

第 1 回 1-1 多項式的四則運算

科 年 班 座號： 姓名：

一、選擇題：(每題 10 分)

- (B) 1. 下列何者為 x 的多項式？ (A) $\frac{1}{x}$ (B) 3 (C) $|x+3|$ (D) $\sqrt{2x+5}$

1-1 講例 1

解 形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 稱為 x 的多項式
其中 n 為正整數或 0，且 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ 均為實數

- (A) 2. 若 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ ，則 $f(x)$ 的領導係數為何？ (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

1-1 講例 2

解 $f(x)$ 為三次多項式， x^3 項的係數為 4

- (C) 3. 設 $f(x) = (a+1)x^3 + bx^2 + 4x + 7$ 、 $g(x) = 3x^2 + 4x + c$ ，且 $f(x) = g(x)$ ， a, b, c 均為實數，則 $abc = ?$ (A) 84 (B) 21 (C) -21 (D) -84

1-1 講例 4

解 對應同次項係數 $\Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b=3 \\ 7=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow abc = -21$

- (D) 4. 在 $(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$ 的展開式中， x^4 項的係數為何？

1-1 講例 7

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20

解 $4x^3 \times 3x + (-3x^2)(-2x^2) + 2x \times x^3 = 20x^4$

- (B) 5. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x^2 + 3x + 4$ 得商式為 $3x - 2$ ，餘式為 1，則 $f(1)$ 為何？

1-1 講例 9

解 被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式

$$f(x) = (2x^2 + 3x + 4)(3x - 2) + 1$$

$$\Rightarrow f(1) = (2 + 3 + 4)(3 - 2) + 1 = 10$$

二、填充題：(每格 10 分)

1. 利用綜合除法，求 $3x^3 - 4x + 5$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 4。

解
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 0 & -4 & 5 & \\ & +3 & +3 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 3 & -1 & \text{餘式} \end{array}$$

2. 若 $f(x) = (2x^3 - 2x^2 + 3x^5 + 1)(1 + 2x + 3x^2)$ ，則 $\deg f(x) =$ 7。

解 $3x^5 \times 3x^2 = 9x^7$ ， $f(x)$ 為七次多項式

3. 設 $f(x) = 2 + (a - 3)x + bx^2 + (c + 1)x^3$ 為零次多項式， a 、 b 、 c 均為實數，則 $a + b + c =$ 2。

解
$$\begin{cases} a - 3 = 0 \\ b = 0 \\ c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2$$

4. 設 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ 、 $g(x) = 8x^2 - 9x + 10$ ，則 $f(x) - g(x) =$ $4x^3 - 13x^2 + 15x - 17$ 。

解
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 \\ -) \quad 8x^2 - 9x + 10 \\ \hline 4x^3 - 13x^2 + 15x - 17 \end{array}$$

5. 設 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 、 $g(x) = x^2 - 2x - 3$ ，則 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式為 $x + 4$ 。

解
$$\begin{array}{r} x + 4 \\ x^2 - 2x - 3 \overline{) x^3 + 2x^2 + 3x + 4} \\ \underline{x^3 - 2x^2 - 3x} \\ 4x^2 + 6x + 4 \\ \underline{4x^2 - 8x - 12} \\ 14x + 16 \end{array}$$

第2回 1-2 餘式定理與因式定理

科 年 班 座號： 姓名：

一、選擇題：(每題 10 分)

(C) 1. 下列何者為 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ 的因式？

- (A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $2x+1$ (D) $x-3$

解 $f(-1) = -2 + 3 + 11 - 6 \neq 0 \Rightarrow x+1$ 不是 $f(x)$ 的因式

$f(-2) = -16 + 12 + 22 - 6 \neq 0 \Rightarrow x+2$ 不是 $f(x)$ 的因式

$f(\frac{-1}{2}) = \frac{-1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{11}{2} - 6 = 0 \Rightarrow 2x+1$ 是 $f(x)$ 的因式

$f(3) = 54 + 27 - 33 - 6 \neq 0 \Rightarrow x-3$ 不是 $f(x)$ 的因式

1-2 講例 6

(B) 2. 已知 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$ ，其中 a, b 為整數，則下列何者不可能是 $f(x)$ 之因式？

- (A) $3x+9$ (B) $2x+5$ (C) $x-6$ (D) $2x-3$

解 設 $px-q$ 為 $f(x)$ 的整係數一次因式且 p, q 互質

則 $p|2 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2$

$q|6 \Rightarrow q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

故 $f(x)$ 可能的整係數一次因式有 $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, x \pm 6, 2x \pm 1, 2x \pm 3$

(註： $3x+9 = 3(x+3)$)

1-2 講例 9

(A) 3. 以 $x-3$ 除 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ 的餘式為何？ (A) 13 (B) 26 (C) 39 (D) 49

解 $f(3) = 27 - 18 + 4 = 13$

1-2 講例 1

(D) 4. 已知 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 7$ ， $f(x)$ 除以 $x-5$ 的餘式為何？

- (A) 17 (B) 10 (C) 3 (D) -3

解
$$\begin{array}{r} 1 - 6 + 6 - 7 + 7 \\ + 5 - 5 + 5 - 10 \\ \hline 1 - 1 + 1 - 2, -3 \end{array}$$

1-2 講例 3

(A) 5. 已知 $f(x) = x^{2020} + 5x^{20} - 8x + 7$ ， $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

解 $f(1) = 1 + 5 - 8 + 7 = 5$

1-2 講例 2

二、填充題：(每格 10 分)

1. 利用立方差公式，因式分解 $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ 。

解 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + x \times 2 + 2^2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

2. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 得餘式為 -2 ，除以 $x+2$ 得餘式為 7 ，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $-3x+1$ 。

解 設 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $ax+b$ ，商式為 $Q(x)$ ，其中 a, b 為實數

\because 被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式

$\therefore f(x) = (x-1)(x+2) \times Q(x) + (ax+b)$

則 $\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(-2) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ -2a+b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$

3. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 + 3x - 10$ 的餘式為 $-2x+3$ ，則 $f(-5) = 13$ 。

解 被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式

$f(x) = (x^2 + 3x - 10) \times Q(x) + (-2x + 3)$

$\Rightarrow f(-5) = (25 - 15 - 10) \times Q(-5) + (10 + 3) = 0 \times Q(-5) + 13 = 13$

4. 若 $x^2 + x + 2$ 為 $x^3 + ax^2 + bx - 2$ 的因式， a, b 均為實數，則 $a+b = 1$ 。

解

$$\begin{array}{r} 1 - 1 \\ 1 + 1 + 2 \overline{) 1 + a + b - 2} \\ \underline{1 + 1 + 2} \\ (a-1) + (b-2) - 2 \\ \underline{-1 - 1 - 2} \\ 0 \end{array}$$

$\begin{cases} (a-1) - (-1) = 0 \\ (b-2) - (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 1$

5. 已知 m, n 為整數，設 $f(x) = mx^3 + nx^2 + 2x + 3$ ，若 $f(x)$ 除以 $x-1$ 得餘式為 6 ，且 $x+1$ 為 $f(x)$ 的因式，則 $f(2) = 15$ 。

解 $\begin{cases} f(1) = 6 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+2+3 = 6 \\ -m+n-2+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + 3 \Rightarrow f(2) = 8 + 4 + 3 = 15$

第3回 1-3 分式與根式的運算

科 年 班 座號： 姓名：

一、選擇題：(每題 10 分)

(D) 1. 設 $\frac{3x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$ ，其中 A 、 B 均為實數，則 $AB = ?$

(A) -6 (B) -3 (C) 3 (D) 6

解 將等式兩邊同乘以 $(x-1)^2$ 得

$$3x-1 = A(x-1) + B$$

$$\Rightarrow 3x-1 = Ax + (-A+B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ -A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases} \Rightarrow AB=6$$

(A) 2. 設 $\frac{x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$ ，其中 A 、 B 、 C 均為實數，則 $A+B+C = ?$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

解 將等式兩邊同乘以 $(x+1)(x^2+2x+3)$ 得

$$x^2+3x+4 = A(x^2+2x+3) + (Bx+C)(x+1) \dots\dots ①$$

$$x=-1 \text{ 代入 } ① \text{ 得 } 1-3+4 = A(1-2+3) \Rightarrow 2=2A \Rightarrow A=1$$

$$\text{故 } x^2+3x+4 = (x^2+2x+3) + (Bx+C)(x+1)$$

$$\text{對應 } x^2 \text{ 項係數 } \Rightarrow 1=1+B \Rightarrow B=0$$

$$\text{對應常數項 } \Rightarrow 4=3+C \Rightarrow C=1$$

$$\text{因此 } A+B+C=1+0+1=2$$

(C) 3. $\sqrt{8} + \sqrt[3]{-8} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = ?$ (A) $\sqrt{2}-3$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $3\sqrt{2}-1$ (D) $3\sqrt{2}+1$

解 $\sqrt{8} + \sqrt[3]{-8} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2^3} + \sqrt[3]{(-2)^3} + \frac{1 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2} + (-2) + \sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} - 1$

(B) 4. 若 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a ，則 $a = ?$ (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

解 $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7+2\sqrt{35}+5}{2} = \frac{12+2\sqrt{35}}{2} = 6+\sqrt{35}$

$$\because 5 < \sqrt{35} < 6 \Rightarrow 11 < 6+\sqrt{35} < 12$$

$$\therefore a=11$$

(B) 5. 已知 $\sqrt{(-3)^2} = a$ 、 $\sqrt[3]{(-2)^3} = b$ ，則 $a+b = ?$ (A) 5 (B) 1 (C) -1 (D) -5

解 $\because \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 、 $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

$$\therefore a+b=3+(-2)=1$$

二、填充題：(每格 10 分)

1. 設 $x \neq -3, -1, 4$, 化簡 $\frac{x^2-9}{x^2-3x-4} \times \frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x-4}$ 。

解 原式 = $\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-4)} \times \frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x-4}$

2. 化簡 $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50} = -2\sqrt{2}$ 。

解 原式 = $\sqrt{2^3} - \sqrt{2 \times 3^2} + \sqrt{2^5} - \sqrt{2 \times 5^2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

3. 設 $x \neq -3, -2, 0$, 化簡 $\frac{x^2+x}{x^2+5x+6} \div \frac{x}{x+3} = \frac{x+1}{x+2}$ 。

解 原式 = $\frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)} \times \frac{x+3}{x} = \frac{x+1}{x+2}$

4. 化簡 $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。

解 $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3 \times 2}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$
 $= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

5. 化簡 $\sqrt{8+2\sqrt{15}} \times \sqrt{8-2\sqrt{15}} = 2$ 。

解 $\sqrt{8+2\sqrt{15}} \times \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(8+2\sqrt{15})(8-2\sqrt{15})}$
 $= \sqrt{8^2 - (2\sqrt{15})^2}$
 $= \sqrt{64 - 60}$
 $= \sqrt{4} = 2$

1-3 講例 2

1-3 講例 5

1-3 講例 2

1-3 講例 7

1-3 講例 5