111 學年度第一學期五專(資工一乙)數學期中考

分數欄

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C) 化簡 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 得 (A) $8+2\sqrt{15}$ (B) $8-2\sqrt{15}$ (C) $4+\sqrt{15}$ (D) $4-\sqrt{15}$

解析：原式 $=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=4+\sqrt{15}$

2. (D) 面積為 $\dfrac{3\pi}{5}$ 的扇形，若圓心角為 150°，則其半徑為何? (A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) 90 (D) $\dfrac{6}{5}$

解析：$150^\circ=\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow r^2=\dfrac{36}{25}\Rightarrow r=\dfrac{6}{5}$

3. (A) $\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=$ (A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$

解析：原式 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. (D) 設 a 、b 為實數，若不等式 $2x^2+ax+b<0$ 的解為 $-3<x<2$ ，則 $a+b=$? (A) 14 (B) 10 (C) -14 (D) -10

解析：$(x-2)(x+3)<0\Rightarrow x^2+x-6<0\Rightarrow 2x^2+2x-12<0$

比較係數得 $a=2$ 、$b=-12\Rightarrow a+b=-10$

5. (B) 設 $P(1,5)$、$Q(-3,9)$ 為坐標平面上兩點，若 A 點在 $\overline{PQ}$ 的延長線上，且 $\overline{PA}:\overline{AQ}=5:3$，

則 A 點坐標為何？ (A) $(9,-15)$ (B) $(-9,15)$ (C) $(\dfrac{-17}{3},\dfrac{35}{3})$ (D) $(\dfrac{17}{3},\dfrac{-35}{3})$

解析：令 $A(x,y)$

$\because\ \overline{PA}:\overline{AQ}=5:3\Rightarrow\overline{PQ}:\overline{QA}=2:3$ $\therefore\ (-3,9)=(\dfrac{2x+3}{5},\dfrac{2y+15}{5})\Rightarrow A(x,y)=A(-9,15)$

6. (C) $\triangle ABC$ 中，$A(-2,3)$、$B(1,3)$、$C(-3,-1)$，若 $\overline{BC}$ 的中點為 M ，則中線 $\overline{AM}=$? (A) 3 (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

解析：$\because$ 中點 $M(\dfrac{1+(-3)}{2},\dfrac{3+(-1)}{2})=M(\dfrac{-2}{2},\dfrac{2}{2})=M(-1,1)$ $\therefore\ \overline{AM}=\sqrt{[-2-(-1)]^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

7. (A) 設 θ 為銳角，已知 $\cot\theta=\dfrac{2}{3}$，則 $\dfrac{3\sin\theta-2\cos\theta}{2\sin\theta+3\cos\theta}=$? (A) $\dfrac{5}{12}$ (B) $\dfrac{12}{13}$ (C) $-\dfrac{5}{12}$ (D) $-\dfrac{12}{13}$

解析：原式 $=\dfrac{\dfrac{3\sin\theta-2\cos\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta}}=\dfrac{3-2\cot\theta}{2+3\cot\theta}=\dfrac{5}{12}$

二、計算題(共 30 分,每題 10 分)

1. 對所有實數，不等式 $kx^2-(k-1)x+4k>0$ 恆成立，則 k 的範圍為________。

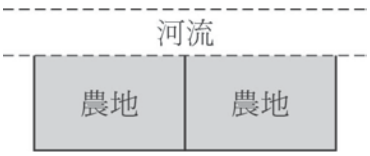
答案：$k>\frac{1}{5}$

解析：對所有實數，不等式 $kx^2-(k-1)x+4k>0$ 恆成立

所以滿足條件 $\begin{cases} k>0 \\ (k-1)^2-16k^2<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ (5k-1)(3k+1)>0 \end{cases} \Rightarrow k>\frac{1}{5}$$

2. 小華和小英想用48公尺長的籬笆沿河岸圍出2塊相連的矩形農地（如圖），這2塊農地面積相等，農地的短邊與河岸垂直，且靠河的一邊不圍，試問每塊農地的長、寬應如何安排才能圍出最大的面積？



答案：設 2 塊農地的總長為 a 公尺，寬為 b 公尺

此處 $a>0$ 、 $b>0$

則依題意 $a+3b=48$

而所求的農地面積為 ab

利用算幾不等式 $\frac{a+3b}{2}\geq\sqrt{a\cdot 3b}$

得 $24\geq\sqrt{3ab}$ ，即 $192\geq ab$

故最大面積為 192 平方公尺

此時 $a=3b=\frac{48}{2}=24$

即長為 24 公尺，寬為 8 公尺時所圍出的農地面積最大，分成的 2 塊農地，每塊農地的長為 12 公尺，寬為 8 公尺

3. 設θ為銳角，若$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta-\cos\theta$ (3) $\tan\theta+\cot\theta$ (4) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(4) 參考公式：

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

答案：(1)將等式兩邊平方得$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sqrt{2}^2$

所以$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

因$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

則$2\sin\theta\cos\theta=2-1=1$

故$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(2)$\because (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=0$

(3) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

(4) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\sqrt{2}\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$