「Abs.Alg.」#8　19 10/04 金

Prop 3.7　　$N \leq G$

N : normal $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi : G \to \_$: homo. s.t. $N = \ker\varphi$

<proof> ($\Leftarrow$)

$\varphi : G \to \_$: homo. with ker. N とする.

任意に $g \in G$ をとる.

$\varphi(g) =: a$ とすると, $g \in \varphi^{-1}(a)$. Prop 3.2 より.

$$gN = \varphi^{-1}(a) = Ng$$

Thm 3.6 (3) より, N : normal.

($\Rightarrow$)

N : normal とすると. Thm 3.6 (4) より, G/N が定義できる.

$$\begin{array}{cccc} \pi : & G & \longrightarrow & G/N \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & \pi(g) := gN \end{array}$$

と定めると.

$$\pi(g_1 g_2) = g_1 g_2 N = g_1 N g_2 N = \pi(g_1)\pi(g_2).$$

$\therefore$ π : homo.

また

$$\begin{aligned} \ker\pi &= \{ g \in G \mid \pi(g) = 1N \} \\ &= \{ g \in G \mid gN = 1N \} \\ &= \{ g \in G \mid g \in N \} \\ &= N. \end{aligned}$$

* $gN = 1N \Leftrightarrow g \in N$

∵ ($\Leftarrow$)

$g \in N$ とする.

i) $gN \subset 1N$

∵ $\forall gn \in gN$, $\overset{N}{g}n \in N$.

ii) $gN \supset 1N$

∵ $\forall n \in 1N$, $n = g(\overset{N}{g^{-1}n}) \in gN$.

($\Rightarrow$)

$gN = 1N$ とする. とくに $g \cdot 1 \in 1N$.

Def.　　$N \trianglelefteq G$

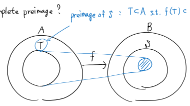
$$\begin{array}{cccc} \pi : & G & \longrightarrow & G/N : \text{homo.} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & \pi(g) := gN \end{array}$$

$\overline{H} \leq G/N$

π : the natural projection of G onto G/N

$\pi^{-1}(\overline{H})$ = (the complete preimage of $\overline{H}$ in G) ―― ?

★ complete preimage ?　preimage of S : $T \subset A$ s.t. $f(T) \subset S$ ―(*)



(*)をみたす最大の $T \subset A$ を complete preimage of S という ?

§3.2.

Thm 3.8 (Lagrange's thm.)

$|G| < \infty$

$H \leq G$

$|H| \mid |G|$

$|G| / |H|$ = (the number of left cosets of H in G).

($=: k$)

<proof>

$\forall g \in G$, $|gH| = |H|$

∵
$$\begin{array}{cccc} \varphi_g : & H & \longrightarrow & gH \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & h & \longmapsto & \varphi_g(h) := gh \end{array}$$

* $gh_1 = gh_2$

$\Rightarrow h_1 = h_2$

とすると, φ_g : bij.

Prop 3.4 より, G は k コの gH たちに分割されるから.

$$|G| = k\,|gH| = k\,|H|.$$

Def.　　$H \leq G$.

$|G:H|$:= (the number of left cosets of H in G).

: the index of H in G

Cor 3.9.　　$|G| < \infty$

$x \in G$

$|x| \mid |G|$, とくに $x^{|G|} = 1$.

<proof>

$x \in G$ からなる cyclic group $\langle x \rangle \leq G$ を考えると

$$\frac{|G|}{|x|} = \frac{|G|}{|\langle x \rangle|} = |G : \langle x \rangle|. \text{ (integer.)}$$

Prop 2.2 より. $|x| = |\langle x \rangle|$.　Thm 3.8 より.

よって. $|x| \mid |G|$. $|G| = m|x|$ とかけるから,

$$x^{|G|} = x^{m|x|} = (x^{|x|})^m = 1^m = 1.$$

Cor 3.10.　　$|G| = p$: prime

G is cyclic. $G \cong \mathbb{Z}_p$

<proof>

$1 \neq x \in G$ をとる.

$1 < |\langle x \rangle|$, $|\langle x \rangle| = |x| \mid |G|$: prime

より, $|\langle x \rangle| = |G|$. $\langle x \rangle \leq G$ とから, $\langle x \rangle = G$.

Thm 2.4. より, $G \cong \mathbb{Z}_p$.

例 (1)　$H := \langle (1\,2\,3) \rangle \leq S_3 =: G$ とすると, $H \trianglelefteq G$.

∵ §2.2 で見たように, 一般に,

$$H \leq N_G(H) \leq G$$

Thm 3.8 より,

$$3 = |H| \mid |N_G(H)|, \quad |N_G(H)| \mid |G| = 6$$

可能性として. $N_G(H) = H$ または G

ところで
$$\underset{g}{(1\ 2)}\underset{x}{(1\ 2\ 3)}\underset{g^{-1}}{(1\ 2)^{-1}} = \underset{x^a}{(1\ 2\ 3)^{-1}}$$

これと §2.3 Q24 (b) より, $(1\ 2) \in N_G(H)$.

$(1\ 2) \notin H$ であるから, 残る可能性として. $N_G(H) = G$.

例 (2)　$H \leq G$ で $|G:H| = 2$ のとき, $H \trianglelefteq G$.

例 (3)　$\trianglelefteq$ は not transitive.

Def.

G : simple group

:$\Leftrightarrow$ (the only normal subgroups of G are 1 and G.).

★ Lagrange's thm. の逆は成立しない.

つまり. $|G| < \infty$, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n \mid |G|$ でも,

G が order n の subgroup をもつとは限らない.

例.　A : the group of symmetries of a regular tetrahedron.

$|A| = 12$

仮に $H \leq A$. $|H| = 6$ なる H が存在したとする.

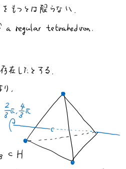
$|A:H| = 2$ と先の先の例 (2) より,

$H \trianglelefteq A$ で. $A/H \cong \mathbb{Z}_2$

$|A/H| = 2$ より.

⋮

$\{ g \in A \mid |g| = 3 \} =: A_3 \subset H$



ところが, 実際には $|A_3|$ は少なくとも 8 あり,

$|H| = 6$ に反する.

よって, $6 \mid |A|$ ではあるのだが,

$|H| = 6$ なる $H \leq A$ は存在しない.