

109 學年度第一學期五專數學

分數欄

班級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (D) 在坐標平面上，A 點坐標 $(4\cos 15^\circ, 4\cos 75^\circ)$ 與原點的距離為何？ (A)1 (B)2
(C)3 (D)4

解析： $\overline{OA} = \sqrt{(4\cos 15^\circ)^2 + (4\cos 75^\circ)^2} = 4\sqrt{\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ} = 4\sqrt{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ} = 4$

2. (A) 若 θ 為銳角且 $\cot \theta = \frac{2}{3}$ ，則 $\frac{3\sin \theta - 2\cos \theta}{2\sin \theta + 3\cos \theta} = ?$ (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{13}$ (C) $-\frac{5}{12}$ (D) $-\frac{12}{13}$

解析：原式 = $\frac{\frac{3\sin \theta - 2\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{2\sin \theta + 3\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{3 - 2\cot \theta}{2 + 3\cot \theta} = \frac{5}{12}$

3. (D) 面積為 $\frac{3\pi}{5}$ 的扇形，若圓心角為 150° ，則其半徑為何？ (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) 90
(D) $\frac{6}{5}$

解析： $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{5\pi}{6}$
 $\Rightarrow r^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow r = \frac{6}{5}$

4. (D) 下列敘述何者錯誤？ (A) $\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ = 1$ (B) $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$
(C) $\cos 10^\circ \times \sec 10^\circ = 1$ (D) $\tan^2 60^\circ - \csc^2 60^\circ = -1$

解析： (D) $\tan^2 60^\circ - \csc^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 - (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{5}{3}$

5. (B) 設 $P(1,5)$ 、 $Q(-3,9)$ 為坐標平面上兩點，若 A 點在 \overline{PQ} 的延長線上，且 $\overline{PA}:\overline{AQ} = 5:3$ ，

則 A 點坐標為何？ (A) $(9,-15)$ (B) $(-9,15)$ (C) $(\frac{-17}{3}, \frac{35}{3})$ (D) $(\frac{17}{3}, \frac{-35}{3})$

解析：令 $A(x, y)$

$$\because \overline{PA}:\overline{AQ} = 5:3 \Rightarrow \overline{PQ}:\overline{QA} = 2:3$$

$$\therefore (-3, 9) = (\frac{2x+3}{5}, \frac{2y+15}{5}) \Rightarrow A(x, y) = A(-9, 15)$$

6. (B) 設 $x > 0$ 、 $y > 0$ ，若 $xy = 24$ ，則 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2}$ 之最小值為 (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

解析： $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{6}} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq 4$ ， \therefore 最小值 = 4

7. (D) 不等式 $|2x-1| > 5$ 之解為 (A) $x > 5$ 或 $x < -5$ (B) $-2 < x < 3$ (C) $x > 2$ 或 $x < -3$
(D) $x > 3$ 或 $x < -2$

解析： $|2x-1| > 5 \Rightarrow 2x-1 > 5$ 或 $2x-1 < -5 \Rightarrow 2x > 6$ 或 $2x < -4 \Rightarrow x > 3$ 或 $x < -2$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 試求 $\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{3}\cot 60^\circ - \tan^2 60^\circ + \csc^3 30^\circ$ 之值。

答案：原式 $= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - (\sqrt{3})^2 + 2^3$
 $= 1 + 1 - 3 + 8 = 7$

2. 對所有實數 x ， $x^2 + kx + (2k-3) > 0$ ，試求 k 的範圍。

答案： $x^2 + kx + (2k-3) > 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} a=1 > 0 \\ \Delta = k^2 - 4 \times 1 \times (2k-3) < 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow k^2 - 8k + 12 < 0$
 $\Rightarrow (k-6)(k-2) < 0 \Rightarrow 2 < k < 6$

3. 試求函數 $y = x^2 + 2x - 3$ 圖形的(1)頂點與對稱軸 (2)此函數的最大或最小值？其值為何？

答案：(1) $y = x^2 + 2x - 3$

配方法： $y = (x^2 + 2x + 1^2) - 3 - 1^2$

即 $y = (x+1)^2 - 4$

再利用平移方法：

$$\boxed{y = x^2} \xrightarrow[\text{平移單位}]{\text{向左}} \boxed{y = (x+1)^2} \xrightarrow[\text{平移單位}]{\text{向下}} \boxed{y = (x+1)^2 - 4}$$

故此圖形頂點為 $(-1, -4)$

對稱軸為 $x+1=0$ (即 $x=-1$)

(2)因圖形開口向上，所以最低點為 $(-1, -4)$

故函數有最小值為 -4

