樣本平均數與全距 $\overline{X}-R$ 管制圖

若某一產品的品質特性服從常態分配 N(μ ， σ^2)，其平均數為 μ ，變異數為 σ^2 ，標準差為 σ ，且平均數 μ 、標準差 σ 皆已知，令 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ 代表樣本數為 n 的一組樣本，則樣本平均數為

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots. + X_n}{n}$$

我們知道 $\overline{X}$ 的分配亦為常態分配 N(μ ， $\frac{\sigma^2}{n}$)，且其平均數、變異數和標準差分別為 $\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu$ 、 $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 和 $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{V(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。在雙尾假設檢定且顯著水準為 α 時，我們可以求得下面的二個臨界點(Critical Point)：

$$\mu + Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} = \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

和 $$\mu - Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} = \mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.1)$$

因此在 μ 和 σ 已知時，我們用(3.1)來做為監控製程平均數 μ 的 $\overline{X}$ 管制圖的管制上下限。習慣上我們使用顯著水準 $\alpha = 0.0027$ ，則 $Z_{\alpha/2} = 3$ ，此時我們稱此組管制界限為「三倍標準差管制界限」。若在抽樣時，有一組樣本的製程樣本平均數之樣本點落在管制界限外或樣本平均數之樣本點散布的情形不是隨機的形態而是呈現系統性的變化，則表示製程平均數已經偏離目標值 μ 。

因此當 μ 與 σ 已知時，我們可得到建構 $\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

μ與σ已知時，$\overline{X}$管制圖的三倍標準差的管制界限可寫成：

$$UCL_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma$$
$$CL_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} = \mu \tag{3.2}$$
$$LCL_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma$$

其中$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$是一個會隨樣本變數n變動的值，可由附表 8 中查得。

由於母體平均數μ和母體標準差σ在實務應用上通常未知，因此我們必須從母體抽取樣本來估計母體平均數μ和母體標準差σ，因此我們若用全距R來估計母體標準差σ，當樣本大小n為 4，5 或 6 時，利用全距法來估計母體標準差是一簡單有效的估計方法。

假設我們從母體抽取m組樣本，通常 $20 \le m \le 25$，每組樣本有n個衡量品質特性的觀察值，假設第i組樣本的樣本為$X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}$，第$i$組樣本的樣本平均數為$\overline{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{n}$，$1 \le i \le m$，第$i$組樣本的全距為：

$$R_i = \max(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}) - \min(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_n}) \tag{3.3}$$

令$\overline{X}_1, \overline{X}_2 .. \overline{X}_m$分別是$m$組樣本的樣本平均數，則製程平均數$\mu$的最佳估計量為

$$\hat{\mu} = \overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + ... \overline{X}_m}{m} \tag{3.4}$$

因此$\overline{\overline{X}}$可以被用來估計母體平均數μ，所以可用$\overline{\overline{X}}$當做初期$\overline{X}$管制圖的中心線。

建構管制界限時，除了訂定顯著水準α外，我們尚須找到一個母體標準差σ的估計值。在此我們可用這m組樣本的樣本標準差S_i或全距R_i來估計母體標準差σ，此處使用全距的方法。

令 $R_1, R_2 .... R_m$ 分別是 m 組樣本的全距，則平均全距為

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + ...R_m}{m} \tag{3.5}$$

若抽出樣本的母體分配是常態分配，則全距和標準差比值為一隨機變數 $W = \dfrac{R}{\sigma}$ 稱之為相對全距（Relative Range）。W 分配的參數是樣本數 n 的函數，W 的期望值或平均數為 $\mu_W = E(W) = E\left(\dfrac{R}{\sigma}\right) = d_2$ ，故我們用 $\hat{\sigma} = \dfrac{R}{d_2}$ 來估計母體標準差 σ ，而且 $\hat{\sigma} = \dfrac{R}{d_2}$ 是 σ 的不偏估計量（Unbiased Estimator），其中 d_2 是一個會隨樣本數 n 而變動的值，可由附表 8 查得。

因此，若 $\overline{R}$ 是 m 組樣本全距的平均，則我們使用

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \tag{3.6}$$

來估計母體標準差 σ，$\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2}$ 亦是 σ 的不偏估計量（Unbiased Estimator）。

當我們分別用 $\hat{\mu} = \overline{\overline{X}}$ 來估計母體平均數 μ 和 $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2}$ 來估計母體標準差 σ ，我們可以求得 $\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限為

$$UCL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} + 3\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \hat{\mu} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$= \overline{\overline{X}} + 3\frac{\overline{R}/d_2}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} + 3\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (\text{令 } A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}) \tag{3.7}$$

$$= \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$

$$CL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} = \hat{\mu} = \overline{\overline{X}}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} - 3\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \hat{\mu} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\overline{R}/d_2}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$

因此當 μ 與 σ 未知時，我們可得到建構 $\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

當 μ 與 σ 未知時，$\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差的管制界限可改寫成：

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$

$$CL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} \tag{3.8}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$

其中 A_2 是一個會隨樣本數 n 變動的值，可由附表 8 中查得。

現在我們探討 R 管制圖的管制界限。由於 μ 與 σ 在實務應用上通常未知，又 $\mu_W = E(W) = E(\frac{R}{\sigma}) = d_2$，所以 $\mu_R = E(R) = d_2\sigma$，故我們以 $\hat{\mu}_R = d_2\hat{\sigma} = d_2\frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}$ 為 R 管制圖的中心線，而要求得 R 管制圖的管制上下限，則需先求出 σ_R 的估計量 $\hat{\sigma}_R$。若母體為常態分配，則隨機變數 $W = \frac{R}{\sigma}$ 的標準差為 $\sigma_W = \sqrt{V(W)} = d_3$，因 $R = \sigma W$，故 R 的標準差 σ_R 可用下式來表示：

$$\sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sqrt{V(\sigma W)} = \sqrt{\sigma^2 V(W)} = \sqrt{d_3^2\sigma^2} = d_3\sigma \tag{3.9}$$

當 σ_R 未知時，我們可以用

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \hat{\sigma} = d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} \tag{3.10}$$

來估計 σ_R 。

故 R 管制圖的三倍標準差管制界限可寫成：

$$UCL_R = \hat{\mu}_R + 3\hat{\sigma}_R = d_2 \hat{\sigma} + 3d_3 \hat{\sigma} = d_2 \frac{\overline{R}}{d_2} + 3d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R} + 3d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}(1 + 3\frac{d_3}{d_2})$$

$$CL_R = \hat{\mu}_R = d_2 \hat{\sigma} = d_2 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R} \tag{3.11}$$

$$LCL_R = \hat{\mu}_R - 3\hat{\sigma}_R = d_2 \hat{\sigma} - 3d_3 \hat{\sigma} = d_2 \frac{\overline{R}}{d_2} - 3d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R} - 3d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}(1 - 3\frac{d_3}{d_2})$$

令 $D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$

$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$

因此當 σ 未知時，我們可得到建構 R 管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

當 σ 未知時， R 管制圖的三倍標準差管制界限可改寫為：

$$UCL_R = D_4 \overline{R}$$

$$CL_R = \overline{R} \tag{3.12}$$

$$LCL_R = D_3 \overline{R}$$

D_3, D_4 皆為隨樣本數 n 變動的值，可由附表 8 中查得。

當製程平均數 μ 和標準差 σ 為已知時，就不必分析過去的資

料，我們可以直接利用這些標準值建立 $\overline{X}-R$ 管制圖。

【例題 3.1】

某工廠欲管制所生產銅管之內徑尺寸，每半個小時從生產線中抽取一組樣本，每組含有 5 個衡量內徑尺寸之測量值，共計抽樣了 10 個小時，所得的數據如表 3.1 所示，試利用這些數據建立 $\overline{X}-R$ 管制圖。

表 3.1

組別	測量值					$\overline{X}_i$	R_i
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
1	15.2	14.7	14.6	13.9	14.7	14.62	1.3
2	14.8	15.1	15.5	14.6	15.1	15.02	0.9
3	14.7	15.2	14.3	14.4	15.3	14.78	1.0
4	15.1	15.0	13.9	15.3	15.1	14.88	1.4
5	15.2	15.3	14.4	15.7	15.2	15.16	1.3
6	15.0	13.8	14.4	15.1	14.9	14.64	1.3
7	15.3	14.5	15.6	15.5	14.4	15.06	1.2
8	14.9	14.7	13.8	15.4	14.7	14.70	1.6
9	14.6	15.6	13.9	14.9	14.4	14.68	1.7
10	15.5	15.2	13.3	13.9	14.4	14.46	2.2
11	14.3	14.6	14.7	14.5	15.6	14.74	1.3
12	13.9	14.8	13.8	14.7	13.8	14.20	1.0
13	15.1	15.1	14.4	15.6	13.8	14.80	1.8
14	13.9	15.1	14.9	13.8	14.2	14.38	1.3
15	14.6	15.2	15.9	16.1	14.5	15.26	1.6
16	14.4	15.6	14.8	14.8	14.4	14.80	1.2
17	15.3	16.0	14.6	16.2	15.5	15.52	1.6
18	15.7	14.9	15.9	15.9	13.9	15.26	2.0
19	15.1	14.7	14.4	15.7	14.6	14.90	1.3
20	14.9	15.0	14.8	14.8	14.4	14.78	0.6
合計						$\sum_{i=1}^{20}\overline{X}_i$	$\sum_{i=1}^{20}R_i$

						$=296.64$ $\overline{\overline{X}}$ $=14.832$	$=27.6$ $\overline{R}=1.38$

【解】

1. 計算每組樣本之平均數 $\overline{X}_i$ 和全距 R_i ，並將其填入表中。

2. 求 $\overline{\overline{X}}$ 和 $\overline{R}$

$$\overline{\overline{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i}{m}=\frac{296.64}{20}=14.832$$

$$\overline{R}=\frac{\sum_{i=1}^{m}R_i}{m}=\frac{27.6}{20}=1.38$$

3. 樣本大小 $n=5$ ，查附表 8 得 $A_2=0.577,\ D_4=2.115,\ D_3=0$

4. 計算管制界限

R 管制圖的三倍標準差管制界限為

$$UCL_R=D_4\overline{R}=2.115\times 1.38=2.9187$$

$$CL_R=\overline{R}=1.38$$

$$LCL_R=D_3\overline{R}=0\times 1.38=0$$

$\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限為

$$UCL_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}+A_2\overline{R}=14.832+0.577\times 1.38=15.62826$$

$$CL_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}=14.832$$

$$LCL_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}-A_2\overline{R}=14.832-0.577\times 1.38=14.03574$$

5. 在建構 $\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限時，我們需要用到製程標準差 σ 或製程標準差 σ 的估計值，若監控製程變異的 R 管制圖不在管制狀態，則 $\overline{X}$ 管制圖的管制界限就沒有多大意義，所以在建構 $\overline{X}-R$ 管制圖時，最好先判斷 R 管制圖是否在管制狀態，若 R 管制圖顯示製程變異是在管制狀態，我們再去判斷 $\overline{X}$ 管制圖是否在管制狀態。以 20 組樣本的數據所建構出 $\overline{X}$ 管制圖及 R 管制圖，如圖 3.2 所示，從 R 管制圖可看出沒有樣本點落在管制界限外，且樣本點的散佈是隨機的，故目前的製程變異是在管制狀態下，從 $\overline{X}$ 管制圖可看出沒有樣本點落在管制界限外，且樣本點的散佈是隨機的，故目前的製程平均亦是在管制狀態下，所以目前的 $\overline{X}$ 管制圖及 R 管制圖皆在管制狀態，可以用於未來生產的監控。

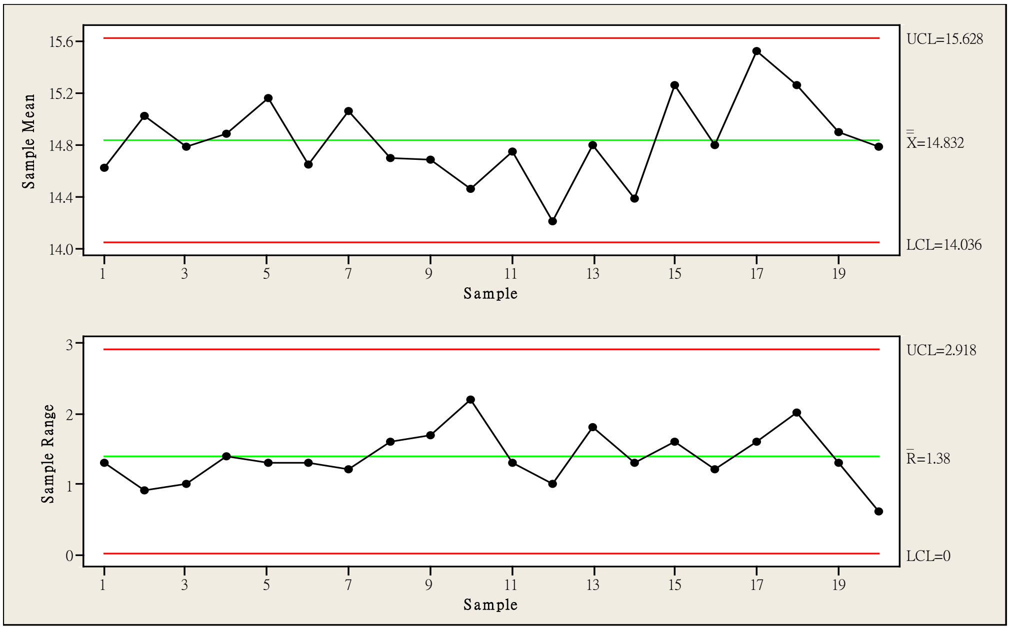

圖 3.2　$\overline{X}$ 管制圖及 R 管制圖

母體標準差 σ 的估計：

因為 $\hat{\sigma}=\dfrac{\overline{R}}{d_2}$ 是母體標準差 σ 的不偏估計量，所以我們可以利用 $\hat{\sigma}=\dfrac{\overline{R}}{d_2}$ 來估計母體標準差 σ，查附表 8，可得 $n=5$ 時，$d_2=2.326$，所以母體標準差 σ 的估計值為 $\hat{\sigma}=\dfrac{\overline{R}}{d_2}=\dfrac{1.38}{2.326}=0.593$

製程不良率 p 的估計：

假若銅管內徑尺寸之規格界限為 14.8 ± 1，管制圖的資料可以用來估計相對於規格的製程不良率 p。假設銅管內徑尺寸為常態分配。其平均數 μ 的估計值為 $\hat{\mu}=14.832$，標準差 σ 的估計值為 $\hat{\sigma}=0.593$，則我們可以估計銅管內徑尺寸之製程不良率 p 為

$$p=P\left(X<13.8\right)+P\left(X>15.8\right)=P\left(\frac{X-14.832}{0.593}<\frac{13.8-14.832}{0.593}\right)$$

$$+P\left(\frac{X-14.832}{0.593}>\frac{15.8-14.832}{0.593}\right)$$

$$=\Phi(-1.74)+1-\Phi(1.63)=0.0409+1-0.9484\cong 0.0925$$

換句話說，所生產銅管內徑尺寸每一百件有 9 件是不合格。