110 學年度第一學期五專(資工二乙)數學第一次小考

分數欄

學號：________________ 姓名：________________

一、單一選擇題(共 60 分,每題 15 分)

1. (B)若空間中兩向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 滿足 $|\vec{u}|=\sqrt{3}$ 、 $|\vec{v}|=2$ ，且 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角為 $30°$ ，則 $|\vec{u}+\vec{v}|=?$

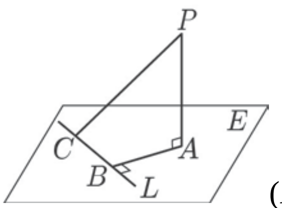
   (A)13 (B) $\sqrt{13}$ (C)10 (D) $\sqrt{10}$

解析：$\because\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{3}\times2\times\cos30°=3$

$\therefore\ |\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=(\sqrt{3})^2+2\times3+2^2=13$

$\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{13}$

2. (C)設直線 PA 垂直平面 E 於 A 點，且直線 L 是平面 E 上一條直線，C 是 L 上一點，如圖所示，若直線 AB 垂直 L 於 B 點，且 $\overline{PA}=2$ 、 $\overline{AB}=1$ 、 $\overline{BC}=2$ ，則 $\overline{PC}=?$



(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{8}$ (C)3 (D) $\sqrt{10}$

解析：① $\overline{PA}\perp E\Rightarrow\overline{PA}\perp\overline{AB}$ ，$\therefore\ \overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

② $\overline{PA}\perp\overline{AB}$ 、 $\overline{AB}\perp L\Rightarrow$ 三垂線定理知 $\overline{PB}\perp L$

$\therefore\ \overline{PB}\perp\overline{BC}\Rightarrow\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$

3. (A)若 $A(-2,7,12),B(-4,4,18)$ 為空間坐標中二點，則 $\overline{AB}=$? (A)7 (B)5 (C)3 (D)2

解析：$\overline{AB}=\sqrt{4+9+36}=7$ ，故選(A)

4. (C)已知 $\vec{a}=(1,2,-3)$ 、 $\vec{b}=(x,-6,z)$ ，若 $\vec{a}//\vec{b}$ ，則 $x+z=?$ (A) -12 (B) -6 (C)6

   (D)12

解析：$\because\ \vec{a}//\vec{b}$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{2}{-6}=\frac{-3}{z}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-3}\Rightarrow x=-3\\[2mm]\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-3}{z}\Rightarrow z=9\end{cases}$$

故 $x+z=(-3)+9=6$

二、計算與證明題(共 40 分,每題 20 分)

1. $\vec{u}=(3,2,-1)$ 、 $\vec{v}=(-1,2,1)$ ，試求向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張出的三角形面積。

答案： $\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)$

$=(4,-2,8)$

所求三角形面積為

$$\frac{1}{2}\times\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\frac{1}{2}\times\sqrt{16+4+64}=\frac{1}{2}\sqrt{84}=\sqrt{21}$$

2. $A(2,1,3)$ 、 $B(1,3,1)$ 、 $C(3,2,4)$，試求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的正射影與正射影長。

答案： $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times1+2\times1+(-2)\times1=-1$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

且正射影長為 $\sqrt{\left(\frac{1}{-3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$