110 學年度第一學期五專(資工二乙)數學期中考

分數欄

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C) 方程式 $3^{2x+1}-5\times 3^x-12=0$ 的解 $x=$ (A)0 (B)-1 (C)1 (D)2

解析：$3^{2x+1}-5\times 3^x-12=0 \Rightarrow 3\cdot(3^x)^2-5\times 3^x-12=0$

$\Rightarrow (3\cdot 3^x+4)(3^x-3)=0 \Rightarrow 3^x=-\dfrac{4}{3}$ (不合)或 $3^x=3 \Rightarrow x=1$

2. (D) 方程式 $\log x+\log(x-3)=1$ 之解 $x=$ (A)-2 或 5 (B)2 或 5 (C)4 (D)5

解析：原式 $\Rightarrow \log x(x-3)=\log 10 \Rightarrow x(x-3)=10 \Rightarrow x^2-3x-10=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+2)=0$，$\therefore x=5$ 或 -2（不合）

3. (A) 若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，則 $\sin 2\theta=$？ (A)$-\dfrac{15}{16}$ (B)$-\dfrac{1}{16}$ (C)$\dfrac{1}{16}$ (D)$\dfrac{15}{16}$

解析：$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{4} \overset{平方}{\Rightarrow} (\sin\theta+\cos\theta)^2=(\dfrac{1}{4})^2 \Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{16}$

$\therefore \sin 2\theta=-\dfrac{15}{16}$

4. (C) 設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$，則 $\cos(\alpha+\beta)$ 之值 (A)$\dfrac{-4}{5}$ (B)$\dfrac{-3}{5}$ (C)$\dfrac{-117}{125}$ (D)$\dfrac{-44}{125}$

解析：利用餘弦和角公式知

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{-24}{25}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{-117}{125}$

5. (D) $\log_2 16+\log_4 64-\log_2 8=$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解析：$\log_2 16+\log_4 64-\log_2 8=4+3-3=4$

6. (D) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0-(2^{-5}\times 2^3)^{-1}=$？ (A)1 (B)5 (C)$-1$ (D)-3

解析：原式 $=1-(2^{-2})^{-1}=1-2^2=-3$

7. (C) $a=\log_3\sqrt[3]{9}, b=\log_3\sqrt[3]{25}, c=1$，比較 a, b, c 大小？ (A)$a>b>c$ (B)$c>a>b$ (C)$c>b>a$ (D)$a>c>b$

解析：$a=\log_3\sqrt[3]{9}, b=\log_3\sqrt[3]{25}, c=1=\log_3 3=\log_3\sqrt[3]{27}$

$\because$ 底數 $3>1$，且 $\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{25}>\sqrt[3]{9}$

故 $1>\log_3\sqrt[3]{25}>\log_3\sqrt[3]{9}$，即 $c>b>a$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\sqrt{6}\cos x+1$的最大值為________，最小值為________。

答案：4、-2

解析：由正餘弦疊合公式知

$-\sqrt{3+6}\le\sqrt{3}\sin x-\sqrt{6}\cos x\le\sqrt{3+6}$

$\Rightarrow -3\le\sqrt{3}\sin x-\sqrt{6}\cos x\le 3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{3}\sin x-\sqrt{6}\cos x+1$的

最大值 $M=3+1=4$，最小值 $m=-3+1=-2$

2. 已知$\log 2=0.3010$，試求 2^{100} 化簡後為幾位數？

答案：令 $x=2^{100}$

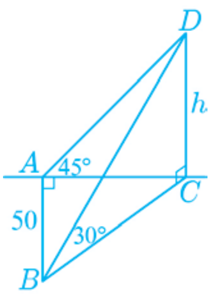
取對數可得$\log x=\log 2^{100}=100\times\log 2$

$=100\times 0.3010=30.1$

$\log x$的首數為 30，所以 $x=2^{100}$ 為 31 位數

3. 小明在 A 點處觀測熱氣球在其正東方且仰角為 $60°$；小明往正南方前進 100 公尺後到達 B 點，發現熱氣球仰角為 $45°$，則熱氣球的高度為多少公尺？

答案：如圖所示，設熱氣球的高度 $\overline{CD}$ 為 h 公尺



$\triangle DAC(30°-60°-90°)$

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\cot 60°\Rightarrow\overline{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

$\triangle BDC(45°-45°-90°)$

$\overline{BC}=\overline{CD}=h$

$\because\triangle ABC$ 為直角三角形

$\therefore\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

$\Rightarrow h^2=\dfrac{1}{3}h^2+100^2\Rightarrow h=50\sqrt{6}$

故熱氣球的高度為 $50\sqrt{6}$ 公尺