

【課後評量】

2. 請問下列程式區段的迴圈部份，實際執行次數與時間複雜度。

```
for i in range(1,n+1):  
    for j in range(i,n+1):  
        for k in range(j,n+1):
```

解答：我們可利用數學式來計算，公式如下：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (n-j+1) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n n - \sum_{j=i}^n j + \sum_{j=i}^n 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2n(n-i+1)}{2} - \frac{(n+i)(n-i+1)}{2} + (n-i+1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(n-i+1)}{2} \right) (n-i+2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n^2 + 3n + 2 + i^2 - 2ni - 3i) \\ &= \frac{1}{2} \left(n^3 + 3n^2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^3 - n^2 - \frac{3n^2 + 3n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

這個 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 就是實際迴圈執行次數，且我們知道必定存在 c ，

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \leq cn^3$ ，當 $n \geq n_0$ 時，時間複雜度為 $O(n^3)$ 。

(P1)

λ	j	k
1	1	$1 \sim n \Rightarrow n$
	2	$2 \sim n \Rightarrow n-1$
	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$
		$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \# \frac{n(n+1)}{2}$
2	2	$2 \sim n \Rightarrow n-1$
	3	$3 \sim n \Rightarrow n-2$
	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$
		$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \# \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$

(P2)

λ	j	k
$n-1$	$n-1$	$n-1 \sim n \Rightarrow 2$
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$
		$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow \# \frac{2(2+1)}{2}$
n	n	$n \sim n \Rightarrow 1 \Rightarrow \# \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

$\oplus \Rightarrow n+1$
 $\Delta \Delta +1$
 $\bar{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$
 $\bar{\lambda} = 2 \Rightarrow \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$
 \vdots
 $\bar{\lambda} = n-1 \Rightarrow \frac{2(2+1)}{2}$
 $\bar{\lambda} = n \Rightarrow \frac{1(1+1)}{2}$

$\Rightarrow \frac{n}{\sum_{\bar{\lambda}=1} (n-\bar{\lambda}+1)(n-\bar{\lambda}+1+1))}$
 $\Rightarrow \frac{n}{\sum_{\bar{\lambda}=1} \frac{(n-\bar{\lambda}+1)(n-\bar{\lambda}+2)}{2}}$

4.求下列片段程式中，函數 my_fun(i,j,k)的執行次數：

```
for k in range(1,n+1):
    for i in range(0,k):
        if i!=j:
            my_fun(i,j,k)
```

解答： $n*(n+1)*(2n+1)/6 - n*(n+1)/2 = n^2(n+1)/3$

5.請問以下程式的 Big-O 為何？

```
total=0
for i in range(1,n+1):
    total=total+i*i
```

解答：迴圈執行 n 次，所以是 $O(n)$

9.請寫一個演算法來求取函數 $f(n)$, $f(n)$ 的定義如下：

$$f(n) : \begin{cases} n^n & \text{if } n \geq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

答：

```
def aaa(n):
    if n<=0:
        return 1
    p=n
    q=n-1
    while q>0:
        p=p*n
        q=q-1
```