# 排列組合

# 乘祛原理與樹狀圖 (C) 电解方程式 log<sub>2</sub>(x+5)-log<sub>3</sub>(x-1)=1得及之惟為何?

# 基礎型

1. 某國自用小客車的車牌號碼,前兩位是大寫英文字母,後四位為數字,如 AY-個。(16分) 5786。則這樣不同的車牌號碼共有

01 A

( 8 ) 原己知 10g 2 = 0.3010、16g

(A) (TTE) (B) (B)

 $26^2 \times 10^4$ 

6 = x(0)

共有 26×26×10×10×10×10=26<sup>2</sup>×10<sup>4</sup> 個車牌號碼

(A) log 5 > log 3 > log (0.2) (B) log 3 > log (2 > log 1 (B)

2.小芸有4件不同的裙子,3條不同的長褲,5件不同的襯衫,3雙不同的褲襪, 5雙不同的短襪。若要襯衫配裙子或襯衫配長褲(裙子與褲子不同時穿),且穿 \_種不同的搭配方法。(16分) 裙子必穿褲襪,穿長褲必穿短襪,則共有

### 答 135

解 襯衫配裙子及褲襪有 5×4×3=60 種搭配方法 襯衫配長褲及短襪有5×3×5=75種搭配方法 ·. 共有 60+75=135 種搭配方法 

 $(D)(0.5)^3 < (0.5)^{-1} < (0.5)^{-2}$ 

響 (1) 1 (2) 210

 $P_m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 

 $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$ 

:.1080 的正因数有 (3+1)×(3+1)×(1+1)=32 個

2000 排列数有 41×31=144 税 4.計算下列各式之值:

4.計算下列各式之值:
$$(1)\frac{9!}{7!} = (2)\frac{14!}{12!2!} = (899)$$
(4.1)
$$(1)\frac{9!}{7!} = (2)\frac{14!}{12!2!} = (899)$$

答 (1)72 (2)91

$$(1) \frac{9!}{7!} = \frac{7! \times 8 \times 9}{7!} = 72$$

(2) 
$$\frac{14!}{12!2!} = \frac{12! \times 13 \times 14}{12! \times 1 \times 2} = 91$$

5. 小智使用 4 種不同的顏色塗右圖高級球的圖案,四個區塊規定 同色不相鄰,但顏色可重複使用,則小智的塗法有\_

答 48

解 4×3×2×2=48 種

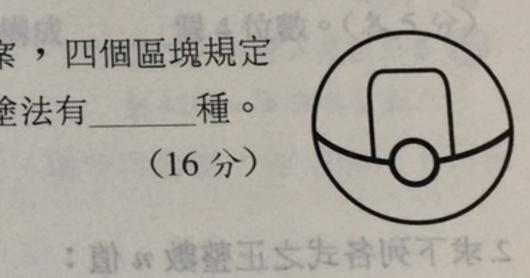
(16分)

 $(1)P_2^{n+2} = 30$  列 n = (4分)

 $(2)P_n^{10} = 6 \times P_{n-1}^{10}$ ,則 n = 0 (4分)

1.計算下列各式之值:

 $(1)P_0 = \frac{10!}{(10-0)!} = \frac{10!}{10!} = 1$ 



# 進路型

6.一房間有4個門,甲乙二人由不同的門進入,再由不同的門出去,且各人不由 同一門進出,則共有\_\_\_種不同的走法。(18分) 種小问的走法。(18分)

答 84

解進入:甲有4種選擇,乙要與甲不同門,故有3種選擇,因此共有4×3=12種方法

出去:(1)若甲由乙進入之門出去,則有1×3=3種方法

(2)若甲不由乙進入之門出去,則有2×2=4種方法

故進出共有 12×7=84 種方法

# ■ 3-2 排

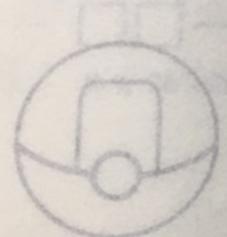
## 基礎型

### 1.計算下列各式之值:

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$(1) P_0^{10} = \frac{10!}{(10-0)!} = \frac{10!}{10!} = 1$$

(2) 
$$P_2^{15} = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = 15 \times 14 = 210$$



(2) 14[ = 12! × 13 × 14 ( ) 01 = 20 ( ) 12! × 12

(到 4×3×2×2 = 48 種

多进入: 平在4柱连接。C. 安奥华军国团人

问色不相鄰。但頗色可重複使用。則小智的拳法有

# 2. 求下列各式之正整數 n 值:

$$(1) P_2^{n+2} = 30$$
,則  $n =$   $\circ (4 分)$ 

(2) 
$$P_n^{10} = 6 \times P_{n-1}^{10}$$
, 則  $n =$  (4分)

(1) 
$$P_2^{n+2} = 30 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{n!} = 30 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1) \cdot n!}{n!} = 30$$

⇒
$$(n+2)(n+1)=30$$
,展開整理得 $n^2+3n-28=0$ 

$$(n+7)(n-4)=0$$
,  $n=-7$  of 4

因-7代入原式,會使階乘變負的,故不合,所以此題 n=4

$$(2) P_n^{10} = 6 \times P_{n-1}^{10} \Rightarrow \frac{10!}{(10-n)!} = 6 \times \frac{10!}{[10-(n-1)]!} \Rightarrow \frac{10!}{(10-n)!} = 6 \times \frac{10!}{(11-n)!}$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{(10-n)!} = 6 \times \frac{10!}{(11-n)(10-n)!}, 整理得 11-n=6, n=5$$

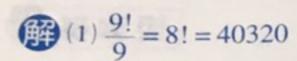
3.6個小朋友,其中3人為姊妹,若排成一列,其排列數為,又其中的3
姊妹必須排在一起,其排列數為,若3姊妹兩兩不相鄰,其排列數為
。(各4分)
答 720; 144; 144 OSEON = 18 = 18 (1) (1)
(2) (2) (2) (3) (4) (4) (5) (4) (5) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6
127 (XXX) (X) (X) (X) (X) (AFY) 数月 4! X 3! = 144 種
排列數有 $3! \times P_3^4 = 144$ 種
7.5 位置舉人,4 位候還人,据記各搜票全建位盟星久只能投給一位候還人,在
4.由 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 等 7 個數字, 任選 4 個組成 4 位數, 若數字不得重複, 共
int ( 1) and ( 1) and
F
<b>答</b> 720; 2058
<b>第</b> (1)數字不得重複的四位數共有 6×6×5×4=720 個
(2)數字可重複的四位數共有 6×7×7×7=2058 個
(1)此三位数為奇数的有
(2)此三位数為5的倍数由存
8. 將 4 件不同物编送给 3 個配片,每每一個四個一一一個一個
8.將4件不同禮物送給3個學生,若每個學型可不得種物9所可容控至空中德物
。若年字必全相鄰,其 一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一一
「年年年頭接年尾」7字排成一列,其排列數為。若年字必全相鄰,其 ## 別數為 。又若年字不得相鄰,其排列數為 。(各4分)
排列數為。又若年字不得相鄰,其排列數為。(各4分)
210;24;6

$$\mathfrak{B}(1)\frac{7!}{4!}=210$$

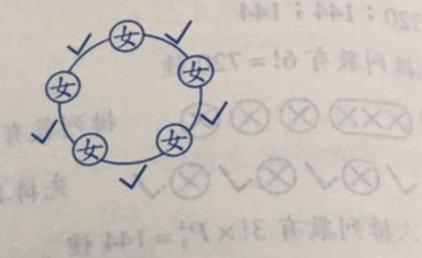
#### 32 數學CⅢ習作簿

6.4 男 5 女圍一圓桌而坐,其不同的坐法有\_\_\_\_種。又 4 男均不相鄰,其不同 的坐法有\_\_\_\_種。(各5分)

答 40320;2880



(2)先排5女,再将4男插入空格 :.共有  $\frac{5!}{5} \times P_4^5 = 24 \times 120 = 2880$  種坐法



7.5位選舉人,4位候選人,採記名投票,每位選舉人只能投給一位候選人,在 沒有廢票的情形下,共有\_\_\_\_種不同的選法。(9分)

答 1024

解每位選舉人皆有4種選擇

·· 選法共有 45 = 1024 種

個4位數。若數字可重複題取,則可構成

自山共享不得重要的四位载共有 6×6×5×4=720個 21尺字可重视的四位数共有 6×7×7×7=2058 個

8. 將 4 件不同禮物送給 3 個學生, 若每個學生可不得禮物, 亦可得 1 至 4 件禮物, 種不同的送法。(9分) 則有

答 81

解以禮物來給學生較恰當,故有3×3×3×3=3<sup>4</sup>=81種送法

進階

9. 設有渡

人數,

(1)4)

(2)5

(3)6

答 (1)



(2)4

(3)

8 210 1 24 1 6

營 (1)17 (2)3

(国) C12 − C1 = 220 − 10 = 210 個

同的組技。(12分)

(3) 有 C\*x C\* = 28 × 45 = 1260 接触法

不同

#### 進路型

9. 設有渡船 3 艘,基於安全考量,每船至多只能載 5 人,試依照下列不同的過渡 人數,求出能安全過渡的方法分別有幾種:

 $(2)C_{n-1}^{\prime}=C_{n-1}^{\prime}$ ,則 n= 。(6分)

- (1)4人過渡有\_\_\_\_種。(4分)
- (2)5人過渡有\_\_\_\_種。(4分)
- (3)6人過渡有\_\_\_\_種。(4分)
- 答 (1) 81 (2) 243 (3) 726
- 翻(1)每人皆有3個選擇,:.方法有34=81種
  - (2)每人依然都有 3 個選擇 , :. 方法有 3<sup>5</sup> = 243 種
- (3)6人安全過渡的方法=(全部的方法)-(6人搭同一艘船)  $=3^6 - 3 = 729 - 3 = 726 \text{ }$

10.以 0, 1, 2, 3, 4, 5 等 6 個數字組成一個三位數,數字可重複,試求滿足下列條 件的三位數各有幾個: 一三角形。則可審出

- (1)此三位數為奇數的有\_\_\_\_\_個。(4分)
- (2)此三位數為5的倍數的有\_\_\_\_\_個。(4分)
- (3)此三位數大於 350 的有\_\_\_\_\_個。(4分)
- 答 (1)90 (2)60 (3)77
- 解(1)為奇數,:.個位數必為奇數,故有5×6×3=90個
  - (2)為5的倍数,:.個位数必為0或5,故有5×6×2=60個
  - (3)大於350,則三位數為
    - ①351~355有5個委如股党2異2出激粉。人01生发。人8生民自土班8
    - ②百位数為4或5,有2×6×6=72個

故共有5+72=77個

## 型基礎型

1. n 為自然數,試求下列各式中之n值:

$$(1)$$
  $C_5^n = C_{12}^n$ ,則  $n =$  (6分)

(1) 
$$C_5 = C_{12}$$
 ,則  $n =$  。 (6 分)  
(2)  $C_{n-1}^7 = C_{3n-4}^7$  ,則  $n =$  。 (6 分)  
(1) 17 (2) 3

答 (1) 17 (2) 3

$$(1)$$
  $n = 5 + 12 = 17$ 

(1) 
$$17 - (2) 3$$
  
(1)  $n = 5 + 12 = 17$   
(2)  $n - 1 = 3n - 4$  ø  $n - 1 = 7 - (3n - 4) \Rightarrow 2n = 3$  ø  $4n = 12 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$  ø  $n = 3$ 

佛治只述至很珍、董安全安约基、则 8 信服所为

(3.6人/增殖有二二種。(4分)

第11为手款》:"個位數必為學數。做有5×6×3=90個

近步等5+72=77個

e (1 8t (2) 243 (3) 726

2.平面上有12個點,其中5點共線,其餘任3點不共線,連接其中3點即可畫出 \_個不同的三角形。(12分) 一三角形,則可畫出\_\_\_

答 210

$$m C_3^{12} - C_3^5 = 220 - 10 = 210 個三角形$$

ご此三位數為5的倍數的有 (個 0 (4 分) 三世三位數大的350的核尼尔工作和《4分》

引大於350年則三位教為 3. 班上有男生8人,女生10人,欲選出2男2女組成委員會,共有\_\_種不 同的組法。(12分) ②百位教為4或52有2×6×6=72個

21为5的传教\*:、、、但位教务者0成5\*线有5×6×2=60但

1260

解有 C2×C10=28×45=1260 種組法

4. 將 9 顆相

答 220



館 設 4 個 和

 $\therefore x_1 + a$ 

二. 放法

5. 將 5



總

因

故

6.

4. 將 9 顆相同的球放入 4 個相異的箱子中, 共有\_\_\_\_種不同的放法。(12 分) 答 220 野 設 4 個箱子內各放入 x1, x2, x3, x4 個球 人 甲金代语全 西東的同時中 01 章 7  $\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ ,其中 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 為非負整數 ∴放法有  $H_9^4 = C_9^{12} = 220$  種 母世界所有件。飞行为件。两层之件(a≥1, 6至25623)——《大原园司(1-55) a + b + c = 10字 a = a - dt を行わっては (3(2a)\* (3(2a)\* (3(2b)\* (4(2b)\* 5. 將 5 本相同的本子送給 9 位同學,有\_\_\_\_種不同的送法。(12 分) 答 1287 解 設 9 位同學每人得到的本數分別為 $x_1, x_2, \dots, x_9$ , 總共5本,故 $x_1 + x_2 + \cdots + x_0 = 5$ , 因 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 皆為非負整數, 故方法共有  $H_5^9 = C_5^{9+5-1} = C_5^{13} = 1287$  種 其倒法各有多少種: (1)4個杯子曾不同,且标内的酒家全米局,则不简荫都注意。中"(前。飞公分) (2)4個杯子皆相同,但杯内的隨坐不同。則不開節的接着。中。(種。(42分)) (3)4個杯子曾不同。而杯內的酒可相同。則不同的倒绕有021-(2)種定(4分)验 6. 方程式 a+b+c+d=8 的正整數解有\_\_\_\_組。(12分) 警 (1) 120 (2) 5 (3) 625 (4) 70 (a)  $\Rightarrow$  a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1其中 a', b', c', d' 為非負整數 原式  $\Rightarrow$   $(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=8 \Rightarrow a'+b'+c'+d'=4$ ·: 的法有 5°= 625 捷 (4)政策下極海例了近,林、第2種語例了近,栋、第3種海戲了為越海海

第4種預門工具杯。第5種酒倒了去。核心化。2504616=2504619。 母亲自身存在,不,不,不,本,不,本,不,本,不, 本, 本, 本, 本, 本, 在, 是整数 · 判法有报言。C=70场

司的对战人。据相误的数子中,共行

7.有10件相同的東西,全部分給甲、乙、丙3人。若甲至少得1件,乙至少得2 件,丙至少得3件,則不同的分法共有\_\_\_\_種。(12分) · 水法有 用: = C12 = 220 种

解 設甲得 a 件, 乙得 b 件, 丙得 c 件  $(a \ge 1, b \ge 2, c \ge 3)$ 

令 a'=a-1, b'=b-2, c'=c-3 (a', b', c' 為非負整數)原式  $\Rightarrow$   $(a'+1)+(b'+2)+(c'+3)=10 \Rightarrow a'+b'+c'=4$ 

∴ 有  $H_4^3 = C_4^6 = 15$  種分法

8.有5種不同的酒,4個酒杯,若每個酒杯只能倒1種酒,試依下列情形,求出 其倒法各有多少種:

自次9位同學來人得到的本数分別多本,如一年

也於方本,故水,十年十十十年二5,

图到,, 正,, 正, 后, 皆為非良恭我。

種。(4分) (1)4個杯子皆不同,且杯內的酒亦全不同,則不同的倒法有

種。(4分) (2)4個杯子皆相同,但杯內的酒全不同,則不同的倒法有

種。(4分) (3)4個杯子皆不同,而杯內的酒可相同,則不同的倒法有

(4) 4個杯子皆相同,而杯內的酒可相同,則不同的倒法有\_\_\_\_種。(4分)

# **答** (1) 120 (2) 5 (3) 625 (4) 70

- $(\mathbf{E})$ (1)因酒杯及酒皆不同,∴選出4種酒排列  $\Rightarrow$  倒法有  $P_4^5 = 120$  種
  - (2)酒杯同但酒全不同,∴只要取出 4 種酒(不必排列) $\Rightarrow$  倒法有  $C_4^5 = 5$  種
  - (3)酒杯不同但酒可相同,:.每個杯子皆有5種選擇 +(1+10)+(1+10)+(1+10) 年 大小
    - :. 倒法有 5<sup>4</sup>=625 種

· 有 E = C = 35 组 解 (4)設第1種酒倒了 $x_1$ 杯,第2種酒倒了 $x_2$ 杯,第3種酒倒了 $x_3$ 杯, 第4種酒倒了x4杯,第5種酒倒了x5杯

 $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  為非負整數

∴倒法有 $H_4^5 = C_4^8 = 70$ 種

答 解

+ 空中到海北之道: 约至原料便不完大

(2) C"+ C"+ C"+ -+ C"=

(D) 中操邻三角头5°(10-2)°的规则或其保聚岛1.4.

=2-82+242-322+16

# ★ 3-4 二項式定理

### 基礎型

1. (2x-1)4的展開式為\_\_\_。(12分)

誓 
$$16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

$$(2x-1)^4 = C_4^4 (2x)^4 + C_3^4 (2x)^3 \cdot (-1) + C_2^4 (2x)^2 \cdot (-1)^2 + C_1^4 (2x) \cdot (-1)^3 + C_0^4 (-1)^4$$
$$= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

4.0 是實際,若(02年上)於展開式中心理之係數為80.1 則上。項之係數為

2. 求下列各式中指定項的係數:

$$(1)(x^2 - \frac{3}{x})^8$$
中 $x^7$ 的係數為\_\_\_\_。(4分)

$$(2)(x-\frac{1}{x})^{10}$$
中  $\frac{1}{x^4}$  的係數為\_\_\_\_\_。(4分)

$$(3)(2x^2+5y)^6$$
中 $x^4y^4$ 的係數為\_\_\_\_\_。(4分)  
 $(1)-1512$  (2)-120 (3)37500

答 (1)-1512 (2)-120 (3)37500

解(1)其一般項為 $C_r^8 \cdot (x^2)^r \cdot (-\frac{3}{x})^{8-r} = C_r^8 \cdot (-3)^{8-r} \cdot x^{3r-8}$ 

:.係數為 
$$C_5^8 \cdot (-3)^3 = 56 \cdot (-27) = -1512$$

(2)其一般項為 $C_r^{10} \cdot x^r \cdot (-\frac{1}{x})^{10-r} = C_r^{10} \cdot (-1)^{10-r} \cdot x^{2r-10}$ 

:.係數為 
$$C_3^{10} \cdot (-1)^7 = -120$$

(3) x4·y4 必來自(2x2)2·(5y)4 項

$$x^4 \cdot y^4$$
 必來目  $(2x^6)^{-1}(3y^6)$   
:. 係數為  $C_2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^4 = 15 \cdot 4 \cdot 625 = 37500$ 

3. 求下列各式之值:

$$(1) C_1^{11} + C_2^{11} + C_3^{11} + \dots + C_{11}^{11} = -$$

$$\circ (6)$$

(1) 
$$C_1^{11} + C_2^{11} + C_3^{11} + \cdots + C_{11}^{11} =$$

$$(2) C_1^{11} + C_3^{11} + C_3^{11} + C_5^{11} + \cdots + C_{11}^{11} =$$

$$(1) 2047 \quad (2) 1024$$

$$(1) C_1^{11} + C_2^{11} + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{11} - C_0^{11} = 2047$$

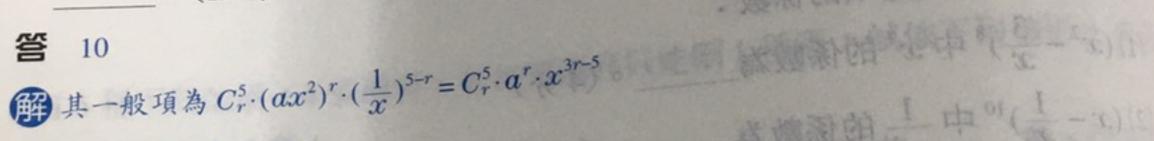
答 (1) 2047 (2) 1024

(1) 
$$2047$$
 (2)  $1024$  (1)  $C_1^{11} + C_2^{11} + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{11} - C_0^{11} = 2047$ 

(2) 
$$C_1^{11} + C_3^{11} + \dots + C_{11}^{11} = 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$$

(2)  $C_1^{11} + C_3^{11} + \dots + C_{11}^{11} = 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$ 

4. a 為實數 ,若  $(ax^2 + \frac{1}{x})^5$  展開式中  $x^4$  項之係數為 80 ,則  $\frac{1}{x^2}$  項之係數為



 $\therefore \frac{1}{x^2}$  項係數為  $C_1^5 \cdot a^1 = C_1^5 \cdot 2^1 = 10$ 

係数  $C_3^5 \cdot a^3 = 80 \Rightarrow 10 \cdot a^3 = 80 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$  $2 \Rightarrow 3r - 5 = -2 \Rightarrow r = 1$ 

"发下列各式中指定項的係數:

タリバー代表的 Ct. (エアル 新国 かたほどり

- (12分) 5.利用楊輝三角可得 (x-2)4 的展開式為 051-=(1-)-00 6 10 10

 $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ 

15. 5. 安安县(五年/2019年) m 由楊輝三角知, (x-2)4的展開式其係數為1,4,6,4,1,

· 传统為 C 22-5 = 15-4 数  $(x-2)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-2)^1 + 6 \cdot x^2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot x \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4$ 

$$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

6.  $2x^3(x+1)$ 

答 30

 $\mathbf{m}(x+1)^6$ 

在(x+

故公了

1000

7.利月

答



6.  $2x^3(x+1)^6$  的展開式中, $x^7$  項的係數為\_\_\_\_。(12分) 答 30 學第3章 自我經歷

(x+1)6 需提供 x4 才能與 2x3 相乘得 x7 在(x+1)6中, x4的係數為 C6=15 故 $x^7$ 項的係數 = 2×15 = 30

開発 (C) 90 (D) 100 和 (C) 90 (D) 100 和 (D) 100 (D) 2將(a+b+c)(x+y+z)(m+n)展開,共可得多少不同的項? DI 18 項 (C) 12

# 進路型

(B) 4歲6.Pin=Pin+1, n為自然數,則n之值為何? 7.利用二項式定理,  $C_0^{10} + 2C_1^{10} + 2^2C_2^{10} + \cdots + 2^{10}C_{10}^{10}$  之值為\_\_\_\_\_。(14分)

(B) 5%组(型, 3, 4, 5五個數學任選三個數學所構成的三位數, 若數字》作重聲

 $(x+y)^n = C_n^n x^n + C_{n-1}^n x^{n-1} \cdot y + C_{n-2}^n x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + C_1^n x \cdot y^{n-1} + C_0^n y^n$ x = 2, y = 1, n = 10  $C_{10}^{10} \cdot 2^{10} + C_{9}^{10} \cdot 2^{9} + C_{8}^{10} \cdot 2^{8} + \dots + C_{2}^{10} \cdot 2^{2} + C_{1}^{10} \cdot 2 + C_{0}^{10} = (2+1)^{10} = 3^{10}$   $C_{10}^{10} \cdot 2^{10} + C_{9}^{10} \cdot 2^{9} + C_{8}^{10} \cdot 2^{8} + \dots + C_{2}^{10} \cdot 2^{2} + C_{1}^{10} \cdot 2 + C_{0}^{10} = (2+1)^{10} = 3^{10}$ 

(D) 20 (固 (B) 7.將 bellmen 七個字母排成一列· 若e 不相鄰,則共有多少種不同的排注?

A 1260 (B) 900 (C) 2160 郵 0081(d)

8.求(1.1)7的近似值至小數點後第二位為\_\_\_。(第三位四捨五入)(14分) (で)9年上題, 若此9人改成團團寨而坐。則女生不相鄰的坐法共有 29.1年 3

(10) 123 海

 $(1.1)^7 = (1+0.1)^7 = \sum_{r=0}^7 C_r^7 \cdot 1^{7-r} \cdot (0.1)^r$  02EA(8) 0372(A)

= 1 + 0.7 + 0.21 + 0.035 + 0.0035

(C) 拉若3×C了=10×C了是10×C了是10 為自然數。則 n 值為何?