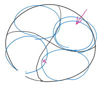
『Abs. Alg.』#9 19^{10}_{11} 金

Def.

$HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$

Prop 3.13. H, K : finite subgroups of a group

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$



<proof>

$$HK = \bigcup_{h \in H} hK$$

である. 各 hK は $|K|$ 個の元をもつから, O.K.

相異なる left cosets hK の数を求めれば十分.

ところで

$$h_1 K = h_2 K$$
$$\iff h_2^{-1} h_1 \in H \cap K$$
$$\iff h_1 (H \cap K) = h_2 (H \cap K).$$

であるから, 相異なる left cosets $h(H \cap K)$ の数を求めればよい.

その数は, ($H \cap K \leq H$ に Lagrange's thm. を用いて)

$$\frac{|H|}{|H \cap K|}$$

である. よって, HK は $\frac{|H|}{|H \cap K|}$ 個の相異なる cosets of K からなり,

それぞれ cosets of K は $|K|$ 個の元をもつので, 主張のとおり。 ⊡.

★ Prop 3.13 で, $HK \leq G$ は言っていない.

($HK \leq G$ とならない例).

$$G = S_3, \ H = \langle (1\ 2) \rangle, \ K = \langle (2\ 3) \rangle.$$

とすると,

$$|HK| = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4. \nmid 6 = |G|$$

Lagrange's thm. の対偶. $HK \not\leq G$.

Prop 3.14. $H, K \leq G$

$$HK \leq G \iff HK = KH.$$

<proof> ($\Leftarrow$).

$HK = KH$ とする. $a, b \in HK$ をとると, $ab^{-1} \in HK$.

∵ $\exists h_1, h_2 \in H$, $\exists k_1, k_2 \in K$ s.t. $a = h_1 k_1$, $b = h_2 k_2$.

$$ab^{-1} = h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} = h_1 \underbrace{k_1 k_2^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{k_3}} \underbrace{h_2^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{h_3}} = h_1 k_3 h_3 = \underbrace{h_1 h_4}k_4 \in HK.$$

∵ $\exists h_4 k_4 \in HK$ s.t. $h_4 k_4 = k_3 h_3$

($\Rightarrow$)

$HK \leq G$ とする.

i) $HK \supset KH$

∵ $K \leq HK$, $H \leq HK$ と closure property から。

$HK = \{\underset{1}{\cancel{h}}k \mid \underset{1}{\cancel{h}} \in H, k \in K\}$

$\forall kh \in KH$.

$\underset{\underset{HK}{\cap}}{k}\ \underset{\underset{HK}{\cap}}{h} \in HK$..

∵group.

ii) $HK \subset KH$.

∵ 任意に $hk \in HK$ をとる. $HK \leq G$ より,

$\exists h_1 k_1 \in HK$ s.t. $hk = (h_1 k_1)^{-1} = k_1^{-1} h_1^{-1} \in KH$.

Cor 3.15. $H, K \leq G$

$H \leq N_G(K)$

$HK \leq G$

とくに, $K \trianglelefteq G \Rightarrow {}^\forall H \leq G \quad HK \leq G$.

Def.

$A \subset N_G(K) \iff$ "A normalizes K".

$A \subset C_G(K) \iff$ "A centralizes K".

p83.

Def.

$N \trianglelefteq G$

$$\begin{array}{cccc} \pi : & G & \longrightarrow & G/N \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & \pi(g) := gN. \end{array}$$

$\overline{H} \leq G/N$

$\pi^{-1}(\overline{H})$: the complete preimage of $\overline{H}$ in G

§ 3.3

Thm 3.16 (1st iso. thm.)

$\varphi : G \longrightarrow H$: homo.

$\ker\varphi \trianglelefteq G$

$G/\ker\varphi \cong \varphi(G)$ Im(φ).

<proof> $\ker\varphi =: N$.

$\ker\varphi \trianglelefteq G$

∵ ${}^\forall g \in G \quad gNg^{-1} \subset N$ ← Thm 3.6 (5).

∵ ${}^\forall n \in N$.

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(n)}_{1}\varphi(g)^{-1} = 1.$$

$gng^{-1} \in N$.

$$\begin{array}{cccc} \psi : & G/N & \longrightarrow & \varphi(G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & gN & \longmapsto & \psi(gN) := \varphi(g) \end{array}$$

とする.

0) ψ : well defined.

$gN = g'N$

とすると, とくに $g' \in gN$ であるから,

$\exists n \in N$ s.t. $g' = gn$.

$\psi(g'N) = \psi(gnN) = \varphi(gn) = \varphi(g)\varphi(n)$

$= \varphi(g) = \psi(gN)$.

よって ψ は G/N の left coset の代表元のとり方によらず定まる.

i) ψ : homo.

ii) ψ : surj.

∵ ${}^\forall h \in \varphi(G)$ $\exists g \in G$ s.t. $\varphi(g) = h$

∴ $\exists gN \in G/N$ s.t. $\psi(gN) = \varphi(g) = h$.

iii) ψ : inj.

∵ $\psi(g_1 N) = \psi(g_2 N)$ とすると. $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$.

$\varphi(g_1^{-1} g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = 1$. ∴ $g_1^{-1} g_2 \in N$.

Prop 3.4. より. $g_1 N = g_2 N$

★

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi : homo"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ & \varphi(G) \arrow[u, phantom, "\cup"] \\ G/\ker\varphi \arrow[ru, "\cong", "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Cor 3.17 $\varphi : G \to H$: homo.

(1) φ : inj. $\iff \ker\varphi = 1$

(2) $|G : \ker\varphi| = |\varphi(G)|$

<proof>.

(1) $\Rightarrow$

$\varphi(g) = 1_H \Rightarrow g = 1_G$

∵ $\varphi(g) = 1_H = \varphi(1_G)$ と. φ : inj. から, $g = 1_G$.

(1) $\Leftarrow$

$\varphi(g) = \varphi(g') \Rightarrow g = g'$

∵ $\varphi(g^{-1}g') = \varphi(g)^{-1}\varphi(g') = 1$.

∴ $g^{-1}g' \in \ker\varphi = 1$.

∴ $g = g'$

(2).

$|G : \ker\varphi| = $ (the number of left cosets of $\ker\varphi$ in G) G / ker φ

$= |G/\ker\varphi|$

$= |\varphi(G)|$.