111 學年度第二學期五專(資工二乙)數學期中考

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

分數欄

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (B) 若 $A(1,3), B(4,k)$ 在直線 $2x-y+3=0$ 之反側，則 k 之最小整數為 (A)11 (B)12 (C)13 (D)14

解析：令 $f(x,y)=2x-y+3$ 因 A,B 在直線 $f(x,y)=0$ 之反側

$\therefore f(1,3)\times f(4,k)<0 \Rightarrow (2-3+3)(8-k+3)<0 \quad \Rightarrow k>11$，故 k 之最小整數為 12

2. (B) 已知一雙曲線的兩焦點為 $(-3,0)$ 、 $(7,0)$ ，且貫軸長為 6，試求此雙曲線的方程式為何？ (A) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (B) $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

解析：$\because$ 左右形雙曲線，中心 $(\dfrac{-3+7}{2},\dfrac{0+0}{2})=(2,0)$ $\quad 2c=7-(-3)=10 \Rightarrow c=5$

又 $2a=6 \Rightarrow a=3$ $\quad \therefore b^2=c^2-a^2=16 \Rightarrow b=4$ 故方程式 $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

3. (A) 雙曲線 $(x+3)^2-36(y-2)^2=16$ 之正焦弦長為 (A) $\dfrac{2}{9}$ (B)3 (C) $\dfrac{2}{3}$ (D)4

解析：原式 $\Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{9(y-2)^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{\frac{4}{9}}=1$

$\therefore a^2=16$ 、 $b^2=\dfrac{4}{9} \Rightarrow a=4$ 、 $b=\dfrac{2}{3}$ 故正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times\frac{4}{9}}{4}=\dfrac{2}{9}$

4. (C) $\tau:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，若 $P(x,y)$ 在 τ 上，則 P 到直線 $3x-4y-2=0$ 之最長距離為

(A) $\dfrac{\sqrt{37}-2}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{37}+2}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{337}+2}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{437}+2}{5}$

解析：$x=3\cos\theta, y=4\sin\theta$，$\therefore P(3\cos\theta,4\sin\theta)$

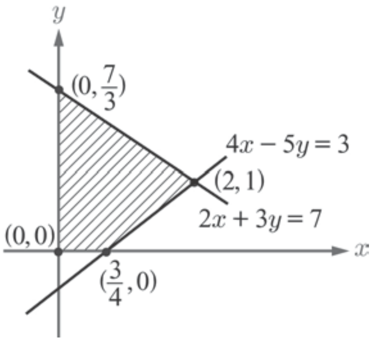
$$d(P,L)=\frac{|9\cos\theta-16\sin\theta-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9\cos\theta-16\sin\theta-2|}{5}\le\frac{\sqrt{337}+2}{5}$$

$-\sqrt{9^2+(-16)^2}\le 9\cos\theta-16\sin\theta\le\sqrt{9^2+(-16)^2}$

$\Rightarrow -\sqrt{337}-2\le 9\cos\theta-16\sin\theta-2\le\sqrt{337}-2 \quad \therefore 0\le|9\cos\theta-16\sin\theta-2|\le\sqrt{337}+2$

5. (D) 在聯立不等式 $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ 2x+3y \le 7 \\ 4x-5y \le 3 \end{cases}$ 之限制條件下，$f(x,y)=4x+3y$ 之最大值為 (A)3 (B)6 (C)9 (D)11

解析：



(x,y)	$f(x,y)=4x+3y$
$(0,0)$	0
$(\frac{3}{4},0)$	3
$(2,1)$	$8+3=11\cdots\cdots M$
$(0,\frac{7}{3})$	7

6. (B) 拋物線 $(y+3)^2=-4(x-1)$ 的準線方程式為 (A) $x=0$ (B) $x=2$ (C) $y=0$ (D) $y=2$

解析：$(y+3)^2=-4(x-1)$ 的準線：$x=1+1$，即 $x=2$

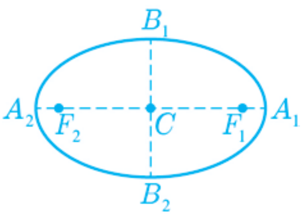
7. (B) 若拋物線頂點為 $(0,-2)$，焦點為 $(0,-3)$，則此拋物線方程式為何？
(A) $x^2=4(y+2)$ (B) $x^2=-4(y+2)$ (C) $x^2=4(y+3)$ (D) $y^2=-4(x+2)$

解析：$\because$ 頂點為 $(0,-2)$、焦點為 $(0,-3)$，$\therefore c=-1<0 \Rightarrow$ 開口向下
故拋物線方程式為 $x^2=4\cdot(-1)\cdot(y+2) \Rightarrow x^2=-4(y+2)$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 設橢圓方程式 $\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$，求橢圓的中心、焦點、頂點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

答案：$a^2=100 \Rightarrow a=10$、$b^2=36 \Rightarrow b=6$
可得 $c^2=a^2-b^2=64 \quad \Rightarrow c=8$
圖形為扁長形橢圓
①中心 $C(-1,-2)$
②焦點 $(-1\pm 8,-2)$ 即 $F_1(7,-2)$、$F_2(-9,-2)$
③長軸頂點 $(-1\pm 10,-2)$ 即 $A_1(9,-2)$、$A_2(-11,-2)$
短軸頂點 $(-1,-2\pm 6)$ 即 $B_1(-1,4)$、$B_2(-1,-8)$
④長軸長 $=2a=20$ ⑤短軸長 $=2b=12$
⑥正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{36}{5}$



2. 設一雙曲線以 $x-3y=0$ 和 $x+3y-6=0$ 為漸近線，且過點 $(2,1)$，試求此雙曲線的方程式。

答案：設雙曲線方程式為 $(x-3y)(x+3y-6)=k$

又過點 $(2,1)$ ，代入上式 $k=(2-3)\times(2+3-6)=1$

故雙曲線之方程式為 $(x-3y)(x+3y-6)=1$

3. 某一公司有甲、乙兩工廠，生產 A、B、C 三款螺絲。甲廠每日生產 A 款 12 噸、B 款 4 噸、C 款 6 噸；乙廠每日生產 A 款 3 噸、B 款 4 噸、C 款 12 噸。若一訂單要求每週至少需要 A 款 36 噸、B 款 24 噸、C 款 48 噸。又甲廠每日開支 2 萬元，乙廠每日開支 1.5 萬元。問甲、乙兩廠每週各開工幾天，就可以最節省的方式供應訂單所需？

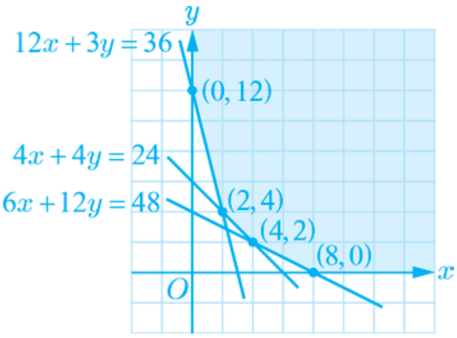
答案：

	A 型	B 型	C 型	開支
甲工廠	12	4	6	20000
乙工廠	3	4	12	15000

設甲廠開工 x 天、乙廠開工 y 天

$$\begin{cases} x\ge 0\text{、}y\ge 0 \\ 12x+3y\ge 36 \\ 4x+4y\ge 24 \\ 6x+12y\ge 48 \end{cases}$$

目標函數 $f(x,y)=2x+1.5y$（萬元）



依題意可得

頂點坐標為 $(0,12)$、$(2,4)$、$(4,2)$、$(8,0)$

$f(0,12)=0+18=18$

$f(2,4)=4+60=10$（最節省成本）

$f(4,2)=8+3=11$

$f(8,0)=16+0=16$

$\therefore$ 甲廠開工 2 天、乙廠開工 4 天