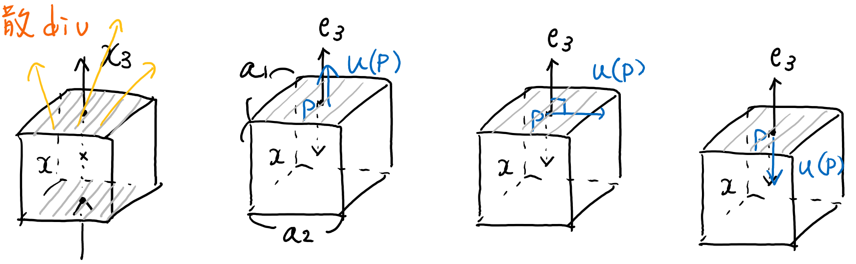
物理の原理 #26　2025 03 水

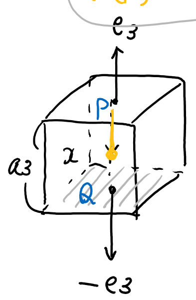
☆ 発散 div

例



この面から出ていく流量は、Pを代表として近似的に

$$\underbrace{u(P)\,a_1a_2 \qquad 0 \qquad -u(P)\,a_1a_2.}_{\langle e_3,\, u(P)\rangle\, a_1a_2}$$



$\approx \langle -e_3,\, u(Q)\rangle\, a_1a_2$

この面から出ていく流量　とあわせて。

x_3軸にかんして出ていく流量 $I_3(x)$ は、

$$I_3(x) \approx \left[\langle e_3, u(P)\rangle + \langle -e_3, u(Q)\rangle\right] a_1a_2$$

$$= \left[\left\langle e_3,\, u\left(x+\frac{a_3e_3}{2}\right)\right\rangle - \left\langle e_3,\, u\left(x-\frac{a_3e_3}{2}\right)\right\rangle\right] a_1a_2$$

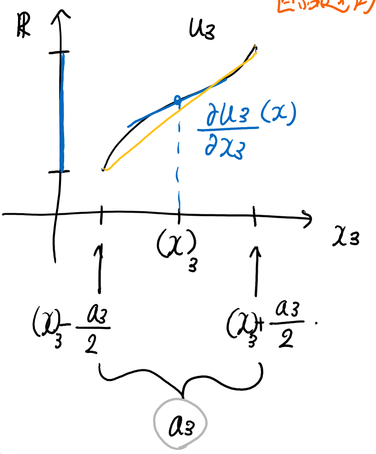
$$u_3\left(x+\frac{a_3e_3}{2}\right) - u_3\left(x-\frac{a_3e_3}{2}\right).$$

$u_3 : D \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$\approx a_3 \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_3}$$

$$\approx \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_3}\, \underbrace{a_1a_2a_3}_{= |R_x|}$$

直線近似.



$$I_1(x)+I_2(x)+I_3(x) =: I(x)$$

$$\left(\approx |R_x| \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)}_{\operatorname{div} u.}(x)\right)$$

$$= |R_x| \left(\operatorname{div} u(x) + o(|R_x|)\right).\ ?$$

$$\therefore\ \lim_{|R_x|\to 0} \frac{I(x)}{|R_x|} = \operatorname{div} u(x).$$