109 學年度第二學期五專(資工二乙)數學期中考

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

分數欄

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}=$ (A) -1 (B)1 (C)0 (D)不存在

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{(-x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{|x|}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}=0$

2. (D) 若一速度函數為 $v(t)=t^2+t$，則 $t=-2$ 到 $t=1$ 的平均加速度為何？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)0

解析：$v(-2)=2$，$v(1)=2$

故 $t=-2$ 到 $t=1$ 的平均加速度為 $\dfrac{2-2}{1-(-2)}=0$。

3. (A) 求點 $(1,2)$ 到圓 C：$2x^2+2y^2+2x+3y-2=0$ 之切線段長 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{10}$ (C)4 (D)8

解析：C：$x^2+y^2+x+\dfrac{3}{2}y-1=0$

$\therefore$ 切線段長 $=\sqrt{1+4+1+3-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

4. (D) 若 $P(x,y)$ 在圓 $x^2+y^2=1$ 上，則 $3x+4y$ 的最大值為 (A)1 (B)3 (C)4 (D)5

解析：$P(x,y)$ 在圓 $x^2+y^2=1$ 上

可設 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, \theta\in\mathbb{R}$

則 $3x+4y=3\cos\theta+4\sin\theta\le\sqrt{3^2+4^2}=5$

故最大值 $=5$

5. (B) 圓心 $(-1,2)$，半徑 3 的圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d+e+f=$ (A)6 (B) -6 (C)1 (D) -1

解析：圓：$(x+1)^2+(y-2)^2=9\Rightarrow x^2+y^2+2x-4y-4=0\Rightarrow d+e+f=2-4-4=-6$

6. (A) 求 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x-1)$ 之值為 (A) -1 (B) -3 (C)9 (D) -9

解析：$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x-1)=3^2-3\times 3-1=9-9-1=-1$

7. (D) 設 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$，則 $f'(0)=$ (A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) $-\dfrac{1}{6}$ (D) $-\dfrac{3}{10}$

解析：
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}=\frac{(-1)(-2)(-3)}{(-4)(-5)}=\frac{-3}{10}$$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 設 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x>1 \\ 5x-1, & x\le 1 \end{cases}$，試問 $f(x)$ 是否為連續函數？為什麼？

答案：$\because \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+2)=1^2+2=3$，$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(5x-1)=5-1=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 處不連續。

2. 試求過 $P(-1,5)$ 且與圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 相切的直線方程式

答案：(1)將圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$

經配方可得 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

圓心 $C(2,-1)$，半徑 $r=\sqrt{9}=3$

且將 $P(-1,5)$ 代入圓方程中

可得左式 $=(-1-2)^2+(5+1)^2=45>9$

得 P 點在圓的外部，故切線有兩條

(2)設切線斜率為 m，得 L 為 $y-5=m(x+1)$，即 $mx-y+(m+5)=0$

因 L 與圓 C 相切，即 $d(C,L)=r$

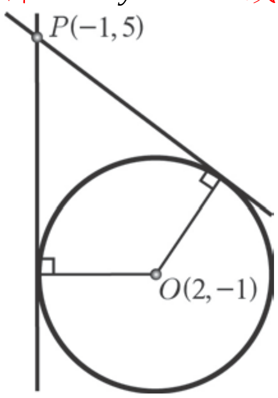
得 $\dfrac{|m(2)-(-1)+m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3 \Rightarrow |3m+6|=3\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow$ 兩邊平方得 $9m^2+36m+36=9m^2+9$

$\Rightarrow m=-\dfrac{3}{4}$，即另一切線為鉛垂線

故切線為 $y-5=-\dfrac{3}{4}(x+1)$ 或 $x=-1$，如圖所示

即 $3x+4y-17=0$ 或 $x+1=0$



3. 若 $f(x)=x^2+5x+1$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的切線方程式。

答案：切點坐標為 $(2, f(2))=(2,15)$

切線斜率 $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x+1-15}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+7)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+7)=9$

所以切線方程式為 $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$，即 $y-15=9\cdot(x-2)$

整理得 $9x-y-3=0$