『Abs. Alg. II #7 19^09_27(金)

Prop 3.2 $\varphi : G \to H$: homo. with $\ker K$

$X \in G/K$: fiber of φ over a
i.e. $X = \varphi^{-1}(a)$.

(1) $\forall u \in X \quad X = \{uk \mid k \in K\}$

(2) $\forall u \in X \quad X = \{ku \mid k \in K\}$

<proof>(2)

$\{ku \mid k \in K\} =: Ku$. $\forall u \in X$

$X \supset Ku$

◎ $ku \in Ku$

$\varphi(ku) = \varphi(k)\varphi(u) = 1a = a \therefore ku \in X$

$X \subset Ku$

◎ $g \in X$, $gu^{-1} =: k$

$\varphi(1) = \varphi(gu^{-1}) = \varphi(g)\varphi(u)^{-1} = a\,a^{-1} = 1$.

$\therefore k \in \ker\varphi = K \quad \therefore g = ku \in Ku$

Def $N \trianglelefteq G$, $g \in G$

a representative for the coset.

$gN := \{gn \mid n \in N\}$ $\quad Ng := \{ng \mid n \in N\}$

: left coset of N in G $\quad$: right coset of N in G

★ Prop 3.2 からわかること.

the fibers of a homo.

are

the (left) cosets of the kernel.

$$\begin{array}{ccc} X & = & uK \\ \cap & & \cap \\ G/K & & G/K \end{array}$$

Thm 3.3. $\varphi : G \to H$: homo. with $\ker K$

$\{gK\}$: left cosets of K in G

$\{gK\}$ 上の演算を次のように定ず

$uK \circ vK := (uv)K$

すると、これは群をなし、G/K に等しい。

<proof>

I) 群をなすこと.

図 $1K \in \{gK\}$ より、$\emptyset \neq \{gK\}$

図 $uK, vK \in \{gK\} \Rightarrow uK(vK)^{-1} \in \{gK\}$

◎ $vK \circ (v^{-1}K) = (vv^{-1})K = 1K$

より、$(vK)^{-1} = v^{-1}K$

$\therefore uK(vK)^{-1} = uKv^{-1}K = \underbrace{uv^{-1}}_{\in G}K \in \{gK\}$.

II) G/K 上のものと同じ演算であること

$$\begin{array}{ccccc} X & \circ & Y & \overset{G/K}{=} & Z \\ \| & & \| & & \| \\ uK & \circ & vK & \overset{\{gK\}}{=} & (uv)K \end{array} \quad ?$$

$uK, vK \in \{gK\}$ ならば uK, vK に対応する 順序.

$X, Y \in G/K$ ならば、$XY =: Z$ とする。

$\exists a, b \in H$ s.t. $\varphi^{-1}(a) = X$, $\varphi^{-1}(b) = Y$, $\varphi^{-1}(ab) = Z$

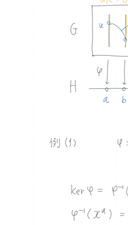
$\therefore ab = \varphi(u)\varphi(v) = \varphi(uv)$

$\therefore uv \in \varphi^{-1}(ab) = Z$

Prop 3.2 より、

$uvK = Z$

☆ G/K 上の演算のイメージ.



* 縦軸 = 代表元のとり方
u 倍 $\quad v$ 倍

が吸収(結合)される.

つまり

$(uv)K$ は a, b だけで決まる.

実際

$(uv)K = \varphi^{-1}(ab)$.

例 (1) $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, \times) = \langle x \rangle$

$a \longmapsto \varphi(a) := x^a$

$\ker\varphi = \varphi^{-1}(\mathbb{Z}_0) = \{\pm mn \mid m \in \mathbb{Z}\} =: n\mathbb{Z}$

$\varphi^{-1}(x^a) = a + n\mathbb{Z}$

$X = u \star K$

Thm 3.3 より、

left cosets $\{a + n\mathbb{Z}\}$ は $(+)$ のもとで群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を形成

$\{gK\}$ $\quad ( ) \quad$ G/K.

☆ Thm 3.3 では、

$K \trianglelefteq G$

$K = \ker\varphi$ for some $\varphi : G \longrightarrow _$: homo.

のとき、群 G/K を定ずできた。

〰 自然なモノ.

Q. $N \trianglelefteq G$

どのとき: G/N を定ずできるか?

A. No, in general.

$N = \ker\varphi$ for some $\varphi : G \longrightarrow _$: homo.

が必要 (Prop 3.7).

N がそのようになるのは、$N \trianglelefteq G$ のとき.

Prop 3.4 $N \leq G$

i) The set of left cosets of N in G form a partition of G

ii) $\forall u, v \in G$

$(uN = vN \Rightarrow v^{-1}u \in N)$

$(uN = vN \Rightarrow u$ and v are repre. of the same coset$)$

<proof> i)

① $G = \bigcup_{g \in G} gN$

② 各 gN たちは disjoint.

i.e. $uN \cap vN \neq \emptyset \Rightarrow uN = vN$.

Prop 3.5 $N \leq G$

(1) The operation $uN \circ vN = (uv)N$ is well-defined

$\Longleftrightarrow \forall g \in G\ \forall n \in N \quad gng^{-1} \in N$.

(2) (1) が肯定されると、$\{gN\}$ は、group で、

identity $= 1N$

$(gN)^{-1} = g^{-1}N$.

Def $N \trianglelefteq G$, $g \in G$

gng^{-1} : the conjugate of n by g

$gNg^{-1} := \{gng^{-1} \mid n \in N\}$

: the conjugate of N by g.

"g normalizes N" $\Longleftrightarrow gNg^{-1} = N$

N : normal $\Longleftrightarrow \forall g \in G$ g normalizes N. $\quad N \trianglelefteq G$

Thm 3.6 $N \trianglelefteq G$

次は同値

(1) $N \trianglelefteq G$

(2) $N_G(N) = G$

(3) $\forall g \in G \quad gN = Ng$

(4) $\{gN\}$ に operation がこれら group をなす.

(5) $\forall g \in G \quad gNg^{-1} = N$.