

數學CD基礎評量

第1回 1-1 圓的方程式

- 一、選擇題:(每題10分)
- (C) 1. 圓心 (1, -2), 半徑為 4 的圓方程式為 $(A)(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ $(B)(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ $(C)(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ $(D)(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ $(C)(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$
- (C) 2.設 P(1, -2), Q(-3, 1) ,則以 \overline{PQ} 為直徑的圓方程式為 (A) $x^2+y^2+2x+y+1=0$ (B) $x^2+y^2-2x-y-3=0$ (C) $x^2+y^2+2x+y-5=0$ (D) $x^2+y^2-2x-y-5=0$ 重徑式:(x-1)(x+3)+(y+2)(y-1)=0 $x^2+2x-3+y^2+y-2=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$
- (A) 3.設圓方程式為 $x^2+y^2-4x+2y-1=0$,則下列何者正確? (A)圓心 (2,-1) (B)半徑為 2 (C)圓心 (-4,2) (D)半徑為 6 (x-2)²+(y+1)²=1+4+1 ⇒ 圓心 (2,-1),半徑 = $\sqrt{6}$
- (D) 4.已知一圓過(1, 2),且圓心為 x+y-1=0 及 3x+y+5=0 的交點,則方程式為 (A) $x^2+y^2-6x+8y-15=0$ (B) $x^2+y^2-6x-8y+17=0$ (C) $x^2+y^2-6x+8y-5=0$ (D) $x^2+y^2+6x-8y+5=0$
 - **愛** 園心: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+y+5=0 \end{cases} \Rightarrow (-3,4)$,半徑 $r=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$ ∴ 方程式: $(x+3)^2+(y-4)^2=20 \Rightarrow x^2+y^2+6x-8y+5=0$
- (C) 5. 圓的參數式 $\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$, 則下列何者錯誤? (A)圓心 (0,0) (B)過點 (0,4)

(C)半徑為 16 (D)面積為 16π

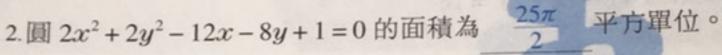
$$x^2 + y^2 = 4^2$$

∴圓心為(0,0),半徑為4,面積為16π

二、填充題:(每題10分)

1. 設直線 x=2 交圓 $x^2+y^2=9$ 於 P, Q 兩點,則 \overline{PQ} 的長度為 $2\sqrt{5}$ 。

$$\begin{cases} x = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm \sqrt{5} \end{cases}$$
$$\therefore P(2, \sqrt{5}), \ Q(2, -\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{5}$$

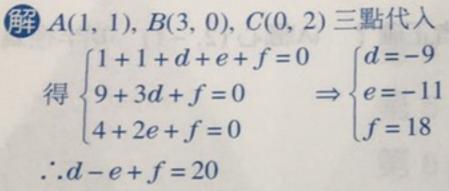


$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = -\frac{1}{2} + 9 + 4 = \frac{25}{2}$$
$$\therefore r = \frac{\sqrt{50}}{2} \Rightarrow \overline{\mathbf{m}} \, \overline{\mathbf{d}} = \pi \cdot \frac{50}{4} = \frac{25\pi}{2}$$

3. 圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 通過 A(1, 1), B(3, 0), C(0, 2) 三點,則 d - e + f = 20 。

2 型 P(L -2)。 Q(-3, 1) · 则以 P

B $x^2 + y^2 - 2x - y - 3 = 0$ (C) x^3



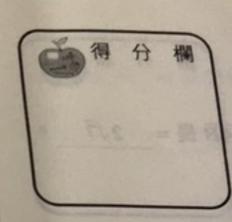
- 4. $k \in \mathbb{R}$,若方程式 $x^2 + y^2 + kx y + 1 = 0$ 的圖形為一圓,則 k 的範圍為 $k > \sqrt{3}$ 或 $k < -\sqrt{3}$ 。
- **醇** 圓的判別式: $k^2 + (-1)^2 4 \times 1 > 0 \Rightarrow k^2 3 > 0$ ∴ $k > \sqrt{3}$ 或 $k < -\sqrt{3}$
- 5. 設 P(x, y) 為方程式 $x^2 + y^2 = 16$ 上一點,則 3x 4y 的最大值為 20 ,最小值為 -20

 $\therefore 3x - 4y = 12\cos\theta - 16\sin\theta$

$$\Rightarrow -\sqrt{12^2 + 16^2} \le 12\cos\theta - 16\sin\theta \le \sqrt{12^2 + 16^2}$$

$$\Rightarrow -20 \le 3x - 4y \le 20$$

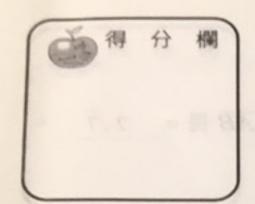
∴最大值為 20 ,最小值為 -20



- 一、選擇題:(
- (A)1.若直線
 - (A) 0 (I
 - (C:(
 - d(0

 - (D) 2.設區 (C)(
 - •
 - C) 3. 部

(B)



數學CD基礎評量

科 年 班

4. 過間外一點 P(5, 2) * 且與國 C : x2+ u2-

 $\bigcirc C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow 0(1,2),$

第2回 【與直線的關係 1-2 圓與直線的關係

一、選擇題:(每題10分)

(A) 1. 若直線 L: x+y+5=0, 圓 $C: x^2+y^2-2x-4y-11=0$, 則直線 L 與圓 C 有幾個交點? (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

 $\bigoplus C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \Rightarrow \bigoplus \cup O(1,2), r=4$ $d(O, L) = \frac{|1+2+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4\sqrt{2} > r$

:. 圓心到直線的距離大於半徑的長度,:. 直線 L 與圓 C 無交點

(D) 2.設圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$,下列何點會在圓外? (A) (0, 0) (B) (-2, -2) (C) (-1, -1) (D) (3, 2)

(D)將(3,2)代入⇒9+4+6+8-4=23>0 :.(3, 2) 在圓外

(C) 3. 設直線 2x+y-k=0 與圓 $x^2+y^2=5$ 相切,則 $k=(A)\pm 1(B)\pm 3(C)\pm 5(D)\pm 7$

解 $x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow$ 国心 $O(0, 0), r = \sqrt{5}$::相切 , :: $d(O, L) = \frac{|-k|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$

 $..k = \pm 5$.m=2, (m>0=) m=/2

(B) 4. 圓 $C: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 上任一點到直線 L: x + 3y - 5 = 0 的最長距離為 M,最短距

離為 m, 則 M-m= (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

解 $C: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow$ 圓心 O(-2, -1), r = 2

設 d 為圓心 O 到 L 之距離

則 M=d+r, $m=d-r \Rightarrow M-m=2r=4$

5.援除A(1, 2)向周元+3=4作二切線。◆二班縣 4.79 4.国沿為 6. 则经股份系 的面積= (A) 5. 求點 (1, 2) 到圓 $C: 2x^2 + 2y^2 + 2x + 3y - 2 = 0$ 之切線段長 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) 4 (D) 8

∴切線段長 = $\sqrt{1+4+1+3-1}$ = $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$

二、填充題:(每題10分)

1. 圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ 與直線 L: x + y - 3 = 0 相交於 A, B 二點,則 \overline{AB} 長 = $2\sqrt{7}$

$$C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow O(2, 3), r = 3$$

$$d(O, L) = \frac{|2+3-3|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$AB = 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

2. 通過點 P(4, 2), 且與圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ 相切的直線方程式為 3x + 4y - 20 = 0

1 2 1 1 1 C: x + y + 2x + 4y - 4= 1 1 1 1

5 = 0 · 風 G: x + y - 11 = 0 · 別 真強 L 契則 G 有機 個支電 ?

(第
$$C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow$$
 圆心 $O(1, -2), r = 5$ \overline{OP} 之斜率 = $\frac{4}{3}$

∴切線方程式:
$$y-2=\frac{-3}{4}(x-4) \Rightarrow 3x+4y-20=0$$

3. 與圓 $C: x^2 + y^2 = 10$ 相切,而斜率為 3 之切線方程式為 $3x - y \pm 10 = 0$ 。

則
$$d(O, L) = \frac{|0-0+k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

∴
$$k=\pm 10$$
 ⇒ 切線方程式為 $3x-y\pm 10=0$

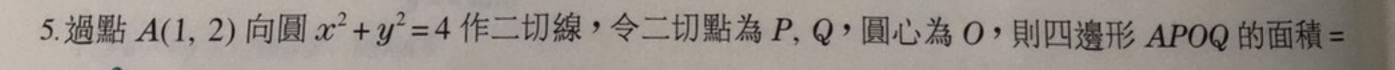
4. 過圓外一點 P(5, 2), 且與圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 相切的直線方程式的斜率為 $\pm \sqrt{3}$

$$C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(1, 2), r=2$$

設切線方程式
$$L: y-2=m(x-5)$$

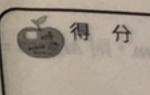
:相切,:
$$d(O, L) = \frac{|m-2-5m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

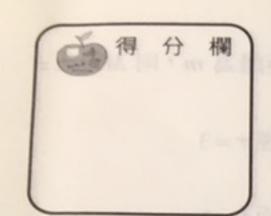


$$\overline{AP} = \overline{AQ} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1$$

四邊形
$$APOQ$$
 面積 = $2(\triangle APO$ 面積) = $2 \times (\frac{1}{2} \times 2 \times 1) = 2$



、選擇是



數學CIV基礎評量

第3回 姓名: 第一章總複習

一、選擇題:(每題5分)

- (D) 1.下列哪一方程式的圖形為一圓? (A) $x^2 + y^2 4x + 6y + 20 = 0$ (B) $y = \sqrt{4 x^2}$ (C) $x^2 - 2x + y - 1 = 0$ (D) $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$
- (D)平方得 $x^2 + y^2 = 9$
- (B) 2. 設一圓的圓心為 (2,3), 且與直線 3x-4y-4=0 相切,則此圓面積為 $(A)\pi$ (B) 4π (C) 9π (D) 12π

 $r = d(0, L) = \frac{|6-12-4|}{\sqrt{0+16}} = 2 \Rightarrow 面積 = 4\pi$

- (A) 3. 設圓: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 交直線 x+y=3 於 A, B 兩點, 則 $\overline{AB} = (A)\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $3\sqrt{2}$
 - (日本) $O(1, 1) \Rightarrow d(O, L) = \frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $AB = 2\sqrt{1^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2}$
- 2酸間 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 與資線 L (B) 4. 設圓: $x^2 + y^2 = 3$ 與直線 L: y = mx + 3 相交於一點,且 m > 0,則 $m = (A) 1 (B) \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2
 - **静** 国心 $O(0, 0) \Rightarrow d(0, L) = \frac{|0-0+3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{3}$

 $\therefore m^2 = 2$,但 $m > 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}$

- (B) 5.若一圓過 P(-1, 2), Q(3, 4) 兩點, 且其圓心在 y 軸上,則此圓之方程式為 (A) $(x-5)^2 + y^2 = 10$ (B) $x^2 + (y-5)^2 = 10$ (C) $x^2 + (y-5)^2 = 100$ (D) $x^2 + (y-5)^2 = 20$
 - 解設圓心 O(0, k),利用 $\overline{OP} = \overline{OQ} = r \Rightarrow \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2$ $\Rightarrow 1 + (k-2)^2 = 9 + (k-4)^2 \Rightarrow k = 5$,即圓心(0,5),半徑 $r = \sqrt{10}$

因此, 圓方程式為 $x^2 + (y-5)^2 = 10$

- (A) 6. 若方程式 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k + 1 = 0$ 之圖形為一圓,則 k 之範圍為 (A) k > 4 或 k < 0(B) k > 3 或 k < 1 (C) 0 < k < 4 (D) 1 < k < 3

 - 爾 圓判別式 = $D^2 + E^2 4F = k^2 + 2^2 4(k+1) > 0$
- (C) 7. 設 P(1,-2), Q(-3,1) 為平面上兩點,則以 \overline{PQ} 為直徑之圓方程式為
 - (A) $x^2 + y^2 + 2x y 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 2x + y 1 = 0$ (C) $x^2 + y^2 + 2x + y 5 = 0$
 - (D) $x^2 + y^2 + 2x y 3 = 0$
 - 爾此圓: $(x-1)[x-(-3)]+[y-(-2)](y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$

(D) 8. 設點 A(3,-1) 到圓 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 之最遠距離為 M,最近距離為 m,則 $M\times m$ 。 (A) $3\sqrt{34}$ (B) 43 (C) $25\sqrt{3}$ (D) 25

(A)
$$3\sqrt{34}$$
 (B) 43 (C) $25\sqrt{3}$ (D) 25
 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow \text{ at } O(-2, 2)$, $2 \approx 2$

則 $\overline{AO} = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$

 \therefore A 到圓之最遠距離 $M = \overline{AC} + r = \sqrt{34} + 3$,最近距離 $m = \overline{AC} - r = \sqrt{34} - 3$ $M \times m = (\sqrt{34} + 3)(\sqrt{34} - 3) = 25$

(B) 9.點(7, 15) 到圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 之切線段長為(A) 5(B) 12(C) 13(D) 7 節 切線段長 = $\sqrt{(7-2)^2 + (15-3)^2 - 25} = 12$

(A)
$$10.$$
 若直線 $3x-4y-1=0$ 與圓 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 相切,則 $k=(A)$ 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (B) ② (C) 3 (D) 4 (B) ② (C) ③ (D) 4 (D) ② (D) ③ (D) ③ (D) ③ (D) ③ (D) ④ (D) ③ (D) ④ (D) ④

** (at-1)2+(y-1)2=1 交通明の本

 $(x-5)^2+y^2=10$ (B) 3

: 相切 , : $d(O, L) = \frac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}} = \sqrt{5-k} \Rightarrow 2 = \sqrt{5-k} \Rightarrow k = 1$

二、填充題:(每題10分)

1. 若方程式 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + c = 0$ 之圖形為一點 (a, b), 則 a + b + c = 12 。

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = -c + 13 = 0$$
 , ∴ $c = 13$
 $(a, b) = (-3, 2)$, 故 $a + b + c = 12$

2. 設圓 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 與直線 L:3x-4y+k=0 不相交,則 k 的範圍為 k>-1 或 k<-21 。

愛 園心
$$O(1, -2) \Rightarrow d(O, L) = \frac{|3+8+k|}{\sqrt{9+16}} > 2$$

 $|k+11| > 10 \Rightarrow k > -1$ 或 k < -21

.m2=2 + 11 m>0 = m= 3. 設一圓與 y 軸相切,且其圓心為(4,-3),則此圓方程式為 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$ °

解:圓與
$$y$$
軸相切,且圓心為 $(4,-3)$,:半徑 = 4
⇒ 圓方程式為 $(x-4)^2+(y+3)^2=4^2$

4x + 3y - 27 = 04. 過點 (3, 5) 且與圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ 相切之直線方程式為 瓣 將 (3, 5) 代入 ⇒ 3²+5²+2×3-4×5-20=0 ⇒ (3, 5) 在圓上

∴切線:
$$3x + 5y + 2 \times \frac{x+3}{2} - 4 \times \frac{y+5}{2} - 20 = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 27 = 0$$

5. 自點 (2, 1) 向一圓 $x^2 + y^2 = 1$ 所作的切線,其斜率為 0 或 $\frac{4}{3}$ 。

解
$$(2, 1)$$
 在圓外,設切線 $y-1=m(x-2)$,即 $mx-y+(1-2m)=0$

而圓心 O(0,0),r=1,因相切,所以 $d(O,L)=\frac{|1-2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1 \Rightarrow m=0$ 或 $\frac{4}{3}$ (2) $\pm (x-1)(x-(-3))+(y-(-2))(y-1)=0 \Rightarrow x+y+2x+y-5=0$

(D