$$
\begin{aligned}
f_1^*(255) &= 200(247.5-255)^2+2{,}000(247.5-220)\\
&\quad+\frac{200}{9}[2(250-247.5)^2+(265-247.5)^2+30(742.5-575)]\\
&= 185{,}000
\end{aligned}
$$

這些結果可摘述如下：

$n=1$:

s_1	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
255	185,000	247.5

依序迴溯表 $n=2, n=3$ 和 $n=4$，每次設定 $s_n=x_{n-1}^*$，可得到最佳解為 $x_1^*=247.5$, $x_2^*=245$, $x_3^*=247.5$, $x_4^*=255$，其週期總成本為 \$185,000。

下例說明每個階段的狀態**超過一個以上**變數的確定性動態規劃問題。

Example 例題 5　Wyndor 玻璃公司問題

考慮以下的線性規劃問題：

極大化　$Z=3x_1+5x_2$

受限於

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad &\leq 4\\
2x_2 &\leq 12\\
3x_1+2x_2 &\leq 18
\end{aligned}
$$

及

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

此為典型的線性規劃問題。另一求解這種小型線性 (或非線性) 規劃問題的方法是利用動態規劃，茲說明如下。

建立模式　此問題必須進行兩項相關的決策，即活動 1 的水準 x_1 和活動 2 的水準 x_2。此二活動可視為動態規劃模式中的兩個階段。令階段 $n=$活動 $n(n=1, 2)$。x_n 為階段 n 的決策變數。

何者為狀態？已知前一階段的決策，則在階段 n 進行決策時，對於現在的狀態應有的資訊為何？直覺的建議是各函數限制式所剩的餘額。若限制式的右端值是資源 1, 2 及 3 的可用量 (4, 12 和 18) (如第 3.1 節所描述)，則狀態 s_n 的定義為

狀態 $s_n=$各資源仍可分配到剩餘活動的數量(剩餘资源)

(此狀態的定義與效力分配問題相同，包括例題 2 和例題 3，但現在待分配的資源有三種)。因此，

$$s_n = (R_1, R_2, R_3)$$

其中 R_i 是資源 i 尚可分配量 $(i = 1, 2, 3)$，所以，

$$s_1 = (4, 12, 18)$$
$$s_2 = (4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

然而，當開始求解階段 2 時，x_1 值為未知，因此使用 $s_2 = (R_1, R_2, R_3)$ 替代。

前述的例題在每個階段只有一個狀態，而此問題則有三個狀態變數(亦即狀態向量有三個分量)。從理論上來看，這種差異並不嚴重。它只意味在解題時不能只考慮一個狀態變數的所有可能值，而必須考慮數個狀態變數所有可能的組合。但是，從計算效率的立場而言，這種差異是非常嚴重的。一般來說，組合的數目大致上是各變數可能值的個數之相乘積；若增大狀態變數的個數，則所需的計算量會大量急遽增加。這個現象稱為**維度的詛咒 (curse of dimensionality)**。

這三個狀態變數的值皆是連續的，因此無法考慮個別值的組合，必須以例題 4 的方式處理，即利用狀態的函數求解。

即使具有這些複雜性，但此問題很小，故在求解上沒有困難。若以動態規劃求解，需先定義相關的符號。

$f_2(R_1, R_2, R_3, x_2)$ = 若系統在階段 2 的狀態 (R_1, R_2, R_3) 開始，其決策為 x_2，則活動 2 對 Z 的貢獻

$$= 5x_2$$

$f_1(4, 12, 18, x_1)$ = 若系統在階段 1 的狀態 (4, 12, 18) 開始，其決策為 x_1，在階段 2 採用最佳解，則活動 1 和活動 2 對 Z 的貢獻

$$= 3x_1 + \max_{\substack{2x_2 \le 12 \\ 2x_2 \le 18 - 3x_1 \\ x_2 \ge 0}} \{5x_2\}$$

同理，對 $n = 1, 2$ 而言，

$$f_n^*(R_1, R_2, R_3) = \max_{x_n} f_n(R_1, R_2, R_3, x_n)$$

其中極大化是對於可行的 x_n 值而言。根據問題相關的限制式，可得

(1) $$f_2^*(R_1, R_2, R_3) = \max_{\substack{2x_2 \le R_2 \\ 2x_2 \le R_3 \\ x_2 \ge 0}} \{5x_2\}$$

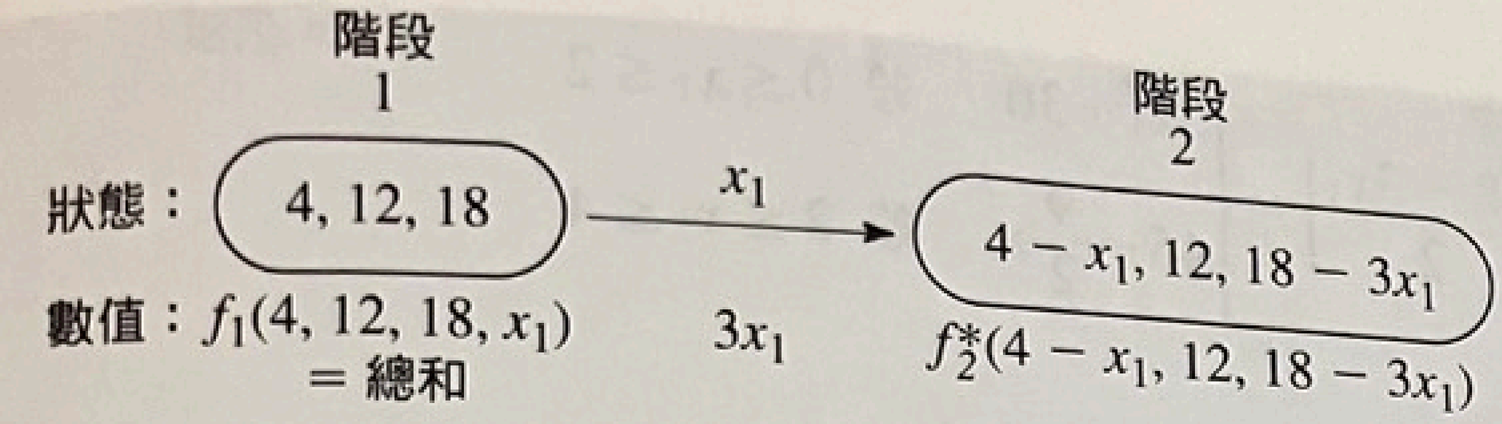

圖 10.10 Wyndor 玻璃公司線性規劃問題的基本架構。

(2) $f_1(4, 12, 18, x_1) = 3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$

(3) $f_1^*(4, 12, 18) = \max\limits_{\substack{x_1 \le 4 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1 \ge 0}} \{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)\}$

方程式 (1) 是用來求解階段 2 的問題。方程式 (2) 為此動態規劃問題的基本結構，如圖 10.10。方程式 (3) 是 f_1^* 和 f_2^* 之間的遞迴關係，可求解階段 1 的問題。

求解程序 階段 *2*：求解最後一個階段 ($n=2$) 時，方程式 (1) 指出 x_2^* 必須為能同時滿足 $2x_2 \le R_2$, $2x_2 \le R_3$ 和 $x_2 \ge 0$ 中之最大 x_2 值。假定 $R_2 \ge 0$ 和 $R_3 \ge 0$，則存在可行解，其最大值為 $R_2/2$ 和 $R_3/2$ 中之較小者，所以解為

$n = 2$:	(R_1, R_2, R_3)	$f_2^*(R_1, R_2, R_3)$	x_2^*
	$R_2 \ge 0$, $R_3 \ge 0$	$5 \min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$	$\min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$

階段 *1*：求解兩個階段的問題 ($n=1$) 時，$f_2^*(R_1, R_2, R_3)$ 代入方程式 (3)。對階段 2 而言，

$$(R_1, R_2, R_3) = (4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

故

$$f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1) = 5 \min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\} = 5 \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2}\right\}$$

是代入方程式 (3) 後的結果。合併 x_1 的限制式後，方程式 (3) 變成

$$f_1^*(4, 12, 18) = \max_{0 \le x_1 \le 4} \left\{3x_1 + 5 \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2}\right\}\right\}$$

在可行解區域間 $0 \le x_1 \le 4$ 中，

$$\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2}\right\} = \begin{cases} 6 & \text{若 } 0 \le x_1 \le 2 \\ 9 - \frac{3}{2}x_1 & \text{若 } 2 \le x_1 \le 4 \end{cases}$$

故

$$3x_1+5\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}=\begin{cases}3x_1+30 & \text{若 } 0\le x_1\le 2\\ 45-\frac{9}{2}x_1 & \text{若 } 2\le x_1\le 4\end{cases}$$

由於以下兩者

$$\max_{0\le x_1\le 2}\{3x_1+30\} \quad \text{和} \quad \max_{2\le x_1\le 4}\left\{45-\frac{9}{2}x_1\right\}$$

在 $x_1=2$ 時達到其極大值，所以 $x_1^*=2$，其極大值為 36，如下表所示。

$n=1$:	(R_1, R_2, R_3)	$f_1^*(R_1, R_2, R_3)$	x_1^*
	(4, 12, 18)	36	2

當 $x_1^*=2$，則對階段 2 而言，

$$R_1=4-2=2,\quad R_2=12,\quad R_3=18-3(2)=12$$

然後從 $n=2$ 表得到 $x_2^*=6$。所以，$x_1^*=2, x_2^*=6$，為此問題的最佳解 (和第 3.1 節的解相同)，同時由 $n=1$ 表可知 $Z=36$。

本節已說明動態規劃各種不同的應用，下一節會介紹其他更多的應用。不過，這些範例僅只是動態規劃一小部分的應用。舉例來說，第 2 章參考資料 4 說明動態規劃 47 種應用類型 (該文獻同時提供求解這些類型問題的軟體工具)。這些動態規劃應用的共同特性是需要制定一連串相關的決策，而動態規劃則提供有效率的方法以找出最佳決策組合。

10.4 Operations Research 隨機性動態規劃

隨機性動態規劃 (*probabilistic dynamic programming*) 和確定性動態規劃的不同之處，在於前者下一個階段的狀態並不完全依目前階段的狀態及決策而定，而是按某種**機率分配**決定下一個狀態。然而，此機率分配仍由目前階段狀態和決策所決定。隨機