109 學年度第二學期五專(資工二乙)數學第一次小考

分數欄

學號：______________________ 姓名：______________________

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C) 已知 $(x-1)(x-2)+(y-3)(y-4)=0$ 的圖形為一圓，則此圓的圓心坐標為何？

   (A) $(0,0)$　(B) $(1,2)$　(C) $(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$　(D) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

【進階評量】

解析：此方程式為「直徑式」，∴某直徑的兩端點為(1, 3), (2, 4)

$\Rightarrow$ 圓心為 $(\frac{1+2}{2},\frac{3+4}{2})=(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$

2. (D) 設點 $A(3,-1)$ 到圓 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 之最遠距離為 M，最近距離為 m，則 $M\times m=$

   (A) $3\sqrt{34}$　(B) 43　(C) $25\sqrt{3}$　(D) 25

【進階評量】

解析：$x^2+y^2+4x-4y-1=0\Rightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=9$

$\Rightarrow$ 圓心 $O(-2,2)$，半徑 $r=3$

則 $\overline{AO}=\sqrt{(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$

∴A 到圓之最遠距離 $M=\overline{AC}+r=\sqrt{34}+3$

最近距離 $m=\overline{AC}-r=\sqrt{34}-3$

$\therefore M\times m=(\sqrt{34}+3)(\sqrt{34}-3)=25$

3. (D) 試判斷直線 $4x+3y+6=0$ 與圓 $x^2+y^2-6x-8y-11=0$ 的關係為何？　(A)相交　(B)平行　(C)相離　(D)相切

【進階評量】

解析：$(x-3)^2+(y-4)^2=11+9+16=36$，圓心(3, 4)，半徑 $r=6$

$\therefore d=\dfrac{|4\times3+3\times4+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{30}{5}=6$，∴$d=r$，相切

4. (D) 設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？　(A) -5　(B) 0　(C) 5　(D) 10

【107 四技二專工科】

解析：$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$

設 $P(3+5\cdot\cos\theta,-4+5\cdot\sin\theta)$

$\therefore 4x+3y+5=12+20\cdot\cos\theta-12+15\cdot\sin\theta+5=15\cdot\sin\theta+20\cdot\cos\theta+5$

∴最大值 $M=\sqrt{15^2+20^2}+5=25+5=30$

最小值 $m=-\sqrt{15^2+20^2}+5=-25+5=-20$

$\therefore M+m=30-20=10$

5. (A) 若 $x^2+y^2+6x-2y+k=0$ 表一圓，則　(A) $k<10$　(B) $k<40$　(C) $k\le10$　(D) $k\le40$

解析：配方得 $(x+3)^2+(y-1)^2=10-k$　，表實圓 $\Rightarrow 10-k>0\Rightarrow k<10$

6. (C) 點 $P(1,2)$ 至圓 $C:2x^2+2y^2+4x+6y-1=0$ 之切線段長為　(A) $5\sqrt{2}$　(B)5　(C) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{10}$

解析：圓 $C:x^2+y^2+2x+3y-\frac{1}{2}=0$

則切線段長 $=\sqrt{1^2+2^2+2\times1+3\times2-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

7. (A) 試問在坐標平面上，斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 之圓心的直線方程式為何？　(A) $x-2y+5=0$　(B) $2x-y+5=0$　(C) $x+2y+5=0$　(D) $2x+y+5=0$

【96 四技二專統測】

解析：圓 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的圓心坐標為 $(-\frac{2}{2},-\frac{-4}{2})=(-1,2)$

由於所求直線的斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過點 $(-1,2)$

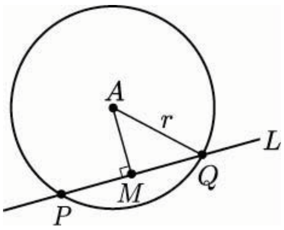
利用點斜式可得直線方程式為 $y-2=\frac{1}{2}[x-(-1)]\Rightarrow x-2y+5=0$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 若直線 $L:2x-y+4=0$ 與圓 $C:x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 相交於 P、Q 兩點，試求弦 $\overline{PQ}$ 長。

答案：$x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 配方後得 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

則圓 C 之圓心為 $A(1,1)$，半徑 $r=3$，如下圖所示



令 M 為圓心 A 到 $\overline{PQ}$ 之垂足，則 M 為 $\overline{PQ}$ 之中點

故 $\overline{PQ}=2\overline{MQ}=2\sqrt{r^2-\overline{AM}^2}$，其中 $\overline{AM}=d(A,L)=\frac{|2\times1-1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

因此，$\overline{PQ}=2\sqrt{r^2-\overline{AM}^2}=2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{4}=4$，故弦 $\overline{PQ}$ 長為 4

2. 求過點 $(2,-3)$ 且與圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切之直線方程式。

答案：點 $(2,-3)$ 在圓外，設所求切線 $y+3=m(x-2)$，即 $mx-y-2m-3=0$

$\Rightarrow\frac{|m-2-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1\Rightarrow|m+5|=\sqrt{m^2+1}\Rightarrow(m+5)^2=m^2+1\Rightarrow m=-\frac{12}{5}$

故所求切線 $x=2$ 或 $y+3=-\frac{12}{5}(x-2)$，即 $x=2$ 或 $12x+5y-9=0$

3. 已知坐標平面上相異三點 $A(0,0),B(2,-1),C(-2,3)$，試求過 A,B,C 三點的圓方程式。

【課本】

答案：設此圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

過 $A(0,0)$，即 $x=0,y=0$ 代入上式，得 $f=0$

過 $B(2,-1)$ ，即 $x=2, y=-1$ 代入上式，得 $4+1+2d-e=0$
過 $C(-2,3)$ ，即 $x=-2, y=3$ 代入上式，得 $4+9-2d+3e=0$
即解 $\begin{cases} 2d-e+5=0 \\ -2d+3e+13=0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} d=-7 \\ e=-9 \end{cases}$
故此圓方程式為 $x^2+y^2-7x-9y=0$