第1章 圓

1-1 圓的方程式

基礎型

1. 請由下列各條件，試求各圓的方程式：

(1)圓心為 $(2, -1)$，半徑為 2 的圓方程式為_______。

(2)圓心為 $(3, -2)$，且通過點 $(4, 1)$ 的圓方程式為_______。

(3)以 $A(2, -7)$, $B(3, 2)$ 為直徑兩端點的圓方程式為_______。

(4)通過 $(6, 1)$, $(0, 5)$, $(0, 1)$ 三點的圓方程式為_______。（各 6 分）

答 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ (3) $x^2+y^2-5x+5y-8=0$

(4) $x^2+y^2-6x-6y+5=0$

解 (1)圓的標準式：$(x-2)^2+(y+1)^2=2^2$，即 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

(2)半徑 $\overline{OP}=\sqrt{(4-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$ 依圓的標準式：

$(x-3)^2+(y+2)^2=(\sqrt{10})^2$，即 $(x-3)^2+(y+2)^2=10$

(3)依圓的直徑式：$(x-2)(x-3)+(y+7)(y-2)=0$

展開後得 $x^2+y^2-5x+5y-8=0$

(4)令此圓為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，分別將 $(6, 1)$, $(0, 5)$, $(0, 1)$ 代入得解：

$$\begin{cases}(6)^2+(1)^2+6d+e+f=0\\(0)^2+(5)^2+5e+f=0\\(0)^2+(1)^2+e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-6\\e=-6\\f=5\end{cases}$$

，故圓：$x^2+y^2-6x-6y+5=0$

2.試求下列各圓的圓心坐標及其面積：

(1) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 的圓心為________，面積為________平方單位。

(2) $2x^2+2y^2-2x+3y-1=0$ 的圓心為________，面積為________平方單位。

(3)若圓的參數式為 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{1}{2}\cos\theta \\ y=1+\dfrac{1}{2}\sin\theta \end{cases}$，其中 $0\le\theta<2\pi$，則其圓心為________，

面積為________平方單位。(各6分)

答 (1) $(2,-1)$；9π　(2) $(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$；$\frac{21}{16}\pi$　(3) $(-2,1)$；$\frac{1}{4}\pi$

解 (1)依圓的標準式得圓心 $(2,-1)$ 及圓面積 $\pi r^2=\pi\times(3)^2=9\pi$

(2) $2x^2+2y^2-2x+3y-1=0\Rightarrow x^2+y^2-x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0$

分別對 x、y 配方得：$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{21}{16}$

$\therefore$ 圓心 $(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$ 及圓面積 $\pi r^2=\frac{21}{16}\pi$（平方單位）

(3)依圓的參數式知：圓心 $(-2,1)$，半徑 $r=\frac{1}{2}$，得圓面積 $=\frac{1}{4}\pi$

3.若點 $P(x,y)$ 在圓 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上變動，則 $3x-4y+2$ 的最大值為________，最小值為________。(各6分)

答 5；-15

解 $P(x,y)$ 以參數式：$\begin{cases} x=3+2\cos\theta \\ y=4+2\sin\theta \end{cases}$ 表示之

代入 $3x-4y+2=3(3+2\cos\theta)-4(4+2\sin\theta)+2=6\cos\theta-8\sin\theta-5$

$\because -\sqrt{(6)^2+(-8)^2}\le 6\cos\theta-8\sin\theta\le\sqrt{(6)^2+(-8)^2}$

$\Rightarrow -10-5\le 6\cos\theta-8\sin\theta-5\le 10-5$

$\Rightarrow -15\le 3x-4y+2\le 5$，故最大值 $=5$，最小值 $=-15$

進階型

4. 若一圓通過 $A(2, 4)$, $B(7, 1)$，且圓心在 x 軸上，則此圓的一般式為______。

（12 分）

答 $x^2+y^2-6x-8=0$

解 ∵圓心在 x 軸上，可設圓心為 $O(a, 0)$

∴半徑 $r=\overline{OA}=\overline{OB}\Rightarrow(a-2)^2+(0-4)^2=(a-7)^2+(0-1)^2$

$\Rightarrow a^2-4a+4+16=a^2-14a+49+1\Rightarrow a=3$

∴圓心 $O(3, 0)$ 而半徑 $r=\sqrt{(3-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{17}$

故圓：$(x-3)^2+y^2=17$，即 $x^2+y^2-6x-8=0$

5. 若點 $P(x, y)$ 為圓 $2x^2+2y^2-6x+10y-15=0$ 上一點，則 $2x+4y-1$ 的最大值為______，最小值為______。（各 8 分）

答 (1) $8\sqrt{5}-8$；$-8\sqrt{5}-8$

解 $x^2+y^2-3x+5y-\dfrac{15}{2}=0$

$$\Rightarrow(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{15}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=16=4^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}+4\cos\theta\\ y=-\dfrac{5}{2}+4\sin\theta\end{cases}$$

$$\therefore 2x+4y-1=2(\frac{3}{2}+4\cos\theta)+4(-\frac{5}{2}+4\sin\theta)-1=8\cos\theta+16\sin\theta-8$$

由疊合法可得 $-\sqrt{8^2+16^2}\le 8\cos\theta+16\sin\theta\le\sqrt{8^2+16^2}$

$\Rightarrow -8\sqrt{5}-8\le 8\cos\theta+16\sin\theta-8\le 8\sqrt{5}-8$

$\Rightarrow -8\sqrt{5}-8\le 2x+4y-1\le 8\sqrt{5}-8$

∴$2x+4y-1$ 的最大值為 $8\sqrt{5}-8$，最小值為 $-8\sqrt{5}-8$

1-2 圓與直線的關係

基礎型

1. 若點 $(1, k)$ 在圓 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 的內部，則實數 k 的範圍為______。(10分)

答 $-3<k<1$

解 $\because$ 點在圓的內部，將點 $(1, k)$ 之坐標值代入得

$(1)^2+(k)^2-2(1)+2(k)-2<0 \Rightarrow k^2+2k-3<0$

$\Rightarrow (k-1)(k+3)<0 \Rightarrow -3<k<1$

2. 已知圓 $C: x^2+y^2-4x-1=0$，直線 $L: 2x-y+k=0$，試依下列圓與直線的關係，求 k 值的範圍：

(1)若相離時，則 k 值為______。

(2)若相切時，則 k 值為______。

(3)若相割時，則 k 值為______。

(4)若相交時，則 k 值為______。(各6分)

答 (1) $k>1$ 或 $k<-9$ (2) $k=1$ 或 -9 (3) $-9<k<1$ (4) $-9\le k\le 1$

解 配方後，圓 $C: (x-2)^2+y^2=1+4=5$，$\therefore$ 圓心 $C(2, 0)$，半徑 $r=\sqrt{5}$

而 $d=d(C, L)=\dfrac{|2(2)-(0)+k|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4+k|}{\sqrt{5}}$

(1) $\because$ 相離，$\therefore d>r$

$\Rightarrow \dfrac{|4+k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5} \Rightarrow |4+k|>5 \Rightarrow 4+k>5$ 或 $4+k<-5 \Rightarrow k>1$ 或 $k<-9$

(2) $\because$ 相切，$\therefore d=r \Rightarrow |4+k|=5 \Rightarrow (4+k)=\pm 5 \Rightarrow k=1$ 或 -9

(3) $\because$ 相割，$\therefore d<r \Rightarrow |4+k|<5 \Rightarrow -5<4+k<5 \Rightarrow -9<k<1$

(4) $\because$ 相交為相切或相割情形，得 $-9\le k\le 1$

3.若直線 $L: 4x+3y-10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2+4x-2y-20=0$ 交於 A, B 兩點，則 $\overline{AB}$ 弦長為_______。(10 分)

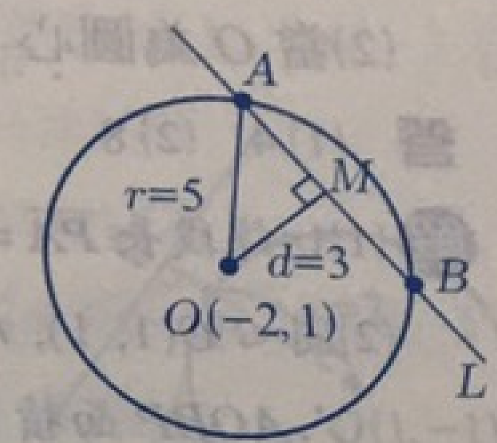
答 8

解 配方後，圓 $C:(x+2)^2+(y-1)^2=25$

$\therefore$ 圓心 $O(-2, 1)$，半徑 $r=\sqrt{25}=5$

而 $d=d(O, L)=\dfrac{|4(-2)+3(1)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-15|}{5}=3$

$\therefore$ 弦長 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{(5)^2-(3)^2}=2\times4=8$



4.試求下列各條件之圓的切線方程式：

(1)過 $A(-1, 2)$ 且與圓 $x^2+y^2=5$ 相切的直線方程式為_______。

(2)過 $B(-1, -2)$ 且與圓 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 相切的直線方程式為_______。

(3)過 $C(3, 3)$ 且與圓 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 相切的直線方程式為_______。

(4)平行 $3x+4y+7=0$ 並與圓 $x^2+y^2=9$ 相切的直線方程式為_______。(各 6 分)

答 (1) $x-2y+5=0$ (2) $3x+y+5=0$ (3) $x=3$ 或 $y=3$ (4) $3x+4y\pm15=0$

解 (1)將 $A(-1, 2)$ 代入圓方程：$(-1)^2+(-2)^2-5=0$，表 A 為切點

可代入切線公式：$(-1)x+(2)y=5\Rightarrow x-2y+5=0$

(2)將 $B(-1, -2)$ 代入圓方程：$(-1)^2+(-2)^2-4(-1)+2(-2)-5=0$，表 B 為切點

可代入切線公式：$(-1)x+(-2)y-4(\dfrac{-1+x}{2})+2(\dfrac{-2+y}{2})-5=0\Rightarrow 3x+y+5=0$

(3)將 $C(3, 3)$ 代入圓方程：$(3)^2+(3)^2-2(3)-2(3)-2=4>0$，表 C 在圓外

而配方後，圓：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$，得圓心 $O(1, 1)$，半徑 $r=2$

設切線 L 為 $y-3=m(x-3)\Rightarrow mx-y+(3-3m)=0$

$\because$ 相切，$\therefore d(O, L)=r\Rightarrow\dfrac{|m(1)-(1)+(3-3m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\Rightarrow|1-m|=\sqrt{m^2+1}\Rightarrow m=0$

即切線為 $y=3$，而另一切線為 $x=3$，故所求為 $x=3$ 或 $y=3$

(4)設切線為 $L: 3x+4y+k=0$ 而圓心 $O(0, 0)$，半徑 $r=\sqrt{9}=3$

$\because$ 相切，$\therefore d(O, L)=r\Rightarrow\dfrac{|3(0)+4(0)+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3\Rightarrow k=\pm15$

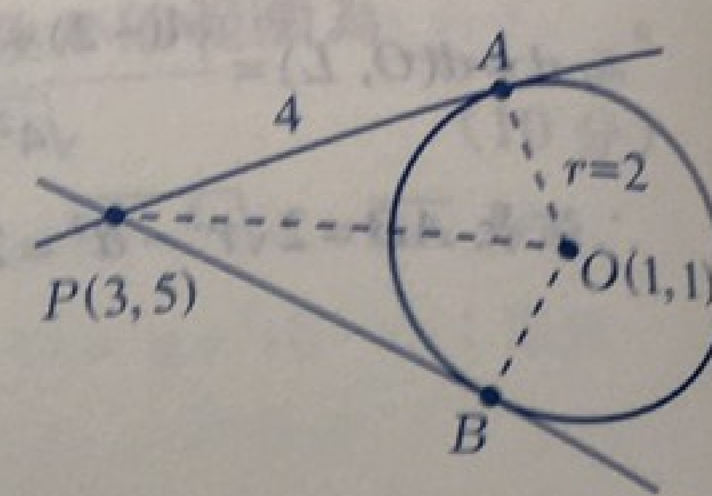
故切線為 $3x+4y\pm15=0$

5.若圓外一點 $P(3, 5)$ 對圓 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 作兩條切線，切點分別為 A、B，則：

(1)切線段長為________單位。

(2)當 O 為圓心，試求四邊形 $AOBP$ 面積為________平方單位。（各 6 分）

答 (1) 4　(2) 8



解 (1)切線段長 $\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2-4}=\sqrt{16}=4$

(2)圓心 $O(1, 1)$, $r=\sqrt{4}=2$

$\therefore AOBP$ 面積 $=\triangle AOP+\triangle BOP$

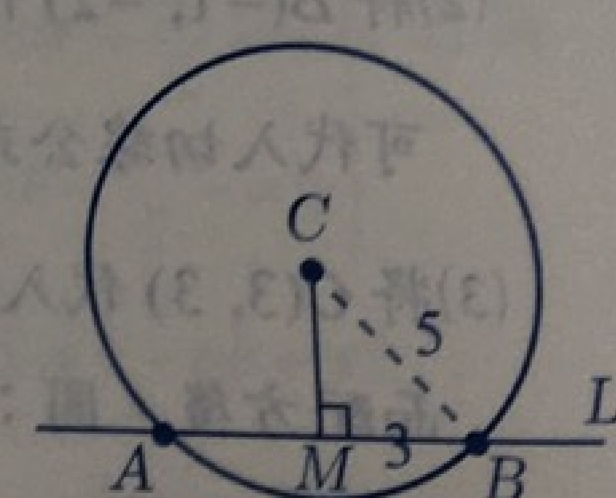
$=\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times2$

$=8$（平方單位）

進階型

6.已知直線 $L:3x-4y+k=0$ 與圓 $C:x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 交於 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=6$，試求實數 k 之值為________。（10 分）

答 38 或 -2



解 圓 $C:(x+2)^2+(y-3)^2=25$

$\therefore$ 圓心 $C(-2, 3)$，半徑 $r=\sqrt{25}=5$

如右圖，M 為 $\overline{AB}$ 之中點，$\therefore \overline{BM}=\overline{AM}=\frac{6}{2}=3$

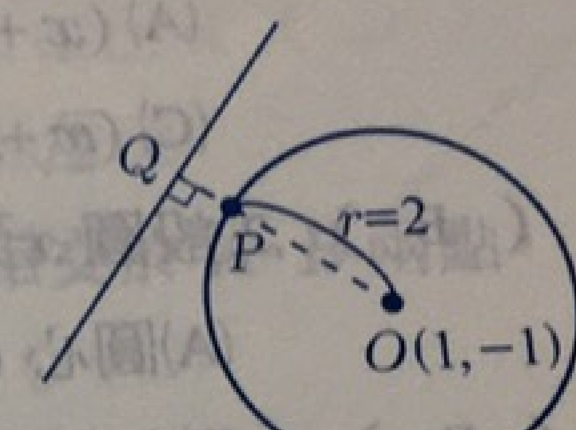
$\therefore \overline{CM}=\sqrt{5^2-3^2}=4=d(C, L)$

$\Rightarrow \frac{|3(-2)-4(3)+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4 \Rightarrow |k-18|=20 \Rightarrow k-18=\pm20 \Rightarrow k=38, -2$

7. 若點 P 在圓 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 上變動，則 P 點到直線 $L:4x-3y+8=0$ 的最小距離為________，此時 P 點坐標為________。(10 分)

答 1；$(-\frac{3}{5},\frac{1}{5})$

解 (1)圓 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$，圓心 $O(1,-1)$，半徑 $r=\overline{OP}=2$，如圖示：



$\therefore \overline{OQ}=d(O,L)=\dfrac{|4(1)-3(-1)+8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

$\therefore$ 最短距離 $\overline{QP}=d(O,L)-r=3-2=1$

(2)可設直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 為 $3x+4y+k=0$ ($\because \overleftrightarrow{OQ}\perp L$) 且過 $O(1,-1)$

$\Rightarrow 3(1)+4(-1)+k=0 \Rightarrow k=1$，$\therefore \overleftrightarrow{OQ}:3x+4y+1=0$

$\therefore$ 交點 $Q:\begin{cases}3x+4y+1=0\\4x-3y+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{7}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$，即 $Q(-\frac{7}{5},\frac{4}{5})$

此時，Q-P-O 共線且 $\overline{QP}:\overline{PO}=1:2$

依內分點公式得 $P(\dfrac{1\cdot(1)+2(-\frac{7}{5})}{1+2},\dfrac{1\cdot(-1)+2(\frac{4}{5})}{1+2})$，即 $P(-\frac{3}{5},\frac{1}{5})$