Abs. Alg. #19　19^{12}_{20} 金

Thm 4.18 (Sylow.)
$|G| = p^\alpha m,\ p \nmid m.$

(1)
$\mathrm{Syl}_p(G) \neq \phi$

1

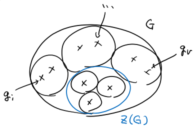
<proof>.
$|G|$ に関する帰納法.

I) $|G| = 1 = p^0$ のとき.
$1_G \leq G$ について $|1_G| = 1 = p^0$ $\therefore 1_G \in \mathrm{Syl}_p(G)$. o.k.

II) $|G'| < |G|$ なる G' について $\mathrm{Syl}_p(G') \neq \phi$ を仮定する.

i) $p \mid |Z(G)|$ のとき. Prop 3.21 より,
$\exists x \in Z(G)$ s.t. $|x| = p$.
$\langle x \rangle =: N$, $N \leq Z(G)$. $|N| = |\langle x \rangle| = |x| = p$.
$G/N =: \bar{G}$, $|\bar{G}| = p^{\alpha-1}m$. 仮定より, $\mathrm{Syl}_p(\bar{G}) \neq \phi$.
$\exists \bar{P} \leq \bar{G}$ s.t $|\bar{P}| = p^{\alpha-1}$
$N \leq P \leq G$, $P/N = \bar{P}$ なる P をとると,　　都合よく P とれる?
$|P| = |P/N||N| = p^{\alpha-1} \cdot p = p^\alpha$
$\therefore P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

ii) $p \nmid |Z(G)|$
The cls. eq. は,



$$|G| = |Z(G)| + \sum_i |G : C_G(g_i)|$$

仮に $\forall i$　$p \mid |G : C_G(g_i)|$
なら,　$p \mid \left(|Z(G)| = |G| - \sum |G : C_G(g_i)| \right)$
となり矛盾.
$\exists i$ s.t $p \nmid |G : \underbrace{C_G(g_i)}_{H}|$.

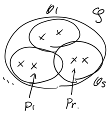
$p \nmid |G : H| = p^\alpha m \,/\, |H|$
より, $|H| = p^\alpha k$, $p \nmid k$

$g_i \notin Z(G)$ であったから, $|H| < |G|$
∵ $g_i \notin Z(G) = \{ g \in G \mid \forall g' \in G\ g g' g^{-1} = g' \}$
$H = C_G(g_i) = \{ g \in G \mid g g_i g^{-1} = g_i \}$
$\| \qquad\qquad \forall g' \in G\ g_i g' g_i^{-1} = g'$
$G \qquad\qquad g' g_i g'^{-1} = g_i$

仮定より, $\mathrm{Syl}_p(H) \neq \phi$.
$\exists P \leq H$ s.t. $|P| = p^\alpha$
$\therefore P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.
i) ii) いずれも $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \phi$.

2

(2) と (3) の前に…
(1) より, G に対して $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ が存在. そこで
$\mathcal{S} := \{ gPg^{-1} \mid g \in G \} = \{ P_1, \cdots, P_r \}$
とし, $Q \leq G$: p-subg. とする. $\mathcal{S}$ の定義より,
G は, したがって Q も, acts by conj. on $\mathcal{S}$.
Q の orbits $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_s$ の union として $\mathcal{S}$ をかく:
$\mathcal{S} = \mathcal{O}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{O}_s$
ここで, $r = |\mathcal{O}_1| + \cdots |\mathcal{O}_s|$.
$\{P_1, \cdots, P_r\}$ の順序変更,
$P_i \in \mathcal{O}_i$, $1 \leq i \leq s$



Prop 4.2 より,
$(\cdot) : \underset{Q}{G} \times \underset{\mathcal{S}}{A} \longrightarrow \underset{\mathcal{S}}{A}$: act.
$a \sim b$
$:\Leftrightarrow \exists g \in \overset{Q}{G}$ s.t. $a = g \cdot b$　　$P_1 = g \cdot P_2 = gP_2g^{-1}$.

$\# \{ b \in A \mid a \sim b \} = |G : G_a|$
$\# \{ P' \in \mathcal{S} \mid P \sim P' \} = |Q : Q_P|$　$\{ g \in Q \mid g \cdot P_i = P_i \}$
$|\mathcal{O}_i| = |Q : N_Q(P_i)|$　$\{ \parallel \mid gP_ig^{-1} = P_i \}$
$\mathcal{O}_i \ni P_i$

定義より,
$N_Q(P_i) = N_G(P_i) \cap Q$
Lem 4.19 より,
$N_G(P_i) \cap Q = P_i \cap Q$　　∵ $P_i \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$
これらより,　　$c_i : P \to P_i = g_i P g_i^{-1}$: bij.
$|\mathcal{O}_i| = |Q : P_i \cap Q|$　　$p \mapsto c_i(p) := g_i p g_i^{-1}$
$, 1 \leq i \leq s$.　　(4.1).

3

$r \equiv 1 \pmod p$ の証明
Q は任意であった. $Q = P_1$ とする. (4.1) より,
$|\mathcal{O}_1| = |P_1 : P_1 \cap P_1| = 1$.
$1 < i$ について, $P_1 \neq P_i$ $\therefore P_1 \cap P_i < P_1$ (4.1) より,
$|\mathcal{O}_i| = |P_1 : P_1 \cap P_i| > 1$, $2 \leq i \leq s$.
P_1 は p-group だから, $|P_1| = p^\beta$
$p \mid |P_1 : P_1 \cap P_i| = |\mathcal{O}_i|$, $2 \leq i \leq s$.
$\therefore r = \underset{1}{|\mathcal{O}_1|} + (\underset{p}{|\mathcal{O}_2|} + \cdots + \underset{p}{|\mathcal{O}_s|})$
$\therefore r \equiv 1 \pmod p$.