110 學年度第二學期五專(資工二乙)數學期中考

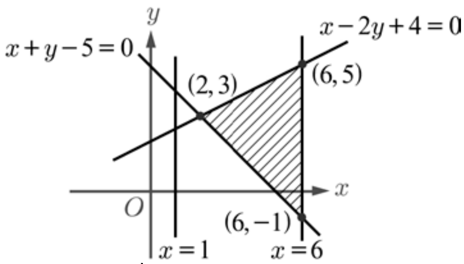
分數欄

學號：________________ 姓名：________________

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (B) 在聯立不等式 $\begin{cases}1\le x\le 6\\ x-2y+4\ge 0\\ x+y-5\ge 0\end{cases}$ 之條件下，$f(x,y)=2x-y+3$ 之最小值為 (A)2 (B)4 (C)6 (D)8

解析：



(x,y)	$f(x,y)=2x-y+3$
$(2,3)$	$4-3+3=4\cdots\cdots m$
$(6,5)$	$12-5+3=10$
$(6,-1)$	$12+1+3=16$

2. (B) 已知一雙曲線的兩焦點為 $(-3,0)$ 、 $(7,0)$ ，且貫軸長為 6，試求此雙曲線的方程式為何？ (A) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (B) $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

解析：$\because$ 左右形雙曲線，中心 $(\dfrac{-3+7}{2},\dfrac{0+0}{2})=(2,0)$

$2c=7-(-3)=10\Rightarrow c=5$

又 $2a=6\Rightarrow a=3$

$\therefore b^2=c^2-a^2=16\Rightarrow b=4$

故方程式 $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

3. (A) 雙曲線 $(x+3)^2-36(y-2)^2=16$ 之正焦弦長為 (A) $\frac{2}{9}$ (B)3 (C) $\frac{2}{3}$ (D)4

解析：原式 $\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16}-\frac{9(y-2)^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{\frac{4}{9}}=1$

$\therefore a^2=16$、$b^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=4$、$b=\frac{2}{3}$ 故正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{4}{9}}{4}=\frac{2}{9}$

4. (C) $\tau:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，若 $P(x,y)$ 在 τ 上，則 P 到直線 $3x-4y-2=0$ 之最長距離為

(A) $\frac{\sqrt{37}-2}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{37}+2}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{337}+2}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{437}+2}{5}$

解析：$x=3\cos\theta, y=4\sin\theta$，$\therefore P(3\cos\theta,4\sin\theta)$

$d(P,L)=\frac{|9\cos\theta-16\sin\theta-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9\cos\theta-16\sin\theta-2|}{5}\le\frac{\sqrt{337}+2}{5}$

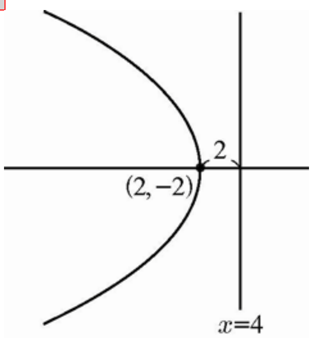
$-\sqrt{9^2+(-16)^2}\le 9\cos\theta-16\sin\theta\le\sqrt{9^2+(-16)^2}$

$\Rightarrow -\sqrt{337}-2\le 9\cos\theta-16\sin\theta-2\le\sqrt{337}-2$

$\therefore 0\le|9\cos\theta-16\sin\theta-2|\le\sqrt{337}+2$

5. (C) 拋物線 $(y+2)^2=-8(x-2)$ 的準線方程式為 (A) $x=0$ (B) $x=2$ (C) $x=4$ (D) $x=5$

解析：



$c=-2,|c|=2$，$\therefore$準線：$x=4$

6. (A) 一拋物線焦點(0,1)，準線 $y+3=0$，其方程式為 (A) $x^2-8y-8=0$ (B) $y^2-8x-8=0$ (C) $x^2+4y-4=0$ (D) $y^2+4x-4=0$

解析：設動點 $P(x,y) \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+3| \Rightarrow x^2+(y-1)^2=(y+3)^2 \Rightarrow x^2-8y-8=0$

7. (B) 若 $A(1,3), B(4,k)$ 在直線 $2x-y+3=0$ 之反側，則 k 之最小整數為 (A)11 (B)12 (C)13 (D)14

解析：令 $f(x,y)=2x-y+3$

因 A,B 在直線 $f(x,y)=0$ 之反側

$\therefore f(1,3)\times f(4,k)<0 \Rightarrow (2-3+3)(8-k+3)<0 \quad \Rightarrow k>11$，故 k 之最小整數為 12

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 某一公司有甲、乙兩工廠，生產 A、B、C 三款螺絲。甲廠每日生產 A 款 12 噸、B 款 4 噸、C 款 6 噸；乙廠每日生產 A 款 3 噸、B 款 4 噸、C 款 12 噸。若一訂單要求每週至少需要 A 款 36 噸、B 款 24 噸、C 款 48 噸。又甲廠每日開支 2 萬元，乙廠每日開支 1.5 萬元。問甲、乙兩廠每週各開工幾天，就可以最節省的方式供應訂單所需？

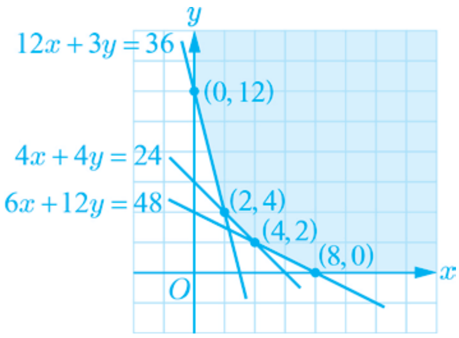
答案：

	A 型	B 型	C 型	開支
甲工廠	12	4	6	20000
乙工廠	3	4	12	15000

設甲廠開工 x 天、乙廠開工 y 天

$$\begin{cases} x \geq 0、y \geq 0 \\ 12x+3y \geq 36 \\ 4x+4y \geq 24 \\ 6x+12y \geq 48 \end{cases}$$

目標函數 $f(x,y)=2x+1.5y$（萬元）



依題意可得

頂點坐標為 $(0,12)$、$(2,4)$、$(4,2)$、$(8,0)$

$f(0,12)=0+18=18$

$f(2,4)=4+60=10$（最節省成本）

$f(4,2)=8+3=11$

$f(8,0)=16+0=16$

∴甲廠開工 2 天、乙廠開工 4 天

2.　設一雙曲線兩焦點為 $(0,5)$ 、 $(0,-5)$ ，一頂點為 $(0,4)$ ，試求此雙曲線方程式。

答案：由圖形可知為上下形雙曲線

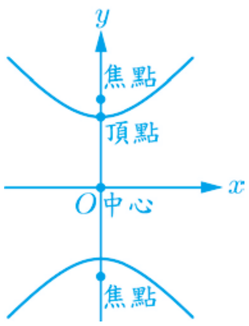
$\therefore$ 方程式為 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

中心 $(0,0)$

$2c=5-(-5)=10\Rightarrow c=5$

$a=4-0=4$

$\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=3$



故 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

3.　試求橢圓 $4(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 的中心、焦點、頂點、長軸長、短軸長與正焦弦長。

答案：$4(x+3)^2+(y-1)^2=4\Rightarrow\dfrac{(x+3)^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

$\Rightarrow\dfrac{(x+3)^2}{1^2}+\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=1$

圖形為直立形橢圓

$a=2$ 、 $b=1$ 、 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

中心 $(-3,1)$

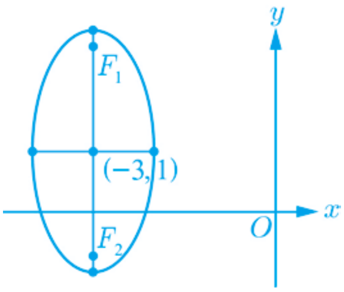
焦點： $F_1(-3,1+\sqrt{3})$ 及 $F_2(-3,1-\sqrt{3})$

長軸頂點： $(-3,3)$ 及 $(-3,-1)$

短軸頂點： $(-2,1)$ 及 $(-4,1)$

長軸長 $2a=4$

短軸長 $2b=2$



正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times1^2}{2}=1$