110 學年度第一學期五專(資工一乙)數學期中考

分數欄

學號：______________________________ 姓名：___________________________

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (D) 在坐標平面上， A 點坐標 $(4\cos15°, 4\cos75°)$ 與原點的距離為何？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解析：$\overline{OA}=\sqrt{(4\cos15°)^2+(4\cos75°)^2}=4\sqrt{\cos^2 15°+\cos^2 75°}=4\sqrt{\cos^2 15°+\sin^2 15°}=4$

2. (A) $\triangle ABC$ 之三頂點 $A(1, 2)$, $B(-3,5)$, $C(x, y)$，若其重心為 $G(2, 3)$，則 C 點坐標為何? (A)(8, 2) (B)(0, 10) (C) (4,–4) (D)(1, 3)

解析：$2=\dfrac{1-3+x}{3}\Rightarrow x=8$

$3=\dfrac{2+5+y}{3}\Rightarrow y=2$

3. (D) 面積為 $\dfrac{3\pi}{5}$ 的扇形，若圓心角為 150°，則其半徑為何? (A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{5}{6}$ (C)90 (D) $\dfrac{6}{5}$

解析：$150°=\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow r^2=\dfrac{36}{25}\Rightarrow r=\dfrac{6}{5}$

4. (B) 平面上兩點 $A(0,-3)$ 、 $B(4,5)$，若 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{PB}=3\overline{PA}$，則 P 點坐標為何？

(A) $(1,1)$ (B) $(1,-1)$ (C) $(-1,1)$ (D) $(-1,-1)$

解析：因 $\overline{PB}=3\overline{PA}$，即 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:3$

依題意代內分點公式 $x=\dfrac{3\times0+1\times4}{1+3}=1$ 、 $y=\dfrac{3\times(-3)+1\times5}{1+3}=-1$

故 $P(1,-1)$

5. (C) 設不等式 $ax^2+5x+b>0$ 之解為 $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，則 $a-b$ 之值為 (A)5 (B)7 (C) -5 (D) -7

解析：$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}<0$

$\xrightarrow{\times(-6)}-6x^2+5x-1>0$，$\therefore a=-6, b=-1\ \ a-b=-5$

6. (C) 若二次不等式 $ax^2-ax+1\geq0$ 恆成立，則 a 的整數值共有幾個？ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

解析：$D=(-a)^2-4\times a\times1\leq0$

$\Rightarrow a^2-4a\leq0\Rightarrow0\leq a\leq4$ 但 $a\neq0$

故 $a=1$ 、2、3、4

7. (B)若 $x>0$、$y>0$，且 $2x+3y=12$，則 xy 之最大值為　(A)4　(B)6　(C)8　(D)10

解析：由算術平均數 $\ge$ 幾何平均數知

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\cdot 3y}\Rightarrow 12\ge 2\sqrt{6xy}$

$\Rightarrow xy\le 6$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1.　化簡 $\cot^2 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sec^2 60^\circ$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：原式 $=(\sqrt{3})^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2^2=3+\dfrac{1}{2}-4=-\dfrac{1}{2}$

2.　若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$

答案：(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\dfrac{4}{9}=1-2\sin\theta\cos\theta$，$\therefore\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{18}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{18}{5}$

3.　試解不等式 $4<(2x-1)^2<25$。

（提示：所求之解必須同時滿足 $4<(2x-1)^2$ 及 $(2x-1)^2<25$）

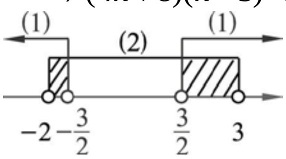
答案：$4<(2x-1)^2<25\Rightarrow$ 所求之解須同時滿足 $4<(2x-1)^2$ 及 $(2x-1)^2<25$

(1) $4<(2x-1)^2\Rightarrow 4<4x^2-4x+1\Rightarrow 4x^2-4x-3>0\Rightarrow(2x-3)(2x+1)>0$

$\Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$

(2) $(2x-1)^2<25\Rightarrow 4x^2-4x+1<25\Rightarrow 4x^2-4x-24<0$

$\Rightarrow(4x+8)(x-3)<0\Rightarrow -2<x<3$



取(1)(2)的交集得 $-2<x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}<x<3$