109 學年度第一學期五專(資工二乙)數學第一次小考

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

分數欄

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C)已知 $\sum_{k=1}^{9} a_k = 7$，$\sum_{k=1}^{11} b_k = 5$，又 $a_{10} = 5$，$b_{11} = -3$，求 $\sum_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 1)$ 之值為　(A)5　(B)29　(C)38　(D)98

解析：$\because \sum_{k=1}^{10}(5a_k - 4b_k + 1) = 5\sum_{k=1}^{10} a_k - 4\sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 5(\sum_{k=1}^{9} a_k + a_{10}) - 4(\sum_{k=1}^{11} b_k - b_{11}) + 10$

$= 5\cdot(7+5) - 4\cdot(5-(-3)) + 10 = 60 - 32 + 10 = 38$

2. (C)在 24 與-8 之間，插入 11 個數使之成為等差數列，則所插入的第幾個數為 0？　(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

解析：設 $a_1 = 24$，則 $a_{13} = -8$

$$a_{13} = a_1 + 12d = 24 + 12d = -8 \Rightarrow d = -\frac{8}{3}$$

$$a_n = 24 + (n-1)\times(-\frac{8}{3}) = 0 \Rightarrow n = 10$$

即插入的第 9 個數為 0

3. (A)若 p, q 兩數的等差中項為 $\sqrt{5}$，等比中項為 2，則 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} =$ ？　(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　(B) $\sqrt{5}+1$　(C) $\sqrt{5}-1$　(D) $2\sqrt{5}$

解析：$\begin{cases} p+q = 2\sqrt{5} \\ pq = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

4. (D)設-6, a, b, 48 四數成等差數列，a, b, x, y 四數成等比數列，則 $x - 2y =$ ？　(A)10　(B)30　(C)300　(D)-300

解析：$48 = -6 + 3d \Rightarrow$ 公差 $d = 18$

$\therefore a = -6 + 18 = 12, b = 12 + 18 = 30$

又 12, 30, x, y 成等比數列，公比 $r = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$\therefore x = 30 \times \frac{5}{2} = 75$，$y = 75 \times \frac{5}{2} = \frac{375}{2}$

故 $x - 2y = 75 - 375 = -300$

5. (B)在兩位正整數中，所有 11 的倍數之總和為何？　(A)485　(B)495　(C)505　(D)515

解析：$11\times1 + 11\times2 + \cdots + 11\times9$

$= 11\times(1+2+\cdots+9) = 11\times45 = 495$

6. (A)設一等比級數公比是 3，其前 6 項的和是 1456，則第 4 項為　(A)108　(B)324　(C)36　(D)972

解析：$S_6 = \frac{a_1(3^6 - 1)}{3-1} = 1456 \Rightarrow a_1 = 4$

$\therefore a_4 = a_1 r^3 = 4\times3^3 = 108$

7. (C) 設 $x-1$ 為 $2x+1$ 與 $-x+3$ 的等差中項，則 $x=?$ (A)2 (B)4 (C)6 (D)8

解析：由題意得知 $(x-1)=\dfrac{(2x+1)+(-x+3)}{2}$

$\therefore 2x-2=x+4$，$\therefore x=6$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 試求 $\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k+2)$ 之值為何？

答案：$\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{10}k^2+3k+2$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+2\times10$$

$$=385+165+20=570$$

2. 設 $<a_n>$ 為等比數列，首項 $a_1=2$，公比 $r=3$，且 $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+p}=720$，求 k，p 之值。

答案：$\because a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+p}=720$

$$\Rightarrow a_1r^{k-1}+a_1r^k+a_1r^{k+1}+\cdots+a_1r^{k+p-1}=720$$

$$\Rightarrow 2\times3^{k-1}+2\times3^k+2\times3^{k+1}+\cdots+2\times3^{k+p-1}=7\quad2$$

$$\Rightarrow 2\times3^{k-1}(1+3+3^2+\cdots+3^p)=720$$

$$\Rightarrow 2\times3^{k-1}\times(\frac{3^{p+1}-1}{3-1})=720\Rightarrow 3^{k-1}(3^{p+1}-1)=3^2\times80$$

故 $k-1=2\Rightarrow k=3$，而 $3^{p+1}-1=80\Rightarrow p+1=4\Rightarrow p=3$

3. 設四個正數 a,b,c,d 為等比數列，且滿足 $a+b=8$、$c+d=72$，又 $a<b<c<d$，試求公比？

答案：設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

因為 $\begin{cases}a+b=8\\c+d=72\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+ar=8\\ar^2+ar^3=72\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(1+r)=8\cdots\cdots①\\ar^2(1+r)=72\cdots\cdots②\end{cases}$

將 $\dfrac{②}{①}$ 得 $r^2=\dfrac{72}{8}\Rightarrow r^2=9\Rightarrow r=\pm3$

因為 a,b,c,d 為正數所以 $r=3$