111 學年度第一學期五專(資工二乙)數學期中考

分數欄

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (D) 解 $(\frac{3}{4})^{x+2}=(\frac{4}{3})^{2x-5}$，得 x 之值為 (A)-1 (B)-2 (C)2 (D)1

解析：$(\frac{3}{4})^{x+2}=(\frac{4}{3})^{2x-5}\Rightarrow(\frac{3}{4})^{x+2}=(\frac{3}{4})^{-2x+5}$

$\therefore x+2=-2x+5\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1$

2. (C) 設 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{4}$，則 $\sin 2\theta$ 之值為 (A)$\frac{7}{4}$ (B)$\frac{7}{8}$ (C)$\frac{-7}{16}$ (D)$\frac{-7}{8}$

解析：$\because(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta$

則 $(-\frac{3}{4})^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$\therefore 2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{-7}{16}$

故 $\sin 2\theta=-\frac{7}{16}$

3. (B) $Z=-\sqrt{3}+3i$，則 Z 的主幅角為何？ (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)π (D)$\frac{4}{3}\pi$

解析：$|Z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=2\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned}Z&=-\sqrt{3}+3i\\&=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Z 的主幅角為 $\frac{2\pi}{3}$

4. (C) 化簡 $\frac{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^{12}\times(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ)^5}{(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)^4\times(\cos 3^\circ+i\sin 3^\circ)^8}=$ (A)1 (B)-1 (C)i (D)$-i$

解析：原式 $=\frac{(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ)\times(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)}{(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)\times(\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ)}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\cos 154^\circ+i\sin 154^\circ}{\cos 64^\circ+i\sin 64^\circ}\\&=\cos(154^\circ-64^\circ)+i\sin(154^\circ-64^\circ)\\&=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ\\&=i\end{aligned}$$

5. (C) 設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\beta=\frac{7}{25}$，則 $\cos(\alpha+\beta)$ 之值　(A) $\frac{-4}{5}$ (B) $\frac{-3}{5}$ (C) $\frac{-117}{125}$ (D) $\frac{-44}{125}$

解析：利用餘弦和角公式知

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{-24}{25}-\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25}=\frac{-117}{125}$$

6. (B) $f(x)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-5$ 之最大值 M，最小值 m，則 $3M-m=?$　(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4

解析：$-\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\le\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\le\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow -2\le\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\le 2$

$\Rightarrow -7\le$ 原式 ≤ -3

$\therefore M=-3, m=-7$

7. (C) $5^{a-b}\cdot 5^{b-c}\cdot 5^{c-a}=$　(A) 5^{a+b+c} (B) 0 (C) 1 (D) 5

解析：原式 $=5^{(a-b)+(b-c)+(c-a)}=5^0=1$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 設 $z_1=(2+i)^2(1+3i)^2$ 、 $z_2=(1-i)^4(6-8i)$ ，試求 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ 之值。

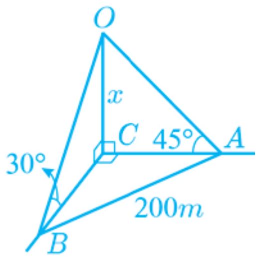
答案：$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|(2+i)^2(1+3i)^2|}{|(1-i)^4(6-8i)|}$

$$=\frac{|2+i|^2|1+3i|^2}{|1-i|^4|6-8i|}=\frac{(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2})^4\times\sqrt{100}}$$

$$=\frac{5}{4}$$

2. 甲、乙兩人在塔的正東方 A 點與正南方 B 點，分別測得塔頂的仰角為 45° 、 30° ，已知 $\overline{AB}=200$ 公尺，試求塔高為多少公尺？

答案：如圖所示



令塔高 $\overline{OC}=x$

由 $\triangle OAC$ 可得 $\overline{AC}=x$

由 $\triangle OBC$ 可得 $\overline{BC}=\sqrt{3}x$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$\Rightarrow (\sqrt{3}x)^2+x^2=200^2$

$\Rightarrow x=100$ 公尺

3. $2^{2x}-3\times 2^{x-1}-1=0$ ，試求 x 之值。

答案：令 $y=2^x$ ， $2^{2x}-3\times 2^{x-1}-1=0$

$\Rightarrow (2^x)^2-\dfrac{3}{2}\times 2^x-1=0 \Rightarrow y^2-\dfrac{3}{2}y-1=0$

$\Rightarrow 2y^2-3y-2=0 \Rightarrow (2y+1)(y-2)=0$

$\Rightarrow y=2$ 、 $-\dfrac{1}{2}$ （不合） $\Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$