

Chapter 7 (7-1~7-2)

7.4 在最近的一次普查，記錄了每一戶擁有彩色電視的數量。

彩色電視數量	0	1	2	3	4	5
戶數(千)	1,218	32,379	37,961	19,387	7,714	2,842

a. 對於每一戶擁有彩色電視的數量，建立 X 的機率分配。

b. 決定下列的機率。

$$P(X \leq 2)$$

$$P(X > 2)$$

$$P(X \geq 4)$$

7.4 a

x	$P(x)$
0	$1218/101,501 = .012$
1	$32,379/101,501 = .319$
2	$37,961/101,501 = .374$
3	$19,387/101,501 = .191$
4	$7714/101,501 = .076$
5	$2842/101,501 = .028$

b (i) $P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = .012 + .319 + .374 = .705$

(ii) $P(X > 2) = P(3) + P(4) + P(5) = .191 + .076 + .028 = .295$

(iii) $P(X \geq 4) = P(4) + P(5) = .076 + .028 = .104$

7.12 我們給與下列的機率分配。

x	0	1	2	3
$P(x)$.4	.3	.2	.1

a. 計算平均數、變異數和標準差。

b. 假設，對於每個 X 的值， $Y = 3X + 2$ ，決定 Y 的值。 Y 的機率分配為何？

c. 利用(b) 小題的機率分配，計算 Y 的平均數、變異數和標準差。

d. 利用期望值和變異數法則，從 X 的平均數、變異數和標準差計算 Y 的平

均數、變異數

和標準差。比較你的(c) 和(d) 的答案，它們是相同的嗎(除了四捨五入之外) ？

$$7.12a \mu = E(X) = \sum xP(x) = 0(.4) + 1(.3) + 2(.2) + 3(.1) = 1.0$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= \sum (x - \mu)^2 P(x) = (0 - 1.0)^2 (.4) + (1 - 1.0)^2 (.3) + (2 - 1.0)^2 (.2) + \\ &\quad (3 - 1.0)^2 (.1) \\ &= 1.0\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.0} = 1.0$$

b.	x	0	1	2	3
	y	2	5	8	11
	P(y)	.4	.3	.2	.1

$$c. E(Y) = \sum yP(y) = 2(.4) + 5(.3) + 8(.2) + 11(.1) = 5.0$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(Y) &= \sum (y - \mu)^2 P(y) = (2 - 5)^2 (.4) + (5 - 5)^2 (.3) + (8 - 5)^2 (.2) \\ &\quad + (11 - 5)^2 (.1) = 9.0\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9.0} = 3.0$$

$$d. E(Y) = E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3(1) + 2 = 5.0$$

$$\sigma^2 = V(Y) = V(3X + 2) = V(3X) = 3^2 V(X) = 9(1) = 9.0.$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9.0} = 3.0$$

The parameters are identical.

7.15 一家購物中心估計其顧客實際造訪商店的數量之機率分配，如下表所列：

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$.04	.19	.22	.28	.12	.09	.06

求出顧客造訪商店數之平均數與標準差。

$$7.15 \mu = E(X) = \sum xP(x) = 0(.04) + 1(.19) + 2(.22) + 3(.28) + 4(.12) + 5(.09) + 6(.06) = 2.76$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= \sum (x - \mu)^2 P(x) = (0 - 2.76)^2 (.04) + (1 - 2.76)^2 (.19) + (2 - 2.76)^2 (.22) \\ &\quad + (3 - 2.76)^2 (.28) + (4 - 2.76)^2 (.12) + (5 - 2.76)^2 (.09) + \\ &\quad (6 - 2.76)^2 (.06) = 2.302\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.302} = 1.517$$

7.16 參考練習題7.15。假設，平均而言，顧客在造訪的每一間商店停留10分鐘。求出顧客花費在商店中的總時間之平均數和標準差。

$$7.16 \ Y = 10X; E(Y) = E(10X) = 10E(X) = 10(2.76) = 27.6$$

$$V(Y) = V(10X) = 10^2 V(X) = 100(2.302) = 230.2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{230.2} = 15.17$$

7.20 在分析過進來的傳真之後，一位會計公司的經理判定每一次傳真頁數的機率分配，如下所列：

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$.05	.12	.20	.30	.15	.10	.08

計算每一次傳真頁數的平均數與變異數。

$$7.20 \ \mu = E(X) = \sum xP(x) = 1(.05) + 2(.12) + 3(.20) + 4(.30) + 5(.15) + 6(.10) + 7(.08) = 4.00$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V(X) &= \sum (x - \mu)^2 P(x) = (1-4.0)^2 (.05) + (2-4.0)^2 (.12) + (3-4.0)^2 (.20) + \\ &\quad (4-4.0)^2 (.30) \\ &\quad + (5-4.0)^2 (.15) + (6-4.0)^2 (.10) + (7-4.0)^2 (.08) \\ &= 2.40 \end{aligned}$$

7.21 參考練習題7.20。會計公司經理進一步的分析顯示，一頁傳真的處理費是\$.25。決定每一次傳真成本的平均數和變異數。

$$7.21 \ Y = .25X; E(Y) = E(.25X) = .25E(X) = .25(4.0) = 1.0$$

$$V(Y) = V(.25X) = (.25)^2 V(X) = .0625(2.40) = .15$$

7.26 X 與 Y 的雙變量分配描述如下。

y	x	
	1	2
1	.28	.42
2	.12	.18

- 求出 X 的邊際機率分配。
- 求出 Y 的邊際機率分配。
- 計算 X 的平均數與變異數。
- 計算 Y 的平均數與變異數。

7.26 a x $P(x)$

1	.4
2	.6

b y $P(y)$

1	.7
2	.3

c $\mu = E(X) = \sum xP(x) = 1(.4) + 2(.6) = 1.6$

$\sigma^2 = V(X) = \sum (x - \mu)^2 P(x) = (1 - 1.6)^2 (.4) + (2 - 1.6)^2 (.6) = .24$

d $\mu = E(Y) = \sum yP(y) = 1(.7) + 2(.3) = 1.3$

$\sigma^2 = V(Y) = \sum (y - \mu)^2 P(y) = (1 - 1.3)^2 (.7) + (2 - 1.3)^2 (.3) = .21$

7.27 根據練習題 7.26。計算共變異數與相關係數。

7.27 a $\sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} xyP(x, y) = (1)(1)(.28) + (1)(2)(.12) + (2)(1)(.42) + (2)(2)(.18) = 2.08$

$\text{COV}(X, Y) = \sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} xyP(x, y) - \mu_x \mu_y = 2.08 - (1.6)(1.3) = 0$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{.24} = .49, \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{.21} = .46$

$\rho = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{(.49)(.46)} = 0$

7.28 根據練習題7.26。使用兩個變數加總的期望值法則與變異數法則計算

$X+Y$

的平均數與變異數。

$$7.28 E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1.6 + 1.3 = 2.9$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{COV}(X, Y) = .24 + .21 + 2(0) = .45$$

7.29 根據練習題7.26。

- 決定 $X+Y$ 的分配。
- 決定 $X+Y$ 的平均數與變異數。
- 你在(b)小題的答案是否等於練習題7.28的答案。

7.29 a $\frac{x+y}{P(x+y)}$

2 .28

3 .54

4 .18

$$b \mu_{x+y} = E(X+Y) = \sum (x+y)P(x+y) = 2(.28) + 3(.54) + 4(.18) = 2.9$$

$$\sigma_{x+y}^2 = V(X+Y) = \sum [(x+y) - \mu_{x+y}]^2 P(x+y) = (2-2.9)^2 (.28) + (3-2.9)^2 (.54) + (4-2.9)^2 (.18) = .45$$

c Yes

7.32 加拿大人訪問美國時通常會買菸酒，這些在美國便宜很多。然而，也有限制性。加拿大人在美國訪問超過 2 天可免稅攜帶一瓶白酒和香菸一箱入境加拿大。對於訪問美國 2 天或以上的加拿大人進口酒的瓶數和菸的箱數，一個加拿大報關代理商產生了以下的聯合機率分配。

菸的箱數	酒的瓶數	
	0	1
0	.63	.18
1	.09	.10

- 找出進口酒的瓶數的邊際機率分配。
- 找出進口菸的箱數的邊際機率分配。
- 計算進口酒的瓶數的平均數和變異數。
- 計算進口菸的箱數的平均數和變異數。
- 計算共變異數和相關係數。

7.32 a

<u>Bottles, x</u>	<u>P(x)</u>
-------------------	-------------

0 .72

1 .28

b

<u>Cartons, y</u>	<u>P(y)</u>
-------------------	-------------

0 .81

1 .19

$$c \quad \mu_x = E(X) = \sum xP(x) = 0(.72) + 1(.28) = .28$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum (x - \mu)^2 P(x) = (0 - .28)^2 (.72) + (1 - .28)^2 (.28) = .202$$

$$d \quad \mu_y = E(Y) = \sum yP(y) = 0(.81) + 1(.19) = .19$$

$$\sigma^2 = V(Y) = \sum (y - \mu)^2 P(y) = (0 - .19)^2 (.81) + (1 - .19)^2 (.19) = .154$$

$$e \quad \sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} xyP(x, y) = (0)(0)(.63) + (0)(1)(.09) + (1)(0)(.18) + (1)(1)(.10) = .100$$

$$\text{COV}(X, Y) = \sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} xyP(x, y) - \mu_x \mu_y = .100 - (.28)(.19) = .0468$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{.202} = .449, \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{.154} = .392$$

$$\rho = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{.0468}{(.449)(.392)} = .266$$