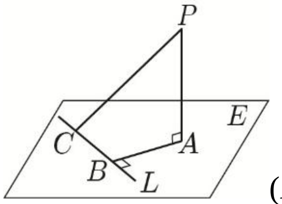
113 學年度第一學期五專(資工二乙)數學第一次小考

學號：________________ 姓名：________________

分數欄

一、單一選擇題(共 60 分,每題 20 分)

1. (C)設直線 PA 垂直平面 E 於 A 點，且直線 L 是平面 E 上一條直線，C 是 L 上一點，如圖所示，若直線 AB 垂直 L 於 B 點，且 $\overline{PA}=2$ 、 $\overline{AB}=1$ 、 $\overline{BC}=2$ ，則 $\overline{PC}=?$



(A) $\sqrt{5}$　(B) $\sqrt{8}$　(C) 3　(D) $\sqrt{10}$

解析：① $\overline{PA}\perp E \Rightarrow \overline{PA}\perp\overline{AB}$ ，$\therefore \overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

② $\overline{PA}\perp\overline{AB}$ 、 $\overline{AB}\perp L \Rightarrow$ 三垂線定理知 $\overline{PB}\perp L$

$\therefore \overline{PB}\perp\overline{BC} \Rightarrow \overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$

2. (B) $Z=-\sqrt{3}+3i$ ，則 Z 的主幅角為何？　(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) π　(D) $\frac{4}{3}\pi$

解析：$|Z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=2\sqrt{3},$

$$
\begin{aligned}
Z&=-\sqrt{3}+3i\\
&=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Z 的主幅角為 $\frac{2\pi}{3}$

3. (D)下列何者為直角坐標平面上之點 $(1,-\sqrt{3})$ 的極坐標？　(A) $(2,\frac{\pi}{3})$　(B) $(2,\frac{2\pi}{3})$　(C) $(2,\frac{4\pi}{3})$　(D) $(2,\frac{5\pi}{3})$

解析：設極坐標為 (r,θ) ，則 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

而 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta$ 為第四象限角且 $\theta=\frac{5\pi}{3}$ ，故極坐標為 $(2,\frac{5\pi}{3})$

二、計算與證明題(共 40 分,每題 20 分)

1. 化簡 $\dfrac{(\cos 12°+i\sin 12°)^4(\cos 38°+i\sin 38°)^3}{(\cos 21°+i\sin 21°)^2}$ 。

答案：原式 $=\dfrac{(\cos 48°+i\sin 48°)(\cos 114°+i\sin 114°)}{\cos 42°+i\sin 42°}$

$$=\frac{\cos(48°+114°)+i\sin(48°+114°)}{\cos 42°+i\sin 42°}$$

$$=\frac{\cos 162°+i\sin 162°}{\cos 42°+i\sin 42°}$$

$$=\cos 120°+i\sin 120°$$

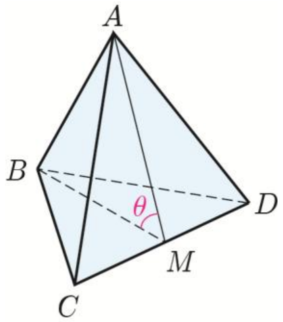
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

2. 在邊長為6的正四面體 $A-BCD$（各面均為正三角形）中，如圖所示，若 M 為 $\overline{CD}$ 的中點，

且 $\angle AMB=\theta$ ，則

(1) $\angle AMB$ 是否為平面 ACD 與平面 BCD 的兩面角？為什麼？

(2) $\cos\theta$ 之值為何？



答案：(1)因為 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 皆為正三角形，且 M 為 $\overline{CD}$ 中點

所以 $\overline{CD}\perp\overline{AM}$ 且 $\overline{CD}\perp\overline{BM}$

故 $\angle AMB$ 為兩面角

(2) $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{BC}\times\sin 60°=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

在 $\triangle ABM$ 中，依餘弦定理得

$$\cos\theta=\frac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{BM}}=\frac{27+27-36}{2\times(3\sqrt{3})\times(3\sqrt{3})}=\frac{1}{3}$$