Abs. Alg. #21 $20^{04}03$ 金

p. 144 Ex. $|G| = p^2 q$

示すこと：

G has normal Sylow p- or q- subg.

<proof>

$P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$.

(i) $p > q$

$n_p \mid q$ ∵ $|G| = p^a m$, $n_p \mid m$

$n_p = 1 + kp$

より，$n_p = 1$

が従う.

∴ $P \trianglelefteq G$.

(ii) $p < q$

$n_q = 1$ のとき，$Q \trianglelefteq G$

$n_q > 1$ のときを示す：

$n_q = 1 + tq$ for some $t > 0$

$n_q \mid p^2$ より，

$n_q = p$ or p^2

$q > p$ より $n_q \neq p$

∵ 仮に $q > p$ かつ $n_q = p$ とする.

$p = n_q = 1 + tq > q$. 矛盾.

∴ $n_q = p^2$

∴ $tq = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

q : prime より，

$\cancel{q \mid (p-1)}$ or $q \mid (p+1)$.

よって，$q > p$ と，$q \mid (p+1)$ を考え合わせると，

$q = p + 1$

∴ $p = 2$, $q = 3$,

∴ $|G| = 2^2 3 = 12$.