習題解答：

1.某氣象衛星的壽命服從指數分配，平均壽命 μ 為 30 個月，請求出下列問題的答案：

（1）能夠運作至少 45 個月的機率為何？

（2）運作會在 6 個月時間故障的機率有多少？

（3）在 24 個月與 45 個月之間故障的機率為何？

【解答】

(1) 已知 MTBF=30， 而 $\lambda = \dfrac{1}{\text{MTBF}} = \dfrac{1}{30}$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

，因此 $R(45) = e^{-\frac{45}{30}}$

$$= e^{-1.5}$$

=0.223

(2) 已知 MTBF=30 ，而 $\lambda = \dfrac{1}{\text{MTBF}} = \dfrac{1}{30}$

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

，因此 $F(6) = 1 - e^{-\frac{6}{30}}$

$$= 1 - e^{-0.2}$$

=0.1813

(3) $P(24 \le T \le 45) = P(T \le 45) - P(T \le 24)$

$$= F(45) - F(24)$$

$$= 1 - e^{-\frac{45}{30}} - (1 - e^{-\frac{24}{30}})$$

$$= e^{-\frac{24}{30}} - e^{-\frac{45}{30}}$$

$$= e^{0.8} - e^{-1.5}$$

$$= 0.4493 - 0.2231$$

=0.2262

2.某公司的電燈泡壽命服從指數分配，其平均壽命 μ 為 5000 小時，請計算燈泡能在下列情況使用的機率：

（1）至少 5000 小時

（2）不超過 2000 小時

（3）在 2000 小時與 6000 小時之間

【解答】

(1) 已知 MTBF=5000 ，而 $\lambda = \dfrac{1}{\text{MTBF}} = \dfrac{1}{5000}$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

，因此 $R(5000) = e^{-\frac{5000}{5000}}$

$$= e^{-1}$$

=0.3679

(2) 已知 MTBF=5000 ，而 $\lambda = \dfrac{1}{\text{MTBF}} = \dfrac{1}{5000}$

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

，因此 $F(2000) = 1 - e^{-\frac{2000}{5000}}$

$$= e^{-0.4}$$

=0.67

(3) $P(2000 \le T \le 6000) = P(T \le 6000) - P(T \le 2000)$

$$= F(6000) - F(2000)$$

$$= 1 - e^{-\frac{6000}{5000}} - (1 - e^{-\frac{2000}{5000}})$$

$$= e^{-\frac{2000}{5000}} - e^{-\frac{6000}{5000}}$$

$$= e^{-0.4} - e^{-1.2}$$

$$= 0.67 - 0.3012$$

=0.3688

3.某輪胎平均壽命服從常態分配，其平均數μ為 50,000 哩，且標準差σ為 4000 哩。請求出下列各項之機率：

（1）使用 54,000 哩之前故障之機率？

（2）使用 56,000 哩之後才故障之機率？

（3）故障機率為 10%之服務壽命為何？

【解答】

(1)

$$P(X<54000)=P(\frac{X-50000}{4000}<\frac{54000-50000}{4000})=P(Z<1)=0.8413$$

(2) $P(X>56000)=P(\frac{X-50000}{4000}>\frac{56000-50000}{4000})$

$$=P(Z>1.5)=1-P(Z<1.5)$$

$$=1-0.9332=0.0668$$

(3)查常態分配表，找出對應 10%常態曲線下面積之Z值為-1.28

$$Z=-1.28=\frac{X-50000}{4000}$$

則$X=50000-1.28\times4000=44880$哩

4.某一系統由 3 個相關組件串聯而成，為使系統能正常運作，所有組件必須正常運作，每個組件可靠度相同，假如系統的可靠度是 0.96，請問每個組件的可靠度應該是多少？

【解答】

假設每個組件可靠度機率為R，則此三個組件所組成系統可靠度為 0.96，亦即

$$R_S=0.96=R\times R\times R=R^3$$

所以每個組件可靠度為 $R=\sqrt[3]{0.96}=0.986$

13.某組件的壽命試驗計畫，其樣本數$n=18$，故障時間互相獨立並服從相同的指數分配，在預先指定的測試時間$t_c=130$小時到達時中止試驗，當組件故障發生時，不考慮置換之情形下，若在測試期間共有 7 次故障，其故障時間分別為 8、26、35、42、62、84、和 124 小時，

試估計該組件之平均壽命 μ 、故障率 λ ，並求出平均壽命 μ 之 90% 信賴區間？

【解答】

先計算出此壽命試驗計畫總測試時間為

$$T=(8+26+35+42+62+84+124)+(18-7)\times 130$$
$$=1811\text{ 小時}$$

則該組件之平均壽命 μ 的估計值為

$$\hat{\mu}=\frac{1811}{7}=258.7\text{ 小時}$$

故障率 λ 的估計值為

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\hat{\mu}}=\frac{1}{258.7}=0.00387\text{ /小時}$$

平均壽命 μ 之 90%信賴區間為

$$\frac{2T}{\chi^2_{0.05,16}}<\mu<\frac{2T}{\chi^2_{0.95,14}}$$

$$\frac{2(1811)}{26.3}<\mu<\frac{2(1811)}{6.57}$$

$$137.7<\mu<551.3$$

14.假設可允收貨批產品的平均壽命 $\mu_0=900$ 小時，被拒收的機率 $\alpha=0.05$ ，假設可拒收產品的平均壽命 $\mu_1=300$ 小時，被允收的機率 $\beta=0.1$ ，樣本大小為 n=24，在測試中產品故障時，不考慮置換情況下，試利用 H-108 手冊設計出定時中止試驗壽命試驗計畫。

【解答】

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{300}{900}\approx 0.333$$

在 $\alpha=0.05$，$\beta=0.1$，與 $\frac{\mu_1}{\mu_0}=0.333$，查表 8.3，可得編碼代字為 B-8，由於計算的比率大部分與表中的值不同，一般取下一個較大的代碼。從表 8.4 編碼 B-8 可查得拒收數 $r=8$，而在樣本大小 n 為 24 下，我們選擇拒收數的倍數為 $3r$ ，而對應的 $\frac{T}{\mu_0}=0.197$ ，則預先指定的測試時間 $T=0.197\mu_0=0.197\times 900=177.3$ ，在測試中產品故障時，

不考慮置換的情況下，若第 8 次故障發生於測試中止時間 177.3 小時之前，則拒收該貨批，若在測試中止時間 177.3 小時還未發生第 8 次故障，則允收該貨批。

15.假設可允收產品的平均壽命 $\mu_0 = 900$ 小時，被拒收的機率 $\alpha = 0.05$ ，拒收數 r =3，樣本大小 n =9，在測試中產品故障時，不考慮置換情況下，試利用 H-108 手冊設計出定時中止試驗壽命試驗計畫。

【解答】

我們已知 $\mu_0 = 900$ 小時， $\alpha = 0.05$ ，拒收數 r =3，且樣本大小 n =9 或 $3r$ ，從表 8-4，可得 $\dfrac{T}{\mu_0} = 0.103$ ，因此 T 值為

$$T = 0.103 \times \mu_0$$
$$= 0.103 \times 900$$
$$=92.7 \text{ 小時}$$

從貨批隨機抽取 9 件產品測試，在測試中產品故障時，不考慮置換的情況下，假如在測試中止時間 92.7 小時之前發生第 3 次故障，則拒收該貨批，假如在測試中止時間 92.7 小時還未發生第 3 次故障，則允收該批產品。

16.假設可允收產品的平均壽命為 $\mu_0 = 800$ 小時，被拒收的機率為 $\alpha = 0.05$ ，可拒收產品的平均壽命為 $\mu_1 = 400$ 小時，被允收的機率為 $\beta = 0.1$ ，若預先指定的測試中止時間 $t = 160$ 小時，在測試中產品故障時，不考慮置換的情況下，試利用 H-108 手冊設計出定時中止試驗壽命試驗計畫。

【解答】

計算出兩個比率 $\dfrac{\mu_1}{\mu_0} = \dfrac{1}{2}$ 與 $\dfrac{T}{\mu_0}$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{T}{\mu_0} = \frac{160}{800} = \frac{1}{5}$$

利用 $\dfrac{\mu_1}{\mu_0} = \dfrac{1}{2}$ ， $\dfrac{T}{\mu_0} = \dfrac{1}{5}$ ， $\alpha = 0.05$ 與 $\beta = 0.1$ 可從表 8.6 查出 $r = 19$ 與

$n = 72$ 值。從貨批隨機抽取 72 件產品測試，在測試中產品故障時，不考慮置換的情況下，假如在測試中止時間 160 小時之前發生第 19 次故障，則拒收該貨批，假如在測試中止時間 160 小時還未發生第 19 次故障，則允收該批產品。