第 2 章　指數與對數及其運算

2-1　指數及其運算的意義

基礎型

1. 化簡下列各式：

(1) $10^{3.1}\times10^{0.2}\div10^{1.3}=$ ______　(2) $10^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{3}}=$ ______。

(3) $4^{1.5}\times243^{-0.2}=$ ______　(4) $\frac{1}{729}\times3^{6}\div\frac{1}{243}=$ ______。（各 6 分）

答　(1) 100　(2) 2　(3) $\frac{8}{3}$　(4) 3^5

解 (1) 求式 $=10^{3.1+0.2-1.3}=10^2=100$

(2) $10^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{3}}=(\frac{10\times4}{5})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2$

(3) $4^{1.5}\times243^{-0.2}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^5)^{-\frac{1}{5}}=2^3\times3^{-1}=\frac{8}{3}$

(4) $\frac{1}{729}\times3^{6}\div\frac{1}{243}=\frac{1}{3^6}\times3^6\div\frac{1}{3^5}=1\times3^{-(-5)}=3^5$

2.設 a, b 為正實數，試化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}=$______　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ab^3}}=$______。

(3) $(\dfrac{1}{a})^2(\sqrt{a})^5\cdot a^3=$______。（各 6 分）

答　(1) $a^{\frac{17}{12}}$　(2) $a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}$　(3) $a^{\frac{7}{2}}$

解 (1) $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{17}{12}}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ab^3}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}=a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}$

(3) $(\dfrac{1}{a})^2(\sqrt{a})^5\cdot a^3=(a^{-2})\cdot a^{\frac{5}{2}}\cdot a^3=a^{(-2)+\frac{5}{2}+3}=a^{\frac{7}{2}}$

3.設 a, b 為正實數，化簡 $3a^2b(-2ab^{-2})^2$ 為______。（10 分）

答　$12a^4b^{-3}$

解 $3a^2b(-2ab^{-2})^2=3a^2b4a^2b^{-4}=12a^4b^{-3}$

4.若 $(\dfrac{4}{5})^{x-2}$ 化簡成 $(\dfrac{5}{4})^3$，則 x 之值為______。（10 分）

答　-1

解 $\because(\dfrac{4}{5})^{x-2}=(\dfrac{5}{4})^3$

$\therefore(\dfrac{4}{5})^{x-2}=[(\dfrac{4}{5})^{-1}]^3=(\dfrac{4}{5})^{-3}$

$\Rightarrow x-2=-3$，$\therefore x=-1$

5. 化簡 $\left(\frac{\sqrt[4]{24}}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt{3}$ 為______。(10 分)

答　$2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{3}}$

解 $\left(\frac{\sqrt[4]{24}}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt{3} = \left[\frac{(2^3 \cdot 3)^{\frac{1}{4}}}{2^3}\right]^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{2^3}\right]^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}$

$= (2^{\frac{-9}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-9}{4} \cdot \frac{-2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

6. 若 $3^x = 2$，則 $3^{2x-1} - 3 \cdot 3^{-x+1}$ 之值為______。(10 分)

答　$\frac{-19}{6}$

解 $3^{2x-1} - 3 \cdot 3^{-x+1} = 3^{-1} \cdot (3^x)^2 - 3 \cdot 3 \cdot (3^x)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^{-1} = \frac{4}{3} - \frac{9}{2} = -\frac{19}{6}$

進階型

7. 若 $a + a^{-1} = 3$，試求下列各式之值：

(1) $a^2 + a^{-2} =$______　(2) $a^3 + a^{-3} =$______。(各 9 分)

答　(1) 7　(2) 18

解 (1) $a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2a \cdot a^{-1} = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$

(2) $a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3a \cdot a^{-1}(a + a^{-1}) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$

2-3　對數及其運算的意義

基礎型

1. 求下列對數之值：

(1) $\log_3 \frac{1}{81} =$ ______　(2) $\log_{27}(\log_8 2) =$ ______。

(3) $\log_7(5^{\log_5 343}) =$ ______　(4) $\frac{\log_5 8}{\log_5 2} =$ ______。（各 4 分）

答　(1) -4　(2) $-\frac{1}{3}$　(3) 3　(4) 3

解 (1) $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

(2) $\log_{27}(\log_8 2) = \log_{27} \frac{1}{3} = \log_{3^3} 3^{-1} = \frac{-1}{3}$

(3) $\log_7(5^{\log_5 343}) = \log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$

(4) $\frac{\log_5 8}{\log_5 2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

2. 若 $\log_{x-2}(5-x)$ 有意義，則 x 的範圍為______。（11 分）

答　$2 < x < 5$ 且 $x \neq 3$

解 若 $\log_{x-2}(5-x)$ 有意義

則 $\begin{cases} 5-x>0 \\ x-2>0,\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5 \\ x>2,\ x \neq 3 \end{cases}$

$\therefore 2 < x < 5$ 且 $x \neq 3$

3. 求下列各式之值：

(1) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 27 + \log_{25} 125 =$ ______。(5 分)

(2) $\frac{1}{2}\log_6 15 + \log_6 18\sqrt{3} - \log_6 \frac{\sqrt{5}}{4} =$ ______。(5 分)

(3) $\log_{10} \frac{7}{36} + 5\log_{10} 2 - \log_{10} \frac{14}{25} + 2\log_{10} 3 =$ ______。(5 分)

(4) $\log_8(\sqrt{7}+\sqrt{3}) + \log_8(\sqrt{7}-\sqrt{3}) =$ ______。(5 分)

答 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{2}{3}$

解 (1) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 27 + \log_{25} 125 = \log_2 2^{-5} + \log_3 3^3 + \log_{5^2} 5^3$

$= (-5) + 3 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$

(2) $\frac{1}{2}\log_6 15 + \log_6 18\sqrt{3} - \log_6 \frac{\sqrt{5}}{4} = \log_6 \sqrt{15} + \log_6 18\sqrt{3} - \log_6 \frac{\sqrt{5}}{4}$

$= \log_6 \sqrt{15} \times 18\sqrt{3} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \log_6 216 = 3$

(3) $\log_{10} \frac{7}{36} + 5\log_{10} 2 - \log_{10} \frac{14}{25} + 2\log_{10} 3 = \log_{10} \frac{7}{36} + \log_{10} 32 - \log_{10} \frac{14}{25} + \log_{10} 9$

$= \log_{10}(\frac{7}{36} \times 32 \times \frac{25}{14} \times 9) = \log_{10} 100 = 2$

(4) $\log_8(\sqrt{7}+\sqrt{3}) + \log_8(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \log_8(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$

4. $2^{\log_3 81} + 3^{\log_3 5} + 9^{\log_3 2}$ 之值為______。(11 分)

答 25

解 $2^{\log_3 81} + 3^{\log_3 5} + 9^{\log_3 2} = 2^{\log_3 3^4} + 3^{\log_3 5} + 3^{2\log_3 2} = 2^4 + 5 + 2^2 = 25$

5. 設 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$，試以 a, b 表示下列各式：

(1) $\log_{10} 24 =$ ______　(2) $\log_{10}\frac{6}{5} =$ ______。（各 6 分）

答　(1) $3a+b$　(2) $2a+b-1$

解 (1) $\log_{10} 24 = \log_{10}(2^3 \times 3) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 3a+b$

(2) $\log_{10}\frac{6}{5} = \log_{10}\frac{2\times 3}{5} = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - (1 - \log_{10} 2) = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1$

$= 2a + b - 1$

進階型

6. $(\log_2 3 + \log_4 27)(\log_9 16 + \log_3 2)$ 之值為______。（15 分）

答　$\frac{15}{2}$

解 $(\log_2 3 + \log_4 27)(\log_9 16 + \log_3 2) = (\log_2 3 + \log_{2^2} 3^3)(\log_{3^2} 2^4 + \log_3 2)$

$= (\log_2 3 + \frac{3}{2}\log_2 3)(2\log_3 2 + \log_3 2)$

$= \frac{5}{2}\log_2 3 \cdot 3\log_3 2 = \frac{5}{2}\cdot 3 = \frac{15}{2}$

7. $(\log_{10} 2)^2 + (\log_{10} 5)^2 + \log_{10} 5 \cdot \log_{10} 4$ 之值為______。（15 分）

答　1

解 $(\log_{10} 2)^2 + (\log_{10} 5)^2 + \log_{10} 5 \cdot \log_{10} 4 = (\log_{10} 2)^2 + (\log_{10} 5)^2 + 2\log_{10} 5 \cdot \log_{10} 2$

$= (\log_{10} 2 + \log_{10} 5)^2 = 1^2 = 1$