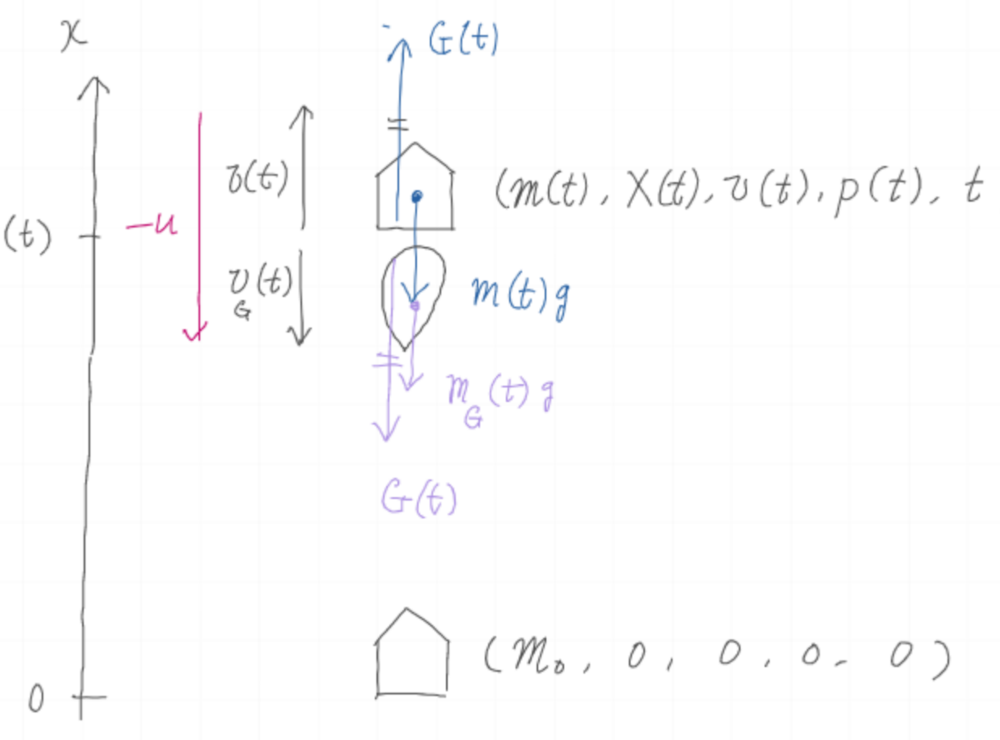
『物理……原理』輪講#9　19 09 18 水



ロケットについて.

$$\frac{dp(t)}{dt} = -m(t)g + G(t).$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \cancel{\dot m(t)v(t)} + m(t)\dot v(t), \qquad G(t) = \cancel{+\dot m(t)v(t)} - \dot m(t)u$$

$$\therefore m(t)\dot v(t) = -u\dot m(t) - m(t)g$$

$$\therefore \int_0^t \dot v(\cancel{t})\,sds = -g - u\frac{\dot m(t)}{m(t)} = \int_0^t -g - u\left(\log m(\cancel{t}\,s)\right)' ds$$

$$\therefore v(t) - \cancel{v(0)} = -gt + u\log\frac{m_0}{m(t)}$$

$$v(t) = u\log\frac{m_0}{m(t)} - gt$$

ガスについて.

$$\frac{dp_G(t)}{dt} = \cancel{-m_G(t)g} - G(t).$$

$$\frac{dp_G(t)}{dt} = \dot m_G(t)\underbrace{v_G(t)}_{v(t)-u} + \cancel{m_G(t)\dot v_G(t)}.$$

?

$$\therefore G(t) = -\dot m_G(t)(v(t)-u) = \dot m(t)(v(t)-u)$$

$\because -\dot m_G(t) = \dot m(t)$?

(i) $v(t) > 0$ であるために

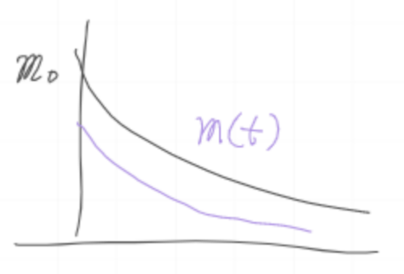
$$u\log\frac{m_0}{m(t)} - gt > 0$$

$$\log\frac{m_0}{m(t)} > \frac{gt}{u} = \log e^{\frac{gt}{u}}$$

$$\therefore \frac{m_0}{m(t)} > e^{\frac{gt}{u}}$$

$$\therefore e^{-\frac{gt}{u}} m_0 > e^{-\frac{gt}{u}}\cdot e^{\frac{gt}{u}}\cdot m(t)$$

$$\therefore m(t) < e^{\frac{-gt}{u}} m_0$$



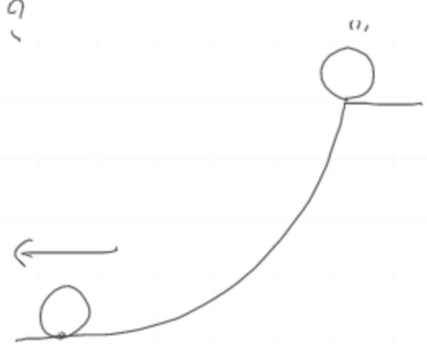
(ii) ある時刻 $t_0 > 0$ から一定の $v > 0$.

$$v = u\log\frac{m_0}{m(t)} - gt$$

$$\therefore m(t) = m_0 e^{-\frac{gt}{u}}\cdot e^{-\frac{v}{u}}$$

4.4.1. 保存量の概念

★ 力が存在していても、時間とともに変わらない量があるか？



Def. 4.4　V : d-dim euclid vec. sp.

$F : V^n \times V^n \times \mathbb{R} \longrightarrow V^n$

: n点系に作用する力

$X : \mathbb{I} \longrightarrow V^n$: F から定まる運動方程式 (4.16) の解.

A : set

$f : V^n \times V^n \times \mathbb{I} \longrightarrow A$

$f(X(t), v(t), t)$ が n点系の保存量 (conservative quantity)

$:\Longleftrightarrow f(X(t), v(t), t)$ が $t \in \mathbb{I}$ によらず一定.

4.4.2. 力学的エネルギー保存則

1点系, $m(t) \equiv m$, $F : V \longrightarrow V$, $X(t) \longmapsto F(X(t))$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

運動方程式は,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F(X(t)), \quad t \in \mathbb{I} \qquad (4.64).$$

$v(t)$ と (4.64) の内積をとってみる.

?

$$\frac{m}{2}\cdot 2\langle v(t), \dot v(t)\rangle = \langle F(X(t)), v(t)\rangle$$

$\because$ Thm 3.11 (iii)

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2$$

$$\frac{m}{2}\|v(t)\|^2 - \frac{m}{2}\|v(t_0)\|^2 = \int_{t_0}^t \langle F(X(s)), v(s)\rangle ds$$

$\frac{m}{2}\|v(t)\|^2 = T(t)$: 運動エネルギー (kinetic energy).

★ 次のことがいえる.

もし, $\displaystyle\int_{t_0}^t \langle F(X(s)), v(s)\rangle ds = -f(t) + f(t_0)$

と, テキトーな f を用いて書けたとしたら,

$$T(t) - T(t_0) = -f(t) + f(t_0)$$

$$\therefore T(t) + f(t) = T(t_0) + f(t_0)$$

$\therefore T(t) + f(t)$: 保存量.

★ そのような f ?

$$f = U \circ X : \mathbb{I} \xrightarrow{X} V \xrightarrow{U} \mathbb{R}, \quad t \longmapsto X(t) \longmapsto U(X(t))$$

とする. Prop 3.29 より.

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^t \langle \operatorname{grad} U(X(s)), v(s)\rangle ds$$

もし, $F = -\operatorname{grad} U$