

## 等候理論勾選題目

2. 某客運公司自己有個汽車維修廠，負責維修所有自己公司的車輛。維修廠人員每天上班八小時。前來維修的車輛為 Poisson 分配，平均每天五輛車。由於場地和工作人員的限制，每次僅能維修一輛汽車，每輛車的維修時間呈指數分配，平均時間為 1 小時 10 分鐘。

- (a) 維修廠忙碌時間的百分比是多少？
- (b) 平均有多少輛車因前來維修而無法營運？
- (c) 每輛車平均要等多久才能開始維修？

**Sol.** (a) 此為  $M/M/1$  模式。

$$\lambda = 5/\text{day} = \frac{5}{8}/\text{hr} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{7}{6}\text{hr} \Rightarrow \mu = \frac{6}{7}/\text{hr}$$

因此維修廠忙碌時間的百分比為  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5/8}{6/7} = 0.729$

(b) 因前來維修而無法營運的平均車輛數，即為此系統的  $L$ ，其計算如下：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2.692 \text{ 輛車}$$

(c)

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 3.141 \text{ hr}$$

3. 延續習題 2，目前該維修廠並沒有適當的停車空間，等待維修的車輛經常違規停車，因此公司計畫在維修廠旁租用一塊地作為停車之用。根據實地測量，每輛車約需 12 平方公尺的停放空間。該公司應租用多少地才能使前來的車輛至少有 80% 的機率有位置可停放？

**Sol.** 計算  $p_n$  如下：  
 $p_n = \rho^n (1 - \rho) = 0.271 \times 0.729^n$   
 $p_0 = 0.271, p_1 = 0.198, p_2 = 0.144,$   
 $p_3 = 0.105, p_4 = 0.077, p_5 = 0.056$

因為

$$\sum_{n=1}^4 p_n = 0.795 \leq 0.80 \leq 0.851 = \sum_{n=1}^5 p_n$$

所以系統必須有五個位置（即等候線必須有四個位置），因此該公司應租用  $12 \times 4 = 48$  平方公尺的停放空間。

8. 一家最頂級的巧克力店為控制店內溫度並維持最好的服務品質，在同一個時間，僅容許 8 位顧客在店內選購。由於這家巧克力店頗負盛名，因此所有前來的顧客都願意在門外等候。每天上午 11:30 至下午 1:30 是顧客最多的時段，這段時間顧客的到達間隔時間呈指數分配，平均為 3 分鐘；每位顧客在店內的選購及結帳時間亦呈指數分配，平均為 15 分鐘。

- (a) 此系統屬於何種等候模式？
- (b) 在所分析的尖峰時段，平均有幾位顧客在門外等候？
- (c) 每位顧客平均要等多久才能進入店內消費？
- (d) 若該店決定將目前的 8 位顧客容量增加至 12 位，則在門外等候的顧客平均可降為幾位？

**Sol. (a)** 此為  $M/M/s$  模式，其  $s=8$ 。

(b) 相關資料如下： $\lambda = 20/\text{hr}$      $\mu = 4/\text{hr}$      $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{20}{8 \times 4} = \frac{5}{8} < 1$

代入  $M/M/8$  公式可得

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\lambda/(s\mu)} \right]^{-1}$$

$$= \left[ 1 + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!} \frac{1}{1-(5/8)} \right]^{-1} = 0.0065$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{5^8 (5/8)}{8!(1-5/8)^2} \times 0.0065 = 0.2799$$

因此，平均有 0.2799 位顧客在門外等候。

(c)  $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.2799}{20} = 0.0134 \text{ hr} = 0.84 \text{ min}$

每位顧客平均要等 0.84 min 才能入店消費。

(d) 代入  $M/M/12$  公式可得

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\lambda/(s\mu)} \right]^{-1}$$

$$= \left[ 1 + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!} + \frac{5^9}{9!} + \frac{5^{10}}{10!} + \frac{5^{11}}{11!} + \frac{5^{12}}{12!} \frac{1}{1-(5/8)} \right]^{-1}$$

$$= 0.0067$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{5^{12} (5/8)}{12!(1-5/8)^2} \times 0.0067 = 0.0152$$

因此，在門外等候的顧客平均可降為 0.0152 位。

9. 考慮一個單一服務者的等候系統，其到達間隔時間呈指數分配，到達率為每小時 5 人；服務時間呈常態分配，平均值為 5 分鐘，標準差為 1 分鐘。計算此等候系統的  $L_q$ 、 $L$ 、 $W_q$ 、 $W$  及  $p_0$ 。

**Sol.** 此為  $M/G/1$  模式，其相關資料如下：

$$\lambda = 5/\text{hr} \quad \mu = 12/\text{hr} \quad \sigma = 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ hr} \Rightarrow \sigma^2 = \left(\frac{1}{60}\right)^2 \text{ hr}^2$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{12} < 1$$

代入公式可得

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{5^2(1/60)^2 + (5/12)^2}{2(1-[5/12])} = \frac{0.1806}{1.1667} = 0.155$$

$$L = L_q + \rho = 0.155 + \frac{5}{12} = 0.572$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.031 \text{ hr} = 1.86 \text{ min}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0.114 \text{ hr} = 6.84 \text{ min}$$

$$p_0 = 1 - \rho = 0.583$$

11. 某量販店週年慶期間，平均每小時來 320 位顧客，並呈 Poisson 分配，每位顧客於排隊結帳前，在店裡選購商品的時間呈指數分配，平均花費 30 分鐘。

- (a) 在週年慶這段期間，店裡平均有多少位顧客（不含排隊結帳的顧客）？
- (b) 每位顧客在排隊結帳前，平均在店裡待多久？
- (c) 店裡（不含在結帳櫃臺等候結帳的顧客）超過 200 位顧客的機率是多少？（列出公式即可，不必計算數值。）

**Sol.** 在店裡選購商品顧客（不含排隊結帳的顧客）形成一個  $M/M/\infty$  的等候系統。到達率與離開率為： $\lambda = 320/\text{hr}$ 、 $\mu = 2/\text{hr}$ 。

(a) 店裡平均的顧客數為  $L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{320}{2} = 160$  位

(b) 每位顧客在排隊結帳之前，平均在店裡待的時間為

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \text{ hr} = 30 \text{ min}$$

(c) 店裡超過 200 位顧客的機率為  $p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} = \frac{(160)^n}{n!} e^{-160}$

$$p_{n>200} = 1 - \sum_{n=0}^{200} p_n$$

**12.** 某信用卡公司為擴展業務，特別在機場附近租了一塊大型的停車場地，所有持該公司白金卡者，均可享受免費機場停車的優惠。目前前來免費停車的顧客呈 Poisson 分配，每小時平均 12 輛車；每輛車的停車時間呈指數分配，平均停放 1.5 小時。

(a) 停車場僅有 5 輛車以內的機率是多少？

(b) 平均有多少輛車在停車場？

**Sol.** 此為  $M/M/\infty$  的等候系統。  $\lambda = 12/\text{hr}$   $\frac{1}{\mu} = \frac{3}{2} \text{hr} \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}/\text{hr}$

(a) 停車場僅有 5 輛車以內的機率為

$$\sum_{n=0}^5 p_n = e^{-18} \left( 1 + \frac{18^1}{1} + \frac{18^2}{2} + \frac{18^3}{6} + \frac{18^4}{24} + \frac{18^5}{120} \right) = 0.0003$$

(b) 停車場的平均車輛數為  $L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{2/3} = 18$  輛車

**13.** 某公司目前正考慮購買在工廠內使用的堆高機，其功能是將原物料由儲存區運送至各工作中心。現在有三個廠牌的堆高機列入最後考慮，各廠牌堆高機運送所需的來回時間均呈指數分配，分別為 12 分鐘（廠牌 A）、8 分鐘（廠牌 B）及 6 分鐘（廠牌 C）。各廠牌堆高機每小時的成本（操作成本加上折舊）分別為 \$1000（A）、\$1450（B）、\$1800（C）。各工作中心對於運送原物料的需求呈 Poisson 分配，每小時平均需要三次。若堆高機無法即時將原物料運達，工作中心將會因原物料短缺而停工，停工的損失為每小時 \$3000。該公司應選擇哪一個廠牌的堆高機，才能使得相關的總成本最低？

**Sol.** 此問題屬於  $M/M/1$  模式，相關資料如下：

$$\lambda = 3/\text{hr} \quad \mu_A = 5/\text{hr}, \mu_B = 7.5/\text{hr}, \mu_C = 10/\text{hr}$$

單位時間的期望總成本為  $E(TC) = E(SC) + E(WC) = c_s + c_w L$

使用各廠牌堆高機所導致的  $L$  可計算如下：

$$L_A = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{5 - 3} = 1.5$$

$$L_B = \frac{3}{7.5 - 3} = 0.6667$$

$$L_C = \frac{3}{10 - 3} = 0.4286$$

代入  $E(TC)$  公式可得

$$E(TC_A) = 1000 + 3000L = \$5500$$

$$E(TC_B) = 1450 + 3000L = \$3450$$

$$E(TC_C) = 1800 + 3000L = \$3086$$

因此，該公司應選擇廠牌 C 的堆高機，其期望總成本最低。

**14.** 延續習題 2 的客運公司維修廠問題。目前客運公司考慮擴充維修廠的場地並增加維修人員，使其能同時維修兩輛汽車。擴充所需要的所有成本（包括場地及人員等）預估為每天 \$4000（每天以八小時計）。客運車輛因前來維修而損失的成本（包括司機薪資及停駛的收入等）預估每輛為每天 \$8000。該客運公司是否應決定擴充維修廠？

**Sol.** 此問題分別屬於  $M/M/1$  及  $M/M/2$  模式，相關資料如下：

$$\lambda = 5/\text{hr} \quad \mu = \frac{480}{70}/\text{day} = 6.8571/\text{day}$$

單位時間的期望「相關」總成本為

$$E(TC) = E(SC) + E(WC) = E(SC) + c_w L$$

對於  $M/M/1$  模式， $E(TC)$  可計算如下：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2.6924 \quad E(TC) = 8000L = \$21,539$$

對於  $M/M/2$  模式， $E(TC)$  可計算如下：

$$\begin{aligned} p_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - \lambda/(s\mu)} \right]^{-1} \\ &= \left[ 1 + \frac{(0.729)^1}{1!} + \frac{(0.729)^2}{2!} \frac{1}{1 - 0.365} \right]^{-1} = 0.466 \end{aligned}$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{(0.729)^2 (0.365)}{2!(1-0.365)^2} \times 0.466 = 0.112$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.112 + 0.729 = 0.841$$

$$E(TC) = 4000 + 8000L = \$10,728$$

因此，該公司應決定擴充維修廠，相關總成本將可由現有的 \$21,539 降低至 \$10,728。