第3章 排列組合

3-1 乘法原理與樹狀圖

基礎型

1. 某國自用小客車的車牌號碼，前兩位是大寫英文字母，後四位為數字，如 AY-5786。則這樣不同的車牌號碼共有______個。(16 分)

答 $26^2 \times 10^4$

解

$$\underbrace{\square\square}_{\text{英文}} - \underbrace{\square\square\square\square}_{\text{數字}}$$

共有 $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^4$ 個車牌號碼

2. 小芸有 4 件不同的裙子，3 條不同的長褲，5 件不同的襯衫，3 雙不同的褲襪，5 雙不同的短襪。若要襯衫配裙子或襯衫配長褲（裙子與褲子不同時穿），且穿裙子必穿褲襪，穿長褲必穿短襪，則共有______種不同的搭配方法。(16 分)

答 135

解 襯衫配裙子及褲襪有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 種搭配方法

襯衫配長褲及短襪有 $5 \times 3 \times 5 = 75$ 種搭配方法

$\therefore$ 共有 $60 + 75 = 135$ 種搭配方法

3.請問 1080 的正因數共有______個。(16 分)

答 32

解 $1080=2^3\times3^3\times5$

$\therefore$1080 的正因數有 $(3+1)\times(3+1)\times(1+1)=32$ 個

4.計算下列各式之值：

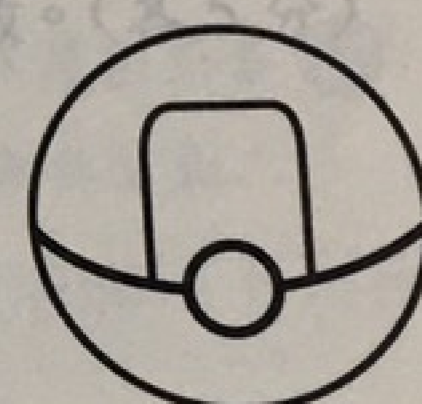
(1) $\dfrac{9!}{7!}=$______ (2) $\dfrac{14!}{12!2!}=$______。(各 9 分)

答 (1) 72 (2) 91

解 (1) $\dfrac{9!}{7!}=\dfrac{7!\times8\times9}{7!}=72$

(2) $\dfrac{14!}{12!2!}=\dfrac{12!\times13\times14}{12!\times1\times2}=91$

5.小智使用 4 種不同的顏色塗右圖高級球的圖案，四個區塊規定同色不相鄰，但顏色可重複使用，則小智的塗法有______種。(16 分)



答 48

解 $4\times3\times2\times2=48$ 種

進階型

6.一房間有 4 個門，甲乙二人由不同的門進入，再由不同的門出去，且各人不由同一門進出，則共有______種不同的走法。(18 分)

答 84

解 進入：甲有 4 種選擇，乙要與甲不同門，故有 3 種選擇，因此共有 $4\times3=12$ 種方法

出去：(1)若甲由乙進入之門出去，則有 $1\times3=3$ 種方法

(2)若甲不由乙進入之門出去，則有 $2\times2=4$ 種方法

$\therefore$出去共有 $3+4=7$ 種方法

故進出共有 $12\times7=84$ 種方法

3-2 排　列

基礎型

1.計算下列各式之值：

(1) $P_0^{10}=$ ______。(3 分)

(2) $P_2^{15}=$ ______。(3 分)

答 (1) 1　(2) 210

解 $P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

(1) $P_0^{10}=\dfrac{10!}{(10-0)!}=\dfrac{10!}{10!}=1$

(2) $P_2^{15}=\dfrac{15!}{(15-2)!}=\dfrac{15!}{13!}=15\times14=210$

2.求下列各式之正整數 n 值：

(1) $P_2^{n+2}=30$，則 $n=$ ______。(4 分)

(2) $P_n^{10}=6\times P_{n-1}^{10}$，則 $n=$ ______。(4 分)

答 (1) 4　(2) 5

解 (1) $P_2^{n+2}=30\Rightarrow\dfrac{(n+2)!}{n!}=30\Rightarrow\dfrac{(n+2)(n+1)\cdot n!}{n!}=30$

$\Rightarrow(n+2)(n+1)=30$，展開整理得 $n^2+3n-28=0$

$(n+7)(n-4)=0$，$n=-7$ 或 4

因 -7 代入原式，會使階乘變負的，故不合，所以此題 $n=4$

(2) $P_n^{10}=6\times P_{n-1}^{10}\Rightarrow\dfrac{10!}{(10-n)!}=6\times\dfrac{10!}{[10-(n-1)]!}\Rightarrow\dfrac{10!}{(10-n)!}=6\times\dfrac{10!}{(11-n)!}$

$\Rightarrow\dfrac{10!}{(10-n)!}=6\times\dfrac{10!}{(11-n)(10-n)!}$，整理得 $11-n=6,\ n=5$

3. 6 個小朋友，其中 3 人為姊妹，若排成一列，其排列數為______，又其中的 3 姊妹必須排在一起，其排列數為______，若 3 姊妹兩兩不相鄰，其排列數為______。(各 4 分)

答 720；144；144

解 (1)排列數有 $6!=720$ 種

(2) ⓧⓧⓧ ⓧ ⓧ ⓧ 排列數有 $4!\times 3!=144$ 種

(3) ✓ⓧ✓ⓧ✓ⓧ✓ 先排其他 3 人，3 姊妹再插入空格內

$\therefore$ 排列數有 $3!\times P^4_3=144$ 種

4. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 等 7 個數字，任選 4 個組成 4 位數，若數字不得重複，共有______個 4 位數。若數字可重複選取，則可構成______個 4 位數。(各 5 分)

答 720；2058

解 (1)數字不得重複的四位數共有 $6\times 6\times 5\times 4=720$ 個

(2)數字可重複的四位數共有 $6\times 7\times 7\times 7=2058$ 個

5. 「年年年頭接年尾」7 字排成一列，其排列數為______。若年字必全相鄰，其排列數為______。又若年字不得相鄰，其排列數為______。(各 4 分)

答 210；24；6

解 (1) $\dfrac{7!}{4!}=210$

(2) 年年年年 頭 接 尾 $4!=24$

(3) ✓頭✓接✓尾✓ $3!\times\dfrac{P^4_4}{4!}=6$

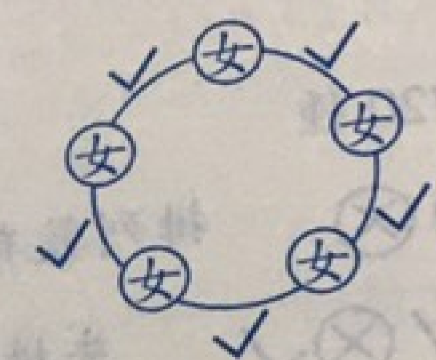
6. 4 男 5 女圍一圓桌而坐，其不同的坐法有______種。又 4 男均不相鄰，其不同的坐法有______種。（各 5 分）

答　40320；2880

解 (1) $\dfrac{9!}{9}=8!=40320$

(2)先排 5 女，再將 4 男插入空格

$\therefore$共有 $\dfrac{5!}{5}\times P^5_4=24\times120=2880$ 種坐法



7. 5 位選舉人，4 位候選人，採記名投票，每位選舉人只能投給一位候選人，在沒有廢票的情形下，共有______種不同的選法。（9 分）

答　1024

解 每位選舉人皆有 4 種選擇

$\therefore$選法共有 $4^5=1024$ 種

8. 將 4 件不同禮物送給 3 個學生，若每個學生可不得禮物，亦可得 1 至 4 件禮物，則有______種不同的送法。（9 分）

答　81

解 以禮物來給學生較恰當，故有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$ 種送法

進階型

9.設有渡船 3 艘，基於安全考量，每船至多只能載 5 人，試依照下列不同的過渡人數，求出能安全過渡的方法分別有幾種：

(1) 4 人過渡有______種。(4 分)

(2) 5 人過渡有______種。(4 分)

(3) 6 人過渡有______種。(4 分)

答 (1) 81 (2) 243 (3) 726

解 (1)每人皆有 3 個選擇，∴方法有 $3^4=81$ 種

(2)每人依然都有 3 個選擇，∴方法有 $3^5=243$ 種

(3) 6 人安全過渡的方法 =(全部的方法) − (6 人搭同一艘船)

$$=3^6-3=729-3=726 \text{ 種}$$

10.以 0, 1, 2, 3, 4, 5 等 6 個數字組成一個三位數，數字可重複，試求滿足下列條件的三位數各有幾個：

(1)此三位數為奇數的有______個。(4 分)

(2)此三位數為 5 的倍數的有______個。(4 分)

(3)此三位數大於 350 的有______個。(4 分)

答 (1) 90 (2) 60 (3) 77

解 (1)為奇數，∴個位數必為奇數，故有 $5\times6\times3=90$ 個

(2)為 5 的倍數，∴個位數必為 0 或 5，故有 $5\times6\times2=60$ 個

(3)大於 350，則三位數為

① 351~355 有 5 個

②百位數為 4 或 5，有 $2\times6\times6=72$ 個

故共有 $5+72=77$ 個

3-3 組 合

基礎型

1. n 為自然數，試求下列各式中之 n 值：

(1) $C_5^n = C_{12}^n$，則 $n =$ ______。(6 分)

(2) $C_{n-1}^7 = C_{3n-4}^7$，則 $n =$ ______。(6 分)

答 (1) 17 (2) 3

解 (1) $n = 5 + 12 = 17$

(2) $n - 1 = 3n - 4$ 或 $n - 1 = 7 - (3n - 4) \Rightarrow 2n = 3$ 或 $4n = 12 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$ 或 $n = 3$

$\because n$ 為自然數，$\therefore n = 3$

2. 平面上有 12 個點，其中 5 點共線，其餘任 3 點不共線，連接其中 3 點即可畫出一三角形，則可畫出______個不同的三角形。(12 分)

答 210

解 $C_3^{12} - C_3^5 = 220 - 10 = 210$ 個三角形

3. 班上有男生 8 人，女生 10 人，欲選出 2 男 2 女組成委員會，共有______種不同的組法。(12 分)

答 1260

解 有 $C_2^8 \times C_2^{10} = 28 \times 45 = 1260$ 種組法

4. 將 9 顆相同的球放入 4 個相異的箱子中，共有______種不同的放法。(12 分)

答 220

解 設 4 個箱子內各放入 x_1, x_2, x_3, x_4 個球

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=9$，其中 x_1, x_2, x_3, x_4 為非負整數

$\therefore$ 放法有 $H_9^4=C_9^{12}=220$ 種

5. 將 5 本相同的本子送給 9 位同學，有______種不同的送法。(12 分)

答 1287

解 設 9 位同學每人得到的本數分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_9$，

總共 5 本，故 $x_1+x_2+\cdots+x_9=5$，

因 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 皆為非負整數，

故方法共有 $H_5^9=C_5^{9+5-1}=C_5^{13}=1287$ 種

6. 方程式 $a+b+c+d=8$ 的正整數解有______組。(12 分)

答 35

解 令 $a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1$

其中 a', b', c', d' 為非負整數

原式 $\Rightarrow (a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=8 \Rightarrow a'+b'+c'+d'=4$

$\therefore$ 有 $H_4^4=C_4^7=35$ 組解

進階型

7. 有 10 件相同的東西，全部分給甲、乙、丙 3 人。若甲至少得 1 件，乙至少得 2 件，丙至少得 3 件，則不同的分法共有______種。(12 分)

答 15

解 設甲得 a 件，乙得 b 件，丙得 c 件 ($a\geq 1, b\geq 2, c\geq 3$)

$a+b+c=10$

令 $a'=a-1, b'=b-2, c'=c-3$ (a', b', c' 為非負整數)

原式 $\Rightarrow (a'+1)+(b'+2)+(c'+3)=10 \Rightarrow a'+b'+c'=4$

$\therefore$ 有 $H_4^3=C_4^6=15$ 種分法

8. 有 5 種不同的酒，4 個酒杯，若每個酒杯只能倒 1 種酒，試依下列情形，求出其倒法各有多少種：

(1) 4 個杯子皆不同，且杯內的酒亦全不同，則不同的倒法有______種。(4 分)

(2) 4 個杯子皆相同，但杯內的酒全不同，則不同的倒法有______種。(4 分)

(3) 4 個杯子皆不同，而杯內的酒可相同，則不同的倒法有______種。(4 分)

(4) 4 個杯子皆相同，而杯內的酒可相同，則不同的倒法有______種。(4 分)

答 (1) 120 (2) 5 (3) 625 (4) 70

解 (1)因酒杯及酒皆不同，$\therefore$選出 4 種酒排列 $\Rightarrow$ 倒法有 $P_4^5=120$ 種

(2)酒杯同但酒全不同，$\therefore$只要取出 4 種酒（不必排列）$\Rightarrow$ 倒法有 $C_4^5=5$ 種

(3)酒杯不同但酒可相同，$\therefore$每個杯子皆有 5 種選擇

$\therefore$倒法有 $5^4=625$ 種

(4)設第 1 種酒倒了 x_1 杯，第 2 種酒倒了 x_2 杯，第 3 種酒倒了 x_3 杯，第 4 種酒倒了 x_4 杯，第 5 種酒倒了 x_5 杯

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$，$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 為非負整數

$\therefore$倒法有 $H_4^5=C_4^8=70$ 種

3-4 二項式定理

基礎型

1. $(2x-1)^4$ 的展開式為______。(12 分)

答 $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

解 $(2x-1)^4=C_4^4(2x)^4+C_3^4(2x)^3\cdot(-1)+C_2^4(2x)^2\cdot(-1)^2+C_1^4(2x)\cdot(-1)^3+C_0^4(-1)^4$

$=16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

2. 求下列各式中指定項的係數：

(1) $(x^2-\frac{3}{x})^8$ 中 x^7 的係數為______。(4 分)

(2) $(x-\frac{1}{x})^{10}$ 中 $\frac{1}{x^4}$ 的係數為______。(4 分)

(3) $(2x^2+5y)^6$ 中 x^4y^4 的係數為______。(4 分)

答 (1) -1512 (2) -120 (3) 37500

解 (1)其一般項為 $C_r^8\cdot(x^2)^r\cdot(-\frac{3}{x})^{8-r}=C_r^8\cdot(-3)^{8-r}\cdot x^{3r-8}$

令 $3r-8=7\Rightarrow r=5$

$\therefore$係數為 $C_5^8\cdot(-3)^3=56\cdot(-27)=-1512$

(2)其一般項為 $C_r^{10}\cdot x^r\cdot(-\frac{1}{x})^{10-r}=C_r^{10}\cdot(-1)^{10-r}\cdot x^{2r-10}$

令 $2r-10=-4\Rightarrow r=3$

$\therefore$係數為 $C_3^{10}\cdot(-1)^7=-120$

(3) $x^4\cdot y^4$ 必來自 $(2x^2)^2\cdot(5y)^4$ 項

$\therefore$係數為 $C_2^6\cdot 2^2\cdot 5^4=15\cdot 4\cdot 625=37500$

3.求下列各式之值：

(1) $C_1^{11}+C_2^{11}+C_3^{11}+\cdots+C_{11}^{11}=$ ______。(6 分)

(2) $C_1^{11}+C_3^{11}+C_5^{11}+\cdots+C_{11}^{11}=$ ______。(6 分)

答 (1) 2047 (2) 1024

解 (1) $C_1^{11}+C_2^{11}+\cdots+C_{11}^{11}=2^{11}-C_0^{11}=2047$

(2) $C_1^{11}+C_3^{11}+\cdots+C_{11}^{11}=2^{11-1}=2^{10}=1024$

4. a 為實數，若 $(ax^2+\frac{1}{x})^5$ 展開式中 x^4 項之係數為 80，則 $\frac{1}{x^2}$ 項之係數為 ______。(12 分)

答 10

解 其一般項為 $C_r^5\cdot(ax^2)^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}=C_r^5\cdot a^r\cdot x^{3r-5}$

令 $3r-5=4\Rightarrow r=3$

係數 $C_3^5\cdot a^3=80\Rightarrow 10\cdot a^3=80\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$

令 $3r-5=-2\Rightarrow r=1$

$\therefore \frac{1}{x^2}$ 項係數為 $C_1^5\cdot a^1=C_1^5\cdot 2^1=10$

5.利用楊輝三角可得 $(x-2)^4$ 的展開式為 ______。(12 分)

答 $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

解 由楊輝三角知，$(x-2)^4$ 的展開式其係數為 1, 4, 6, 4, 1，

故 $(x-2)^4=1\cdot x^4+4\cdot x^3\cdot(-2)^1+6\cdot x^2\cdot(-2)^2+4\cdot x\cdot(-2)^3+1\cdot(-2)^4$

$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

6. $2x^3(x+1)^6$ 的展開式中，x^7 項的係數為______。(12 分)

答 30

解 $(x+1)^6$ 需提供 x^4 才能與 $2x^3$ 相乘得 x^7

在 $(x+1)^6$ 中，x^4 的係數為 $C^6_4=15$

故 x^7 項的係數 $=2\times15=30$

進階型

7. 利用二項式定理，$C^{10}_0+2C^{10}_1+2^2C^{10}_2+\cdots+2^{10}C^{10}_{10}$ 之值為______。(14 分)

答 3^{10}

解 $\because (x+y)^n=C^n_n x^n+C^n_{n-1}x^{n-1}\cdot y+C^n_{n-2}x^{n-2}\cdot y^2+\cdots+C^n_1 x\cdot y^{n-1}+C^n_0 y^n$

令 $x=2,\ y=1,\ n=10$

$\therefore C^{10}_{10}\cdot2^{10}+C^{10}_9\cdot2^9+C^{10}_8\cdot2^8+\cdots+C^{10}_2\cdot2^2+C^{10}_1\cdot2+C^{10}_0=(2+1)^{10}=3^{10}$

8. 求 $(1.1)^7$ 的近似值至小數點後第二位為______。(第三位四捨五入)(14 分)

答 1.95

解 $(1.1)^7=(1+0.1)^7=\sum\limits_{r=0}^{7}C^7_r\cdot1^{7-r}\cdot(0.1)^r$

$\doteqdot C^7_0+C^7_1\cdot(0.1)+C^7_2\cdot(0.1)^2+C^7_3\cdot(0.1)^3+C^7_4\cdot(0.1)^4$

$=1+0.7+0.21+0.035+0.0035$

$=1.9485\doteqdot1.95$