# 第1章 數列與級數

4.1~300之間。所有被7降餘2的數之總和為

图 2. 9. 16, 23, ..., 296 \* 共 43 項

5在一3與18之間插入6個數

到依据意一3. b., b., b., b., b., b., b., 18 成年差数列

## ■ 1-1 等湮數列與等差級數

### 學學學

1.請寫出下列數列前5項:

答 (1) 0, 6, 6, 20, 20 (2) 3, 9, 27, 81, 243

$$(1) \langle n^2 + (-1)^n \cdot n \rangle$$

$$n=1$$
 代入得  $a_1=1+(-1)=0$ 

$$n=2$$
代入得 $a_2=4+2=6$ 

$$n=3$$
 代入得  $a_3=9+(-3)=6$ 

$$n=4$$
 代入得  $a_4=16+4=20$ 

$$n=5$$
 代入得  $a_5=25+(-5)=20$ 

2. 求下列各級數之值:

$$(1)\sum_{k=1}^{6}(k^2+k+1) = ___ \circ (2)6^2+7^2+\cdots+20^2 = __ \circ (455\%)$$

答 (1) 118 (2) 2815

$$(1)\sum_{k=1}^{6}(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{6}k^2 + \sum_{k=1}^{6}k + \sum_{k=1}^{6}1 = \frac{6\times7\times13}{6} + \frac{6\times7}{2} + 1\times6 = 91 + 21 + 6 = 118$$

$$(2) 6^{2} + 7^{2} + \dots + 20^{2} = \sum_{k=6}^{20} k^{2} = \sum_{k=1}^{20} k^{2} - \sum_{k=1}^{5} k^{2}$$

$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 2870 - 55 = 2815$$

W H--10 \ | W - 3 + 15.2 = 33

3.一等差數列,
$$a_8=12$$
,公差為 3,則  $a_{16}$  之值為——。(10 分)

答 36

$$a_{16} = a_8 + (16 - 8)d = 12 + 8 \cdot 3 = 36$$

。(10分) 4.1~300之間,所有被7除餘2的數之總和為

答 6407

第 2, 9, 16, 23, …, 296, 共 43 項

$$S_{43} = \frac{(2+296)\times43}{2} = 6407$$

5.在-3與18之間插入6個數,使其成為等差數列,則此插入6個數之和為

811=0+15+10=0×14-1500 = ELXEX 20=13+12+6x2=0+x++x)2=0

数数数规则设置等

2ま下列各級數之值:

 $(1)\sum (k^2 + k + 1) =$ 

答 45

解依題意-3, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, b<sub>4</sub>, b<sub>5</sub>, b<sub>6</sub>, 18 成等差數列

$$\Rightarrow d = \frac{18 - (-3)}{7} = 3$$

 $b_1 = 0, b_6 = 15$ 

∴此 6 項總和 = 
$$\frac{(0+15)\times 6}{2}$$
 = 45

(四) 今三次為 a-d, a, a+d

 $\bigcirc \stackrel{\cdot}{\Sigma}_{KK+21} = \stackrel{\cdot}{\Sigma} \stackrel{1}{\Sigma} \cdot (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2})$ 

6. 一等差數列, 
$$a_3 = 30$$
,  $a_7 = 18$ , 則  $a_{20}$  之值為\_\_\_\_。(10分)

誉 -21

節 依題意得 
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 30 \cdots 1 \\ a_1 + 6d = 18 \cdots 2 \end{cases}$$
 (201) (2 + 3) (2 + 3) (3 + 3) (3 + 3) (4 + 3) (4 + 3) (5 + 3) (5 + 3) (6 + 3) (7

$$2 - 1 : 4d = -12 \Rightarrow d = -3$$

$$\therefore a_1 = 36$$

$$\Rightarrow a_{20} = a_1 + (20 - 1)d$$

$$\Rightarrow a_{20} = a_1 + (20 - 1)d$$

$$= 36 + (19)(-3) = -21$$

7. 若 
$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 8$$
,  $\sum_{k=1}^{10} b_k = 12$ ,則  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k - 4) =$   $\circ$  (10 分)

答 12

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k - 4) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 3\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 4$$

$$= 2 \times 8 + 3 \times 12 - 4 \times 10$$

$$= 12$$

$$81 = 65 = 818 = 65 + 01) + 601 + 6$$

8.一等差數列的首項為3,公差為2,和為288,則此數列的項數為 ,末項 為\_\_\_\_。(10分)

答 16;33

第 : 
$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \times n}{2}$$

$$\Rightarrow 288 = \frac{[6 + (n-1)2] \times n}{2}$$

$$\stackrel{\text{@}}{=} n^2 + 2n - 288 = 0$$

$$(n+18)(n-16)=0$$

$$a_{16} = a_1 + (16 - 1)d = 3 + 15 \cdot 2 = 33$$

#### 世 路 彰

9. 級數 
$$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k(k+2)}$$
 之值為\_\_\_\_\_。(10 分)

$$\frac{8}{k=1} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{29}{45}$$

10.三數成等差,其和為30,其平方和為318,則此數列的公差為\_\_\_\_。(10分) 答 ±3

#### 答 ±3

∴ 和為 
$$30 \Rightarrow 30 = (a-d) + a + (a+d) \Rightarrow a = 10$$

又平方和為318

$$\therefore (10-d)^2 + 10^2 + (10+d)^2 = 318 \Rightarrow 2d^2 = 18$$

$$\therefore d = \pm 3$$

等差數例的首項為3,公差為2,和為288。則此數列的項數為一位。原文項

#### 0 12 11、6. c. a 区域0120社员公司上部的企业程则"现是国际的公务员的。 医线线线0120-分支 ▲ 1-2 等比數列與等比級數

### 基礎型

1.寫出下列等比數列的公比及一般項 $\alpha_n$ :

$$(1)\frac{-1}{2},\frac{1}{4},\frac{-1}{8},\frac{1}{16},\dots$$
,答:\_\_\_\_。(5分)

**\(\left\)** (1) 
$$r = -\frac{1}{2}$$
,  $a_n = (-\frac{1}{2})^n$  (2)  $r = 1$ ,  $a_n = 3$ 

$$(1) r = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{-1}{2})^n$ 

(2) 
$$r = \frac{3}{3} = 1$$
  
 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 1^{n-1} = 3$ 

$$-ix = -\frac{3}{2}$$

 $\Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow (2x + 3)(x - 5) = 0$ 

 $a_1 = a_1 \cdot r^{5-3} = \frac{5}{9} \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{81}$ 

2.一等比數列中,首項為3, $\alpha_6=-96$ ,則公比r之值為\_\_\_\_ \_\_\_\_。(各5分)

5.已知一等比數列·首項81·a,=24·則前6項的和為。2.2(1885-);2- 晉

$$a_1 = 3, a_6 = -96$$

由 
$$a_6 = a_1 \cdot r^5$$
 得知

$$-96 = 3 \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = -32$$
,  $\therefore r = -2$ 

$$a_8 = a_6 \cdot r^{8-6} = (-96) \cdot (-2)^2 = -384$$

 $\# S_n = \frac{(1-r^2)}{1-r} \# \log_n = \frac{81[1-(\frac{2}{3})^2]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{665}{3}$ 

(注) 由 
$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = r^3$$
 得知  $\frac{\frac{5}{243}}{\frac{5}{9}} = r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{9}{243} = \frac{1}{27}$ 

$$\therefore r = \frac{1}{3}$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}$$

$$a_5 = a_3 \cdot r^{5-3} = \frac{5}{9} \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{81}$$

4.4x-2 與 x-3 的等比中項為 6 ,則 x 之值為\_\_\_\_。(10 分)

**解** 依題意得知 
$$6^2 = (4x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow (2x + 3)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3}{2} \neq 5$$

等比較列中,首項為3, 0,=-96,則公比,之值為 \* ds 之值為

。(10分) 5.已知一等比數列,首項 81, $a_4 = 24$ ,則前 6 項的和為\_

$$\therefore \frac{24}{81} = r^3 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

由 
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$
 得知  $S_6 = \frac{81[1-(\frac{2}{3})^6]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{665}{3}$ 

9.一等比級數 [+2+2++…+2\*>1999\*

(C) 204 E = EEE 26E21 = .a.

(10分)

6. 設 a, b, c, d 四數成等比數列,若  $ab = \frac{cd}{16}$ ,則此數列公比為\_\_\_\_。(10分)

(D)2若一年主教对的首用第一20《第7项络"行"的社员是00000条件有调整

誉 ±2

的 由題意得知 b=ar,  $c=ar^2$ ,  $d=ar^3$ 

$$\therefore a \cdot ar = \frac{ar^2 \cdot ar^3}{16} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

7. 求下列各級數之值:

$$(1)\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k} = ___ (2)\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{2})^{k} = __ \circ (各5分)$$

答 (1) 42 (2) 30+15√2 EE21 法际重 w 前目 · S 从 出 公 · 8 0 下 重 w 策 顺 搜 出 等 一 9 1

$$(1) \sum_{k=1}^{6} (-2)^k = \frac{-2[1 - (-2)^6]}{1 - (-2)} = \frac{-2 \times (-63)}{3} = 42$$

$$(2) \sum_{k=1}^{8} (\sqrt{2})^k = \frac{\sqrt{2} [(\sqrt{2})^8 - 1]}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} \times 15}{\sqrt{2} - 1} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 30 + 15\sqrt{2}$$

8.在3和48之間插入3個數,使其成等比數列,則插入的這3數為\_\_\_。

答 6, 12, 24 或 -6, 12, -24

**解**依題意, 3, x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, 48 成等比數列

$$a_1 = 3$$
,  $a_5 = 48$   
 $\Rightarrow a_1 \cdot r^4 = 48 \Rightarrow 3 \cdot r^4 = 48$ 

·· r=±2 2 2 (n-1) 之值為何?

當 r=2,三數為6,12,24

當 r=-2,三數為-6,12,-24

da. b. c. d 四數證等比數別。謝如b= ed- 则此數列公!

9. 一等比級數 1+2+2<sup>2</sup>+···+2<sup>n</sup>>1999,則 n 的最小值為\_\_\_\_。(10 分) a.ar = ar = 16 => r = ±2 = 1

 $S_n = \frac{1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 > 1999$ 

 $\therefore 2^{n+1} > 2000 \Rightarrow n+1 > 10 \Rightarrow n > 9$ 

所以n的最小值為10

\*下列各级數之值:

 $(2)\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{2})^{n}=$   $(2)\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{2})^{n}=$  (3.5%)

10.一等比數列第 n 項 768,公比為 2,且前 n 項和為 1533,則首項為\_\_\_\_,項 數 n 為\_\_\_\_。(各 5 分)

答 3;9

(会01)

**解** 設首項為 $a_1$ ,依題意得知 $a_n = 768$ ,  $S_n = 1533$ , r = 2

 $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1r^{n-1} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1r^{n-1} \cdot r - a_1}{r - 1}$ 

 $\therefore 1533 = \frac{768 \cdot 2 - a_1}{2 - 1}$ 

 $\therefore a_1 = 1536 - 1533 = 3$ 

 $\therefore .768 = 3 \cdot (2)^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 256$ 

··n-1=8⇒n=9邮件人到個人 使其成等比較到。例据人的通 8=n-n··