物理…原理 #22 $20^{02}{}_{19}$ 水

§7. この章の目的.

マクスウェル方程式を出発点として,一段と美しい理念的領域を体験的に観照.

→ ゲージ場 , 物質場 → 特殊相対論

§7.2.2. 電磁現象に関わる物理量の数学的本性

Def. $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$: 時間

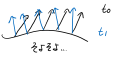
$\mathbb{V}$: 3-dim Euc. vec. sp.

$\mathbb{D} \subset \mathbb{V}$: open.

(1). $\mathbb{E} : \mathbb{I} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{V}$

: 電場

* 場 ← field ← 麦畑



* $\mathbb{E}(t, \cdot)$ は $\mathbb{D}$ 上の ベクトル場.

(2) $\mathbb{B} : \mathbb{I} \times \mathbb{D} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{V}$

: 磁場

* $\mathbb{B}(t, \cdot)$ は $\mathbb{D}$ 上の 2階反対称(反変)テンソル場

(3) $\hat{e} : \mathbb{I} \times \mathbb{D} \longrightarrow \bigwedge^3 \mathbb{V}$

: 電荷密度

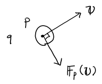
* $\dim(\bigwedge^3 \mathbb{V}) = 1$.

(4) $\mathbb{J} : \mathbb{I} \times \mathbb{D} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{V}$

: 電流密度

注釈.

(ii) 磁場にかんする (2) の捉え方について.



$\mathbb{F}_p(v)$: q に比例 / v について線形 / v と直交 } 実験的事実.

表現定理 (Thm 2.34) より,

$\exists\ \mathbb{B}_p \in \bigwedge^2 \mathbb{V}$ s.t. $\mathbb{F}_p(v) = -q\, v \mathbb{B}_p$ * 演算積.

$= q\, \mathbb{B}_p v$

$\mathbb{B}_p$: p における 磁束密度

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{B} : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \bigwedge^2 \mathbb{V} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & p & \longmapsto & \text{上の } \mathbb{B}_p \end{array}$$

: $\mathbb{D}$ 上の磁場.

☆ 注意 (通常の教科書との対応).

上の特別なバアイが,通常のベクトル積を用いた定ギ.

$\widetilde{\mathbb{B}_p} \in \mathbb{V}$.

$\mathbb{F}_p(v) = q\, v \times \widetilde{\mathbb{B}_p}$

↑ $\mathbb{V}$ の向きを固定する必要.

Fact. $\mathbb{V}$ の向きを固定.

$*$: この向きに対応するホッジ*作用素

* $u \times v := *(u \wedge v)$.

(e_1, e_2, e_3) : $\mathbb{V}$ の O.N.B. で

$e_i \times e_j = e_k$,

$(ijk) = (123), (231), (312)$

をみたすもの.

$\mathbb{T} \in \bigwedge^2 \mathbb{V}$

$u \in \mathbb{V}$

$\mathbb{T} u = u \times *\mathbb{T}$

Fact を上に適用すると.

$\mathbb{B}_p v = v \times *\mathbb{B}_p$ ◎ ある種,冗長?

そこで.

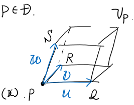
$*\mathbb{B}_p =: \widetilde{\mathbb{B}_p}$

とすると.

$\mathbb{F}_p(v) = q\, v \times \widetilde{\mathbb{B}_p}$

となって,標準的な磁場の定ギを得る.

(iii) $p \in \mathbb{D}$.



体積 $\| u \wedge v \wedge w \|$

Q, R, S → P とすると.

平行六面体 $\subset \mathbb{D}$ かつ,電荷密度 c_p (一様) とみなせる.

q_p : V_p に含まれる総電気量.

$\approx c_p \| u \wedge v \wedge w \|$

$$\hat{e}_p := \frac{c_p\ u \wedge v \wedge w}{\| u \wedge v \wedge w \|}$$

$\langle \hat{e}_p, u \wedge v \wedge w \rangle = c_p \| u \wedge v \wedge w \|$

$\approx q_p$

⋮

$\mathbb{V}$ の向きを固定すると,

$\hat{e}_p$ は u, v, w に依存せず一意に決まる.

そこで.

$$\begin{array}{cccc} \hat{e} : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \bigwedge^3 \mathbb{V} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & \hat{e}(x) := (\text{上の})\, \hat{e}_p \end{array}$$

* $\hat{e} : \mathbb{D} \to \bigwedge^3 \mathbb{V} = \bigwedge^3 \mathbb{V}^*$

$K \subset \mathbb{D}$ に含まれる総電気量は,3次微分形式 $\hat{e}$ の K 上の積分

$\int_K \hat{e}$

で与えられる.

* 微分形式の積分.