物理…原理 #18 19/11/27水

5.3 変分原理

☆ (5.42) がそこから取りだされるような、さらに高次の構造とは？

$$L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$q : \mathbb{I} = [a,b] \longrightarrow \mathcal{D}$$

から定まる、

$$S_L(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

を考える。
（ここで、q は (5.42) に従うとは限らない一般の写像）。

5.3.1. 汎関数と変分

Def 5.4. $\mathcal{F}$: 関数空間

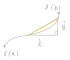
$\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{K}$: $\mathcal{F}$ 上の汎関数

関数 $\longmapsto$ $\mathbb{K}$値

Def 5.3. $C^k([a,b];\mathcal{D})$
$:= \{ u : [a,b] \to \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^f : \text{open}$
$\quad | \; u$ は $[a,b]$ 上 k 回連続微分可能 $\}$

$\Phi : C^k([a,b];\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$: $C^k([a,b];\mathcal{D})$ 上の汎関数

$\mathcal{D}$上の曲線 $\longmapsto$ 実数値



例 5.10.

$$\ell : C^1([a,b];\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\gamma \longmapsto \ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

$\mathbb{R}^2$内の C^1-曲線

where
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \gamma(t) := (x(t), y(t))$$

☆ 汎関数に微分を導入。

$$C^{k,0}([a,b];\mathbb{R}^f) := \{ u \in C^k([a,b];\mathbb{R}^f) \mid u(a) = u(b) = 0 \}$$

とくに、

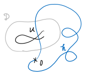
$$C^{k,0}([a,b];\mathbb{R}^1) =: C_{\mathbb{R}}^{k,0}[a,b]$$

とおく。

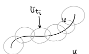
Lem 5.5 $u \in C^k([a,b];\mathcal{D})$
$h \in C^{k,0}([a,b];\mathbb{R}^f)$

$\exists C_0 > 0$ s.t. $\left(|\varepsilon| < C_0 \Rightarrow u + \varepsilon h \in C^k([a,b];\mathcal{D}) \right)$

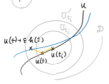
<proof> 概略。 $\frac{1}{\varepsilon}\{ \Phi(u+\varepsilon h) - \Phi(u) \} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} ?$



* h の影響力のパラメータ ε を
うまくとれば、
$u + \varepsilon h$ は $\mathcal{D}$ に収まる。



* u は有限個の開被覆をもつ。
$U_{t_1}, \cdots, U_{t_n}$

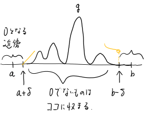


* U_{t_i} は、有限個に帰着させた影響を、
U_{t_i}' は、h の影響を 包む。

☆ 通常の関数とのアナロジー。
$\frac{1}{\varepsilon}\{ \Phi(u+\varepsilon h) - \Phi(u) \}$ を考え、$\varepsilon \to 0$ とすれば、
Φ に関する微分的な量を取りだせるのでは？

Def.
$g \in C_0^\infty(a,b)$
$:\Leftrightarrow$ g は $[a,b]$ 上 ∞ 回微分可能で、
a, b のテキトーな近傍で 0 となる。

例 5.11.
略。



Def.
$C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^f)$
$:= \{ h = (h_1, \cdots, h_f)$
$\quad | \; h_i \in C_0^\infty(a,b)$
$\quad , \; i = 1, \cdots, f \}$

明らかに、

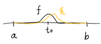
$$C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^f) \subset C^{k,0}([a,b];\mathbb{R}^f)$$

Lem 5.6 （変分法の基本補題）。

$f \in C_{\mathbb{R}}[a,b] \; \left(= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{cont} \} \right)$.

$$\left(\forall h \in C_0^\infty(a,b) \quad \int_a^b f(t) h(t)\, dt = 0 \right) \Rightarrow f = 0$$

<proof> 概略。
ある $t_0 \in (a,b)$ で $f(t_0) > 0$ とすると、
f の cont. 性により、つられて $f > 0$
の区間ができ、積分値 > 0 より矛盾。



Def 5.7 $u \in C^k([a,b];\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^f$: open
$\Phi : C^k([a,b];\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Φ は u で微分可能
$:\Leftrightarrow$ $\exists F^{(u)} = (F_1^{(u)}, \cdots, F_f^{(u)}) : [a,b] \to \mathbb{R}^f$ s.t.
$\forall h = (h_1, \cdots, h_f) \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^f)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\{ \Phi(u+\varepsilon h) - \Phi(u) \} = \sum_{i=1}^{f} \int_a^b F_i^{(u)}(t) h_i(t)\, dt$$

Φ は微分可能
$:\Leftrightarrow$ $\forall u \in C^k([a,b];\mathcal{D})$ Φ は u で微分可能。

$F^{(u)}$ を Φ の第1変分とよび
$$F^{(u)} = \delta\Phi(u) = (\delta\Phi(u)_1, \cdots, \delta\Phi(u)_f).$$
と記す。したがって、
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\{ \Phi(u+\varepsilon h) - \Phi(u) \} = \sum_{i=1}^{f} \int_a^b \delta\Phi(u)_i(t) h(t)\, dt.$$

☆ $\delta\Phi(u)_i$ は ∂x_i の無限次元版

Def 5.8.

$$\delta\Phi(u)_i(t) =: \frac{\delta\Phi(u)}{\delta u_i(t)}$$

: Φ の u_i に関する汎導関数。

Φ : 下に有界
$:\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall u \in C^k([a,b];\mathcal{D})$ $C \leq \Phi(u)$.

$\Phi_0 := \inf_{u \in C^k([a,b];\mathcal{D})} \Phi(u)$.
: Φ の下限

Φ : 下に有界, $\exists u_0 \in C^k([a,b];\mathcal{D})$ s.t. $\Phi_0 = \Phi(u_0)$.
$\Rightarrow$ Φ は最小値 Φ_0 をもつ。
u_0 : Φ の最小化関数。

☆ 最小化関数の存在・非存在問題をとくには？

Thm 5.9
Φ は最小値をもつとき、$\delta\Phi(u_0) = 0$.

<proof>
略。　　　　最小値 $\Rightarrow$ 極値

☆ u_0 は変分方程式 $\delta\Phi(u) = 0$ の解。
これは、最小化関数であることの必要条件。

Def. 5.10.
u : Φ の停留関数　　* 極値の無限次元版。
$:\Leftrightarrow$ $\delta\Phi(u) = 0$.