樣本平均數與樣本標準差 $\overline{X}-S$ 管制圖

$\overline{X}-S$ 管制圖和 $\overline{X}-R$ 管制圖在使用的目的皆在監控製程的平均數及變異，唯一的差別在於使用不同的估計方法來估計母體標準差 σ。一般而言，在實務上，由於計算的方便，我們較常使用 $\overline{X}-R$ 管制圖。但若是每組樣本的樣本數較大的時候，用全距 R 來估計母體標準差 σ 的準確性與統計效率會下降，此時我們便需使用樣本標準差 S 來估計母體標準差 σ 會較準確，但計算較費時。一般而言，當樣本數小時，若 $n<10$ 時可使用 $\overline{X}-R$ 管制圖；若樣本數 n 較大，若 $n\geq 10$ 或 12 與樣本數 n 是變動時，則用 $\overline{X}-S$ 管制圖較好。

假如母體變異數 σ^2 未知，樣本變異數 $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ 是母體變異數 σ^2 的不偏估計量，但注意，樣本標準差 S 並不是母體標準差 σ 的不偏估計量。在常態分配假設下，S 的平均數為 $\mu_S=E(S)=c_4\sigma$，S 的標準差 $\sigma_S=\sqrt{V(S)}=\sigma\sqrt{1-c_4^2}$，其中 c_4 為隨著 n 而變的值，所以 S 管制圖的中心線為 $c_4\sigma$，而其三倍標準差管制界限則為：

$$
\begin{aligned}
UCL_S &= \mu_S+3\sigma_S=c_4\sigma+3\sigma\sqrt{1-c_4^2}=(c_4+3\sqrt{1-c_4^2})\sigma \\
CL_S &= \mu_S=c_4\sigma \qquad\qquad (3.16)\\
LCL_S &= \mu_S-3\sigma_S=c_4\sigma-3\sigma\sqrt{1-c_4^2}=(c_4-3\sqrt{1-c_4^2})\sigma
\end{aligned}
$$

通常，我們定義下列兩個常數：

$$B_5=c_4-3\sqrt{1-c_4^2}$$
$$B_6=c_4+3\sqrt{1-c_4^2}$$

式中

$$c_4 = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{3.17}$$

因此當σ已知時，我們可得到建構S管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

> 若σ為已知時，S管制圖的三倍標準差管制界限可改寫成：
>
> $$\begin{aligned} UCL_S &= B_6\sigma \\ CL_S &= c_4\sigma \\ LCL_S &= B_5\sigma \end{aligned} \tag{3.18}$$
>
> 上述所列之常數B_6, c_4, B_5皆為隨樣本數n變動的值，皆可由附表 8 中查得。

當製程平均數μ與製程標準差σ已知時，我們可得到建構$\overline{X}$管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

> 若μ與σ已知時，$\overline{X}$管制圖的三倍標準差管制界限可改寫成：
>
> $$\begin{aligned} UCL_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma \\ CL_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} = \mu \\ LCL_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma \end{aligned} \tag{3.19}$$
>
> 上述所列之常數$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$為隨樣本數n變動的值，可由附表 8 中查得。

假設母體標準差σ未知，則我們可以分析過去的資料來估計母體標準差σ，亦即從母體中抽取樣本來估計母體標準差σ。若有m組樣本，每一組有n個衡量品質特性的觀察值，假設第i組樣本的樣本資料為$X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in}$，$1 \le i \le m$，第$i$組樣本的樣本標準差為：

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X_i})^2}{n-1}} \tag{3.20}$$

則m組樣本標準差的平均值$\overline{S}$可寫成：

$$\overline{S} = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_i}{m} \tag{3.21}$$

因為$E(S) = c_4\sigma$，所以$\dfrac{S}{c_4}$是母體標準差σ的不偏估計量，因此我們以$\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$來估計母體標準差$\sigma$，$\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$是母體標準差$\sigma$的不偏估計量(Unbiased Estimator)，所以S管制圖的三倍標準差管制界限為：

$$USL_S = \hat{\mu}_S + 3\hat{\sigma}_S$$

$$= c_4\hat{\sigma} + 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 \times \frac{\overline{S}}{c_4} + 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \overline{S} + 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$= \overline{S}(1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2})$$

$$CL_S = \hat{\mu}_S = c_4\hat{\sigma} = c_4 \times \frac{\overline{S}}{c_4} = \overline{S} \tag{3.22}$$

$$LCL_S = \hat{\mu}_S - 3\hat{\sigma}_S$$

$$= c_4\hat{\sigma} - 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 \times \frac{\overline{S}}{c_4} - 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \overline{S} - 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$= \overline{S}(1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2})$$

在此我們定義兩個常數：

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

因此當製程標準差 σ 未知時，我們可得到建構 S 管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

若 σ 未知時，S 管制圖的三倍標準差管制界限可改寫成：

$$UCL_S = B_4\overline{S}$$

$$CL_S = \overline{S} \tag{3.23}$$

$$LCL_S = B_3\overline{S}$$

上述所列常數 B_3, B_4 皆為隨樣本數 n 變動的值，皆可由附表 8 中查得。

$\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限為：

$$UCL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} + 3\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \hat{\mu} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} + \frac{3}{\sqrt{n}}\frac{\overline{S}}{c_4} = \overline{\overline{X}} + \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\overline{S} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S}$$

$$CL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} = \hat{\mu} = \overline{\overline{X}} \tag{3.24}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \hat{\mu}_{\overline{X}} - 3\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \hat{\mu} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} - \frac{3}{\sqrt{n}}\frac{\overline{S}}{c_4} = \overline{\overline{X}} - \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\overline{S} = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S}$$

其中 $A_3 = \dfrac{3}{c_4\sqrt{n}}$ 。

因此當製程平均數 μ 與製程標準差 σ 未知時，我們可得到建構 $\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限公式如下：

若 μ 與 σ 未知時，$\overline{X}$ 管制圖的管制界限可改寫成：

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S}$$

$$CL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} \tag{3.25}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S}$$

上式中的 $A_3 = \dfrac{3}{c_4\sqrt{n}}$ 為隨樣本數 n 而變動的值，可由附表 8 中查得。

【例題 3.2】

某工廠利用 $\overline{X}-S$ 管制圖來監控所生產零件的外徑尺寸，今抽取了 20 組的樣本，每組的樣本數為 n=15 個，經整理計算後的數據如表 3.2 所示，試建立 $\overline{X}-S$ 管制圖。

表 3.2

樣本組	樣本平均數 $\overline{X}_i$	樣本標準差 S_i
1	23.4	6.4
2	26.2	5.5
3	27.2	4.5
4	22.3	7.2
5	23.6	3.5
6	25.7	4.6
7	24.3	7.2
8	26.6	4.5
9	28.1	6.8
10	24.6	3.8
11	23.3	5.7
12	25.8	8.4

13	22.9	7.9
14	26.5	6.2
15	24.6	4.9
16	22.8	5.8
17	26.7	3.4
18	25.4	4.8
19	25.8	3.7
20	26.5	2.6

【解】

1. 計算 $\overline{\overline{X}}$ 及 $\overline{S}$

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X_i}}{m} = \frac{23.4 + 26.2 + \cdots + 26.5}{20} = 25.115$$

$$\overline{S} = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_i}{m} = \frac{6.4 + 5.5 + \cdots + 2.6}{20} = 5.37$$

2. 計算管制界限

$n = 15$，查附表 8 得 $A_3 = 0.789$， $B_4 = 1.572$， $B_3 = 0.428$。

$\overline{X}$ 管制圖的三倍標準差管制界限為

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} = 25.115 + 0.789 \times 5.37 = 29.35$$

$$CL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} = 25.115$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S} = 25.115 - 0.789 \times 5.37 = 20.88$$

S 管制圖的三倍標準差管制界限為

$$UCL_S = B_4\overline{S} = 1.572 \times 5.37 = 8.442$$

$$CL_S = \overline{S} = 5.37$$

$$LCL_S = B_3\overline{S} = 0.428 \times 5.37 = 2.298$$

3. 將樣本點及管制界限繪入管制圖中，如圖 3.3 所示，從圖中可看出沒有樣本點落在管制界限外且樣本點的散佈是隨機的，故目前的製程是在管制狀態。

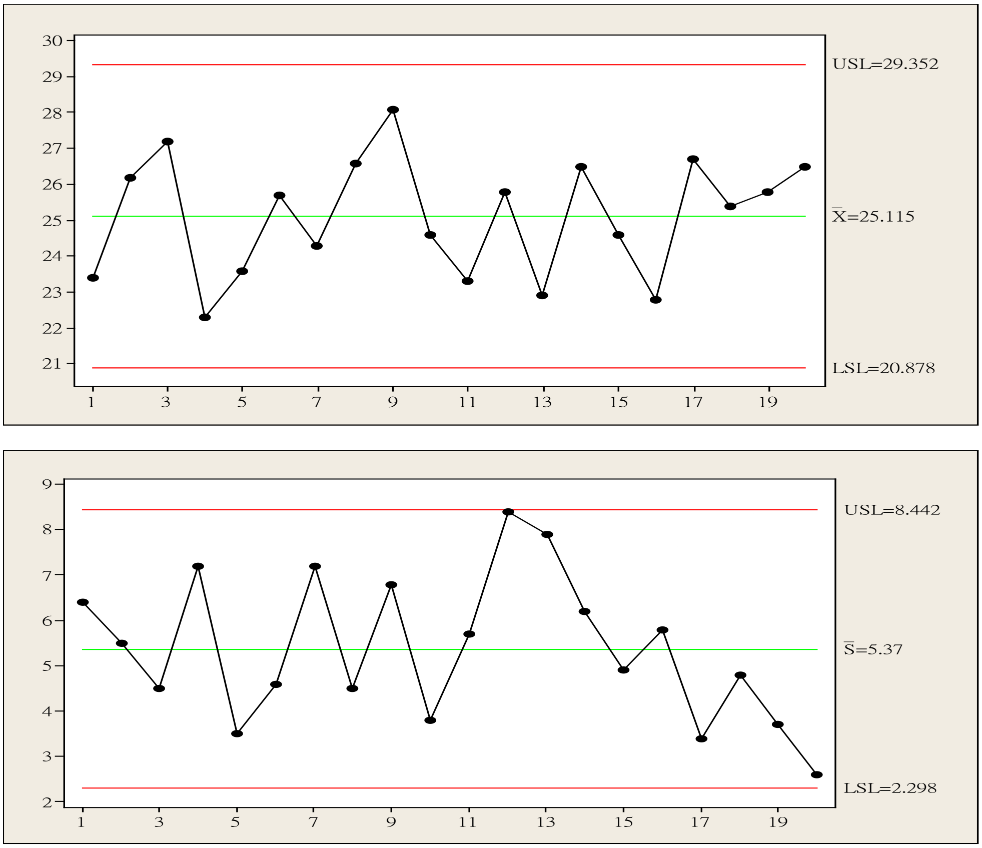

圖 3.3 $\overline{X}$ 管制圖及 S 管制圖

母體標準差 σ 的估計：

因為 $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$ 是母體標準差 σ 的不偏估計量，所以我們可以利用

$\hat{\sigma}=\dfrac{\overline{S}}{c_4}$來估計母體標準差$\sigma$，查附表 8，可得$n$=15 時，$c_4$=0.9823，

所以母體標準差σ的估計值為$\hat{\sigma}=\dfrac{\overline{S}}{c_4}=\dfrac{5.37}{0.9823}=5.467$