得分欄

數學 C Ⅳ 基礎評量

____科____年____班

座號：________

姓名：________

第 1 回

1-1 圓的方程式

一、選擇題：(每題 10 分)

(C) 1.圓心 $(1, -2)$，半徑為 4 的圓方程式為 (A) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ (B) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ (D) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$

解 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

(C) 2.設 $P(1, -2)$, $Q(-3, 1)$，則以 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓方程式為 (A) $x^2+y^2+2x+y+1=0$ (B) $x^2+y^2-2x-y-3=0$ (C) $x^2+y^2+2x+y-5=0$ (D) $x^2+y^2-2x-y-5=0$

解 直徑式：$(x-1)(x+3)+(y+2)(y-1)=0$

$x^2+2x-3+y^2+y-2=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$

(A) 3.設圓方程式為 $x^2+y^2-4x+2y-1=0$，則下列何者正確？ (A)圓心 $(2, -1)$ (B)半徑為 2 (C)圓心 $(-4, 2)$ (D)半徑為 6

解 $(x-2)^2+(y+1)^2=1+4+1$

$\Rightarrow$ 圓心 $(2, -1)$，半徑 $=\sqrt{6}$

(D) 4.已知一圓過 $(1, 2)$，且圓心為 $x+y-1=0$ 及 $3x+y+5=0$ 的交點，則方程式為 (A) $x^2+y^2-6x+8y-15=0$ (B) $x^2+y^2-6x-8y+17=0$ (C) $x^2+y^2-6x+8y-5=0$ (D) $x^2+y^2+6x-8y+5=0$

解 圓心：$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+y+5=0 \end{cases} \Rightarrow (-3, 4)$，半徑 $r=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$

$\therefore$ 方程式：$(x+3)^2+(y-4)^2=20 \Rightarrow x^2+y^2+6x-8y+5=0$

(C) 5.圓的參數式 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$，則下列何者錯誤？ (A)圓心 $(0, 0)$ (B)過點 $(0, 4)$ (C)半徑為 16 (D)面積為 16π

解 $x^2+y^2=4^2$

$\therefore$ 圓心為 $(0, 0)$，半徑為 4，面積為 16π

92-315620

4 712780 642207

有著作權 不准翻印

二、填充題：(每題 10 分)

1.設直線 $x=2$ 交圓 $x^2+y^2=9$ 於 P, Q 兩點，則 $\overline{PQ}$ 的長度為 $\underline{\quad 2\sqrt{5} \quad}$ 。

解 $\begin{cases} x=2 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$

$\therefore P(2, \sqrt{5}), Q(2, -\sqrt{5})$

$\Rightarrow \overline{PQ}=2\sqrt{5}$

2.圓 $2x^2+2y^2-12x-8y+1=0$ 的面積為 $\underline{\quad \frac{25\pi}{2} \quad}$ 平方單位。

解 $x^2+y^2-6x-4y+\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=-\frac{1}{2}+9+4=\frac{25}{2}$

$\therefore r=\frac{\sqrt{50}}{2} \Rightarrow$ 面積 $=\pi\cdot\frac{50}{4}=\frac{25\pi}{2}$

3.圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 通過 $A(1, 1), B(3, 0), C(0, 2)$ 三點，則 $d-e+f=$ $\underline{\quad 20 \quad}$ 。

解 $A(1, 1), B(3, 0), C(0, 2)$ 三點代入

得 $\begin{cases} 1+1+d+e+f=0 \\ 9+3d+f=0 \\ 4+2e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-9 \\ e=-11 \\ f=18 \end{cases}$

$\therefore d-e+f=20$

4. $k\in\mathbb{R}$，若方程式 $x^2+y^2+kx-y+1=0$ 的圖形為一圓，則 k 的範圍為 $\underline{\quad k>\sqrt{3} \text{ 或 } k<-\sqrt{3} \quad}$ 。

解 圓的判別式：$k^2+(-1)^2-4\times1>0 \Rightarrow k^2-3>0$

$\therefore k>\sqrt{3}$ 或 $k<-\sqrt{3}$

5.設 $P(x, y)$ 為方程式 $x^2+y^2=16$ 上一點，則 $3x-4y$ 的最大值為 $\underline{\quad 20 \quad}$ ，最小值為 $\underline{\quad -20 \quad}$ 。

解 $x^2+y^2=16$ 之參數式為 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi$

$\therefore 3x-4y=12\cos\theta-16\sin\theta$

$\Rightarrow -\sqrt{12^2+16^2}\le 12\cos\theta-16\sin\theta\le\sqrt{12^2+16^2}$

$\Rightarrow -20\le 3x-4y\le 20$

$\therefore$ 最大值為 20，最小值為 -20

有著作權　不准翻印

得分欄

數學 C Ⅳ 基礎評量

___科___年___班

座號：

姓名：

第 2 回

1–2 圓與直線的關係

一、選擇題：(每題 10 分)

(A) 1. 若直線 $L: x+y+5=0$，圓 $C: x^2+y^2-2x-4y-11=0$，則直線 L 與圓 C 有幾個交點？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow$ 圓心 $O(1, 2)$, $r=4$

$d(O, L)=\dfrac{|1+2+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}>r$

$\because$ 圓心到直線的距離大於半徑的長度，$\therefore$ 直線 L 與圓 C 無交點

(D) 2. 設圓 $C: x^2+y^2+2x+4y-4=0$，下列何點會在圓外？ (A) $(0,\ 0)$ (B) $(-2,\ -2)$ (C) $(-1,\ -1)$ (D) $(3,\ 2)$

解 (D) 將 $(3, 2)$ 代入 $\Rightarrow 9+4+6+8-4=23>0$

$\therefore (3, 2)$ 在圓外

(C) 3. 設直線 $2x+y-k=0$ 與圓 $x^2+y^2=5$ 相切，則 $k=$ (A) ± 1 (B) ± 3 (C) ± 5 (D) ± 7

解 $x^2+y^2=5 \Rightarrow$ 圓心 $O(0, 0)$, $r=\sqrt{5}$

$\because$ 相切，$\therefore d(O, L)=\dfrac{|-k|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$

$\therefore k=\pm 5$

(B) 4. 圓 $C: x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 上任一點到直線 $L: x+3y-5=0$ 的最長距離為 M，最短距離為 m，則 $M-m=$ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

解 $C:(x+2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow$ 圓心 $O(-2, -1)$, $r=2$

設 d 為圓心 O 到 L 之距離

則 $M=d+r$, $m=d-r \Rightarrow M-m=2r=4$

(A) 5. 求點 $(1, 2)$ 到圓 $C: 2x^2+2y^2+2x+3y-2=0$ 之切線段長 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) 4 (D) 8

解 $C: x^2+y^2+x+\dfrac{3}{2}y-1=0$

$\therefore$ 切線段長 $=\sqrt{1+4+1+3-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

有著作權 不准翻印

二、填充題：(每題 10 分)

1. 圓 $C: x^2+y^2-4x-6y+4=0$ 與直線 $L: x+y-3=0$ 相交於 A, B 二點，則 $\overline{AB}$ 長 = $\underline{2\sqrt{7}}$。

解 $C: (x-2)^2+(y-3)^2=9 \Rightarrow O(2, 3),\ r=3$

$$d(O, L)=\frac{|2+3-3|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$$

2. 通過點 $P(4, 2)$，且與圓 $C: x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 相切的直線方程式為 $\underline{3x+4y-20=0}$。

解 $C: (x-1)^2+(y+2)^2=25 \Rightarrow$ 圓心 $O(1, -2),\ r=5$

$\overline{OP}$ 之斜率 $=\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ 切線方程式：$y-2=\dfrac{-3}{4}(x-4) \Rightarrow 3x+4y-20=0$

3. 與圓 $C: x^2+y^2=10$ 相切，而斜率為 3 之切線方程式為 $\underline{3x-y\pm 10=0}$。

解 設切線方程式為 $L: y=3x+k \Rightarrow 3x-y+k=0$

則 $d(O, L)=\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore k=\pm 10 \Rightarrow$ 切線方程式為 $3x-y\pm 10=0$

4. 過圓外一點 $P(5, 2)$，且與圓 $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 相切的直線方程式的斜率為 $\underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$。

解 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow O(1, 2),\ r=2$

設切線方程式 $L: y-2=m(x-5)$

$\because$ 相切，$\therefore d(O, L)=\dfrac{|m-2-5m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$\therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. 過點 $A(1, 2)$ 向圓 $x^2+y^2=4$ 作二切線，令二切點為 P, Q，圓心為 O，則四邊形 $APOQ$ 的面積 = $\underline{2}$。

解 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{1^2+2^2-4}=1$

四邊形 $APOQ$ 面積 $=2(\triangle APO$ 面積$)=2\times(\dfrac{1}{2}\times 2\times 1)=2$

得分欄

數學 CⅣ基礎評量

科＿＿年＿＿班

座號：＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿

第 3 回

第一章總複習

一、選擇題：(每題 5 分)

(D) 1. 下列哪一方程式的圖形為一圓？ (A) $x^2+y^2-4x+6y+20=0$ (B) $y=\sqrt{4-x^2}$
(C) $x^2-2x+y-1=0$ (D) $\sqrt{x^2+y^2}=3$

解 (D)平方得 $x^2+y^2=9$

(B) 2. 設一圓的圓心為 $(2, 3)$，且與直線 $3x-4y-4=0$ 相切，則此圓面積為 (A) π (B) 4π
(C) 9π (D) 12π

解 $r=d(O, L)=\dfrac{|6-12-4|}{\sqrt{9+16}}=2 \Rightarrow$ 面積$=4\pi$

(A) 3. 設圓：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 交直線 $x+y=3$ 於 A, B 兩點，則 $\overline{AB}=$ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1
(D) $3\sqrt{2}$

解 圓心 $O(1, 1) \Rightarrow d(O, L)=\dfrac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{1^2-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{2}$

(B) 4. 設圓：$x^2+y^2=3$ 與直線 $L: y=mx+3$ 相交於一點，且 $m>0$，則 $m=$ (A) 1 (B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3}$ (D) 2

解 圓心 $O(0, 0) \Rightarrow d(O, L)=\dfrac{|0-0+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}$

$\therefore m^2=2$，但 $m>0 \Rightarrow m=\sqrt{2}$

(B) 5. 若一圓過 $P(-1, 2)$, $Q(3, 4)$ 兩點，且其圓心在 y 軸上，則此圓之方程式為
(A) $(x-5)^2+y^2=10$ (B) $x^2+(y-5)^2=10$ (C) $x^2+(y-5)^2=100$ (D) $x^2+(y-5)^2=20$

解 設圓心 $O(0, k)$，利用 $\overline{OP}=\overline{OQ}=r \Rightarrow \overline{OP}^2=\overline{OQ}^2$

$\Rightarrow 1+(k-2)^2=9+(k-4)^2 \Rightarrow k=5$，即圓心 $(0, 5)$，半徑 $r=\sqrt{10}$

因此，圓方程式為 $x^2+(y-5)^2=10$

(A) 6. 若方程式 $x^2+y^2+kx+2y+k+1=0$ 之圖形為一圓，則 k 之範圍為 (A) $k>4$ 或 $k<0$
(B) $k>3$ 或 $k<1$ (C) $0<k<4$ (D) $1<k<3$

解 圓判別式 $=D^2+E^2-4F=k^2+2^2-4(k+1)>0$

$\Rightarrow k^2-4k>0 \Rightarrow k(k-4)>0 \Rightarrow k>4$ 或 $k<0$

(C) 7. 設 $P(1, -2)$, $Q(-3, 1)$ 為平面上兩點，則以 $\overline{PQ}$ 為直徑之圓方程式為
(A) $x^2+y^2+2x-y-9=0$ (B) $x^2+y^2-2x+y-1=0$ (C) $x^2+y^2+2x+y-5=0$
(D) $x^2+y^2+2x-y-3=0$

解 此圓：$(x-1)[x-(-3)]+[y-(-2)](y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$

有著作權 不准翻印

(D) 8. 設點 $A(3,\ -1)$ 到圓 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 之最遠距離為 M，最近距離為 m，則 $M\times m=$

(A) $3\sqrt{34}$　(B) 43　(C) $25\sqrt{3}$　(D) 25

解 $x^2+y^2+4x-4y-1=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow$ 圓心 $O(-2,\ 2)$，半徑 $r=3$

則 $\overline{AO}=\sqrt{(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$

$\therefore A$ 到圓之最遠距離 $M=\overline{AC}+r=\sqrt{34}+3$，最近距離 $m=\overline{AC}-r=\sqrt{34}-3$

$\therefore M\times m=(\sqrt{34}+3)(\sqrt{34}-3)=25$

(B) 9. 點 $(7,\ 15)$ 到圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 之切線段長為　(A) 5　(B) 12　(C) 13　(D) 7

解 切線段長 $=\sqrt{(7-2)^2+(15-3)^2-25}=12$

(A) 10. 若直線 $3x-4y-1=0$ 與圓 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 相切，則 $k=$　(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

解 圓：$(x-1)^2+(y+2)^2=5-k \Rightarrow$ 圓心 $O(1,\ -2)$，半徑 $r=\sqrt{5-k}$

$\because$ 相切，$\therefore d(O,\ L)=\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\sqrt{5-k} \Rightarrow 2=\sqrt{5-k} \Rightarrow k=1$

二、填充題：(每題 10 分)

1. 若方程式 $x^2+y^2+6x-4y+c=0$ 之圖形為一點 $(a,\ b)$，則 $a+b+c=$ __12__。

解 $(x+3)^2+(y-2)^2=-c+13=0$，$\therefore c=13$

$(a,\ b)=(-3,\ 2)$，故 $a+b+c=12$

2. 設圓 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 與直線 $L:3x-4y+k=0$ 不相交，則 k 的範圍為 __$k>-1$ 或 $k<-21$__。

解 圓心 $O(1,\ -2) \Rightarrow d(O,\ L)=\dfrac{|3+8+k|}{\sqrt{9+16}}>2$

$\therefore |k+11|>10 \Rightarrow k>-1$ 或 $k<-21$

3. 設一圓與 y 軸相切，且其圓心為 $(4,\ -3)$，則此圓方程式為 __$(x-4)^2+(y+3)^2=16$__。

解 $\because$ 圓與 y 軸相切，且圓心為 $(4,\ -3)$，$\therefore$ 半徑 $=4$

$\Rightarrow$ 圓方程式為 $(x-4)^2+(y+3)^2=4^2$

4. 過點 $(3,\ 5)$ 且與圓 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ 相切之直線方程式為 __$4x+3y-27=0$__。

解 將 $(3,\ 5)$ 代入 $\Rightarrow 3^2+5^2+2\times3-4\times5-20=0 \Rightarrow (3,\ 5)$ 在圓上

$\therefore$ 切線：$3x+5y+2\times\dfrac{x+3}{2}-4\times\dfrac{y+5}{2}-20=0 \Rightarrow 4x+3y-27=0$

5. 自點 $(2,\ 1)$ 向一圓 $x^2+y^2=1$ 所作的切線，其斜率為 __0 或 $\dfrac{4}{3}$__。

解 $(2,\ 1)$ 在圓外，設切線 $y-1=m(x-2)$，即 $mx-y+(1-2m)=0$

而圓心 $O(0,\ 0)$，$r=1$，因相切，所以 $d(O,\ L)=\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1 \Rightarrow m=0$ 或 $\dfrac{4}{3}$