【課後評量】

2. 請問下列程式區段的迴圈部份，實際執行次數與時間複雜度。

```
for i in rnage(1,n+1):
    for j in range(i,n+1):
        for k in range(j,n+1):
```
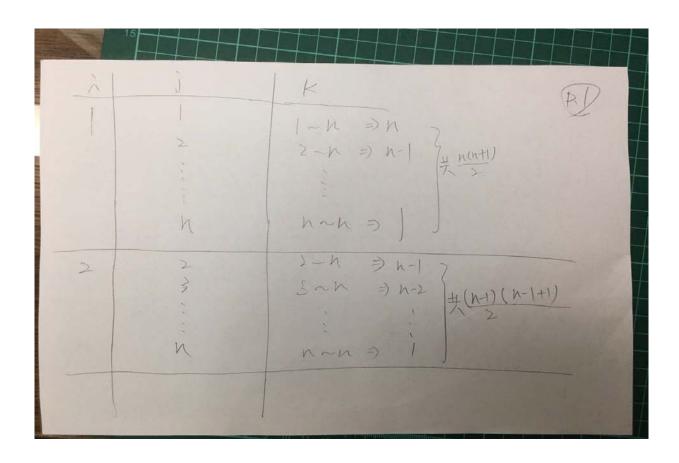
解答：我們可利用數學式來計算，公式如下：

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=j}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (n-j+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} n - \sum_{j=i}^{n} j + \sum_{j=i}^{n} 1 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2n(n-i+1)}{2} - \frac{(n+i)(n-i+1)}{2} + (n-i+1) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(n-i+1)}{2} \right)(n-i+2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n^2+3n+2+i^2-2ni-3i)$$

$$= \frac{1}{2}\left(n^3+3n^2+2n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^3-n^2-\frac{3n^2+3n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

這個 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 就是實際迴圈執行次數，且我們知道必定存在 c，

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 使得 $\leq cn^3$，當 $n \geq n_0$ 時，時間複雜度為 $O(n^3)$ 。

i	j	k	
1	1	$1 \sim n \Rightarrow n$	
	2	$2 \sim n \Rightarrow n-1$	共 $\dfrac{n(n+1)}{2}$
	$\vdots$	$\vdots$	
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$	
2	2	$2 \sim n \Rightarrow n-1$	
	3	$3 \sim n \Rightarrow n-2$	共 $\dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}$
	$\vdots$	$\vdots$	
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$	

i	j	k	
$n-1$	$n-1$	$n-1 \sim n \Rightarrow 2$	$\Rightarrow$ 共 $\dfrac{2(2+1)}{2}$
	n	$n \sim n \Rightarrow 1$	
n	n	$n \sim n \Rightarrow 1$	$\Rightarrow$ 共 $\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$

$$\overset{\oplus \,\Rightarrow\, n+1}{\overbrace{}} \quad \overset{\triangle \quad \triangle+1}{}$$

$$i=1 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$$

$$i=2 \Rightarrow \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$\vdots$$

$$i=n-1 \Rightarrow \frac{2(2+1)}{2}$$

$$i=n \Rightarrow \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)\big((n-i+1)+1\big)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}$$

4.求下列片段程式中，函數 my_fun(i,j,k)的執行次數：

```
for k in range(1,n+1):
    for i in range(0,k):
        if i!=j:
            my_fun(i,j,k)
```

解答：n*(n+1)*(2n+1)/6-n*(n+1)/2=n^2(n+1)/3

5.請問以下程式的 Big-O 為何？

```
total=0
for i in range(1,n+1):
    total=total+i*i
```

解答：迴圈執行 n 次，所以是 O(n)

9.請寫一個演算法來求取函數 f(n),f(n)的定義如下：

$$f(n): \begin{cases} n^n & \text{if } n \geq 1 \\ \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

答：

```
def aaa(n):
    if n<=0:
        return    1
    p=n
    q=n-1
    while q>0:
        p=p*n
        q=q-1
```