5.2 指數加權移動平均管制圖

另一種可用來解決修華特管制圖對於偵查小偏移不夠敏感的方法，我們稱之為指數加權移動平均管制圖(Exponentially Weighted Moving-Average Control Chart 或稱 EWMA 管制圖)。指數加權移動平均管制圖是利用所有以前的樣本統計量(例如：樣本平均數 $\bar{X}_i$ 或個別觀測值 X)的加權平均值來建構管制圖，每一個樣本我們都給予一個權數；至於這些權數的分派，則是與樣本統計量的年齡呈幾何遞減，從最近的樣本統計量開始，我們給予較高的權數，而發生在過去的樣本統計量則給予較低的權數。

由於權數的分派給予最近的樣本統計量較高的權數，因此指數加權移動平均值將會反應最近的製程表現，而由過去的研究得知，EWMA 管制圖在監控製程小偏移的表現上與累積和管制圖差不多，但是 EWMA 管制圖卻較易於設立與使用，在實務應用方面，累積和管制圖與 EWMA 管制圖主要用於個別觀察值 X_i，但亦可用於樣本組的樣本平均數 $\bar{X}_i$，我們將探討樣本組的樣本平均數 $\bar{X}_i$ 的 EWMA 管制圖，對於個別觀察值 X_i 的 EWMA 管制圖只要令樣本數 $n=1$，亦即將個別觀察值 X_i 取代樣本平均數 $\bar{X}_i$ 。

5.2.1 指數加權移動平均管制圖之基本模式

Roberts 於 1959 年提出指數加權移動平均管制圖(EWMA Control Chart)的概念。

指數加權移動平均定義如下：

首先定義初始值：$W_0 = \mu_0$ 或 $\bar{\bar{X}}$ (5.9)

其中 μ_0 為製程目標值，$\bar{\bar{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i}{m}$ 為樣本平均數的平均

而指數加權移動平均值：$W_k = r\bar{X}_k + (1-r)W_{k-1}$ (5.10)

在(5.10)式中，r 為一常數，且 $0 < r \le 1$ 。

EWMA 管制圖中的指數加權移動平均值W_k為之前所有樣本平均值的加權平均數，我們可以將W_{k-1}代入(5.10)式的右項，如此我們可以得到

$$W_k = r\overline{X}_k + (1-r)\left[r\overline{X}_{k-1} + (1-r)W_{k-2}\right]$$

$$= r\overline{X}_k + r(1-r)\overline{X}_{k-1} + (1-r)^2 W_{k-2} \tag{5.11}$$

持續進行上述步驟，我們將W_{k-i}，$i = 2,3,\cdots,k$ 代入(5.11)式中，於是就可以得到$W_k = r\sum_{i=0}^{k-1}(1-r)^i\,\overline{X}_{k-i} + (1-r)^k W_0$ (5.12)

因此，由 (5.12)式我們可以明顯地看出指數加權移動平均值W_k為之前所有樣本平均數的加權移動平均值，權數$r(1-r)^i$是與樣本平均數的年齡呈幾何遞減。

至於之前所提過的修華特管制圖，其實只是 EWMA 管制圖的特例。假如我們認為最近的一個樣本統計量很重要，而之前的所有樣本統計量則認為不重要，則我們可以將最近的一個樣本統計量分派最大的權數（即$r = 1$），而將其餘較早之前的樣本統計量分派為零的權數，如此就形成修華特管制圖。

而在指數加權移動平均管制圖中，權數的分派乃是與樣本統計量的年齡呈幾何遞減。從最近的樣本統計量開始，我們給予較高的權數，而發生在過去的樣本統計量則給予較低的權數，所以當r的值愈大，則短期的變化將會立即反應出來；相反地，如果r的值愈小，則表示我們較不希望短期間的變化會影響到長期趨勢。因此，我們可以將指數加權移動平均值(EWMA)廣泛地應用在時間序列模型的建立及預測上。

接下來我們將為各位介紹指數加權移動平均值W_k的變異數：

假設X_{ij}，$j = 1,2,...,n$，$i = 1,2,...,k$，為具有變異數σ^2的獨立隨機變數，則樣本平均數$\overline{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{n}$為隨機變數，且其變異數為$\frac{\sigma^2}{n}$，則$W_k$的變異數為：

$$\sigma_W^2 = V(W_k) = V(r\sum_{i=0}^{k-1}(1-r)^i \bar{X}_{k-i} + (1-r)^k W_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} r^2(1-r)^{2i}\frac{\sigma^2}{n} = r^2\frac{1-(1-r)^{2k}}{1-(1-r)^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{r}{2-r}\right)\left[1-\left(1-r\right)^{2k}\right] \quad (5.13)$$

因為$0 < r \le 1$，當k趨近無窮大時，則我們可以得到σ_W^2為：

$$\sigma_W^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{r}{2-r}\right) \quad (5.14)$$

因此，將上面的式子整合之後，可以得到 EWMA 管制圖的上下管制界限及中心線分別為：

當製程平均的目標值μ_0與製程標準差σ已知時，EWMA 管制圖的管制界限為：

當k值較小時：

上管制界限：$UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-\left(1-r\right)^{2k}\right]}$

中心線：$CL = \mu_0$ (5.15)

下管制界限：$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-\left(1-r\right)^{2k}\right]}$

當k值較大時：

上管制界限：$UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$

中心線：$CL = \mu_0$ (5.16)

下管制界限：$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$

其中$0 < r \le 1$，L為管制界限的寬度，對於個別觀察值X的 EWMA 管制圖的管制界限只要將式子(5.15)與(5.16)的樣本數n以 1 代入即可。

在實務應用方面，通常製程平均的目標值 μ_0 與製程標準差 σ 皆未知，所以我們需要利用樣本資料來估計製程平均 μ_0 與製程標準差 σ，在第三章我們用樣本平均數的平均 $\overline{\overline{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\overline{X_i}}{k}$ 來估計製程平均 μ_0，我們利用 $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2}$ 或 $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$ 來估計製程標準差 σ。

當製程平均的目標值 μ_0 與製程標準差 σ 未知時，EWMA 管制圖的管制界限為：

當 k 值較小時：

$$\text{上管制界限：} UCL = \overline{\overline{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$\text{中心線：} CL = \overline{\overline{X}} \tag{5.17}$$

$$\text{下管制界限：} LCL = \overline{\overline{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

當 k 值較大時：

$$\text{上管制界限：} UCL = \overline{\overline{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$$

$$\text{中心線：} CL = \overline{\overline{X}} \tag{5.18}$$

$$\text{下管制界限：} LCL = \overline{\overline{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$$

其中 $0 < r \le 1$，L 為管制界限的寬度，對於個別觀察值 X 的 EWMA 管制圖的管制界限只要將式子(5.17)與(5.18)的樣本數 n 以 1 代入即可。

5.2.2 逐步建立 EWMA 管制圖

在本節中，我們將介紹如何逐步的建立一個 EWMA 管制圖。可以利用下列步驟，逐步建立 EWMA 管制圖。

建立 EWMA 管制圖的步驟：

1. 收集樣本資料：
   自製程中隨機抽取樣本，並加以量測，得到各組樣本 $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in}$ ，$i = 1,2,\cdots,k$ (建議至少抽取 25 組)。
2. 計算各組樣本平均數及樣本標準差：

   (1) 計算各組樣本平均數 $\overline{X}_i$ ： $\overline{X}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{n}$

   計算樣本平均數的平均 $\overline{\overline{X}}$ ： $\overline{\overline{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i}{k}$

   (2) 計算各組樣本之樣本標準差： $S_i = \sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n-1}}$

   或計算各組樣本之全距：
   $R_i = \max(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in}) - \min(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in})$

   (3) 以各組樣本標準差的平均數來估計製程標準差 σ ：

   $$\hat{\sigma} = \frac{\overline{S}}{c_4} \text{ ，其中 } \overline{S} = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i}{k}$$

   或以各組樣本全距的平均來估計製程標準差 σ ：

   $$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \text{ ，其中 } \overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i}{k}$$

3. 計算指數加權移動平均值：

   $$W_k = r\overline{X}_k + (1 - r)W_{k-1}$$

4. 計算 EWMA 管制圖之上下管制界限及中心線：
   當 k 值很小時：

上管制界限：$UCL = \bar{\bar{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$

中心線：$CL = \bar{\bar{X}}$ (5.19)

下管制界限：$LCL = \bar{\bar{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$

當 k 值很大時：

上管制界限：$UCL = \bar{\bar{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$

中心線：$CL = \bar{\bar{X}}$ (5.20)

下管制界限：$LCL = \bar{\bar{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$

5. 將所有計算出來的指數加權移動平均值 W_k 與樣本號碼 k 畫在管制圖上，並決定製程平均數是否在管制狀態下。

【例題 5.5】

我們自一筆記型電腦工廠之生產線上，每半小時抽取樣本一次，一次抽取一台筆記型電腦，並將其重量紀錄下來，表 5.6 是我們所得到的 30 個觀察值，而其中前 20 個觀察值來自常態分配，其母體平均數 $\mu_0 = 4.5$ 公斤，母體標準差 $\sigma = 0.5$ 公斤，最後的 10 個觀察值則是來自常態分配，其母體平均數 $\mu = 5.0$ 公斤，母體標準差 $\sigma = 0.5$ 公斤，試利用 $r = 0.2$，$L = 2.8$ 來建構 EWMA 管制圖。

【解】:

1. 母體平均數 $\mu_0 = 4.5$ 與母體標準差 $\sigma = 0.5$ 已知。
2. 計算指數加權移動平均值：

   首先，設定初始值 $W_0 = \mu_0 = 4.5$

   由式子(5.10)，我們知道 $W_k = r\bar{X}_k + (1-r)W_{k-1}$

因此，$W_1 = 0.2 \times 5.16 + (1-0.2) \times 4.5 = 4.632$

依此類推，即可依序計算出$W_1 \sim W_{30}$，見表 5.6

表 5.6 例題 5.5 的指數加權移動平均值的計算

樣本編號(i)	x_i	W 值
1	5.16	4.632
2	4.28	4.5616
3	4.91	4.63128
4	4.83	4.671024
5	4.31	4.598819
6	3.91	4.461055
7	4.87	4.542844
8	4.58	4.550275
9	4.3	4.50022
10	4.51	4.502176
11	4.55	4.511741
12	4.24	4.457393
13	4.7	4.505914
14	3.67	4.338731
15	3.8	4.230985
16	4.87	4.358788
17	4.66	4.41903
18	3.88	4.311224
19	5.1	4.46898
20	5.05	4.585184
21	4.97	4.662147
22	4.96	4.721718
23	4.47	4.671374
24	4.53	4.643099
25	5.49	4.812479
26	5.91	5.031983

27	5.02	5.029587
28	5.32	5.087669
29	4.82	5.034136
30	5.06	5.039308

3. 計算 EWMA 管制圖之上下管制界限及中心線：

第一期($k=1$)之管制界限為

上管制界限：

$$UCL=\mu_0+L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=4.5+2.8\times0.5\times\sqrt{\frac{0.2}{1\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]}=4.78$$

中心線： $CL=\mu_0=4.5$

下管制界限：

$$LCL=\mu_0-L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=4.5-2.8\times0.5\times\sqrt{\frac{0.2}{1\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]}=4.22$$

第二期($k=2$)之管制界限為

上管制界限：

$$UCL=\mu_0+L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=4.5+2.8\times0.5\times\sqrt{\frac{0.2}{1\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(2)}\right]}=4.858575$$

中心線： $CL=\mu_0=4.5$

下管制界限：

$$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$= 4.5 - 2.8\times 0.5\times\sqrt{\frac{0.2}{1\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]} = 4.141425$$

其餘依此類推。當 $i \geq 20$ 時，各期對應的管制界限如圖 5.7 所示，即

$$UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{r}{(2-r)}} = 4.5 + 2.8\times 0.5\sqrt{\frac{0.2}{(2-0.2)}} = 4.966666$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{r}{(2-r)}} = 4.5 - 2.8\times 0.5\sqrt{\frac{0.2}{(2-0.2)}} = 4.033334$$

4. 將所有計算出來的指數加權移動平均值 W_k 與樣本號碼 k 畫在管制圖上，並決定製程平均數是否在管制狀態下。

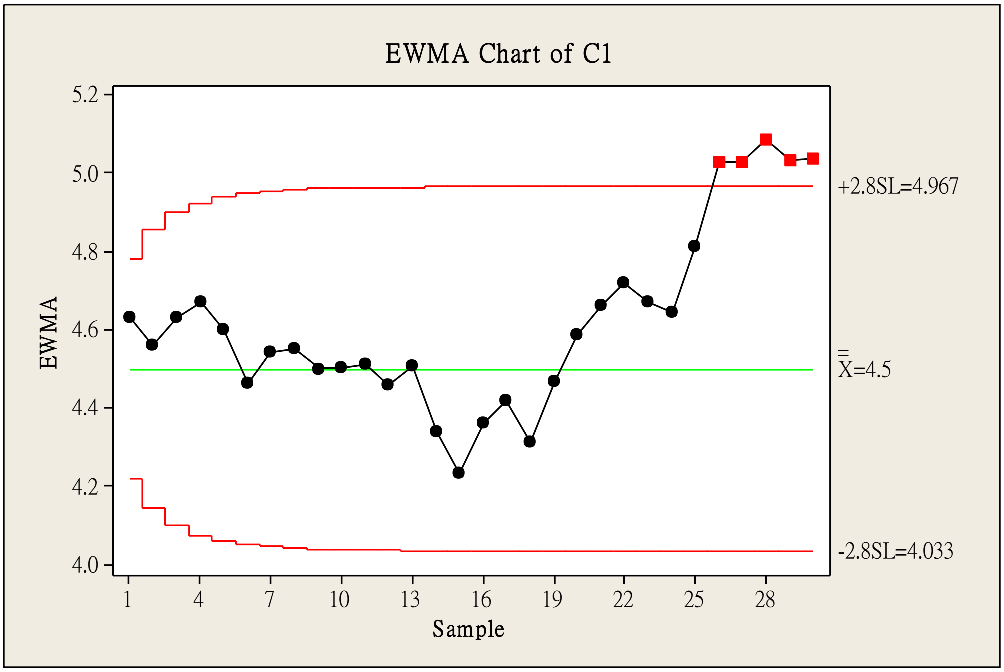

圖 5.7　指數加權移動平均管制圖(EWMA 管制圖)

5. 由圖 5.7 中可以看出第 26 樣本之 $W_{26} = 5.031983$ 值大於

$UCL=4.966666$，因此我們知道此時製程已有所偏移，製程是處於失控狀態，我們必須找出造成製程異常的原因。並採取矯正行動，消除製程異常的原因，使製程恢復到穩定的管制狀態。

【例題 5.6】

某製油工廠為了控制其所出廠的油重量，決定以 EWMA 管制圖來監控其製程，自生產線上每半個小時抽取 5 個樣本觀察值，總共收集了 25 組樣本資料如下表 5.7，製程的平均數與標準差皆未知，試利用全距法估計標準差σ，試利用$r=0.2$，$L=3$來建構 EWMA 管制圖。

表 5.7

樣本 組	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1.63	1.57	1.55	1.66	1.49
2	1.52	1.58	1.60	1.63	1.56
3	1.43	1.66	1.56	1.49	1.63
4	1.47	1.66	1.62	1.62	1.55
5	1.50	1.54	1.56	1.54	1.66
6	1.55	1.50	1.70	1.62	1.60
7	1.62	1.48	1.44	1.57	1.50
8	1.42	1.56	1.51	1.49	1.57
9	1.66	1.59	1.53	1.62	1.77
10	1.48	1.52	1.63	1.60	1.49
11	1.47	1.51	1.52	1.51	1.49
12	1.67	1.55	1.65	1.50	1.64
13	1.62	1.47	1.50	1.57	1.55
14	1.66	1.63	1.65	1.56	1.52
15	1.63	1.55	1.60	1.48	1.67
16	1.59	1.55	1.48	1.52	1.44
17	1.61	1.49	1.54	1.62	1.55
18	1.48	1.54	1.61	1.52	1.54
19	1.49	1.56	1.47	1.56	1.62
20	1.49	1.52	1.50	1.47	1.54

21	1.49	1.62	1.55	1.54	1.63
22	1.62	1.50	1.60	1.53	1.43
23	1.55	1.55	1.45	1.59	1.58
24	1.48	1.49	1.57	1.60	1.49
25	1.59	1.66	1.40	1.47	1.52

【解】

1. 計算各組樣本平均數及全距

由於製程標準差σ未知，因此利用全距法我們必須以$\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2}$來估計$\sigma$

首先，將各組全距計算出來：

各組樣本平均數 $\overline{x}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{n}$

各組全距 $R_i = \max(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}) - \min(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$

將各組資料計算之後，得到下表 5.8：

表 5.8

樣本號碼 i	樣本平均數 $\overline{x}_i$	樣本全距 R_i	EWMA W_i	UCL	LCL
1	1.580	0.17	1.55933	1.57243	1.53589
2	1.578	0.11	1.56306	1.57756	1.53076
3	1.554	0.23	1.56125	1.58032	1.528
4	1.584	0.19	1.5658	1.58194	1.52638
5	1.56	0.16	1.56464	1.58293	1.52539
6	1.594	0.20	1.57051	1.58355	1.52477
7	1.522	0.18	1.56081	1.58394	1.52438
8	1.51	0.15	1.55065	1.58418	1.52414
9	1.634	0.24	1.56732	1.58434	1.52398
10	1.544	0.15	1.56265	1.58444	1.52388
11	1.500	0.05	1.55012	1.5845	1.52382
12	1.602	0.17	1.5605	1.58454	1.52378
13	1.542	0.15	1.5568	1.58457	1.52375

14	1.604	0.14	1.56624	1.58459	1.52373
15	1.586	0.19	1.57019	1.5846	1.52372
16	1.516	0.15	1.55935	1.5846	1.52372
17	1.562	0.13	1.55988	1.58461	1.52371
18	1.528	0.13	1.55551	1.58461	1.52371
19	1.540	0.15	1.5524	1.58461	1.52371
20	1.504	0.07	1.54272	1.58461	1.52371
21	1.566	0.14	1.54738	1.58461	1.52371
22	1.536	0.19	1.5451	1.58461	1.52371
23	1.544	0.14	1.54488	1.58461	1.52371
24	1.526	0.12	1.54111	1.58461	1.52371
25	1.528	0.16	1.53848	1.58461	1.52371

而 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{38.854}{25} = 1.55416$

$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{3.86}{25} = 0.1544$

2. 估計製程標準差 σ：

   由附表 8 中，我們可以查出當 $n = 5$ 時，$d_2 = 2.326$

   因此，$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.1544}{2.326} = 0.06638$

3. 計算指數加權移動平均值：

   首先，設定初始值 $W_0 = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = 1.55416$

   由式子(5.10)，我們知道 $W_k = r\bar{X}_k + (1-r)W_{k-1}$

   因此，$W_1 = 0.2 \times 1.58 + (1-0.2) \times 1.55416 = 1.55933$

依此類推，即可依序計算出$W_1 \sim W_{25}$，見表 5.8

4. 計算 EWMA 管制圖之上下管制界限及中心線：
   第一期($k=1$)之管制界限為
   上管制界限：

$$UCL=\bar{\bar{X}}+L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=1.55416+3\times0.06638\times\sqrt{\frac{0.2}{5\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]}=1.57243$$

中心線：$CL=\bar{\bar{X}}=1.55416$

下管制界限：

$$LCL=\bar{\bar{X}}-L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=1.55416-3\times0.06638\times\sqrt{\frac{0.2}{5\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]}=1.53589$$

第二期($k=2$)之管制界限為
上管制界限：

$$UCL=\bar{\bar{X}}+L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=1.55416+3\times0.06638\times\sqrt{\frac{0.2}{5\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(2)}\right]}=1.57756$$

中心線：$CL=\bar{\bar{X}}=1.55416$
下管制界限：

$$LCL=\bar{\bar{X}}-L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$=1.55416-3\times0.06638\times\sqrt{\frac{0.2}{5\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(2)}\right]}=1.53076$$

其餘依此類推。當 $i \geq 20$ 時，各期對應的管制界限如表 5.8 所示，即 $UCL = 1.58461$， $LCL = 1.52371$ 。

5. 將所有計算出來的加權移動平均值 W_k 與樣本號碼 k 畫在管制圖上，並決定製程平均數是否在管制狀態下。

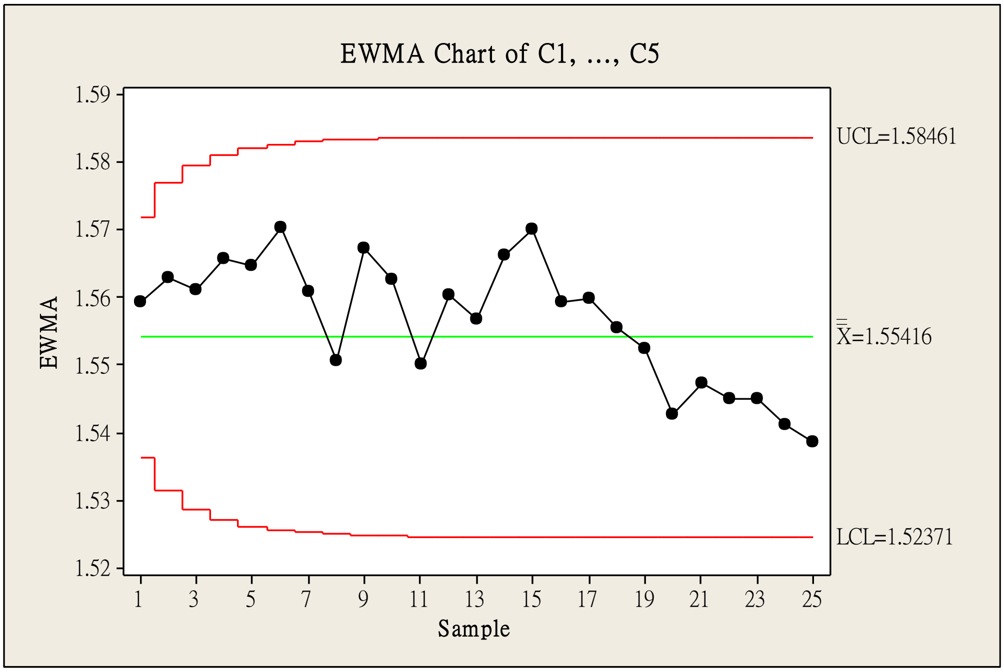

圖 5.8　指數加權移動平均管制圖(EWMA 管制圖)

圖 5.8 中我們可以看出樣本點的散佈皆在管制界限內而且呈現隨機散佈的形態，所以製程的平均數處於管制狀態下。

【例題 5.7】

在本題，我們將介紹當每組樣本數 n 很大，且標準差 σ 未知的狀況下，利用標準差法來估計製程標準差 σ ，如何發展 EWMA 管制圖。

假設我們再由生產線上抽了 25 組樣本，而每組樣本數 $n = 10$，經整理後，我們將各組樣本平均數及樣本標準差列於下表 5.9，試利用 $r = 0.2$，$L = 3$ 建立 EWMA 管制圖。

表 5.9

樣本號碼 i	樣本平均數 $\bar{x}_i$	樣本標準差 S_i	EWMA W_i	UCL	LCL
1	1.454	0.163	1.53922	1.58503	1.53601
2	1.583	0.158	1.54797	1.59191	1.52913
3	1.572	0.088	1.55278	1.59562	1.52542
4	1.534	0.122	1.54902	1.59779	1.52325
5	1.512	0.11	1.54162	1.59912	1.52192
6	1.562	0.092	1.54569	1.59995	1.52109
7	1.541	0.143	1.54476	1.60047	1.52057
8	1.573	0.124	1.5504	1.6008	1.52024
9	1.512	0.134	1.54272	1.60101	1.52003
10	1.633	0.115	1.56078	1.60114	1.5199
11	1.622	0.155	1.56902	1.60123	1.51981
12	1.62	0.125	1.57922	1.60128	1.51976
13	1.573	0.169	1.57797	1.60131	1.51973
14	1.515	0.162	1.56538	1.60134	1.5197
15	1.553	0.153	1.5629	1.60135	1.51969
16	1.513	0.108	1.55292	1.60136	1.51968
17	1.545	0.112	1.55134	1.60137	1.51967
18	1.651	0.072	1.57127	1.60137	1.51967
19	1.61	0.083	1.57902	1.60137	1.51967
20	1.492	0.133	1.56161	1.60137	1.51967
21	1.55	0.123	1.55929	1.60137	1.51967
22	1.625	0.092	1.57243	1.60138	1.51966
23	1.642	0.15	1.58635	1.60138	1.51966
24	1.483	0.083	1.56568	1.60138	1.51966
25	1.563	0.173	1.56514	1.60138	1.51966

【解】

1. 計算 $\bar{\bar{x}}$ 及 $\bar{S}$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{1.454 + 1.583 + \cdots + 1.563}{25} = \frac{39.013}{25} = 1.56052$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{25} S_i}{25} = \frac{0.163 + 0.158 + \cdots + 0.173}{25} = \frac{3.142}{25} = 0.1257$$

2. 估計製程標準差 σ ：
   由附表 8 中，我們可以查出當 $n = 10$ 時， $c_4 = 0.9727$
   因此 $\hat{\sigma} = \dfrac{\bar{S}}{c_4} = \dfrac{0.1257}{0.9727} = 0.1292$

3. 計算指數加權移動平均值：

   首先，設定初始值 $W_0 = \bar{\bar{x}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = 1.56052$

   由式子(5.10)，我們知道 $W_k = r\bar{X}_k + (1-r)W_{k-1}$

   因此， $W_1 = 0.2 \times 1.454 + (1-0.2) \times 1.56052 = 1.53922$

   依此類推，即可依序計算出 $W_1 \sim W_{25}$ ，見表 5.9

4. 計算 EWMA 管制圖之上下管制界限及中心線：
   第一期($k = 1$)之管制界限為
   上管制界限：

$$UCL = \bar{\bar{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$= 1.56052 + 3 \times 0.1292 \times \sqrt{\frac{0.2}{10 \times (2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]} = 1.58503$$

   中心線： $CL = \bar{\bar{X}} = 1.56052$

   下管制界限：

$$LCL = \bar{\bar{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$= 1.56052 - 3\times 0.1292\times\sqrt{\frac{0.2}{10\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(1)}\right]} = 1.53601$$

第二期($k=2$)之管制界限為

上管制界限：

$$UCL = \bar{\bar{X}} + L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$= 1.56052 + 3\times 0.1292\times\sqrt{\frac{0.2}{10\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(2)}\right]} = 1.59191$$

中心線： $CL = \bar{\bar{X}} = 1.56052$

下管制界限：

$$LCL = \bar{\bar{X}} - L\hat{\sigma}\sqrt{\frac{r}{n(2-r)}\left[1-(1-r)^{2k}\right]}$$

$$= 1.56052 - 3\times 0.1292\times\sqrt{\frac{0.2}{10\times(2-0.2)}\left[1-(1-0.2)^{2(2)}\right]} = 1.52913$$

其餘依此類推。當 $i \geq 20$ 時，各期對應的管制界限如表 5.9 所示，即 $UCL = 1.60138$ ， $LCL = 1.51966$ 。

5. 將所有計算出來的指數加權移動平均值 W_k 與樣本號碼 k 畫在管制圖上，並決定製程平均數是否在管制狀態下。

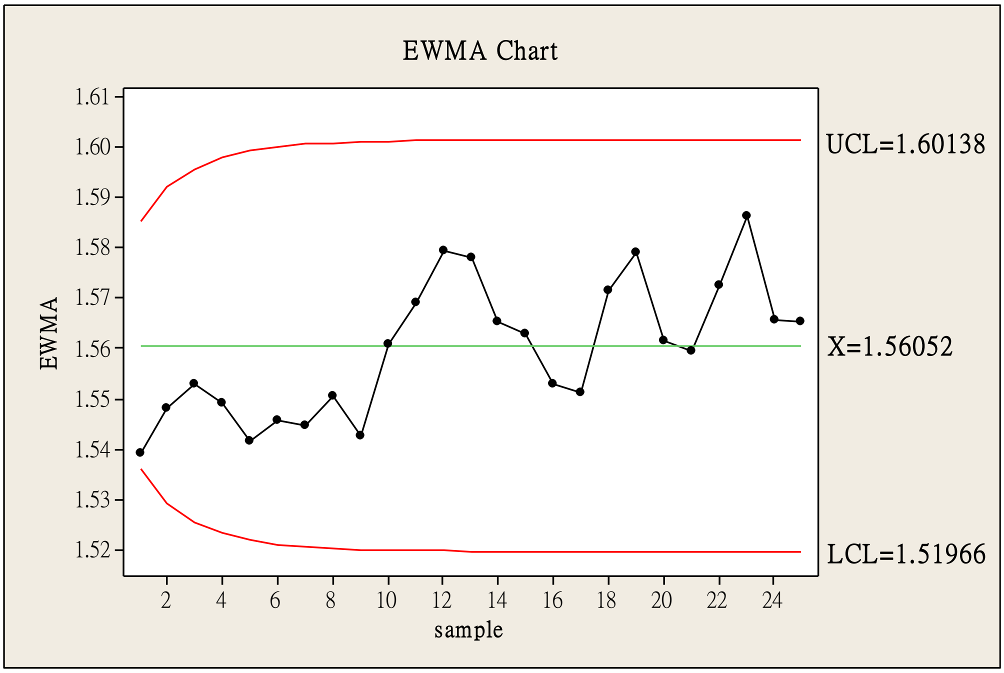

圖 5.9 指數加權移動平均管制圖

而由圖 5.9 中我們可以看出樣本點的散佈皆在管制界限內而且呈現隨機散佈的形態，所以製程的平均數在管制狀態下。