「Abs. Alg.」輪講 #5　19.09.13 金

2.4. Subgroups generated by subsets of a group.

☆ Object G. $A \subset G$

① is there a unique minimal subobject of G which contains A?

② how are the elements of this subobject computed?

Prop 2.8　$\phi \neq \mathcal{A}$: collection of subgroups of G.

$$\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \leq G$$

<proof>

$$\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H =: K$$

とおく. $^\forall H \in \mathcal{A}$ H : group より. $1 \in H$ ∴ $1 \in K$ ——①

$a, b \in K$ とすると. $^\forall H \in \mathcal{A}$ $a, b \in H$

H : group　$^\forall H \in \mathcal{A}$ $ab^{-1} \in H$ ∴ $ab^{-1} \in K$ ——②

①.②. Prop 2.1 より. $K \leq G$.

Def.

G : group
$A \subset G$
$\mathcal{A} := \{ H \leq G \mid A \subset H \}$

$$\langle A \rangle := \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$$

: the subgroup of G generated by A.

☆ $\langle A \rangle$ is the unique minimal element of $\mathcal{A}$.

Notation

$$\langle \{a_1, \cdots, a_n\} \rangle =: \langle a_1, \cdots, a_n \rangle.$$

$$\langle A \cup B \rangle =: \langle A, B \rangle$$

☆ 具体的にどう A から $\langle A \rangle$ を構成するか?

Prop 2.9.　$\bar{A} := \{ a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \in A \mid n \in \mathbb{Z}^+, a_i \in A, \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n \}$

where $\bar{A} = \{1\}$ if $A = \phi$

各 a_i は重複を許す.

G : group
$A \subset G$

$$\bar{A} = \langle A \rangle$$

<proof>

$\bar{A} \leq G$

∵ i) 定義より $\bar{A} \neq \phi$

ii) $a, b \in \bar{A}$. ただし

$$a = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}, \quad b = b_1^{\delta_1} \cdots b_m^{\delta_m} \quad (a_i, b_j \in A, \ \varepsilon_i, \delta_j = \pm 1)$$

とすると.

$$ab^{-1} = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \cdot b_m^{-\delta_m} \cdots b_1^{-\delta_1} \in \bar{A}$$

$A \subset \bar{A}$

∵ $a \in A$ をとる. $a = a^1 \in \bar{A}$.

よって. $\bar{A}$ は A を含む subgroup である.

$\langle A \rangle$ はそのような subgroup で最小のものだから.

$$\langle A \rangle \subset \bar{A}$$

一方. 任意に $a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \in \bar{A}$ をとると. これは A の要素について product や inverse をとったものだから. $\langle A \rangle$ の元である. よって.

$$\bar{A} \subset \langle A \rangle. \qquad \square$$

☆ Prop 2.9 を受けて. $\langle A \rangle$ の Def として. $\bar{A}$ の Def. を用いる.

別の表現をすると.

$$\langle A \rangle := \{ a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n} \mid a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{Z}, \underbrace{a_i \neq a_{i+1}}_{\text{隣同士の重複を排除}}, n \in \mathbb{Z}^+ \}$$

☆ さらに G が finite abelian なら. 交換法則を用いて.

$$\langle A \rangle = \{ a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z} \}. \quad (A = \{a_1, \cdots, a_k\}).$$

各 $|a_i| =: d_i < \infty$ とすると.　$|a_i^{\alpha_i}| \leq d_i$

$$|a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k}| \leq d_1 \cdots d_k$$

$$\therefore \ |\langle A \rangle| \leq d_1 \cdots d_k$$

☆ G が non-abelian のとき. 状況はより複雑.

▨ 例.　$G = D_8$, $a := s$, $b := rs$, $A = \{a, b\}$

$s (= a)$, $r (= b \cdot a) \in \langle a, b \rangle$ より.

$$D_8 = \langle a, b \rangle$$

ところが D_8 の任意の要素を $a^\alpha b^\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$ の形で書けるわけではない. 上の a, b と一般の n について.

$$|a| = |b| = 2, \quad D_{2n} = \langle a, b \rangle, \quad |D_{2n}| = 2n$$

▨ 例.　S_n.

$$S_n = \langle \underbrace{(1\ 2)}_{\text{order 2}}, \underbrace{(1\ 2\ \cdots\ n)}_{\text{order 2}} \rangle$$

$$|S_n| = n!$$

▨ 例　$GL_2(\mathbb{R})$

$$G = GL_2(\mathbb{R}), \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a^2 = b^2 = 1, \quad ab = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |ab| = \infty.$$

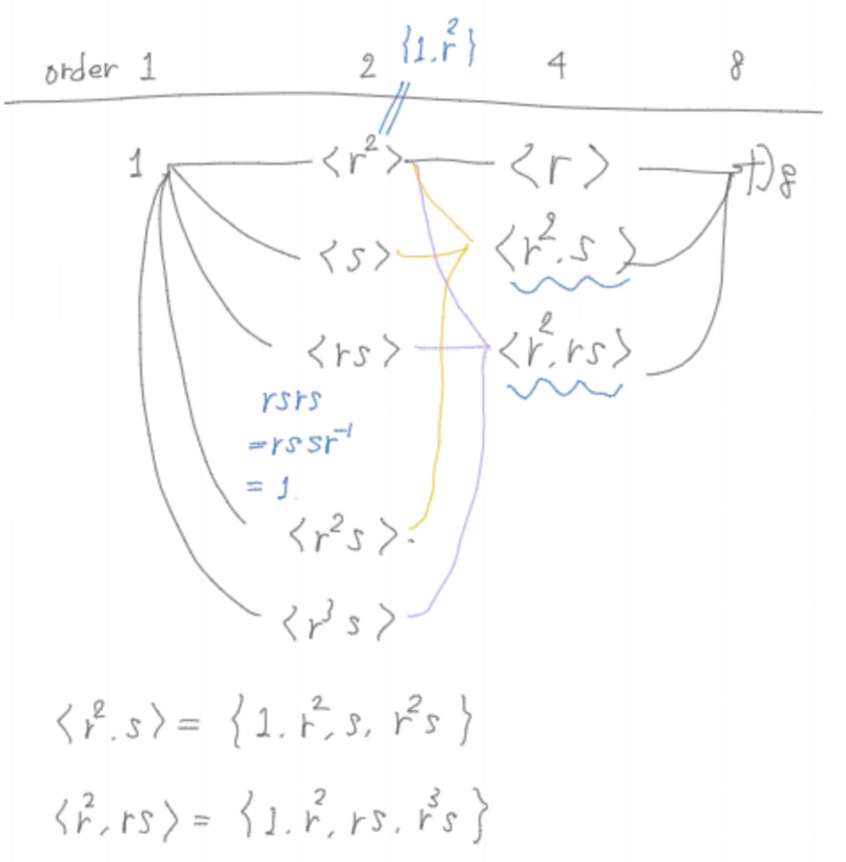
$$\therefore \ |\langle \underbrace{a, b}_{\text{order 2}} \rangle| = \infty$$

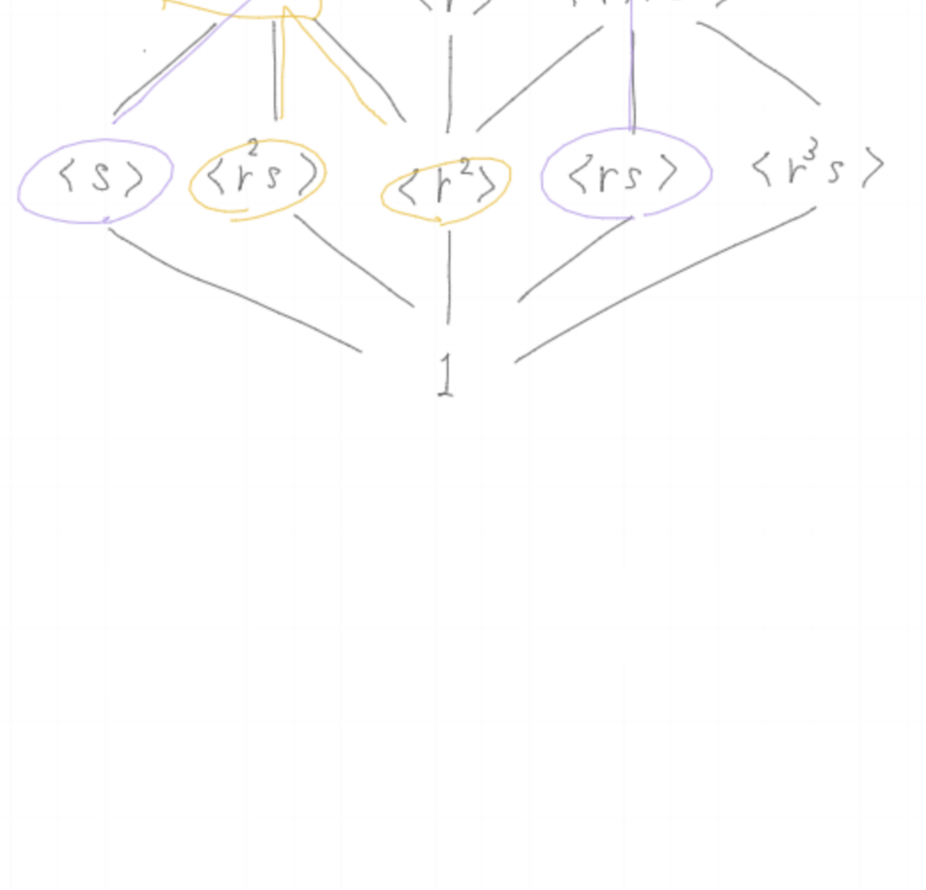
☆ 一般に $|A| \geq 2$ になると. 群構造を調べるのが難しくなる.

2.5. The lattice of subgroups of a group

☆ lattice

例 D_8　intersection ⟼ join





$\langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, s, r^2 s\}$

$\langle r^2, rs \rangle = \{1, r^2, rs, r^3 s\}$

$\langle r^2, r^2 s \rangle = \{1, r^2, r^2 s, s\} = \boxed{\langle r^2, s \rangle}$

$\langle r^2, r^3 s \rangle = \langle r^2, rs \rangle$

$\langle s, rs \rangle = \boxed{D_8}$

$\langle s, r^2 s \rangle = \{1, r^2 s, s, r^2\} = \langle r^2, s \rangle.$

$\langle s, r^3 s \rangle = D_8$

$\langle rs, r^2 s \rangle = D_8$

$\langle rs, r^3 s \rangle = \langle 1, rs, r^3 s, r^2 \rangle = \langle r^2, rs \rangle.$

$\langle r^2 s, r^3 s \rangle = D_8$