psi \longmapsto T_f\psi : M \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto T_f\psi(x) := \psi(f^{-1}(x))$$

T : M上の変換群 ⇒ $\hat{T} := \{ T_f \mid f \in T \}$ は $Map(M;Y)$上の変換群.

<proof> 概要
各 $T_f \in \hat{T}$ は $Map(M;Y)$上の変換.
∵ T_f : inj, surj.
$\hat{T}$は群をなす.
∵ $T_f^{-1} \in \hat{T}$, $T_f T_g \in \hat{T}$.

4.7.3
$\{f_a\}$: $\mathbb{R}$上の変換群 → $\{\hat{f_a}\}$: $Map(\mathbb{R},\mathcal{V})$上の変換群.

4.7.4.
$\{I, r_p\}$: $\mathbb{I}$上の変換群 ⇒ $\{\hat{I}, \hat{r_p}\}$: $Map(\mathbb{I},\mathcal{V})$上の変換群.

Cor 4.26 (Prop. 4.25 の仮定)
Y : vec. sp.

(i) $\hat{T} := \{ T_f \mid f \in T \}$ は,
変換群 T の $Map(M;Y)$ 上での表現.

(ii) M : vec. sp.
T : 群 G の M 上での表現.
i.e. $^\exists \phi : G \to GL(M)$: 表現
s.t. $\phi(G) = T$
$T(a) := T_{\phi(a)}$

$\{ T(a) \mid a \in G \}$ は G の $\boxed{}$ 上での表現.

<proof>

4.7.3. 時間並進対称性

$a \in \mathbb{R}$.

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f_a(t) := t + a$$

: a秒の時間並進

$\{ f_a \mid a \in \mathbb{R} \}$ は $\mathbb{R}$上の変換群.

$$\hat{f_a} : Map(\mathbb{R};\mathcal{V}) \longrightarrow Map(\mathbb{R};\mathcal{V}), \quad X \longmapsto \hat{f_a}X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad t \longmapsto \hat{f_a}X(t) := X(f_a^{-1}t) = X(t-a)$$

と定義すると,

$T_{time} := \{ \hat{f_a} \mid a \in \mathbb{R} \}$

これは, Prop 4.25 によって, $Map(\mathbb{R};\mathcal{V})$上の変換群.
Cor 4.26 〃 並進群 $\mathbb{R}$ の表現.

各 $a \in \mathbb{R}$ に対して.

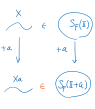
$\mathbb{I} + a := \{ t + a \mid t \in \mathbb{I} \}$

とおく. $X \in S_F(\mathbb{I})$ に対し

$$X_a : \mathbb{I} + a \longrightarrow \mathcal{V}, \quad t \longmapsto X_a(t) := X(t-a) = X(f_a t)$$

と定義すると,

$X_a \in S_F(\mathbb{I} + a)$



★ $\mathbb{I}$における運動は, 同じFのもとで,
$\mathbb{I} + a$ でも全く同じ形で起こりうる.
⤳ 時間並進対称性.

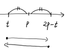
★ $S_F(\mathbb{R}) \subset Map(\mathbb{R};\mathcal{V})$ は, $\hat{f_a}$-対称性をもつ.
⤳ 大局的 時間並進対称性

4.7.4. 時間反転対称性

$\mathbb{I} = \mathbb{R}$ or $[\alpha, \beta]$

$$p = \begin{cases} (\alpha+\beta)/2 & (\mathbb{I} = [\alpha, \beta]) \\ \text{任意} & (\mathbb{I} = \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$r_p : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}, \quad t \longmapsto r_p(t) := 2p - t$$



: pに関する時間反転

$\{ Ident., r_p \}$ は, $\mathbb{I}$上の変換群. (時間反転群).
∵ $r_p^2 = Ident.$ $r_p^{-1} = r_p$, r_p : bij.

$$\hat{r_p} : Map(\mathbb{I},\mathcal{V}) \longrightarrow Map(\mathbb{I},\mathcal{V}), \quad X \longmapsto \hat{r_p}X : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad t \longmapsto (\hat{r_p}X)(t) := X(r_p^{-1}t) = X(2p-t).$$

Xの逆向きの運動

を定義すると,

$Tr := \{ Ident., \hat{r_p} \}$

は $Map(\mathbb{I}, \mathcal{V})$上の変換群 (∵ Prop 4.25)

$X \in S_F(\mathbb{I}) \overset{?}{\Rightarrow} \hat{r_p}X \in S_F(\mathbb{I})$

より.

★ $\mathbb{I}$における運動が実現するなら,
逆向きにたどる運動も可能.
⤳ 時間反転対称性.