

# 第4章 機率與統計

## 4-1 樣本空間與事件

### 基礎型

1. 設字集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  
 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8\}$ , 則

- (1)  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_。 (2)  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_。  
(3)  $B - A =$  \_\_\_\_\_。 (4)  $C' - A =$  \_\_\_\_\_。(各4分)

答 (1)  $\{1, 3, 5\}$  (2)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$  (3)  $\{7, 9\}$  (4)  $\{7, 9, 10\}$

解 (1)  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

(2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

(3)  $B - A = \{7, 9\}$

(4)  $C' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ,  $\therefore C' - A = \{7, 9, 10\}$

2. 在 1 到 100 的整數中

(1) 是 2 的倍數或 3 的倍數者有 \_\_\_\_\_ 個。(6 分)

(2) 不是 2 的倍數，但是是 3 的倍數者有 \_\_\_\_\_ 個。(6 分)

(3) 不是 2 也不是 3 的倍數者有 \_\_\_\_\_ 個。(6 分)

答 (1) 67 (2) 17 (3) 33

解 2 的倍數有  $\frac{100}{2} = 50$  個，3 的倍數有  $[\frac{100}{3}] = 33$  個，6 的倍數有  $[\frac{100}{6}] = 16$  個

(1) 2 或 3 的倍數個數 = 2 的倍數個數 + 3 的倍數個數 - 6 的倍數個數 =  $50 + 33 - 16 = 67$  個

(2) 不是 2 的倍數但是 3 的倍數個數 = 3 的倍數個數 - 6 的倍數個數 =  $33 - 16 = 17$  個

(3) 不是 2 也不是 3 的倍數個數 =  $100 - 2$  或 3 的倍數個數 = 33 個



3. 擲一顆公正骰子及一枚公正硬幣，則

(1) 樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_。(8分)

(2) 若  $A$  表示骰子出現點數為偶數的事件，則  $A$  為\_\_\_\_\_。(8分)

**答** (1)  $\{(正, 1), (正, 2), (正, 3), (正, 4), (正, 5), (正, 6), (反, 1), (反, 2), (反, 3), (反, 4), (反, 5), (反, 6)\}$

(2)  $\{(正, 2), (正, 4), (正, 6), (反, 2), (反, 4), (反, 6)\}$

**解** (1)  $\{(正, 1), (正, 2), (正, 3), (正, 4), (正, 5), (正, 6), (反, 1), (反, 2), (反, 3), (反, 4), (反, 5), (反, 6)\}$

(2)  $\{(正, 2), (正, 4), (正, 6), (反, 2), (反, 4), (反, 6)\}$

4. 擲一公正骰子 2 次，則

(1) 點數和為 5 的事件  $A$  為\_\_\_\_\_。(6分)

(2) 點數差為 5 的事件  $B$  為\_\_\_\_\_。(6分)

(3)  $A$  與  $B$  是否為互斥事件？答：\_\_\_\_\_。(6分)

**答** (1)  $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$  (2)  $\{(6, 1), (1, 6)\}$  (3) 是

**解** (1)  $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$

$\therefore A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

(2)  $5 = |6 - 1| = |1 - 6|$

$\therefore B = \{(6, 1), (1, 6)\}$

(3)  $\because A \cap B = \emptyset, \therefore A$  與  $B$  為互斥事件



5. 擲一公正硬幣三次，觀察其出現正反面之次數。至少出現二次正面為  $A$  事件，至少出現二次反面為  $B$  事件，則

(1)  $A$  事件的餘事件  $A'$  為\_\_\_\_\_。(4分)

(2)  $A$  與  $B$  的和事件為\_\_\_\_\_。(4分)

(3)  $A$  與  $B$  的積事件為\_\_\_\_\_。(4分)

(4)  $A$  與  $B$  是否為互斥事件？答：\_\_\_\_\_。(4分)

**答** (1)  $\{(反反反), (反正反), (正反反), (反反正)\}$  (2)  $A \cup B = U$  (3)  $A \cap B = \emptyset$  (4) 是

**解** (1)  $A$  事件的餘事件為出現一次正面或沒有出現正面的事件

$\therefore A' = \{(反反反), (反正反), (正反反), (反反正)\}$

(2)  $\because B = A'$ ,  $\therefore A$  和  $B$  剛好互為補集，故  $A \cup B = U$

(3)  $A \cap B = \emptyset$

(4)  $\because A \cap B = \emptyset$ ,  $\therefore A$  與  $B$  為互斥事件

### 進階型

6. 設  $a, b$  為實數，若  $A = \{x | x^2 + 5x + a = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + bx - 3 = 0\}$  且  $A \cap B = \{-3\}$ ，則

(1)  $a - b =$ \_\_\_\_\_ (2)  $A - B =$ \_\_\_\_\_。(各8分)

**答** (1) 4 (2)  $\{-2\}$

**解**  $\because A \cap B = \{-3\}$ ,  $\therefore -3$  是  $x^2 + 5x + a = 0$ 、 $x^2 + bx - 3 = 0$  兩方程式的解

因此， $(-3)^2 + 5 \times (-3) + a = 0 \Rightarrow a = 6$

$(-3)^2 + (-3) \times b - 3 = 0 \Rightarrow b = 2$

(1)  $a - b = 6 - 2 = 4$

(2) 所以  $A = \{x | x^2 + 5x + 6 = 0\} = \{x | (x+2)(x+3) = 0\} = \{-2, -3\}$

故  $A - B = A - (A \cap B) = \{-2\}$



## 4-2 機率

### 基礎型

1. 擲二顆公正骰子一次，其點數和為  $k$  之機率為  $\frac{1}{12}$ ，則  $k$  之值為\_\_\_\_\_。(8分)

答 4 或 10

解

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 點數 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 次數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3  | 2  | 1  |

所以機率  $\frac{1}{12}$ ，則代表出現 3 次

所以  $k=4$  或 10

2. 甲乙丙三人玩剪刀、石頭、布時，三人平手的機率為\_\_\_\_\_。(9分)

答  $\frac{1}{3}$

解 樣本空間 (甲、乙、丙)，甲、乙、丙各有 3 種出法， $\therefore n(S)=3 \times 3 \times 3=27$   
 設三人平手為  $A$  事件，則  $A$  可能有 2 種狀況

(1) 三種相同，所以有 3 種情形

(2) 三者皆不同，則有  $3!$  種情形

$$\therefore n(A)=3+6=9, \therefore p(A)=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$



3. 甲、乙、丙、...等 7 人排成一列，則甲、乙、丙 3 人須完全分開的機率為 \_\_\_\_\_。(9 分)

答  $\frac{2}{7}$

解 7 人排成一列的排列數為  $7!$

先排丁戊己辛 4 人，再將甲乙丙 3 人插入間格中排列，其排列數為  $4! \times P_3^5$

故所求機率為  $p = \frac{4! \times P_3^5}{7!} = \frac{2}{7}$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 丁 | 戊 | 己 | 辛 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 | 己  | 辛  | 甲  | 乙  | 丙  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

4. 設  $A$ 、 $B$  為兩事件，且  $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ,  $p(A') = \frac{2}{3}$ ,  $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ，則  $p(A - B)$  之值為 \_\_\_\_\_。(9 分)

答  $\frac{1}{12}$

解  $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 1 - p(A') - p(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

5. 袋中有 3 白球、4 紅球、5 黑球，假設每球被取到之機會相等，從袋中任取 3 球，則

(1) 三球同色的機率為 \_\_\_\_\_。(5 分)

(2) 三球異色的機率為 \_\_\_\_\_。(5 分)

答 (1)  $\frac{3}{44}$  (2)  $\frac{3}{11}$

解 (1)  $p(\text{三球同色}) = p(\text{白白白}) + p(\text{紅紅紅}) + p(\text{黑黑黑})$

$$= \frac{C_3^3}{C_3^{12}} + \frac{C_3^4}{C_3^{12}} + \frac{C_3^5}{C_3^{12}} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

$$(2) p(\text{三球異色}) = \frac{C_1^3 \cdot C_1^4 \cdot C_1^5}{C_3^{12}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$



6. 擲二顆公正骰子，在出現點數和為7的條件下，二顆骰子點數相同的機率為\_\_\_\_\_。(9分)

答 0

解 點數和為7的A事件有  $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

在A事件中點數相同的B事件有  $\{\}$

$$\therefore p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{0}{6} = 0$$

〈另解〉相同的兩個數字相加必為偶數，故不可能點數和為7，所以機率為0

7. 擲一公正骰子，若A表點數大於3的事件，B表點數為奇數的事件，則

(1)  $p(A \cap B) =$ \_\_\_\_\_。(2)  $p(A|B) =$ \_\_\_\_\_。(3)  $p(A'|B) =$ \_\_\_\_\_。

答 (1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{2}{3}$

(各3分)

解 (1)  $A \cap B = \{5\}$ ,  $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

(2) B事件的3個元素中符合A事件的元素只有1個，則  $p(A|B) = \frac{1}{3}$

(3) B事件的3個元素中符合A'事件的元素有2個，則  $p(A'|B) = \frac{2}{3}$



8. 甲、乙二位警察射擊一目標，已知甲之命中率為  $\frac{3}{4}$ ，乙之命中率為  $\frac{2}{3}$ 。今甲、乙二位警察同時對目標各發一槍，則此目標被命中的機率為\_\_\_\_\_。(9分)

答  $\frac{11}{12}$

解 令甲命中為  $A$  事件，乙命中為  $B$  事件，又甲、乙兩人射擊為獨立事件

$$\text{故 } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2}$$

目標被命中代表甲或乙其中一人即中目標，故求  $p(A \cup B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

9. 設  $A$ 、 $B$  為獨立事件， $p(A) = \frac{1}{3}$ ， $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ，則

(1)  $p(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(2)  $p(A' \cap B') = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

答 (1)  $\frac{5}{8}$  (2)  $\frac{1}{4}$

解 因  $A$ 、 $B$  為獨立事件，故  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + p(B) - \frac{1}{3} \cdot p(B) \Rightarrow p(B) = \frac{5}{8}$$

$$(1) p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(A)} = p(B) = \frac{5}{8}$$

(2) 因為  $A$ 、 $B$  為獨立事件，所以  $A'$  與  $B'$  亦為獨立事件

$$\therefore p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B') = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$



## 進階型

10. 某袋中有同式樣的黑襪 3 雙，紅襪 2 雙，今自袋中選取 4 隻，若取出機會相等，則 4 隻恰為 2 雙的機率為\_\_\_\_\_。(9 分)

答  $\frac{53}{105}$

解 黑襪 3 雙、紅襪 2 雙共 10 隻

$$\therefore \text{所求機率} = \frac{2B + 1B1R + 2R}{\text{任意取}} = \frac{C_4^6 + C_2^6 C_2^4 + C_4^4}{C_4^{10}} = \frac{53}{105}$$

11. 袋中有 7 個白球，若干個黑球，今從袋中一次取兩個球，已知此兩球同為白色的機率是  $\frac{7}{51}$ ，則袋中黑球有\_\_\_\_\_個。(9 分)

答 11

解 設有  $n$  個黑球，則袋內共有  $n+7$  顆球  
令任取兩球的樣本空間  $S$ ， $n(S) = C_2^{n+7}$

令兩球同為白色的事件為  $A$ ， $n(A) = C_2^7 = 21$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{C_2^{n+7}} = \frac{7}{51} \Rightarrow C_2^{n+7} = 153 \Rightarrow n = 11, -24 \text{ (-24 不合)}$$

故有 11 顆黑球