113 學年度第二學期五專(資工二乙)數學第一次小考

分數欄

學號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、單一選擇題(共 60 分,每題 15 分)

1. (D)已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & -2\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}6 & 6\\-4 & 2\end{bmatrix}$與 X，滿足 $2X+3A=B$，則 $X=$?

   (A)$\begin{bmatrix}4 & 6\\-8 & 4\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}22 & 18\\-4 & 2\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}0 & 6\\-16 & 8\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}0 & 3\\-8 & 4\end{bmatrix}$

解析：由 $2X+3A=B$ 移項得 $2X=B-3A$　等式兩邊同乘 $\frac{1}{2}$ 得

$$X=\frac{1}{2}B-\frac{3}{2}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 6\\-4 & 2\end{bmatrix}-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\-2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\-8 & 4\end{bmatrix}$$

2. (B)設 a 為實數且方程組 $\begin{cases}ax+y=3\\2x+(a+1)y=-3\end{cases}$ 無解，則 $a=$　(A)2　(B)1　(C)-1　(D)-2

解析：$\Delta=\begin{vmatrix}a & 1\\2 & a+1\end{vmatrix}=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$　$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 1\\-3 & a+1\end{vmatrix}=3(a+1)+3=3(a+2)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}a & 3\\2 & -3\end{vmatrix}=-3a-6=-3(a+2)$

$\because$ 方程式無解，$\therefore \Delta=0$ 且 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為 0　故 $a=1$

3. (D)設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$，若 $AB=C=[c_{ij}]$，則 $c_{13}=$　(A)-7　(B)-3

   (C)11　(D)13

解析：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 5 & 13\\-3 & -3 & 11\end{bmatrix}, c_{13}=13$$　故選(D)

4. (D)已知 A 為二階方陣，且 $A^2=3A$，若 $(3A-2I_2)^2=mA+nI_2$，m、n 為實數，則 $m+n=$?

   (A)16　(B)17　(C)18　(D)19

解析：$(3A-2I_2)^2=9A^2-12A+4I_2=9(3A)-12A+4I_2=27A-12A+4I_2=15A+4I_2$

$\Rightarrow m=15$、$n=4$　$\therefore m+n=19$

二、計算與證明題(共 40 分,每題 20 分)

1. 設 d、e、f 為實數，已知圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，且點 $(-2,1)$、$(0,1)$ 與 $(-1,2)$ 在此圓周上，求 d、e、f 之值。

答案：因為 $(-2,1)$、$(0,1)$、$(-1,2)$ 在圓周上，所以將點代入方程式可得

$$\begin{cases}4+1-2d+e+f=0\\1+e+f=0\\1+4-d+2e+f=0\end{cases}\text{，整理得}\begin{cases}-2d+e+f=-5\cdots\cdots①\\e+f=-1\cdots\cdots②\\-d+2e+f=-5\cdots\cdots③\end{cases}$$

①−② 得 $-2d=-4$，即 $d=2$

①−③ 得 $-d-e=0$，所以 $e=-2$，代入②式得 $f=1$

故 $d=2$、$e=-2$、$f=1$

2. 試寫出方程組 $\begin{cases}x-y+z=6\\3x-2y-z=6\\2x+3y-2z=0\end{cases}$ 的

(1)係數矩陣　(2)增廣矩陣　(3)利用矩陣列運算求出其解

答案：(1)係數矩陣為 $\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&-2&-1\\2&3&-2\end{bmatrix}$

(2)增廣矩陣為 $\begin{bmatrix}1&-1&1&6\\3&-2&-1&6\\2&3&-2&0\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1&-1&1&6\\3&-2&-1&6\\2&3&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&6\\0&1&-4&-12\\0&5&-4&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&6\\0&1&-4&-12\\0&0&16&48\end{bmatrix}$

化為上三角形式的方程組為 $\begin{cases}x-y+z=6\cdots\cdots①\\y-4z=-12\cdots\cdots②\\16z=48\cdots\cdots③\end{cases}$

由③得 $z=3$ 代入②，得 $y-12=-12\Rightarrow y=0$

將 $y=0,z=3$ 代入①，得 $x=3$

故解為 $(3,0,3)$