113學年度第二學期五專(資工二乙)數學期中考

分數欄

學號：________________________ 姓名：________________________

一、單一選擇題(共 60 分,每題 6 分)

1. (A) 若 $A(3,1), B(-4,6)$ 兩點在直線 $L:3x-2y+k=0$ 之異側，則 k 之範圍為
   (A) $-7<k<24$　(B) $k<-7$ 或 $k>24$　(C) $k>-7$　(D) $-24<k<7$

解析：令 $f(x,y)=3x-2y+k$　$\because A,B$ 在直線 L 異側
$\therefore f(3,1)\times f(-4,6)<0 \Rightarrow (7+k)(-24+k)<0 \Rightarrow -7<k<24$

2. (A) 在坐標平面上，若△ABC 的三頂點坐標分別為 $A(-3,4)$ 、 $B(-1,2)$ 與 $C(3,6)$ ，則 △ABC 與其內部區域可由下列哪一組不等式表示？

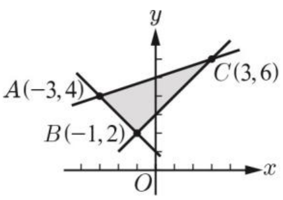
(A) $\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x-y+3\ge 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ x-3y+15\le 0 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x-y+3\ge 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x-3y+15\le 0 \end{cases}$

解析：(1) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{-2}{2}=-1$　$\overleftrightarrow{AB}: y-4=-(x+3) \Rightarrow x+y-1=0$ 取其右側

(2) $m_{\overline{BC}}=\dfrac{4}{4}=1$　$\overleftrightarrow{BC}: y-2=1\cdot(x+1) \Rightarrow x-y+3=0$ 取其左側

(3) $m_{\overline{AC}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　$\overleftrightarrow{AC}: y-4=\dfrac{1}{3}(x+3) \Rightarrow x-3y+15=0$ 取其右側



由圖知選(A)

3. (C) 滿足 $3x+4y\le 12$ 的正整數解共有幾組？　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

解析：

x	1,2	1
y	1	2

共 3 組解

4. (C) 焦點 $(-2,1)$，準線 $y=3$ 的拋物線方程式為　(A) $(y+2)^2=4(x-2)$
   (B) $(y-2)^2=-4(x+2)$　(C) $(x+2)^2=-4(y-2)$　(D) $(x+2)^2=4(y-2)$

解析：焦點 $(-2,1)$，準線 $y=3 \Rightarrow$ 軸： $x=-2$ ，頂點 $(-2,2)$，正焦弦長 4，向下開口
方程式 $(x+2)^2=-4(y-2)$

5. (B) 拋物線 $(y+3)^2=-4(x-1)$ 的準線方程式為　(A) $x=0$　(B) $x=2$　(C) $y=0$　(D) $y=2$

解析：$(y+3)^2=-4(x-1)$ 的準線： $x=1+1$，即 $x=2$

6. (B) 已知一橢圓的焦點坐標為 $(0,2)$ 及 $(0,-2)$，短軸長為 8，則此橢圓方程式為

(A) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$　(B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$　(C) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$　(D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

解析：$F(0,-2),F'(0,-2)$，中心為 $(0,0)$， $2c=4\Rightarrow c=2,2b=8,b=4$

$a^2=b^2+c^2=16+4=20$，$\overline{FF'}$ 平行 y 軸，故所求為 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$

7. (D) 已知雙曲線的兩焦點 $F_1(4,2)$、$F_2(-2,2)$ 且貫軸長為 4，則其方程式為何？

(A) $\frac{(y-2)^2}{5}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$　(B) $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$　(C) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{5}=1$

(D) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$

解析：①中心為 $(\frac{2}{2},\frac{4}{2})=(1,2)$，且圖形為左右形

② $\begin{cases}2c=\overline{F_1F_2}=6\\2a=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3\\a=2\end{cases}$ 可得 $b^2=3^2-2^2=5$ 故方程式為 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$

8. (C) 平面上，和點(0,6),(0,−6)距離差絕對值為 8 的圖形，其正焦弦長為　(A)4　(B)8　(C)10　(D)12

解析：$F(0,6),F'(0,-6)\Rightarrow\overline{FF'}=12=2c,2a=8\Rightarrow c=6,a=4$

$b^2=c^2-a^2=36-16=20$, 正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 20}{4}=10$

9. (C) $\Gamma:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$，若 $P(x,y)$ 在 Γ 上，則 P 到直線 $3x-y-7=0$ 的最大距離為　(A)5　(B) $\sqrt{10}$　(C) $2\sqrt{10}$　(D)10

解析：$P(x,y)$ 在 $\Gamma:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上 $\Rightarrow$ 可設 $x=4\cos\theta,y=5\sin\theta,\theta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow P$ 到直線 $3x-y-7=0$ 距離為 $\left|\frac{12\cos\theta-5\sin\theta-7}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}\right|$

而 $-13-7\le 12\cos\theta-5\sin\theta-7\le 13-7\Rightarrow 0\le|12\cos\theta-5\sin\theta-7|\le 20$

$\therefore$ 最大距離 $\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

10. (D) 拋物線焦點(1,2)，頂點(−3,5)，其正焦弦長為　(A)5　(B)10　(C)15　(D)20

解析：焦點與頂點距離 $|c|=\sqrt{(1+3)^2+(2-5)^2}=5$ $\Rightarrow$ 正焦弦長 $4|c|=20$

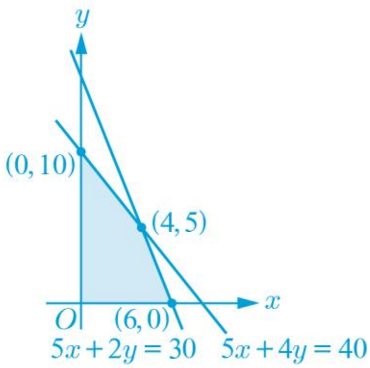
二、計算與證明題(共 40 分,每題 10 分)

1. 某人欲將一層室內面積 60 坪（不含公共區域），分隔成大小兩型客房出租給學生。大套房每間 10 坪大，可住 4 人，每人月租 3000 元；小套房每間 4 坪大，可住 2 人，每人月租 4500 元，而裝潢費大套房每間需 10 萬元，小套房每間 8 萬元。現有 80 萬元準備用於裝潢且學生來源不用顧慮，試問應隔大、小套房各多少間，才可以收到最多的月租？

答案：設可隔出大套房 x 間、小套房 y 間

依題意可得二元一次聯立不等式的限制條件

$$\begin{cases} x、y\text{為非負整數（房間數的限制）} \\ 10x+4y\le 60\text{（坪數總和的限制）} \\ 10x+8y\le 80\text{（裝潢金額的限制，單位萬元）} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x、y\text{為非負整數} \\ 5x+2y\le 30 \\ 5x+4y\le 40 \end{cases}$$



可行解區域為塗色區域，設總月租收入為

目標函數 $f(x,y)=12000x+9000y$

(x,y)	$(0,0)$	$(6,0)$	$(4,5)$	$(0,10)$
$f(x,y)$	0	72000	93000	90000

故隔成大套房 4 間、小套房 5 間　可以得到最多總月租收入 93000 元

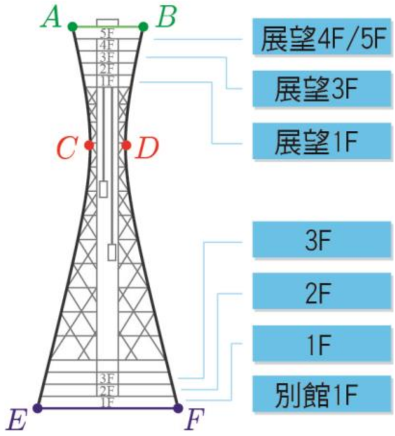
2. 求對稱軸平行 x 軸，且過點$(3,0),(6,-1),(2,1)$三點之拋物線方程式。

答案：設所求 $x=ay^2+by+c$，過$(3,0),(6,-1),(2,1)$

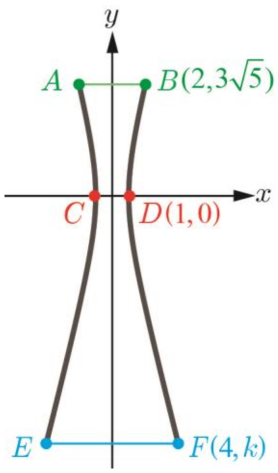
$\Rightarrow 3=c$；$6=a-b+c$；$2=a+b+c \Rightarrow a=1,b=-2,c=3$

拋物線 $x=y^2-2y+3$

3. 圖是某觀光塔模型的截面圖（即館內設施示意圖），其頸部CD剛好是雙曲線的貫軸。已知$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$彼此互相平行，而$\overline{AB}=4$、$\overline{CD}=2$、$\overline{EF}=8$，且$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相距$3\sqrt{5}$公分，試求$\overline{CD}$與$\overline{EF}$相距多少公分？



答案：①將此截面圖放在坐標平面上，如圖所示



設雙曲線的中心為原點，貫軸在x軸上　利用貫軸長$\overline{CD}=2a=2$，即$a=1$

可設雙曲線方程式為$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

②依題意可知$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$彼此互相平行　所求y軸也垂直平分$\overline{AB}$與$\overline{EF}$

又$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相距$3\sqrt{5}$公分　可令$B(2,3\sqrt{5})$、$D(1,0)$、$F(4,k)$，其中$k<0$

並將$B(2,3\sqrt{5})$、$F(4,k)$代入方程式

得$\begin{cases}\dfrac{4}{1}-\dfrac{45}{b^2}=1\\ \dfrac{16}{1}-\dfrac{k^2}{b^2}=1\end{cases}$　解出$b^2=15$、$k=\pm15$（15 不合）　故$\overline{CD}$與$\overline{EF}$相距 15 公分

4. 試求橢圓$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$的中心、焦點、頂點、長軸長、短軸長與正焦弦長。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y+1)^2}{2^2}=1$

圖形為扁長形橢圓

$a=3$、$b=2$、$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

中心$(2,-1)$

焦點：$F_1(\sqrt{5}+2,-1)$及$F_2(-\sqrt{5}+2,-1)$

長軸頂點：$(5,-1)$及$(-1,-1)$

短軸頂點：$(2,1)$及$(2,-3)$

長軸長$2a=6$

短軸長$2b=4$

正焦弦長$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 2^2}{3}=\dfrac{8}{3}$