講例 7 求過圓外一點的切線方程式

試求過圓外一點 $A(1,\ 3)$ 且與圓 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切的直線方程式。

解

因為圓外一點 $A(1,\ 3)$，所以一定有兩條切線

如圖 2-36 所示，設所求切線 L 斜率為 m

利用點斜式可得切線 L 為 $y-3=m(x-1)$

即 $mx-y+(3-m)=0$

因為相切，故圓心 $O(1,\ -2)$ 到切線 L 的距離

等於圓半徑 $r=\sqrt{5}$，即 $d(O,\ L)=r$

得 $$\frac{|m\times 1-(-2)+(3-m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

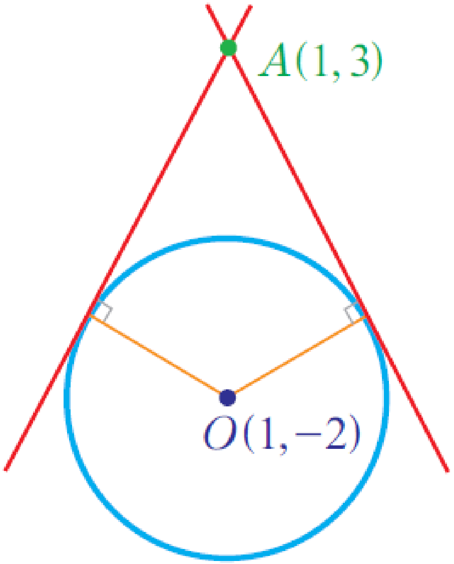


圖 2-36

講例 7 求過圓外一點的切線方程式

試求過圓外一點 $A(1,\ 3)$ 且與圓 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切的直線方程式。

解

得 $\dfrac{|m\times 1-(-2)+(3-m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

再將等號兩邊平方得 $25=5(m^2+1)$

得 $m^2+1=5$，可得 $m=\pm 2$

所求切線為 $2x-y+1=0$ 及 $2x+y-5=0$

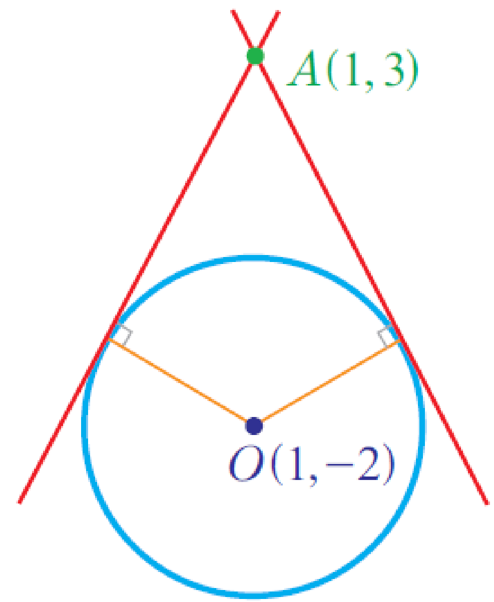


圖 2-36

隨堂練習 7

試求過 $A(-7,\ 1)$ 且與圓 $x^2+y^2=25$ 相切的直線方程式為 $3x-4y+25=0$或$4x+3y+25=0$ 。

解

$\because$ A 代入圓方程式得 $(-7)^2+1^2=50>25$

$\therefore$ A 在圓外

可設切線 $L: y-1=m(x+7)$，即 $mx-y+(7m+1)=0$

$\because$ 相切

$\therefore$ $d(O,L)=r \Rightarrow \dfrac{|m\times 0-0+(7m+1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5 \Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$

故切線為 $y-1=\dfrac{3}{4}(x+7)$ 或 $y-1=-\dfrac{4}{3}(x+7)$

即 $3x-4y+25=0$ 或 $4x+3y+25=0$

講例 8 求過圓外一點的兩切線

試求過 $P(-1, 5)$ 且與圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 相切的直線方程式。

解

步驟 1

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 配方後得 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

故圓心為 $O(2, -1)$，半徑 $r=3$

且將 $P(-1, 5)$ 代入 $(x-2)^2+(y+1)^2$

得 $(-1-2)^2+(5+1)^2=45>9$

故 P 點在圓的外部，因此切線有兩條

如圖 2-37 所示

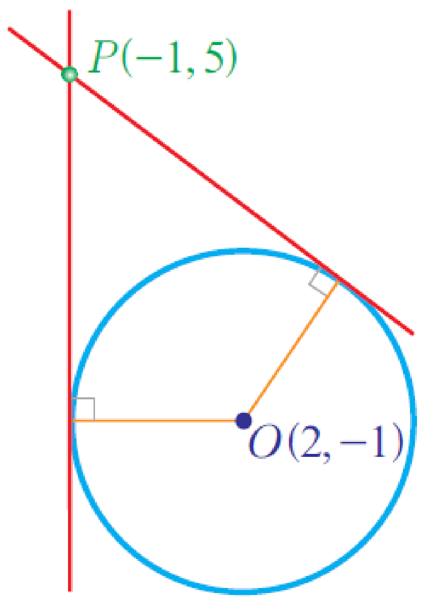


圖 2-37

講例 8 求過圓外一點的兩切線

試求過 $P(-1, 5)$ 且與圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 相切的直線方程式。

解

步驟 2

設切線斜率為 m，得切線 L 為 $y-5=m(x+1)$

即 $mx-y+(m+5)=0$，因 L 與圓 C 相切，即 $d(O, L)=r$

得 $\dfrac{|m\times 2-(-1)+m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$，可得 $|3m+6|=3\sqrt{m^2+1}$

再將等號兩邊平方得 $9m^2+36m+36=9m^2+9$

解得 $m=-\dfrac{3}{4}$，而從圖中不難看出過點 P 的另一切線為鉛直線

故切線為 $y-5=-\dfrac{3}{4}(x+1)$ 或 $x=-1$

即 $3x+4y-17=0$ 或 $x+1=0$

隨堂練習 8

試求過 $P(3, 4)$ 且與圓 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相切的直線方程式為 $\underline{3x-4y+7=0\text{或}x-3=0}$。

解

$\because P$ 代入圓方程式得 $9+16-6-3>0$，$\therefore P$ 點在圓外

可設切線 $L: y-4=m(x-3) \Rightarrow mx-y+(4-3m)=0$

而圓 $x^2+y^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=4$

得圓心 $O(1,0)$，半徑 $r=2$

$\because$ 相切，$\therefore d(O,L)=r \Rightarrow \dfrac{|m\times 1-0+(4-3m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$

而另一切線為鉛直線，故切線為 $y-4=\dfrac{3}{4}(x-3)$ 或 $x=3$

即 $3x-4y+7=0$ 或 $x-3=0$

3 已知斜率為 m 的切線（必有 2 條）

解題方法：

(1)依斜截式，設此切線為 $y=mx+k$。

(2)利用圓心到切線距離等於半徑長，求出 k。

講例 9 求已知斜率為 m 的切線

試求斜率為 2 且與圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切的直線方程式。

解

由斜截式

設所求切線方程式為 $y=2x+k$

即 $2x-y+k=0$

由於相切

所以圓心到切線的距離等於半徑長

又圓心 $O(1,-2)$，半徑 $r=\sqrt{5}$

故 $\dfrac{|2\times1-(-2)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，化簡得 $\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

可得 $|k+4|=5$，即 $k+4=\pm5$，則 $k=1$ 或 -9

故所求切線方程式分別為 $2x-y+1=0$ 或 $2x-y-9=0$

如圖 2-38 所示

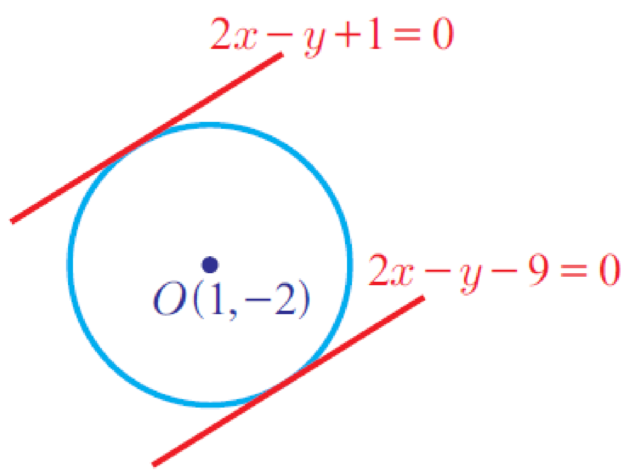


圖 2-38

隨堂練習 9

試求平行於直線 $L: x+y=3$ 且與圓 $C: x^2+y^2=2$ 相切的直線方程式為 $\underline{\quad x+y+2=0\text{或}x+y+2=0 \quad}$。

解

切線平行 $L: x+y=3 \Rightarrow$ 可設切線為 $L': x+y-k=0$

又圓心 $O(0,0)$，半徑 $r=\sqrt{2}$

$\because$ 相切，$\therefore d(O,L')=r \Rightarrow \dfrac{|0-0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow |-k|=2 \Rightarrow k=\pm 2$

故切線為 $x+y+2=0$ 或 $x+y-2=0$

2-5.4 切線段長

過圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 對圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 可作兩條切線，設切點分別為 Q_1、Q_2，則我們稱 $\overline{PQ_1}$ 及 $\overline{PQ_2}$ 為 P 到圓 C 的切線段長，如圖 2-39 所示。

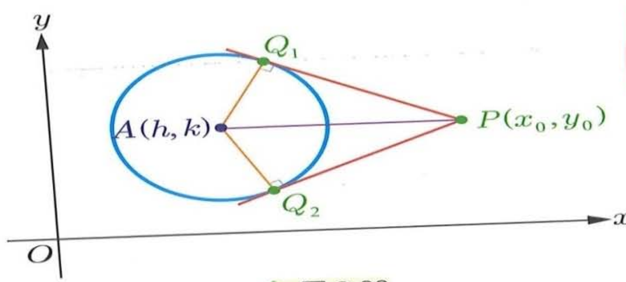


圖 2-39

利用畢氏定理

$\Rightarrow \triangle APQ_1$ 和 $\triangle APQ_2$

SSS全等

$\Rightarrow \overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$

由上圖可知：$\overline{AQ_1}\perp\overline{PQ_1}$、$\overline{AQ_2}\perp\overline{PQ_2}$ 且 $\overline{AQ_1}=\overline{AQ_2}$，故 $\overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$

在直角 $\triangle AQ_1P$ 中，$\overline{AP}^2=\overline{AQ_1}^2+\overline{PQ_1}^2$

則 $\overline{PQ_1}^2=\overline{AP}^2-\overline{AQ_1}^2$

$$=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2$$

即 $\overline{PQ_1}=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$

若圓方程式為一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，同理亦可得

$$\overline{PQ_1}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f}$$

依此，我們可以得到下列的結果：

切線段長

若圓外一點 $P(x_0, y_0)$，形成兩等長切線段長 ℓ，則

(1)當圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 時，切線段長為

$$\ell=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$$

(2)當圓 $C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 時，切線段長為

$$\ell=\sqrt{x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f}$$

講例 10 求切線段長

試求 $P(3, 5)$ 到下列各圓的切線段長：

(1)圓 $C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=4$。

(2)圓 $C_2 : x^2+y^2+4x-6y+9=0$。

解

設所求切線段為 ℓ，直接將 $P(3, 5)$ 之坐標值代入公式

故(1) $\ell_1=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2-4}=\sqrt{16}=4$

(2) $\ell_2=\sqrt{3^2+5^2+4\times 3-6\times 5+9}=\sqrt{25}=5$

一點通

使用切線段長公式時，x^2、y^2 係數需為 1

隨堂練習 10

試求 $P(4,-1)$ 到下列各圓的切線段長：

(1)若圓 $C_1:(x-2)^2+(y+5)^2=4$，則切線段長為 ___4___。

(2)若圓 $C_2:x^2+y^2+2x-4y-4=0$，則切線段長為 ______。

(3)若圓 $C_3:2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$，則切線段長為 ______。

解

(1)直接將 $P(4,-1)$ 代入公式

$$\text{得 } \ell_1=\sqrt{(4-2)^2+(-1+5)^2-4}=\sqrt{16}=4$$

隨堂練習 10

試求 $P(4,-1)$ 到下列各圓的切線段長：

(1)若圓 $C_1:(x-2)^2+(y+5)^2=4$，則切線段長為____4____。

(2)若圓 $C_2:x^2+y^2+2x-4y-4=0$，則切線段長為____5____。

(3)若圓 $C_3:2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$，則切線段長為________。

解

(2)直接將 $P(4,-1)$ 代入公式

$$得\ \ell_2=\sqrt{4^2+(-1)^2+2\times4-4\times(-1)-4}=\sqrt{25}=5$$

隨堂練習 10

試求 $P(4,-1)$ 到下列各圓的切線段長：

(1)若圓 $C_1:(x-2)^2+(y+5)^2=4$，則切線段長為 $\underline{\quad 4 \quad}$。

(2)若圓 $C_2:x^2+y^2+2x-4y-4=0$，則切線段長為 $\underline{\quad 5 \quad}$。

(3)若圓 $C_3:2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$，則切線段長為 $\underline{\quad \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad}$。

解

(3)圓 $C_3:2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x-3y+\frac{1}{2}=0$$

直接將 $P(4,-1)$ 代入公式

得 $\ell_3=\sqrt{4^2+(-1)^2-2\times4-3\times(-1)+\frac{1}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

3-1 等差數列與等差級數

3-1.1 數列與級數

1 數列

有許多來自臺灣的棒球投手在美國職棒大聯盟 (MLB) 為臺灣爭光，每位投手的每次出場比賽都會記錄防禦率、被打擊率、投球數、三振數、……等等許多數據，例如

[redacted]

投球數為 80、92、102

2、78、85、…

像這樣依照順序列出來的數，我們稱為數

數列)。

第一個數稱為第 1 項或首項 a_1，第二個數

數稱為第 2 項 a_2，……依此類推，

通常以第 n 項 a_n 表示一般項，並以符號

以 $\langle a_n \rangle$ 表示數列。

講例 1 認識數列

請寫出下列各數列的前五項及第 8 項。

(1) $\langle \frac{1}{n} \rangle$。 (2) $\langle 3n-1 \rangle$。 (3) $\langle 2^n \rangle$。

解

(1)一般項 $a_n = \frac{1}{n}$，將 $n=1$、2、3、4、5 代入得

前五項為 $\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$

第 8 項 $a_8 = \frac{1}{8}$

講例 1 認識數列

請寫出下列各數列的前五項及第 8 項。

(1) $\langle \frac{1}{n} \rangle$。 (2) $\langle 3n-1 \rangle$。 (3) $\langle 2^n \rangle$。

解

(2)一般項 $a_n = 3n-1$，將 $n=1$、2、3、4、5 代入得

前五項為 2、5、8、11、14

第 8 項 $a_8 = 3\times 8 - 1 = 23$

講例 1 認識數列

請寫出下列各數列的前五項及第 8 項。

(1) $\langle \frac{1}{n} \rangle$。 (2) $\langle 3n-1 \rangle$。 (3) $\langle 2^n \rangle$。

解

(3)一般項 $a_n=2^n$，將 $n=1$、2、3、4、5 代入得

前五項為 2、4、8、16、32

第 8 項 $a_8=2^8=256$

隨堂練習 1

請寫出下列各數列的前五項及第 10 項。

(1) $\langle \frac{n}{n+1} \rangle$。 (2) $\langle 4n+1 \rangle$。 (3) $\langle (-1)^n \rangle$。

解

(1)前五項為 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{5}{6}$

第 10 項為 $a_{10} = \frac{10}{11}$

隨堂練習 1

請寫出下列各數列的前五項及第 10 項。

(1) $\langle \dfrac{n}{n+1} \rangle$。　(2) $\langle 4n+1 \rangle$。　(3) $\langle (-1)^n \rangle$。

解

(2)前五項為 5、9、13、17、21

第 10 項為 $a_{10}=41$

隨堂練習 1

請寫出下列各數列的前五項及第 10 項。

(1) $\langle \frac{n}{n+1} \rangle$。 (2) $\langle 4n+1 \rangle$。 (3) $\langle (-1)^n \rangle$。

解

(3)前五項為 -1、1、-1、1、-1

第 10 項為 $a_{10}=1$

2 級數

將數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項用「+」號連接起來，所形成的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 就稱為級數，以符號「Σ（讀作 sigma）」表示級數的總和。

1. 有限級數：一個級數的項數為有限個，其前 n 項總和記為 S_n

例 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$\sum_{k=1}^{n} (2k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

2. 無窮級數：一個級數的項數為無限多個，以符號「∞」表示無限大

例 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots$

[redacted]

講例 2 認識級數

請逐項展開下列各級數：

(1) $\sum_{k=1}^{5}(3k)$。 (2) $\sum_{k=1}^{5}3$。 (3) $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k}$。

解

(1) $\sum_{k=1}^{5}(3k)=3\times1+3\times2+3\times3+3\times4+3\times5$

$=3+6+9+12+15$

(2) $\sum_{k=1}^{5}3=\underbrace{3+3+3+3+3}_{5\text{ 個}}$

(3) $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k}=\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^4}{4}$

$=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

隨堂練習 2

請逐項展開下列各級數：

(1) $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}=$ $\underline{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}}$。

(2) $\sum_{k=1}^{6}5=$ ________________。

(3) $\sum_{k=1}^{5}k(k+1)=$ ________________。

解

$$(1)\ \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$$

隨堂練習 2

請逐項展開下列各級數：

(1) $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}=$ $\underline{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}}$ 。

(2) $\sum_{k=1}^{6}5=$ $\underline{5+5+5+5+5+5}$ 。

(3) $\sum_{k=1}^{5}k(k+1)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

解

$$(2)\ \sum_{k=1}^{6}5=\underbrace{5+5+5+5+5+5}_{6個}$$

隨堂練習 2

請逐項展開下列各級數：

(1) $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}=$ $\underline{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}}$ 。

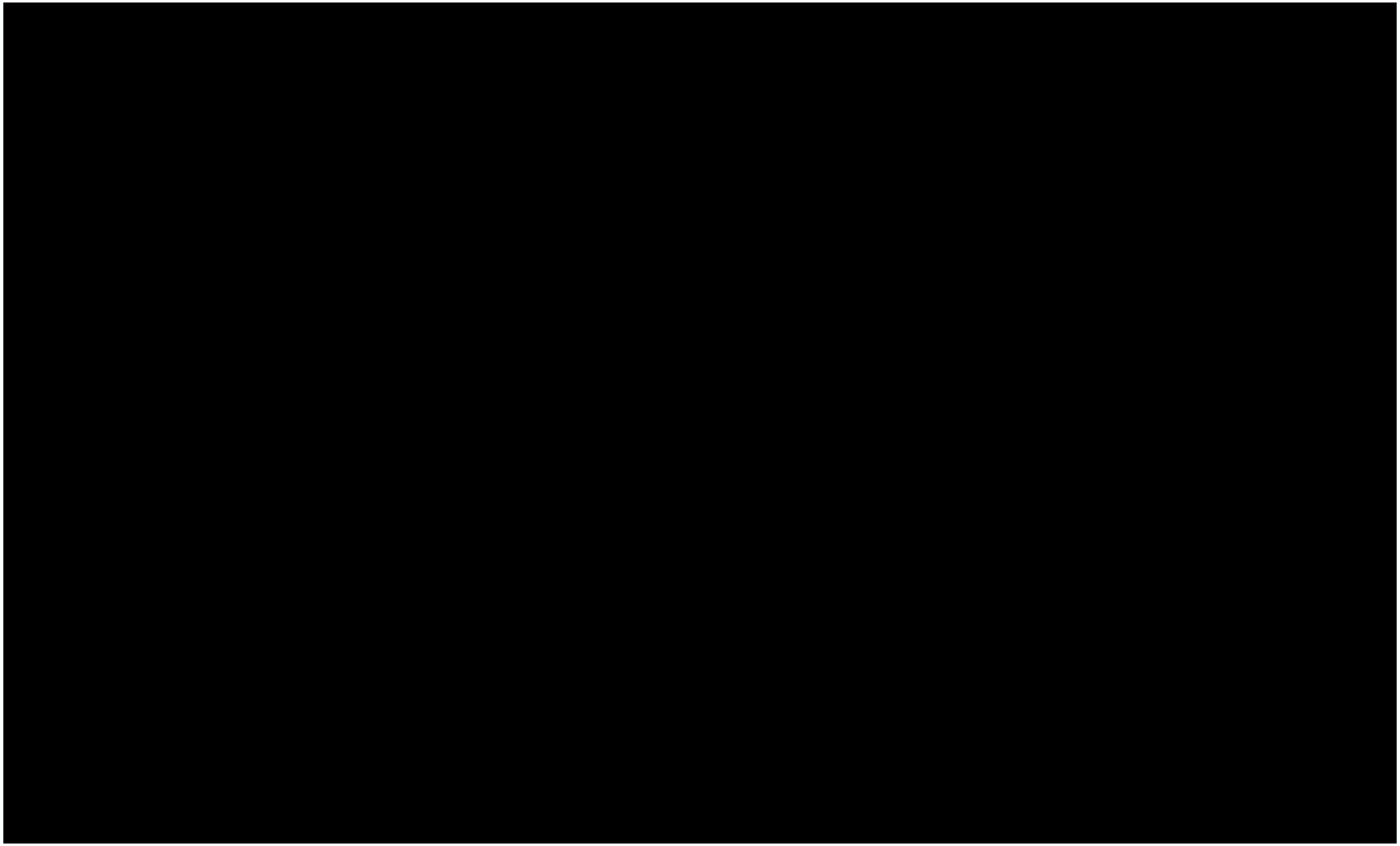
(2) $\sum_{k=1}^{6}5=$ $\underline{5+5+5+5+5+5}$ 。

(3) $\sum_{k=1}^{5}k(k+1)=$ $\underline{2+6+12+20+30}$ 。

解

$$(3)\ \sum_{k=1}^{5}k(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6$$

$$=2+6+12+20+30$$



(3) $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

(4) $\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + \cdots + a_n)$

$= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$

講例 3 Σ 的運算

已知 $\sum_{k=1}^{4} a_k = 7$、$\sum_{k=5}^{8} a_k = 12$、$\sum_{k=1}^{8} b_k = -3$，試求 $\sum_{k=1}^{8}(a_k - 2b_k + 5)$。

解

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=5}^{8} a_k = 7 + 12 = 19$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}(a_k - 2b_k + 5) &= \sum_{k=1}^{8} a_k - 2\sum_{k=1}^{8} b_k + \sum_{k=1}^{8} 5 \\ &= 19 - 2 \times (-3) + 5 \times 8 \\ &= 65\end{aligned}$$

隨堂練習 3

已知 $\sum_{k=1}^{5} a_k = -4$、$\sum_{k=1}^{4} b_k = 13$、$b_5 = 9$，則 $\sum_{k=1}^{5}(3a_k + b_k - 1) =$ ___5___ 。

解

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{4} b_k + b_5 = 13 + 9 = 22$$

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k + b_k - 1) = 3\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k - \sum_{k=1}^{5} 1 = 3 \times (-4) + 22 - 5 = 5$$