112 學年度第二學期五專(資工二乙)數學期中考

分數欄

學號：______________________________ 姓名：__________________________

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (B) 若 $P(x,y)$ 在橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上移動，則 $x+y-3$ 的最大值為何？ (A)1 (B)2 (C)5 (D)8

解析：令 $P(3\cos\theta,4\sin\theta)$，則 $x+y-3=3\cos\theta+4\sin\theta-3$

$-\sqrt{3^2+4^2}\le 3\cos\theta+4\sin\theta\le\sqrt{3^2+4^2}$ $\Rightarrow -8\le 3\cos\theta+4\sin\theta-3\le 2$ 故最大值為 2

2. (B) 設直線 $L: x+3y+2=0$，則下列哪一點與點 $P(1,0)$ 在 L 的同側？ (A) $A(-2,-1)$ (B) $B(-1,1)$ (C) $C(0,-1)$ (D) $D(2,-2)$

解析：令 $f(x,y)=x+3y+2$，則 $f(1,0)=1+0+2=3$

(A) $f(-2,-1)=-2+(-3)+2=-3$

(B) $f(-1,1)=-1+3+2=4$

(C) $f(0,-1)=0+(-3)+2=-1$

(D) $f(2,-2)=2+(-6)+2=-2$

$\because f(-1,1)\times f(1,0)>0$，$\therefore (-1,1)$ 與 $(1,0)$ 在 L 的同側

3. (C) 已知直線 $L: x+3y+5=0$，設 $A(k,-1)$、$B(-k,1)$ 在直線 L 異側，則下列哪一個 k 值可以符合要求？ (A)5 (B)7 (C)-3 (D)-1

解析：$\because A$、B 在直線 L 異側

$\therefore (k-3+5)\times(-k+3+5)<0 \Rightarrow (k+2)(-k+8)<0 \Rightarrow k>8$ 或 $k<-2$ 故選(C)

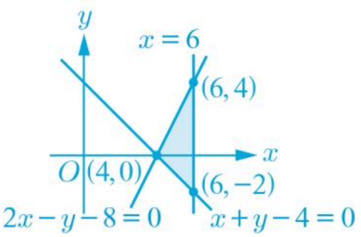
4. (C) 焦點$(-2,1)$，準線 $y=3$ 的拋物線方程式為 (A) $(y+2)^2=4(x-2)$ (B) $(y-2)^2=-4(x+2)$ (C) $(x+2)^2=-4(y-2)$ (D) $(x+2)^2=4(y-2)$

解析：焦點$(-2,1)$，準線 $y=3 \Rightarrow$ 軸：$x=-2$，頂點$(-2,2)$，正焦弦長 4，向下開口

方程式 $(x+2)^2=-4(y-2)$

5. (C) 在 $x\le 6$、$2x-y-8\ge 0$、$x+y-4\ge 0$ 的條件下，函數 $f(x,y)=2x-5y+3$ 的最大值為何？ (A)-5 (B)11 (C)25 (D)30

解析：

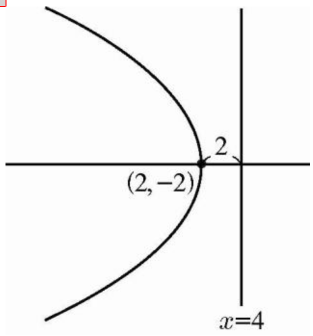


可行解區域頂點為 $(4,0)$、$(6,4)$、$(6,-2)$

$\Rightarrow f(4,0)=11$、$f(6,4)=-5$、$f(6,-2)=25$ 故最大值為 25

6. (C) 拋物線 $(y+2)^2=-8(x-2)$ 的準線方程式為　(A) $x=0$　(B) $x=2$　(C) $x=4$　(D) $x=5$

解析：



$c=-2, |c|=2$，∴準線：$x=4$

7. (B) 已知一橢圓的焦點坐標為 $(0,2)$ 及 $(0,-2)$，短軸長為 8，則此橢圓方程式為

(A) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$　(B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$　(C) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$　(D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

解析：$F(0,-2), F'(0,-2)$，中心為 $(0,0)$，$2c=4 \Rightarrow c=2, 2b=8, b=4$

$a^2=b^2+c^2=16+4=20$，$\overline{FF'}$ 平行 y 軸，故所求為 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$

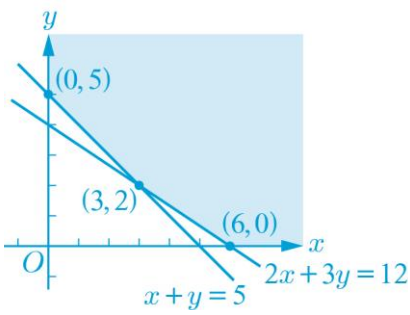
二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. 有甲、乙兩種維他命丸，甲種每粒含 4 單位維他命 A，3 單位維他命 B，每粒售價 4 元；乙種每粒含 6 單位維他命 A，3 單位維他命 B，每粒售價 5 元。假設每人每天最少需要 24 單位維他命 A 及 15 單位維他命 B，則這兩種維他命丸應各吃幾粒(完整的維他命丸)，才能攝取足夠的維他命 A 與 B 且花費最省？

答案：設選用甲維他命丸 x 粒、乙維他命丸 y 粒

依題意可得下列二元一次聯立不等式

$$\begin{cases} x、y\text{為非負整數} \\ 4x+6y\ge 24\text{(維他命}A\text{的需求限制)} \\ 3x+3y\ge 15\text{(維他命}B\text{的需求限制)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x、y\text{為非負整數} \\ 2x+3y\ge 12 \\ x+y\ge 5 \end{cases}$$



可行解區域為塗色區域，設購買維他命費用為

目標函數 $f(x,y)=4x+5y$

$f(6,0)=4\times 6+5\times 0=24$

$f(3,2)=4\times 3+5\times 2=22$（最小值）

$f(0,5)=4\times 0+5\times 5=25$

故每天吃甲維他命丸 3 粒、乙維他命丸 2 粒才能攝取足夠的維他命 A 與 B 且花費最省

2. 設一拋物線的對稱軸為鉛直線且過 $A(0,-1)$、$B(-1,-2)$、$C(-2,1)$ 三點，試求其方程式。

答案：∵對稱軸為鉛直線　　∴拋物線為上下形

令拋物線方程式為 $y=ax^2+bx+c$

將 A、B、C 三點代入方程式　得 $\begin{cases}-1=0+0+c\\-2=a-b+c\\1=4a-2b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=-1\end{cases}$　　∴ $y=2x^2+3x-1$

3. 已知橢圓方程式為 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$，試求其中心、頂點、焦點、長軸長、短軸長及正焦弦長。

答案：原式與標準式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 比較可得 $h=-2$、$k=1$

$a^2=16$、$b^2=9$、$c^2=a^2-b^2=16-9=7$，即 $a=4$、$b=3$、$c=\sqrt{7}$

則所求為

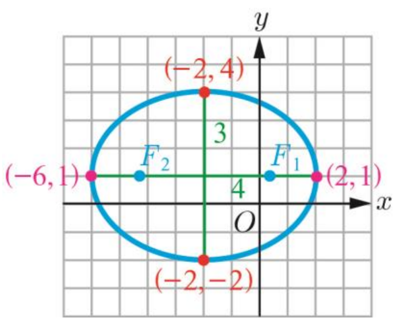
(1)中心 $(-2,1)$
(2)長軸頂點 $(2,1)$、$(-6,1)$
短軸頂點 $(-2,4)$、$(-2,-2)$

(3)焦點 $(-2\pm\sqrt{7},1)$

即 $F_1(-2+\sqrt{7},1)$、$F_2(-2-\sqrt{7},1)$

(4)長軸長 $2a=8$；短軸長 $2b=6$

(5)正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times3^2}{4}=\dfrac{9}{2}$



我們可繪圖成扁長形的橢圓，如圖所示