# Abs. Alg. #17 $19^{12}06$ 金

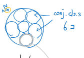
**Def.**

(1) $\sigma \in S_n$

$$\sigma = \underbrace{(\cdot)}\underbrace{(\cdot)}\underbrace{(\cdot\ \cdot)}\cdots\underbrace{(\cdot\cdot\cdot\cdot)}$$
$$n_1 \le n_2 \le n_3 \le \cdots \le n_r$$

$(n_1, \cdots, n_r)$ : cycle type of $\sigma$.

(2) 非減少自然数列 $\{n_i\}_i$ で $\sum n_i = n$ のものを a partition of $n$ という。




**Prop 4.11**

(1) $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ : conjugate in $S_n$

$\iff \sigma_1, \sigma_2$ have the same cycle type.

(2) $\#(\text{conj. cls.s of } S_n) = \#(\text{partitions of } n)$

⌞ $\#$(permissible cycle types). ⌟

<proof>

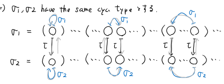
(1) $(\Rightarrow)$ は、Prop 4.10 より従う。

$\sigma, \tau \in S_n$

$\sigma = (\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)\cdots(\cdot\cdot\cdot\cdot)$

$\tau\sigma\tau^{-1} = (\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)\cdots(\cdot\cdot\cdot\cdot)$

$(\Leftarrow)$ $\sigma_1, \sigma_2$ have the same cyc. type とする。



上のように $\tau$ を定めると、$\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$

例 (1)(2)「$\sigma_1, \sigma_2$ を conj. する $\tau$ は複数ある。」

☆ Prop 4.11 と Prop 4.6 は $C_{S_n}(\sigma)$ を exhibit するのに用いられる。

たとえば $\sigma$ が $m$-cycle のとき、

$$\#(\text{conj. of } \sigma) = \#(m\text{-cycles}) = {}_nC_m \cdot (m-1)! = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

Prop 4.6 ‖

$$|S_n : C_{S_n}(\sigma)| = \underbrace{|S_n|}_{n!} / |C_{S_n}(\sigma)|$$

したがって、

$$|C_{S_n}(\sigma)| = m(n-m)!$$

実際、$\sigma$ は、

- $1, \sigma, \cdots, \sigma^{m-1}$ と可換。
- $\sigma$ の $m$-cycle に関わっていない $(n-m)!$ コの $\tau \in S_{n-m}$ と可換。

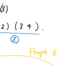
$$\sigma = \boxed{\underbrace{(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}_{m}}\ \underbrace{(\cdot)\cdots(\cdot)}_{n-m}$$
$$\tau = \boxed{(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}\ \underbrace{\cdots\cdots}_{n-m}$$

つまり、

$$\sigma : m\text{-cycle} \Rightarrow C_{S_n}(\sigma) = \{\sigma^i\tau \mid 0 \le i \le m-1,\ \tau \in S_{n-m}\}$$
$$\# C_{S_n}(\sigma) = m(n-m)!$$

☆ $H \trianglelefteq G \Rightarrow {}^\forall K$ : conj. cls. of $G$ ($K \subset H$ or $K \cap H = \emptyset$).

∵




**Thm 4.12.** $A_5$ is a simple group. ＊cf. p.145.

<proof>.

repr.s of the cycle types of $A_5$ : cf. 例(3)

$1$, $\underset{①}{(1\ 2\ 3)}$, $\underset{②}{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$, $\underset{③}{(1\ 2)(3\ 4)}$.

① 3-cycle について、

$\underset{{}_5C_3(3-1)!}{20}$ 3-cycles in $A_5$, 20 distinct conj. of $(1\ 2\ 3)$. Prop 4.6.

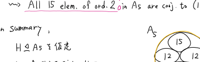
$C_{A_5}((1\ 2\ 3)) = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$ ord 3, ind 20

⇝ All 20 3-cycle are conj. in $A_5$

② 5-cycle について、

24 5-cycles in $A_5$, 12 dist. conj. of $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

⇝.




③ type $(2, 2)$ について

$C_{A_5}((1\ 2)(3\ 4))$ ord. 4. ind. 15

⇝ All 15 elem. of ord. 2 in $A_5$ are conj. to $(1\ 2)(3\ 4)$.

In summary,

$H \trianglelefteq A_5$ を仮定

上の☆でみたように、$H$ は the union of conj. cls.s of $A_5$.




$|H| = (\{1, 12, 12, 15, 20\}$ を組み合わせて足したもの$)$

かつ、

$|H| \mid |A_5| = 60$

可能性は、

$|H| = 1$ or $60$.

$\therefore A_5$ : simple.

## §4.4. Automorphism.

**Def.**

$\varphi : G \longrightarrow G$ : iso

: automorphism of $G$

$\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi : G \to G : \text{aut.}\}$

★ $\mathrm{Aut}(G) \le S_G$

**Prop 4.13.** $H \trianglelefteq G$

$G$ acts by conj. on $H$ as aut. of $H$ :

$$\psi : G \longrightarrow S_H = \mathrm{Aut}(H).$$
$$g \longmapsto \psi(g) := \varphi_g : H \longrightarrow H$$
$$h \longmapsto \varphi_g(h) = g \cdot h := ghg^{-1}.$$

とすると、

$\varphi_g \in \mathrm{Aut}(H)$.

$\ker\varphi = C_G(H)$.

とくに、

$G / C_G(H) \cong \bigcirc \le \mathrm{Aut}(H)$.

**Cor 4.14.** $K \le G$, $g \in G$

$K \cong gKg^{-1}$, $|k| = |gkg^{-1}|$. $|K| = |gKg^{-1}|$.

**Cor 4.15.** $H \le G$

$N_G(H) / C_G(H) \cong \bigcirc \le \mathrm{Aut}(H)$.

とくに、

$G / Z(G) \cong \bigcirc \le \mathrm{Aut}(G)$.

**Def.** $g \in G$

$$\varphi_g : G \longrightarrow G : \text{aut.}$$
$$h \longmapsto \varphi_g(h) := ghg^{-1}$$

$\varphi_g$ : inner aut. of $G$

$\{\varphi_g : \text{inn. aut} \mid g \in G\} =: \mathrm{Inn}(G) \le \mathrm{Aut}(G)$.

☆ Cor 4.15 より、$\mathrm{Inn}(G) \cong G / Z(G)$

例 (1).

$G$ : abelian $\iff {}^\forall\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$ $\varphi_g$ : trivial.

$H \trianglelefteq G$ : abelian. $H \not\subset Z(G)$

$\Rightarrow {}^\exists g \in G$ s.t. $\varphi_g : H \longrightarrow H \notin \mathrm{Inn}(G)$.

$h \longmapsto ghg^{-1}$

例. $H = V_4 \trianglelefteq A_4 = G$, $g = (a\ b\ c)$.