Abs. Alg. #11 19.10.25 金

pp. 99–100

Prop 3.21 G : abelian , $|G| < \infty$
p : prime , $p \mid |G|$

$\exists\, x \in G$ s.t $|x| = p$

< proof > $|G|$に関する帰納法による.

I) $|G| = p$ のとき.

Cor 3.10より, $G \cong \mathbb{Z}_p =: \langle x \rangle$

Prop 2.2より, $|x| = |\langle x \rangle| = p$.

O.k.

II) $|G| > p$ のとき. $|G'| < |G|$ なる G' : abelianに対して, 題意成立を仮定.

$p \mid |G|$ より, $1 < |G|$ ∴ $1 \neq \exists x \in G$

i) $p \mid |x|$ のとき $\quad$ ($a \mid \overset{|x|}{\overset{\shortparallel}{n}} \Rightarrow |x^a| = n/a$).

$pn = |x|$ とする. $n \mid pn$ と Prop 2.5 (3) とから,

$|x^n| = pn/n = p$. done.

ii) $p \nmid |x|$ のとき.

$\langle x \rangle =: N$ とする. G : abelianより, $N \trianglelefteq G$

Lagrange's thm. より, $\quad$ ∵ $\forall g \in G$ $gN = Ng$.

$|G/N| = |G:N| = |G|/|N|$

$1 \neq x$ より. $|N| = |\langle x \rangle| > 1$. ∴ $|G/N| < |G|$

$p \nmid |x| = |\langle x \rangle| = |N|$ と $p \mid |G| = |G/N||N|$ とから,

$p \mid |G/N|$.

?

G/N : abelian に帰納法の仮定を用いて,

yN $\quad \exists\, \bar{y} \in \bar{G}\ (:= G/N)$ s.t. $|\bar{y}| = p$.

$\bar{1} \neq \bar{y}$ i.e. $y \notin 1N = N$, $\bar{1} = \bar{y}^p$ i.e. $y^p \in 1N = N$ より,

$\langle y^p \rangle \neq \langle y \rangle$ ∴ $|y^p| < |y|$

Prop 2.5.(2) より. $|y^p| = |y| / (|y|, p)$.

∴ $(|y|, p) = |y| / |y^p| > 1$

∴ $p \mid |y|$

$pm = |y|$ とすると. $|y^m| = p$. done.

Def. $\quad 1 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$ —— (∗)

$N_i \trianglelefteq N_{i+1}$

N_{i+1}/N_i : simple group

(∗) : a composition series.

N_{i+1}/N_i : composition factors of G.