



## 數學 C IV 基礎評量

## 第 8 回

座號：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_

## 3-1 函數的極限

一、選擇題：(每題 10 分)

- (A) 1. 函數
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$
- ，則其定義域為何？ (A)
- $x < 1$
- (B)
- $x \leq 1$
- (C)
- $x > 1$
- (D)
- $x \in \mathbb{R}$

**解**  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$  要有意義，分母不可為零且根號內不可為負數 $1-x \neq 0$  且  $1-x \geq 0$ ，即  $x < 1$ 

- (C) 2. 下列何者正確？ (A)
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x| = -1$
- (B)
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} |x| = 0$
- (C)
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$
- (D)
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = 0$

**解** (A)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x| = 1$ (B)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} |x| = 1$ (C)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$ (D)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$ 

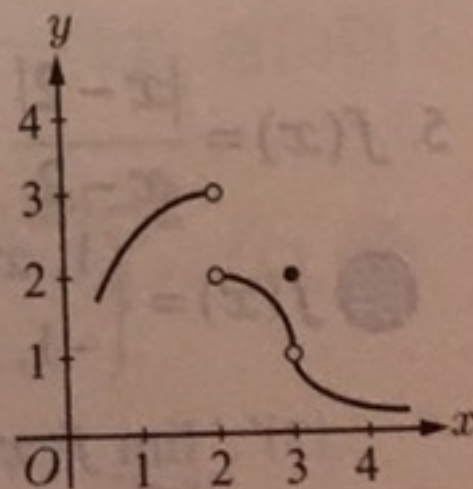
- (B) 3.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} =$
- (A) 1 (B)
- $\frac{5}{4}$
- (C)
- $\frac{1}{4}$
- (D)
- $-\frac{1}{4}$

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$ 

- (C) 4.
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} =$
- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{4}+2=4$ 

- (D) 5. 設
- $y = f(x)$
- 之圖形如右，則下列何者錯誤？ (A)
- $f(2)$
- 不存在

(B)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  不存在 (C)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$  (D)  $f(x)$  在  $x=3$  連續**解** (D)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$  但  $f(3) = 2$  $\therefore$  在  $x=3$  不連續



## 二、填充題：(每題 10 分)

1. 試求 (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 1)(2x - 1)^2 = \underline{4}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 5}{3x + 4} = \underline{2}$ 。

**解** (1) 原式  $= (1^4 + 2 \cdot 1^3 + 1)(2 \cdot 1 - 1)^2 = 4 \cdot 1^2 = 4$

(2) 原式  $= \frac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 5}{3 \cdot (-1) + 4} = \frac{2}{1} = 2$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1} \right) = \underline{2}$ 。

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{x^2 + x - 4}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( 1 + \frac{x^2 + x - 4}{x+1} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = 2$

3. 已知  $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \neq 1 \\ k+1, & x = 1 \end{cases}$ ，若  $f(x)$  在  $x=1$  連續，則  $k = \underline{4}$ 。

**解**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5$ ， $\therefore$  在  $x=1$  連續

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ,  $k+1=5$ ,  $k=4$

4. 若  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ x^2-1, & -1 \leq x < 2 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{3}$ ， $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \underline{\text{不存在}}$ 。

**解** (1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2+1=3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2-1=3$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ ,  $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1)^2-1=0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2 \cdot (-1) = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ,  $\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  不存在

5.  $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ ，試求 (1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{1}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{-1}$  (3)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\text{不存在}}$ 。

**解**  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$ ,  $\therefore$  (1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

(3)  $\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  不存在



# 數學 C IV 基礎評量

科 年 班

## 第 9 回

座號：

姓名：

### 3-2 多項函數的導數與導函數

一、選擇題：(每題 10 分)

- ( B ) 1. 若  $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ，求  $f(x)$  在  $x=1$  至  $x=3$  之平均變化率為 (A)  $\frac{17}{2}$  (B) 9 (C)  $\frac{39}{2}$   
(D) 19

解 平均變化率  $= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 9$

- ( D ) 2. 承上題，求  $f'(3) =$  (A) 5 (B) 0 (C) -5 (D) 11

解  $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x - 3} = 11$

- ( D ) 3. 設  $f(x) = |x + 1|$ ，則  $f(x)$  在  $x = -1$  之導數為 (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 不存在

解  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq -1 \\ -(x + 1), & x < -1 \end{cases}$ ， $\therefore$  在  $x = -1$  之導數不存在

- ( A ) 4. 設  $f(x) = \frac{x(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+3)}$ ，則  $f'(0) =$  (A)  $\frac{8}{3}$  (B)  $\frac{16}{3}$  (C) 0 (D) 不存在

解  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+3)} = \frac{8}{3}$

- ( C ) 5. 設導函數  $f'(x) = 2x$ ，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  之值為 (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) -2

解 原式  $= f'(2) = 4$



二、填充題：(每題 10 分)

1. 試求函數  $f(x) = 2x^2 + 1$  的圖形上，通過  $P(1, 3)$  的切線斜率為 4。

$$\begin{aligned}\text{解 } m = f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

2. 設速度函數  $v(t) = t^2 + 3$ ，試求：

(1)  $t$  由 1 到 3 時， $v(t)$  的平均加速度 = 4

(2)  $v(t)$  於  $t = 1$  的瞬時加速度 = 2。

$$\text{解 (1) 平均加速度} = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = 4$$

$$(2) \text{瞬時加速度} = v'(1) = 2$$

3. 設函數  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ，則  $f'(0) =$  0。

$$\text{解 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$$

4. 設函數  $f(x) = x^2 + 3x + 15$ ，求  $\frac{d}{dx} f(x) =$   $2x + 3$ 。

$$\text{解 } \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = 2x + 3$$

5. 設函數  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ，求  $f'(1) =$  -1。

$$\text{解 } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x-3} - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-3} = -1$$