『物理現象…諸原理』輪講 #8 19/09/11 水

4.2.6.

$$\begin{array}{ccccl} \phi : & \mathbb{I} & \longrightarrow & \underbrace{V \times V}_{\text{相空間}} & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & t & \longmapsto & \underbrace{\phi(t)}_{\text{相点}} := (X(t), p(t)) & \end{array}$$

: 相運動.

$$m\frac{d^2X(t)}{dt} = F(X(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = W_t(\phi(t))$$

4.2.7. 力が速度, 時間にも依存する場合

$$\begin{array}{l} V \\ \cup \text{ open} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} F : D \times V \times \mathbb{I} & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (X(t), \dot{X}(t), t) & \longmapsto & F(X(t), \dot{X}(t), t) \end{array}$$

位置　速度　時刻

運動方程式は,

$$\frac{dp(t)}{dt} = F(X(t), \dot{X}(t), t). \qquad (4.15).$$

4.2.8 多体系

d-dim euclid vec. sp. V を運動する $n \geq 2$ の質点

◎ i 番目の質点の運動

$$X_i : \mathbb{I} \longrightarrow V.$$

◎ n 個の運動 $X_1, \cdots, X_n$ から定まる写像

$$\begin{array}{ccccl} X : & \mathbb{I} & \longrightarrow & V^n & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & t & \longmapsto & X(t) := (X_1(t), \cdots, X_n(t)) & \end{array}$$

: n 点系の運動

t における n 点系の配位.

◎ n 点系に働く力とは?

時刻 t で n 点系の配位 x, 速度 v のとき, i 番目の質点に $F_i(x, v, t)$ が働く.

$$\begin{array}{ccl} F : V^n \times V^n \times \mathbb{I} & \longrightarrow & V^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, v, t) & \longmapsto & F(x, v, t) \\ & & := (F_1(x, v, t), \cdots, F_n(x, v, t)) \end{array}$$

F が与えられたとき.

$$X \sim \frac{dp_i(t)}{dt} = F_i(X(t), \dot{X}(t), t), \quad i = 1, \cdots, n.$$

$$\text{where} \quad p_i(t) = m_i(t)\dot{X}_i(t)$$

: n 点系のニュートンの運動方程式.

4.2.9. 重心の運動・内力

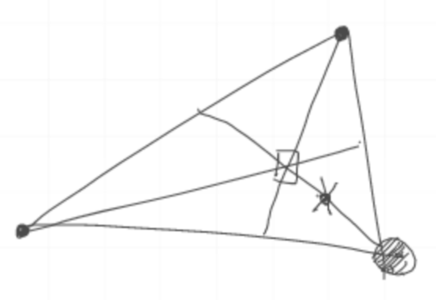
Def.

$$M := \sum_{i=1}^{n} m_i$$

: 系の全質量

$$X_c := \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}{M}$$

: 重心.



Thm 4.2.

$$m_i(t) \equiv m_i$$

n 点系の配位空間

$$F_{ij} : V^n \longrightarrow V$$

: m_i が m_j から受ける力 $(i \neq j)$

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (i \neq j)$$

$$\begin{array}{ccccl} X : & \mathbb{I} & \longrightarrow & V^n & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & t & \longmapsto & X(t) := (X_1(t), \cdots, X_n(t)). & \end{array}$$

$$\sim \quad m_i \frac{d^2X(t)}{dt^2} = \sum_{j \neq i} F_{ij}(X_1(t), \cdots, X_n(t)) \qquad (4.20$$

$, i = 1, \cdots, n.$

X^c は等速度運動.

<proof>

(4.20) より.

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{1}{M}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j \neq i} F_{ij}(\ldots)}_{\displaystyle \sum_{i \neq j} F_{ij} = 0.}$$

$$\frac{d^2X_c(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i X_i(t)}{M}}^{X_c}}{dt^2}$$

∵ $F_{ij} = -F_{ji}$

☆ 内力だけの作用のもとにある n 点系の重心は等速度運動する.

4.2.10 運動の相対性

2点系の運動で m_1 を「静止」

$$X(t) := X_2(t) - X_1(t)$$

: m_1 に対する m_2 の相対位置ベクトル.

X : 〃 相対運動.

重心?

$$X_c(t) = \frac{m_1X_1(t) + m_2X_2(t)}{m_1 + m_2}$$

$$X_1(t) = \boxed{X_c(t)} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boxed{X(t)}$$

$$X_2(t) = \boxed{X_c(t)} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boxed{X(t)}$$

各質点 $\rightsquigarrow$ 重心 と 相対位置

これで系の運動を記述できる.

X の方程式?

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = v_2(t) - v_1(t).$$

: m_1 に対する m_2 の相対速度.

$$\ddot{X}(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{dv_2(t)}{dt} - \frac{dv_1(t)}{dt} \qquad (p(t) = m v(t).)$$

$$= \frac{1}{m_2}\frac{dp_2(t)}{dt} - \frac{1}{m_1}\frac{dp_1(t)}{dt}$$

内力だけを仮定すると,

$$= \frac{1}{m_2}\boxed{F_2(X(t), \dot{X}(t), t)} - \frac{1}{m_1}\boxed{F_1(X(t), \dot{X}(t), t)} \qquad ∵ (4.16)$$

$$F(X_2 - X_1) = -F(X_1 - X_2)$$

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_2}F(\underbrace{X_2 - X_1}_{X(t)}) + \frac{1}{m_1}F(X_2 - X_1)$$

$$= \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}_{=\frac{1}{\mu}} F(X(t))$$

$$\therefore \mu \frac{d^2X(t)}{dt^2} = F(X(t)).$$

換算質量.

☆ 1点の運動に帰着.

4.2.11. 運動方程式の両義性

$$\text{運動 } X \; \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} \; \text{力 } F_i$$

力の決定.

(運動方程式という理念を前提).