正交與對稱

吳昱良

2015 年 6 月 5 日

交通大學電機工程學系 108 級

大綱

1. 什麼是內積？什麼是正交？
2. 如何找正交基底？
3. 對稱矩陣的特徵向量是什麼？
4. 什麼是 SVD？它的的座標軸？定義域？值域？

內積與正交

定義

設 $v = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T, w = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T \in \mathrm{R}^n$

內積

$$v \cdot w = v^T w = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

標準定量 (norm)

$$\|v\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{v^T v}$$

正交 (orthogonal)

若 $v \cdot w = 0$，則 v, w 正交

性質

1. 若且唯若 u, v 正交，$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$
3. $\|u\| + \|v\| \geq \|u+v\|$

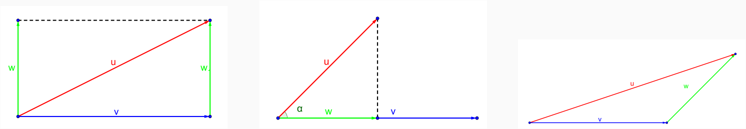

Figure 1: 不等式

集合的正交

設 $S = \{v_1, v_2 \cdots, v_n\}$，$\forall i, v_i \neq 0$

正交集 (orthogonal set)

若對於任意 $i \neq j$ 有 $v_i \cdot v_j = 0$，則 S 為正交集合

正交規範集 (orthonormal set)

若 S 為正交集且 $\|v_i\| = 1$，則 S 為正交規範集

Gram Schimidt 過程

目標

希望將一個子空間的基底轉換成正交基底，方便映射與計算長度。因此我們的問題是：

- 可以將一個基底轉成正交基底嗎？
- 如果可以怎麼轉？

Gram Schimidt 過程

考慮 $\{S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 為一基底，令：

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \tfrac{u_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&\vdots \\
v_i &= u_i - \tfrac{u_i \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \tfrac{u_i \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 \cdots - \tfrac{u_i \cdot v_{i-1}}{\|v_{i-1}\|^2} v_{i-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

則 $S' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 為一正交基底。

性質

設 S 為一正交集，則 S 線性獨立。

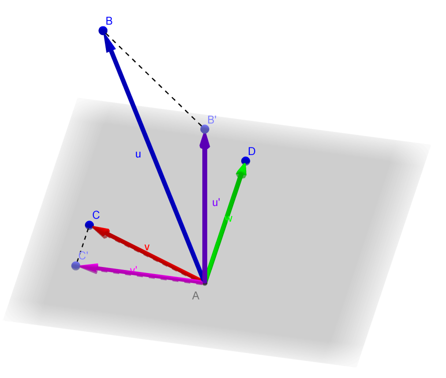

Figure 2: 圖像化

正交補餘 Orthogonal Complement

定義

非空集合 S 的正交補餘定義為

$$S^{\perp} = \{v \in \mathrm{R}^n : u \cdot v = 0, \forall u \in S\}$$

意義

非空集合 S 為矩陣 A 的列空間，則其正交補餘為 A 的零空間。

正交投影 Orthogonal Projection

定義

令 $W \subset \mathbb{R}^n$，對於 $v \in \mathbb{R}^n$ 存在的唯一向量 $w \in W$ 有 $(v - w) \in W^{\perp}$，則稱 w 為 v 的正交投影，並可定義運算子 $P : \mathbb{R}^n \to W$，$P(v) = w \in W^{\perp}$

問題

給定一子空間 $W \subset \mathbb{R}^n$，要怎麼找到任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 的正交投影？

如果是正交規範基底，問題會不會比較簡單？

正交投影 Orthogonal Projection

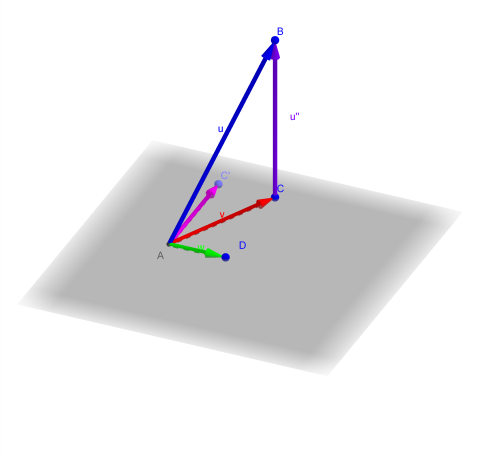

Figure 3: 圖像化

正交規範基底 Orthonormal Basis

令 $W = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 為正交規範基底。

對於 $v \in \mathrm{R}^n$，$v = w + u, w \in W, u \in W^\perp$，考慮：

$$w = (v^T z_1)z_1 + (v^T z_2)z_2 + \cdots + (v^T z_2)z_2$$

對於任意 $z_i \in Z$：

$$\begin{aligned}
&{z_i}^T(v - w) \\
=&{z_i}^T(v - (v^T z_1)z_1 - (v^T z_2)z_2 - \cdots - (v^T z_2)z_2) \\
=&{z_i}^T v - ({v_i}^T z_i)({z_i}^T z_i) \\
=&0
\end{aligned}$$

正交規範基底

故 $(v - w) \in W^{\perp}$，故 w 是 v 的正交投影。

$$
\begin{aligned}
w &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {z_1}^T v \\ {z_2}^T v \\ \vdots \\ {z_n}^T v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {z_1}^T \\ {z_2}^T \\ \vdots \\ {z_n}^T \end{bmatrix} v
\end{aligned}
$$

正交規範基底

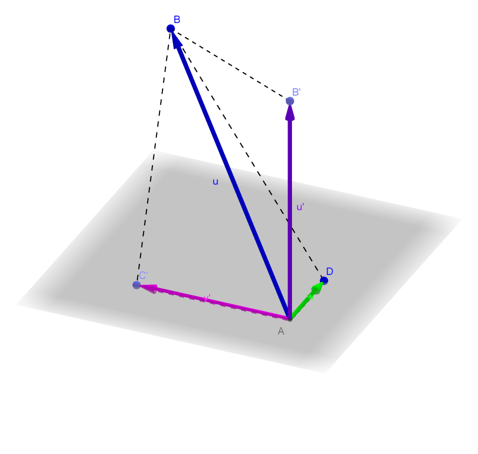

Figure 4: 圖像化

任意基底

設子空間 $W \subset \mathrm{R}^n$ 的基底構成矩陣 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 與設 $w = Au \in W$ 為 $v \in \mathrm{R}^n$ 的正交投影。考慮：

$$
\begin{aligned}
W^\perp &= (\mathrm{col}\ A)^\perp = (\mathrm{row}\ A^T)^\perp = \mathrm{null}\ A^T \\
&\Rightarrow A^T(w - v) = A^TAu - Av = 0 \\
&\Rightarrow A^TAu = A^Tv \\
&\Rightarrow u = (A^TA)^{-1}A^Tv \\
&\Rightarrow w = Au = A(A^TA)^{-1}A^Tv
\end{aligned}
$$

任意基底

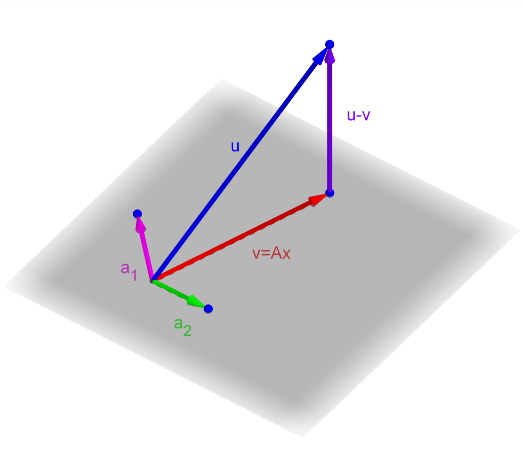

Figure 5: 圖像化

正交矩陣 Orthogonal Matrix

定義

正交矩陣：若 Q 的行向量構成一正交規範基底，則 Q 為正交矩陣

定理

若且 $Q \in \mathrm{R}^{n\times n}$，則：

1. $Q^TQ = I \Leftrightarrow Q$ 為正交矩陣
2. $(Qu)^T(Qv) = u^Tv \Leftrightarrow Q$ 為正交矩陣

對稱矩陣與特徵空間

對稱矩陣

問題

為甚麼想找對稱矩陣？

因為對稱矩陣可以對角化，且其特徵向量相互正交。

對稱矩陣 Symmetric Matrix

定義

對稱：若矩陣 A 有 $A = A^T$，則稱 A 對稱

定理

1. 若 $A = [a_{ij}] \in \mathrm{R}^{n \times n}, a_{ij} \in \mathrm{R}, \forall \mathrm{i}, \mathrm{j}$，則 $f_A(t) = \det(A - t \cdot I) = 0$ 有 n 實根。
2. $A \in \mathrm{R}^{n \times n}, A = A^T \Leftrightarrow$ 存在正交矩陣 P 與對角矩陣 D 使 $A = PDP^T$

光學分解 Spectral Decomposition

光學分解：考慮正交矩陣 P 與對角矩陣 D 使 $A = PDP^T$，令：

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

則：

$$A = \lambda_1 v_1 {v_1}^T + \lambda_2 v_2 {v_2}^T + \cdots + \lambda_n v_n {v_n}^T$$

問題

問題

1. **為甚麼要考慮對稱矩陣？**
   對稱矩陣可以對角化，且其不同特徵空間的向量相互正交。
2. **為甚麼要考慮特徵空間？**
   特徵值可以告訴我們長度的變化。
3. **考慮許多線性變換的矩陣表達式不是對稱矩陣，想了解它的特徵空間有什麼方法？**
   考慮 SVD！

什麼是對角化？

如果把矩陣 A 想像成一個函數，且 A 可以寫成 $A = PDP^{-1}$，則：

$$Av = \underbrace{P}_{\text{映射回 } A \text{ 的空間}} \underbrace{D}_{\text{縮放}} \underbrace{P^{-1}}_{\text{取座標}} v$$

SVD 是什麼？

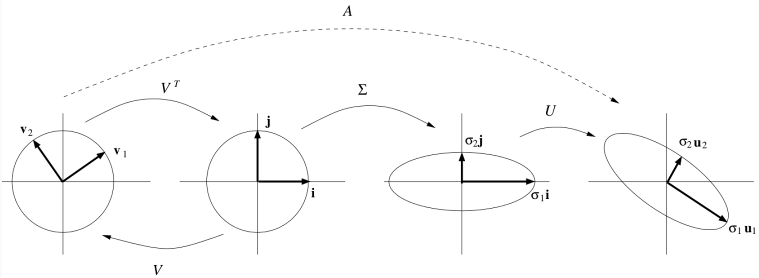

Figure 6: 圖像化

Singular Value Decomposition (SVD)

定理

設 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$，Rank $A = k$，則存在 R^n 的正交規範基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 與 R^m 的正交規範基底 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，以及 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$，使得：

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i, 1 \leq i \leq k \\ 0, i > k \end{cases}, A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i, 1 \leq i \leq k \\ 0, i > k \end{cases}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

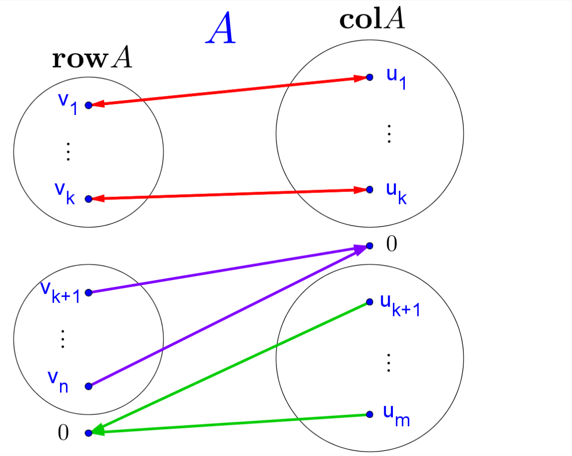

Figure 7: 圖像化

問題

利用前頁的定理，令

$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$，

$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}$，

$\Sigma = [a_{ij}], a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq 0 \\ \sigma_i, i = j \end{cases}$

則：$AV = U\Sigma$

或記為：$A = U\Sigma V^T$

Q&A

謝謝大家