等候理論勾選題目

2. 某客運公司自己有個汽車維修廠，負責維修所有自己公司的車輛。維修廠人員每天上班八小時。前來維修的車輛為 Poisson 分配，平均每天五輛車。由於場地和工作人員的限制，每次僅能維修一輛汽車，每輛車的維修時間呈指數分配，平均時間為 1 小時 10 分鐘。

(a) 維修廠忙碌時間的百分比是多少？

(b) 平均有多少輛車因前來維修而無法營運？

(c) 每輛車平均要等多久才能開始維修？

Sol. (a) 此為 $M/M/1$ 模式。

$$\lambda = 5/\text{day} = \frac{5}{8}/\text{hr} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{7}{6}\text{hr} \Rightarrow \mu = \frac{6}{7}/\text{hr}$$

因此維修廠忙碌時間的百分比為 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{5/8}{6/7} = 0.729$

(b) 因前來維修而無法營運的平均車輛數，即為此系統的 L，其計算如下：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2.692 \text{ 輛車}$$

(c)

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 3.141 \text{ hr}$$

3. 延續習題 2，目前該維修廠並沒有適當的停車空間，等待維修的車輛經常違規停車，因此公司計畫在維修廠旁租用一塊地作為停車之用。根據實地測量，每輛車約需 12 平方公尺的停放空間。該公司應租用多少地才能使前來的車輛至少有 80%的機率有位置可停放？

Sol. 計算 p_n 如下：

$$p_n = \rho^n(1-\rho) = 0.271 \times 0.729^n$$
$$p_0 = 0.271,\ p_1 = 0.198,\ p_2 = 0.144,$$
$$p_3 = 0.105,\ p_4 = 0.077,\ p_5 = 0.056$$

因為

$$\sum_{n=1}^{4} p_n = 0.795 \le 0.80 \le 0.851 = \sum_{n=1}^{5} p_n$$

所以系統必須有五個位置（即等候線必須有四個位置），因此該公司應租用 $12 \times 4 = 48$ 平方公尺的停放空間。

8. 一家最頂級的巧克力店為控制店內溫度並維持最好的服務品質，在同一個時間，僅容許 8 位顧客在店內選購。由於這家巧克力店頗負盛名，因此所有前來的顧客都願意在門外等候。每天上午 11:30 至下午 1:30 是顧客最多的時段，這段時間顧客的到達間隔時間呈指數分配，平均為 3 分鐘；每位顧客在店內的選購及結帳時間亦呈指數分配，平均為 15 分鐘。

(a) 此系統屬於何種等候模式？

(b) 在所分析的尖峰時段，平均有幾位顧客在門外等候？

(c) 每位顧客平均要等多久才能進入店內消費？

(d) 若該店決定將目前的 8 位顧客容量增加至 12 位，則在門外等候的顧客平均可降為幾位？

Sol. (a) 此為 $M/M/s$ 模式，其 $s=8$。

(b) 相關資料如下：　$\lambda = 20/\text{hr}$　　$\mu = 4/\text{hr}$　　$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{20}{8\times 4} = \dfrac{5}{8} < 1$

代入 $M/M/8$ 公式可得

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\lambda/(s\mu)}\right]^{-1}$$

$$= \left[1+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!}+\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}\frac{1}{1-(5/8)}\right]^{-1} = 0.0065$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}p_0 = \frac{5^8(5/8)}{8!(1-5/8)^2}\times 0.0065 = 0.2799$$

因此，平均有 0.2799 位顧客在門外等候。

(c) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0.2799}{20} = 0.0134\,\text{hr} = 0.84\,\text{min}$

每位顧客平均要等 0.84 min 才能入店消費。

(d) 代入 $M/M/12$ 公式可得

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{20}{12\times 4} = \frac{5}{12} < 1$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\lambda/(s\mu)}\right]^{-1}$$

$$= \left[1+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\cdots+\frac{5^{10}}{10!}+\frac{5^{11}}{11!}+\frac{5^{12}}{12!}\frac{1}{1-(5/12)}\right]^{-1}$$

$$= 0.0067$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}p_0 = \frac{5^{12}(5/12)}{12!(1-5/12)^2}\times 0.0067 = 0.00418$$

因此，在門外等候的顧客平均可降為 0.00418 位。

9. 考慮一個單一服務者的等候系統，其到達間隔時間呈指數分配，到達率為每小時 5 人；服務時間呈常態分配，平均值為 5 分鐘，標準差為 1 分鐘。計算此等候系統的 L_q 、 L 、 W_q 、 W 及 p_0 。

Sol. 此為 $M/G/1$ 模式，其相關資料如下：

$$\lambda = 5/\text{hr} \qquad \mu = 12/\text{hr} \qquad \sigma = 1\,\text{min} = \frac{1}{60}\text{hr} \Rightarrow \sigma^2 = \left(\frac{1}{60}\right)^2 \text{hr}^2$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{12} < 1$$

代入公式可得

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{5^2(1/60)^2 + (5/12)^2}{2(1-[5/12])} = \frac{0.1806}{1.1667} = 0.155$$

$$L = L_q + \rho = 0.155 + \frac{5}{12} = 0.572$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.031\text{ hr} = 1.86\,\text{min}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0.114\text{ hr} = 6.84\,\text{min}$$

$$p_0 = 1 - \rho = 0.583$$

11. 某量販店週年慶期間，平均每小時來 320 位顧客，並呈 Poisson 分配，每位顧客於排隊結帳前，在店裡選購商品的時間呈指數分配，平均花費 30 分鐘。

(a) 在週年慶這段期間，店裡平均有多少位顧客（不含排隊結帳的顧客）？

(b) 每位顧客在排隊結帳前，平均在店裡待多久？

(c) 店裡(不含在結帳櫃臺等候結帳的顧客)超過 200 位顧客的機率是多少？（列出公式即可，不必計算數值。）

Sol. 在店裡選購商品顧客（不含排隊結帳的顧客）形成一個 $M/M/\infty$ 的等候系統。到達率與離開率為： $\lambda = 320/\text{hr}$ 、 $\mu = 2/\text{hr}$ 。

(a) 店裡平均的顧客數為 $L = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{320}{2} = 160$ 位

(b) 每位顧客在排隊結帳之前，平均在店裡待的時間為

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}\text{hr} = 30\,\text{min}$$

(c) 店裡超過 200 位顧客的機率為 $p_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}e^{-\lambda/\mu} = \dfrac{(160)^n}{n!}e^{-160}$

$$p_{n>200} = 1 - \sum_{n=0}^{200} p_n$$

12. 某信用卡公司為擴展業務，特別在機場附近租了一塊大型的停車場地，所有持該公司白金卡者，均可享受免費機場停車的優惠。目前前來免費停車的顧客呈 Poisson 分配，每小時平均 12 輛車；每輛車的停車時間呈指數分配，平均停放 1.5 小時。

(a) 停車場僅有 5 輛車以內的機率是多少？

(b) 平均有多少輛車在停車場？

Sol. 此為 $M/M/\infty$ 的等候系統。 $\lambda = 12/\text{hr}$ $\quad \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{3}{2}\text{hr} \Rightarrow \mu = \dfrac{2}{3}/\text{hr}$

(a) 停車場僅有 5 輛車以內的機率為

$$\sum_{n=0}^{5} p_n = e^{-18}\left(1+\frac{18^1}{1}+\frac{18^2}{2}+\frac{18^3}{6}+\frac{18^4}{24}+\frac{18^5}{120}\right) = 0.0003$$

(b) 停車場的平均車輛數為 $\quad L = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{12}{2/3} = 18$ 輛車

13. 某公司目前正考慮購買在工廠內使用的堆高機，其功能是將原物料由儲存區運送至各工作中心。現在有三個廠牌的堆高機列入最後考慮，各廠牌堆高機運送所需的來回時間均呈指數分配，分別為 12 分鐘（廠牌 A）、8 分鐘（廠牌 B）及 6 分鐘（廠牌 C）。各廠牌堆高機每小時的成本（操作成本加上折舊）分別為$1000（A）、$1450（B）、$1800（C）。各工作中心對於運送原物料的需求呈 Poisson 分配，每小時平均需要三次。若堆高機無法即時將原物料運達，工作中心將會因原物料短缺而停工，停工的損失為每小時$3000。該公司應選擇哪一個廠牌的堆高機，才能使得相關的總成本最低？

Sol. 此問題屬於 $M/M/1$ 模式，相關資料如下：

$$\lambda = 3/\text{hr} \qquad \mu_{\text{A}} = 5/\text{hr},\ \mu_{\text{B}} = 7.5/\text{hr},\ \mu_{\text{C}} = 10/\text{hr}$$

單位時間的期望總成本為 $\quad E(TC) = E(SC) + E(WC) = c_s + c_w L$

使用各廠牌堆高機所導致的 L 可計算如下：

$$L_{\text{A}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3}{5-3} = 1.5$$

$$L_{\text{B}} = \frac{3}{7.5-3} = 0.6667$$

$$L_{\text{C}} = \frac{3}{10-3} = 0.4286$$

代入$E(TC)$公式可得

$$E(TC_{\mathrm{A}}) = 1000 + 3000L = \$5500$$
$$E(TC_{\mathrm{B}}) = 1450 + 3000L = \$3450$$
$$E(TC_{\mathrm{C}}) = 1800 + 3000L = \$3086$$

因此，該公司應選擇廠牌 C 的堆高機，其期望總成本最低。

14. 延續習題 2 的客運公司維修廠問題。目前客運公司考慮擴充維修廠的場地並增加維修人員，使其能同時維修兩輛汽車。擴充所需要的所有成本（包括場地及人員等）預估為每天$4000（每天以八小時計）。客運車輛因前來維修而損失的成本（包括司機薪資及停駛的收入等）預估每輛為每天$8000。該客運公司是否應決定擴充維修廠？

Sol. 此問題分別屬於$M/M/1$及$M/M/2$模式，相關資料如下：

$$\lambda = 5/day$$

$$\frac{1}{\mu} = 1 \text{ 小時 } 10 \text{ 分鐘 } = 70 \text{ 分鐘 } = \frac{70 \text{ 分鐘}}{1\ day} = \frac{70 \text{ 分鐘}}{8 \text{ 小時}} = \frac{70 \text{ 分鐘}}{480 \text{ 分鐘}}$$

$$=> \mu = \frac{480}{70} = 6.8751/day$$

單位時間的期望「相關」總成本為 $E(TC) = E(SC) + E(WC) = E(SC) + c_w L$

對於$M/M/1$模式，$E(TC)$可計算如下：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2.6924 \qquad E(TC) = 8000L = \$21,539$$

對於$M/M/2$模式，$E(TC)$可計算如下：

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\lambda/(s\mu)}\right]^{-1}$$
$$= \left[1 + \frac{(0.729)^1}{1!} + \frac{(0.729)^2}{2!} \frac{1}{1-0.365}\right]^{-1} = 0.466$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{(0.729)^2 (0.365)}{2!(1-0.365)^2} \times 0.466 = 0.112$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.112 + 0.729 = 0.841 \qquad E(TC) = 4000 + 8000L = \$10,728$$

因此，該公司應決定擴充維修廠，相關總成本將可由現有的$21,539降低至$10,728。