第3章　微分及其應用

3-1　函數的極限

基礎型

1. 試求下列各函數的最大可能定義域並繪圖：

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 的最大可能定義域為________。

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ 的最大可能定義域為________。

(3) $f(x)=|x-4|$ 的最大可能定義域為________。(各 4 分)

答 (1) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3\le x\le 3\}$　(2) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq -5\}$　(3) $x\in\mathbb{R}$

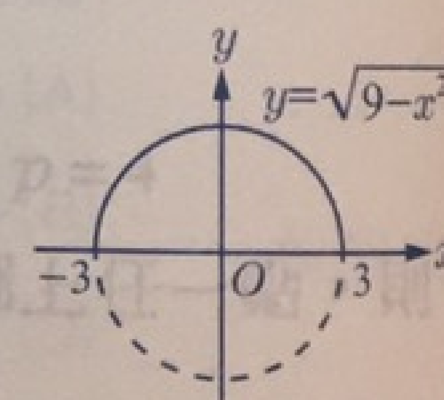
解 (1) $9-x^2\ge 0\Rightarrow x^2-9\le 0\Rightarrow (x+3)(x-3)\le 0\Rightarrow -3\le x\le 3$

定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3\le x\le 3\}$

又 $y=\sqrt{9-x^2}\ge 0$ 而 $y^2=9-x^2$

此為圓心為 $(0,0)$，半徑為 3 的圓形

但因 $y\ge 0$，$\therefore$ 只取 x 軸上方的圓形



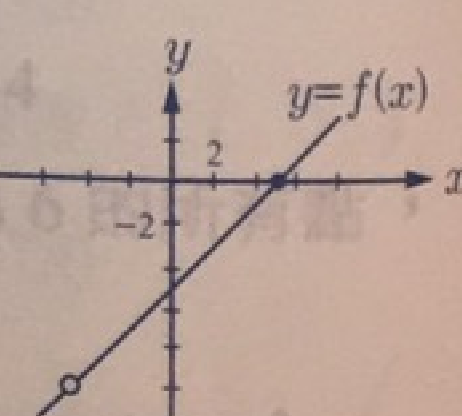
(2) $\because$ 分母不為 0，$\therefore x+5\neq 0\Rightarrow x\neq -5$

$\therefore$ 定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq -5\}$

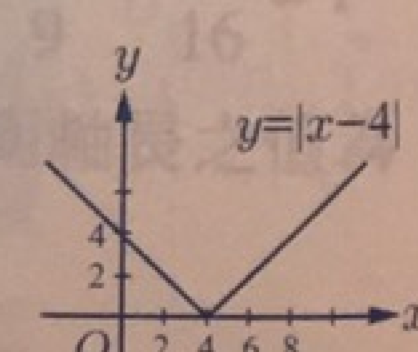
$$f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x+5)(x-5)}{x+5}=x-5$$

此圖形為一直線 $y=x-5$

但在 $x=-5$ 處需取空心點



(3) $f(x)=|x-4|=\begin{cases}x-4，若\ x\ge 4\\ -(x-4)，若\ x<4\end{cases}$，其定義域為所有實數 $\mathbb{R}$



2.試求下列各函數之極限值：

(1) $\lim_{x\to 1}(3x^2+5x-7)=$ ______　(2) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+6x+7}=$ ______

(3) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{(x-3)^2}=$ ______　(4) $\lim_{x\to 2}7k=$ ______

(5) $\lim_{x\to 0^+}(7+\sqrt{x})=$ ______　(6) $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{2x\sqrt{(3-x)^2}}{x-3}=$ ______

(7) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=$ ______　(8) $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}=$ ______

(9) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+2}\right)=$ ______。(各 4 分)

答　(1) 1　(2) $\sqrt{47}$　(3)不存在　(4) $7k$　(5) 7　(6) -6　(7) 1　(8) $\dfrac{1}{20}$　(9) 5

解 (1)原式 $=3\cdot 1^2+5\cdot 1-7=3+5-7=1$

(2)原式 $=\sqrt{4^2+6\cdot 4+7}=\sqrt{47}$

(3)因 $x=3$ 代入 $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-3)^2}=\dfrac{0}{0}$，故原函數需化簡，原式 $=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-3}$

$\because x=3$ 代入 $\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{4}{0}$，該分數無意義，$\therefore$原式極限值不存在

(4) $\lim_{x\to 2}7k=7k$

(5)原式 $=7+\sqrt{0}=7$

(6)原式 $=\lim_{x\to 3^-}\dfrac{2x(3-x)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(-2x)=-2\cdot 3=-6$

(7) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$

(8)因 $x=5$ 代入 $\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}=\dfrac{0}{0}$，故原函數需化簡

原式 $=\lim_{x\to 5}\dfrac{(\sqrt{x-4}-1)(\sqrt{x-4}+1)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-4}+1)}=\lim_{x\to 5}\dfrac{x-5}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-4}+1)}$

$=\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{(x+5)(\sqrt{x-4}+1)}=\dfrac{1}{10\times 2}=\dfrac{1}{20}$

(9) $\because \lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-5}{x^2+3x+2}$ 不存在，且 $\lim_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}$ 不存在，$\therefore$原式需化簡

原式 $=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x^2-5)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to -2}\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{-5}{-1}=5$

3. 若 $f(x)=\begin{cases}3x,\ x\ge 1\\ x^2+2,\ -2\le x<1\\ -3x+1,\ x<-2\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ ______，$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=$ ______。

（各 6 分）

答 3；不存在

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=3\cdot 1=3,\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1^2+2=3$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3$，$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$

(2) $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=(-2)^2+2=6,\ \lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-3\cdot(-2)+1=7$

$\because \lim\limits_{x\to -2^+}f(x)\ne \lim\limits_{x\to -2^-}f(x)$，$\therefore \lim\limits_{x\to -2}f(x)$ 不存在

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-9x+14},\ x\ne 2 \text{ 且 } x\ne 7\\ -\dfrac{1}{5},\ x=2\\ 3,\ x=7\end{cases}$，則該函數在 $x=2$ 與 $x=7$ 處是否連續？

（12 分）

答 連續；不連續

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-9x+14}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x-7)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{2-7}=-\dfrac{1}{5}$

$\because f(2)=-\dfrac{1}{5}=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 處連續

(2) $\lim\limits_{x\to 7}f(x)=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{x-7}$

$\because$ 分母趨於 0，但分子不趨於 0

$\therefore \lim\limits_{x\to 7}f(x)$ 不存在

所以 $f(x)$ 在 $x=7$ 處不連續

進階型

5.試求下列各函數之極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+9x^2+11x-21}{x^2+4x+3}=$______。(7 分)

(2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=$______。(7 分)

答 (1) 8 (2)不存在

解 (1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+9x^2+11x-21}{x^2+4x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-1)(x+3)(x+7)}{(x+1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-1)(x+7)}{(x+1)}$

$=\dfrac{(-3-1)(-3+7)}{(-3+1)}=\dfrac{-16}{-2}=8$

(2) $\because$ 分母不可為 0，$\therefore x\neq3$

$\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\dfrac{|x-3|}{x-3}=\begin{cases}1\text{，若 } x>3\\-1\text{，若 } x<3\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=1,\ \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=-1$

$\because\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}\neq\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$，$\therefore\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$ 不存在

6. x 為任意實數，若 $f(x)=\begin{cases}ax+b,\ x>2\\5,\ -1\leq x\leq2\\7x+4b,\ x<-1\end{cases}$ 為連續函數，則 a 之值為______，b 之值為______。(各 7 分)

答 1；3

解 $\because f(x)$ 為連續函數，$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 及 $x=-1$ 處皆連續

$\therefore\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$ 且 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

即 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)\\\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\5=-7+4b\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=3$

3-2 多項函數的導數與導函數

基礎型

1. 已知一函數 $f(x)=x^2+5x-6$，求：

(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 至 $x=3$ 的平均變化率為______ (2) $f'(2)=$______。(各5分)

答 (1) 9 (2) 9

解 (1)所求 $=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{18-0}{2}=9$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+5x-6)-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+7)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+7)=9$

2. 承上題，試求：

(1) $f'(x)=$______ (2) $f'(1)=$______。(各5分)

答 (1) $2x+5$ (2) 7

解 (1)設 a 為 $f(x)$ 定義域中的任一點

則 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2+5x-6)-(a^2+5a-6)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2+5x-5a}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)+5(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}[(x+a)+5]=2a+5$

$\therefore f'(x)=2x+5$

(2) $f'(1)=2\cdot 1+5=7$

3. 已知一函數 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，利用 $h\to 0$ 的方法求 $f'(0)$ 為______。(12分)

答 -1

解 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{h+1}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-(h+1)}{h(h+1)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(h+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{h+1}=-1$

4. 若函數 $f(x)=-x^2+5x+6$，則在 $x=2$ 的切線方程式為_______。(12 分)

答 $x-y+10=0$

解 切點坐標為 $(2, f(2))=(2, 12)$

切線斜率 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(-x^2+5x+6)-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x^2-5x+6)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}[-(x-3)]=1$

$\therefore$ 切線方程式 $y-12=1\cdot(x-2)\Rightarrow x-y+10=0$

5. 若一位移函數 $f(t)=3t^2+4t+6$，則 $t=1$ 的瞬時速度為_______。(12 分)

答 10

解 所求 $=f'(1)=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(3t^2+4t+6)-13}{t-1}$

$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{3t^2+4t-7}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(3t+7)}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}(3t+7)=10$

6. 若 $f(x)=x^2-3x$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 之值為_______。(12 分)

答 1

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-3(2+h)-(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+4h+4-6-3h+2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+1)=1$

進階型

7.已知一導函數 $f'(x)=3x-1$，試求：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$ ______ (2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{2h}=$ ______。(各6分)

答 (1) 8 (2) 4

解 (1)所求 $=f'(3)=3\cdot 3-1=8$

(2)所求 $=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{1}{2}\cdot f'(3)=\dfrac{1}{2}\cdot 8=4$

8.試求過曲線 $y=1-x^2-x^3$ 上一點 $(2,-11)$ 的切線方程式為 ______。(10分)

答 $16x+y-21=0$

解 切線斜率 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x^2-x^3-(-11)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^3-x^2+12}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(-x^2-3x-6)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-x^2-3x-6)=-2^2-3\cdot 2-6=-16$$

∴切線方程式為 $y-(-11)=(-16)(x-2)\Rightarrow 16x+y-21=0$

9.若 $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)(x+4)}$，則 $f'(3)=$ ______。(10分)

答 $-\dfrac{1}{42}$

解 導數基本定義入手

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)(x+4)}-0}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x+4)}=\frac{-1}{42}$$