112學年度第一學期五專(資工二乙)數學期中考

學號：________________ 姓名：________________

分數欄

一、單一選擇題(共 70 分,每題 10 分)

1. (C)設 $a=\log_3 2$ 、 $b=\log_3 5$ ，試利用 a 、 b 表示，則 $\log_4 75=$ (A) $\frac{b+1}{2a}$ (B) $\frac{2b+1}{a}$ (C) $\frac{2b+1}{2a}$ (D) $\frac{b+1}{a}$

解析： $\log_4 75=\frac{\log_3 75}{\log_3 4}=\frac{\log_3 3+\log_3 25}{2\log_3 2}=\frac{2b+1}{2a}$

2. (C)化簡 $\frac{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^{12}\times(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ)^5}{(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)^4\times(\cos 3^\circ+i\sin 3^\circ)^8}=$ (A)1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

解析：原式 $=\frac{(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ)\times(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)}{(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)\times(\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ)}=\frac{\cos 154^\circ+i\sin 154^\circ}{\cos 64^\circ+i\sin 64^\circ}$

$=\cos(154^\circ-64^\circ)+i\sin(154^\circ-64^\circ)=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$

3. (A)若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ ，則 $\sin 2\theta=?$ (A) $-\frac{15}{16}$ (B) $-\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{15}{16}$

解析： $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}\overset{\text{平方}}{\Rightarrow}(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\frac{1}{4})^2\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ $\therefore\sin 2\theta=-\frac{15}{16}$

4. (A)化簡 $\log 2+\log\sqrt{15}-\frac{1}{2}\log 0.6=$ (A)1 (B)0 (C)10 (D)2

解析：原式 $=\log 2+\log\sqrt{15}-\log\sqrt{\frac{6}{10}}=\log\frac{2\times\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{6}{10}}}=\log 10=1$

5. (B) $f(x)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-5$ 之最大值 M，最小值 m，則 $3M-m=?$ (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4

解析： $-\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\le\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\le\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow -2\le\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\le 2\Rightarrow -7\le$ 原式 ≤ -3 $\therefore M=-3, m=-7$

6. (A)設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ ，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{7}{25}$ ，則 $\sin(\alpha-\beta)$ 之值 (A) $\frac{-4}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{44}{125}$ (D) $\frac{33}{125}$

解析： $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{-24}{25}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25}=\frac{-100}{125}=-\frac{4}{5}$ (正弦差角公式)

7. (B) $Z=-\sqrt{3}+3i$ ，則 Z 的主幅角為何？ (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{4}{3}\pi$

解析： $|Z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=2\sqrt{3},\quad Z=-\sqrt{3}+3i$

$=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ Z 的主幅角為 $\frac{2\pi}{3}$

二、計算與證明題(共 30 分,每題 10 分)

1. $2^{2x}-3\times 2^{x-1}-1=0$，試求 x 之值。

答案：令 $y=2^x$，$2^{2x}-3\times 2^{x-1}-1=0$

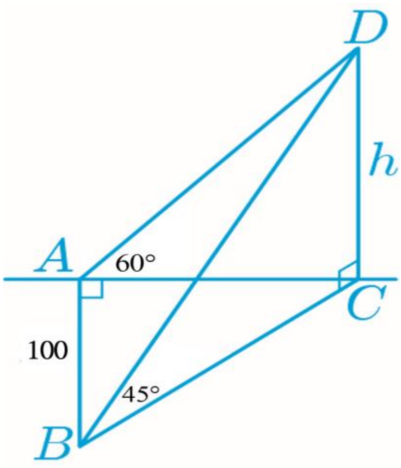
$$\Rightarrow (2^x)^2-\frac{3}{2}\times 2^x-1=0 \Rightarrow y^2-\frac{3}{2}y-1=0$$

$$\Rightarrow 2y^2-3y-2=0 \Rightarrow (2y+1)(y-2)=0$$

$$\Rightarrow y=2 \text{或} -\frac{1}{2}\text{（不合）} \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$$

2. 小明在 A 點處觀測熱氣球在其正東方且仰角為 $60°$；小明往正南方前進 100 公尺後到達 B 點，發現熱氣球仰角為 $45°$，則熱氣球的高度為多少公尺？

答案：如圖所示，設熱氣球的高度 $\overline{CD}$ 為 h 公尺



$\triangle DAC(30°-60°-90°)$ $\qquad \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\cot 60° \Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

$\triangle BDC(45°-45°-90°)$ $\qquad \overline{BC}=\overline{CD}=h$

$\because \triangle ABC$ 為直角三角形 $\quad \therefore \overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

$\Rightarrow h^2=\dfrac{1}{3}h^2+100^2 \Rightarrow h=50\sqrt{6}$ 　故熱氣球的高度為 $50\sqrt{6}$ 公尺

3. 設 $z_1=(2+i)^2(1+3i)^2$、$z_2=(1-i)^4(6-8i)$，試求 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ 之值。

答案：$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{|(2+i)^2(1+3i)^2|}{|(1-i)^4(6-8i)|} \quad =\dfrac{|2+i|^2|1+3i|^2}{|1-i|^4|6-8i|}=\dfrac{(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2})^4\times\sqrt{100}} \quad =\dfrac{5}{4}$