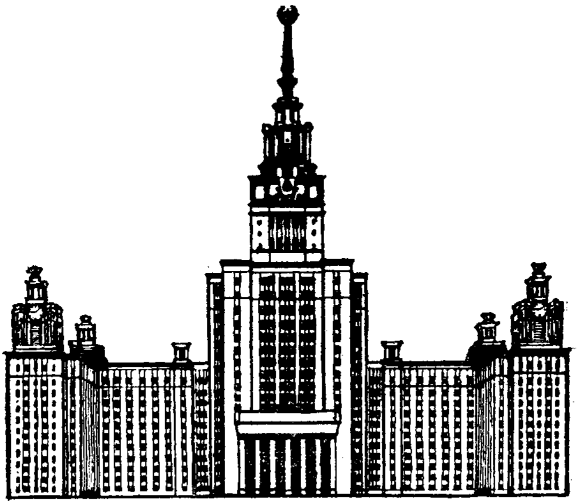
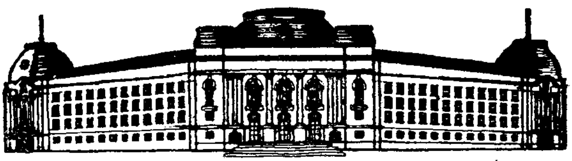
В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

МГУ





СОВМЕСТНОЕ ИЗДАНИЕ
МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
И СОФИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ КЛИМЕНТА ОХРИДСКОГО,
НАПИСАННОЕ В СООТВЕТСТВИИ
С ЕДИНОЙ ПРОГРАММОЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

В.А. Ильин, В.А. Садовничий,
Бл.Х. Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС

Под редакцией академика А.Н. Тихонова

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальностям „Математика",
„Прикладная математика"

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1985

УДК 517

Ильин В. А. и др. Математический анализ. Начальный курс/В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова.— 2-е изд., перераб.— М.: Изд-во МГУ, 1985.— 662 с.

Учебник представляет собой первую часть трехтомного курса математического анализа для высших учебных заведений СССР, Болгарии и Венгрии, написанного в соответствии с соглашением о сотрудничестве между Московским, Софийским и Будапештским университетами. Книга включает в себя теорию вещественных чисел, теорию пределов, теорию непрерывности функций, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной и их приложения, дифференциальное исчисление функций многих переменных и теорию неявных функций.

Рецензент:

Кафедра математики МИФИ
(зав. кафедрой проф. **А. И. Прилепко**)

И $\dfrac{1702050000-150}{077(02)-85}$ 95—85

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время прогресс в математике в большой степени связан с развитием электронно-вычислительных средств. Математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Все это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний, и ставит новые задачи в изучении самой математики. В связи с этим возникает потребность в написании учебника по математическому анализу, учитывающего указанные закономерности.

То обстоятельство, что решение математических задач реализуется на ЭВМ с помощью вычислительных алгоритмов, предъявляет повышенные требования к четкости алгоритмического уровня изложения математических дисциплин. Однако такое изложение должно базироваться на классических концепциях математики и не должно их затемнять.

Эти общие принципы вместе с задачей четкого, ясного и доступного изложения и положены в основу написания предлагаемой читателю книги. Книга написана с учетом согласованной между Московским и Софийским университетами программы преподавания первой части математического анализа.

В предлагаемом учебнике уделено большое внимание вопросам оптимизации, играющим в математике и ее приложениях большую роль. В частности, в книге впервые в учебной литературе в законченном виде излагается алгоритм отыскания как внутреннего, так и краевого экстремума функции. В учебнике уделено значительное внимание изучению вопроса об исходной информации, доступной при решении задачи. Так, например, для отыскания экстремума функции одной переменной авторы предлагают алгоритм, базирующийся на информации только о значениях функции в точках области ее задания. Предлагаемое решение не опирается на знание значений производной в точках области задания и пригодно для отыскания экстремума недифференцируемых функций. Такая постановка типична при решении задач об оптимизации производственных процессов.

При выборе метода изложения авторы отправляются от того, что выбор алгоритма решения задачи зависит от того, какая информация из постановки этой задачи может быть использована. Так, например, при введении понятия определенного интеграла

Римана авторы отправляются от концепции изложения, базирующейся на использовании значений функции в точках сегмента.

Эта концепция, несомненно, является более предпочтительной по сравнению с концепцией введения определенного интеграла Римана с помощью первообразной, ибо она отвечает идее численных методов вычисления определенного интеграла, используемых на ЭВМ.

В заключение хочу высказать уверенность, что предлагаемая книга будет способствовать повышению математической культуры читателей с различными запросами к объему математических знаний.

А. Тихонов

Москва,
сентябрь 1978 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга подверглась существенной переработке и сокращению в целях максимального приближения ее материала к тому курсу, который реально может быть прочитан студентам первого года обучения.

Особенно существенной переработке были подвергнуты разделы, посвященные теории вещественных чисел, теории множеств и теории метрических, топологических и нормированных пространств.

В книге сохранены три уровня изложения (облегченный, основной и повышенный).

Так же, как и в первом издании, текст повышенного уровня выделен в книге двумя вертикальными чертами, текст основного уровня — одной вертикальной чертой, а остальной текст книги относится к облегченному уровню изложения.

Проведенные во втором издании переработки улучшили возможности использования книги на указанных трех различных уровнях изложения.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ и сотрудникам кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ за критические замечания по первому изданию этой книги. Авторы благодарят также В. М. Говорова, В. Н. Денисова, И. С. Ломова и В. В. Тихомирова за помощь при подготовке второго издания этой книги. Особую благодарность авторы приносят А. И. Прилепко, прочитавшему рукопись второго издания и сделавшему критические замечания, способствующие ее улучшению.

Москва,
февраль 1985 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга является учебником по математическому анализу по согласованной между Московским и Софийским университетами единой программе первого года обучения. Она полностью охватывает материал первого года обучения, предусмотренный программой для студентов университетов СССР и НРБ, обучающихся по специальностям «математика», «механика» и «прикладная математика».

Особенностью этой книги является то, что она содержит три четко отделяемых друг от друга уровня изложения: облегченный, основной и повышенный, причем для понимания материала облегченного уровня не требуется чтения материалов основного и повышенного уровней, а для понимания материала основного уровня не требуется чтения материала повышенного уровня.

Облегченный уровень отвечает программе технических вузов СССР с углубленным изучением математического анализа; основной уровень изложения отвечает программе специальностей «прикладная математика» и «физика» университетов СССР; материал повышенного уровня дополняет материал основного уровня разделами, обычно излагаемыми на механико-математических факультетах университетов.

Текст, выделенный в книге двумя вертикальными чертами, относится к повышенному уровню изложения; текст, выделенный одной вертикальной чертой, — к основному уровню изложения; остальной текст книги составляет содержание облегченного уровня изложения.

Книга содержит вводную главу, разъясняющую возникновение основных понятий математического анализа и облегчающую восприятие последующего материала.

В книге нашла отражение возросшая роль вычислительных методов и содержится ряд примеров применения аппарата математического анализа для вычисления элементарных функций, интегралов и отыскания корней уравнений и точек экстремума.

В настоящее время в СССР и НРБ имеется целый ряд учебников по математическому анализу, среди которых особенно удачными, по нашему мнению, являются учебники, написанные Л. Д. Кудрявцевым и С. М. Никольским в СССР и Я. Тагамлицким в НРБ.

Авторы настоящей книги, несомненно, испытали влияние этих прекрасных учебников.

При написании этой книги авторы использовали часть материала книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», а также опыт преподавания математического анализа в университетах.

Авторы выражают глубокую благодарность титульному редактору этой книги академику А. Н. Тихонову за большое количество ценных советов и замечаний.

Авторы благодарят также Л. Д. Кудрявцева, И. И. Ляшко, В. Л. Макарова, Д. Б. Дойчинова и Т. Боянова, критические замечания которых способствовали улучшению этой книги.

Особой благодарностью авторы отмечают труд В. М. Говорова и Г. Христова, который намного превзошел рамки обычного редактирования.

София,
март 1978 г.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В настоящей главе, не претендуя на точность формулировок и отправляясь от простейших задач механики, мы постараемся обрисовать основной круг понятий и проблем математического анализа.

1. Начнем наше рассмотрение с выяснения тех математических понятий, которые неизбежно возникают при описании самого простейшего вида движения — движения материальной точки вдоль прямой линии.

Если материальная точка движется вдоль оси Oy, а x обозначает время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то для описания указанного движения необходимо знать правило, посредством которого каждому значению времени x ставится в соответствие координата y движущейся точки в момент времени x.

В механике такое правило называют законом движения. Абстрагируясь от конкретного механического смысла переменных x и y и рассматривая в качестве x и y две совершенно произвольные переменные величины, мы придем к понятию функции, являющемуся одним из важнейших понятий математического анализа.

Если известно правило, посредством которого каждому значению одной переменной x ставится в соответствие определенное значение другой переменной y, то говорят, что переменная y является функцией переменной x, и пишут $y=y(x)$ или $y=f(x)$.

При этом переменную x называют аргументом или независимой переменной, а переменную y — функцией аргумента x.

Букву f в записи $y=f(x)$ обычно называют характеристикой рассматриваемой функции, а значение $y=f(x)$ называют частным значением функции в точке x. Совокупность всех частных значений функции принято называть областью изменения этой функции.

Отметим сразу же, что приведенная формулировка понятия функции требует уточнения, ибо в этой формулировке ничего не говорится о том, из какого множества берутся значения независимой переменной x.

Множество, состоящее из тех и только тех чисел, которые являются значениями независимой переменной x, обычно называют о б л а с т ь ю з а д а н и я ф у н к ц и и. Описание областей задания функции требует развития теории числовых множеств.

Отметим еще, что понятие функции (так же, как и понятие числа, множества и переменной величины) естественно считать н а ч а л ь н ы м п о н я т и е м (т. е. таким понятием, которое можно описать, но нельзя строго определить, ибо любая попытка дать строгое определение указанного понятия неизбежно сведется к замене определяемого понятия ему эквивалентным). Таким образом, вместо термина «определение функции» естественнее употреблять термин «понятие функции».

Отметим, наконец, что для обозначения аргумента функции и ее характеристики могут употребляться различные буквы. Так, например, запись $x=\varphi(t)$ обозначает, что переменная x является функцией аргумента t, причем характеристика этой функции обозначена через φ. При одновременном рассмотрении нескольких функций одного аргумента t для обозначения характеристик этих функций необходимо употреблять различные символы.

2. Часто приходится рассматривать такую функцию $y=f(x)$, аргумент x которой сам является функцией вида $x=\varphi(t)$ некоторой новой переменной t. В таком случае говорят, что переменная y представляет собой с л о ж н у ю ф у н к ц и ю аргумента t, а переменную x называют п р о м е ж у т о ч н ы м аргументом. Указанную сложную функцию называют также с у п е р п о з и ц и е й функций f и φ. Для обозначения указанной сложной функции естественно использовать символ $y=f[\varphi(t)]$.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий возникновение понятия сложной функции. Предположим, что материальная точка M равномерно с постоянной угловой скоростью ω вращается по окружности радиуса R. Найдем закон движения проекции M' точки M на некоторую ось Oy, проходящую через центр O окружности и лежащую в ее плоскости (рис. 1.1). При этом естественно предположить, что в начальный момент времени $t=0$ движущаяся точка M находилась в точке M_0 пересечения окружности с осью Oy. Обозначим через y координату проекции M' точки M на ось Oy, а через x угол M_0OM, на который повернется точка M за время t. Очевидно, что $y=R\cos x$, $x=\omega t$, и мы получим, что координата y проекции M' представляет собой сложную функцию времени t вида $y=R\cos x$, где $x=\omega t$. Эту сложную функцию можно записать в виде $y=R\cos\omega t$. Отметим, что движение по закону $y=R\cos\omega t$ в механике принято называть г а р м о н и ч е с к и м к о л е б а н и е м.

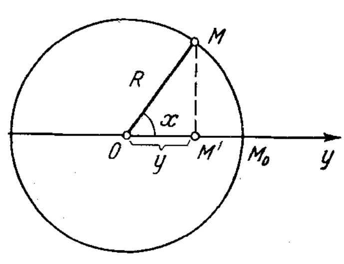


Рис. 1.1

3. Из курса физики известно, что важной характеристикой движения материальной точки является ее мгновенная скорость в каждый момент времени x. Если материальная точка движется вдоль оси Oy по закону $y=f(x)$, то, фиксировав произвольный момент времени x и какое угодно приращение времени Δx, мы можем утверждать, что в момент времени x движущаяся точка имеет координату $f(x)$, а в момент времени $x+\Delta x$ — координату $f(x+\Delta x)$.

Таким образом, число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ представляет собой путь, пройденный движущейся точкой за промежуток времени от x до $x+\Delta x$.

Отсюда вытекает, что отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

обычно называемое **разностным отношением**, представляет собой **среднюю скорость** движущейся точки за промежуток времени от x до $x+\Delta x$.

Мгновенной скоростью (или просто **скоростью**) движущейся точки называется предел, к которому стремится средняя скорость (1.1) при стремлении к нулю промежутка времени Δx.

Если использовать известный из курса средней школы символ предела, то можно записать следующее соотношение для мгновенной скорости $v(x)$ в момент времени x:

$$v(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Физическое понятие мгновенной скорости приводит к фундаментальному математическому понятию производной. Абстрагируясь от механического смысла рассмотренной выше функции $y=f(x)$, мы *назовем* ***производной*** *произвольной функции* $y=f(x)$ *в данной фиксированной точке* x *предел, стоящий в правой части* (1.2) (*при условии, конечно, что этот предел существует*).

Используя для обозначения производной функции $y=f(x)$ в точке x символ $f'(x)$ или $y'(x)$, мы можем по определению записать следующее равенство:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операцию нахождения производной договоримся называть **дифференцированием**.

Наше рассмотрение показывает, что при вычислении производной фундаментальную роль играет понятие предела функции.

Предварительное представление о понятии предела функции (да и о самом понятии производной) дается в курсе средней школы. Однако строгое и последовательное изучение понятия предела возможно лишь на базе строгой теории вещественных чисел. Так, например, без строгой теории вещественных чисел невозможно установить существование двух следующих важных пределов:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \text{ и } \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t},$$

неизбежно возникающих, как мы увидим ниже, при вычислении производных функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$.

Итак, проведенное нами рассмотрение показывает, что вопрос о существовании и вычислении производной упирается в необходимость развития строгой теории вещественных чисел и на ее базе теории пределов.

4. Займемся теперь вычислением производных двух конкретных элементарных функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ и выясним, какие математические проблемы неизбежно возникают при этом.

Сначала вычислим производную функцию $y=\sin x$ в любой фиксированной точке x. Для этой функции разностное отношение (1.1), очевидно, имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Таким образом, производная функции $y=\sin x$ в точке x по определению равна пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right\} \tag{1.3}$$

(при условии, что этот предел существует).

Можно ожидать, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x. \tag{1.4}$$

Заметим, однако, что не для всякой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta x\to 0}f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x). \tag{1.5}$$

Функция $f(x)$, для которой в данной точке x справедливо равенство (1.5), *называется* ***непрерывной*** *(в точке x).* Понятие непрерывности функции является одним из важнейших математических понятий и будет основательно изучаться в систематическом курсе математического анализа. В частности, в систематическом курсе будет доказано, что функция $y=\cos x$ является непрерывной в каждой точке x, т. е. в каждой точке x справедливо равенство (1.4).

Заметим теперь, что для вычисления предела (1.3) недостаточно доказать справедливость соотношения (1.4). Для этого необходимо еще вычислить следующий предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\quad\left(t=\frac{\Delta x}{2}\right).\tag{1.6}$$

В систематическом курсе анализа будет строго доказано, что предел (1.6), часто называемый **первым замечательным пределом**, существует и равен единице.

Только после того, как будет установлена непрерывность функции $y=\cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и вычислен первый замечательный предел (1.6), мы сможем, опираясь еще на то, что предел произведения равен произведению пределов сомножителей, строго утверждать, что предел (1.3) существует и равен $\cos x$ или, что то же самое, производная функции $y=\sin x$ существует и равна $\cos x$.

Перейдем теперь к вычислению производной функции $y=\log_a x$, считая, что $0<a\neq 1$, и фиксировав произвольную точку $x>0$. Для этой функции разностное отношение (1.1) имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$ и выбирается так, что $x+\Delta x>0$). Таким образом, производная функции $y=\log_a x$ в любой точке $x>0$ по определению равна пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\tag{1.7}$$

(при условии, что этот предел существует). Преобразуем дробь, стоящую в (1.7), проделав следующие операции: 1) заменим разность логарифмов логарифмом частного; 2) произведем умножение и деление на одну и ту же величину $x>0$; 3) внесем множитель, стоящий перед логарифмом, под знак логарифма, сделав его показателем степени. В результате получим, что предел (1.7) равен

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]\right\}\quad\left(t=\frac{\Delta x}{x}\to 0\right). \tag{1.8}$$

Рассмотрим отдельно предел при $t\to 0$ выражения, заключенного в правой части последнего равенства в квадратные скобки:

$$\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]. \tag{1.9}$$

Этот предел часто называют **вторым замечательным пределом**. В систематическом курсе анализа будет установлено, что этот предел равен иррациональному числу e, которое с точностью до пятнадцати знаков после запятой имеет вид $e=2{,}718281828459045\ldots$

Кроме того, в систематическом курсе будет доказана непрерывность функции $y=\log_a x$ в каждой точке $x>0$ и, в частности, в точке $x=e$. Но тогда из существования равного e предела (1.9) будет следовать, что

$$\lim_{t\to 0}\log_a\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]=\log_a e.$$

Последнее соотношение и соотношение (1.8) позволяют утверждать, что предел (1.7) равен

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Таким образом, после того как будет вычислен второй замечательный предел и установлена непрерывность функции $y=\log_a x$ в точке e, мы сможем строго утверждать, что логарифмическая функция имеет производную, причем

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e \text{ при } 0<a\neq 1,\ x>0.$$

5. В курсе средней школы кроме двух рассмотренных нами функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ изучались еще следующие функции: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=x^{\alpha}$ (α — вещественное число), $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$. Все перечисленные функции принято называть **простейшими элементарными**.

Замечательным является тот факт, что при вычислении производных всех простейших элементарных функций не возникает никаких новых трудностей, кроме тех, с которыми мы встретились при вычислении производных функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$. Нетрудно проверить, что для вычисления производных всех простейших элементарных функций требуются лишь арифметические свойства операции предельного перехода, два замечательных предела и факт непрерывности каждой из этих функций в точках областей их задания.

Отмеченное обстоятельство дает нам право без дальнейших разъяснений привести таблицу производных всех простейших элементарных функций.

1°. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x>0$, α — вещественное число).

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \quad (0 < a \neq 1,\ x > 0)$.

В частности, при $a=e$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

3°. $(a^x)' = a^x \log_e a \qquad (0<a\neq 1)$.

В частности, при $a=e$

$$(e^x)' = e^x.$$

4°. $(\sin x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ где } n = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq n\pi, \text{ где } n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$.

8°. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x| < 1)$.

9°. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x| < 1)$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

11°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Строгое обоснование приведенной таблицы является одной из важных задач той части математического анализа, которую принято называть *дифференциальным исчислением*.

Традиционной задачей классического дифференциального исчисления является и несколько более общая задача — вычисление производной любой функции $f(x)$, которая получается из перечисленных выше простейших элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и конечного числа четырех арифметических действий (сложения, умножения, вычитания и деления). Такую функцию $f(x)$ принято называть просто *элементарной*.

Итак, *элементарной* называется функция, которая получается из простейших элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий.

Примером элементарной функции может служить функция

$$f(x)=2^{\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)}.$$

Для вычисления производной любой элементарной функции следует присоединить к выписанной нами таблице производных простейших элементарных функций два правила: 1) правило дифференцирования сложной функции, 2) правило дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций.

Правило дифференцирования сложной функции $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, имеет следующий вид: если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в данной точке x_0, а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке x_0, причем эта производная (обозначим ее через y') равна

$$y'=f'[\varphi(x_0)]\varphi'(x_0), \tag{1.10}$$

т. е. равна произведению производной функции $y=f(u)$ в точке $u_0=\varphi(x_0)$ на производную функции $u=\varphi(x)$ в точке x_0.

Справедливость для производной сложной функции формулы (1.10) легко оправдать с помощью наводящих соображений, но строгий вывод формулы (1.10) не является простым и будет приведен в систематическом курсе математического анализа.

Гораздо проще устанавливаются правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, которые имеют вид

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),$$

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

(в последней формуле требуется необращение в нуль функции $v(x)$ в рассматриваемой точке x).

Подводя итог, мы можем заключить, что одной из важных задач части математического анализа, называемой дифференциальным исчислением, является строгое обоснование таблицы производных простейших элементарных функций и правил дифференцирования сложной функции, а также суммы, разности, произведения и частного функций.

Это обоснование позволит вычислить производную любой элементарной функции $f(x)$, т. е. любой функции $f(x)$, получающейся из простейших элементарных путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий. При этом оказывается, что производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию, т. е. операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций.

Отмеченное обстоятельство оправдывает введение класса элементарных функций как традиционного объекта классического анализа.

6. Еще раз обратимся к рассмотрению механической задачи о движении материальной точки вдоль прямой линии — оси Oy, но на этот раз предположим, что для любого момента времени x нам задана мгновенная скорость $f(x)$ движущейся точки и требуется найти закон движения этой точки.

Поскольку мгновенная скорость $f(x)$ является производной функции $y=F(x)$, определяющей закон движения, то задача сводится к разысканию по данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная $F'(x)$ которой равна $f(x)$. Отвлекаясь от механического смысла функций $f(x)$ и $F(x)$, мы придем к математическим понятиям первообразной и неопределенного интеграла.

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой $F'(x)$ равна $f(x)$.

Это определение требует уточнения: следует четко оговорить, на каком множестве должно быть справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Отмеченное обстоятельство еще раз подчеркивает необходимость развития теории множеств. Уточнение понятия первообразной будет дано в систематическом курсе.

Заметим, что если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$ (в силу того, что производная постоянной C равна нулю).

Более трудным является обратное утверждение: любые две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале (a, b) могут отличаться лишь постоянным слагаемым. Доказательство этого утверждения требует развитого аппарата математического анализа и будет проведено в систематическом курсе анализа.

Опираясь на указанное утверждение, мы можем констатировать следующий факт: если функция $F(x)$ является одной из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная функции $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где C — постоянная.

Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx.$$

Только что отмеченный нами факт позволяет утверждать, что если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

где C — любая постоянная.

Возвратимся к поставленной нами задаче об отыскании закона движения материальной точки вдоль оси Oy по известной мгновенной скорости $f(x)$ этой точки. Мы теперь можем утверждать, что искомый закон движения определяется функцией $y = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая первообразная функция $f(x)$, а C — постоянная. Как мы видим, без дополнительных условий закон движения по мгновенной скорости определяется неоднозначно: с точностью до постоянного слагаемого C. Для определения постоянной C должно быть привлечено дополнительное условие, обычно заключающееся в задании координаты y_0 движущейся точки в некоторый момент времени x_0. Используя это условие, мы получим соотношение $y_0 = F(x_0) + C$, из которого $C = y_0 - F(x_0)$, так что окончательно искомый закон движения имеет вид

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

7. Рассмотрим вопрос об отыскании первообразных и неопределенных интегралов от некоторых элементарных функций. Так как функция $f(x) = \cos x$ является производной функции $F(x) = \sin x$, то функция $F(x) = \sin x$ является одной из первообразных функции $f(x) = \cos x$, и потому любая первообразная функции $f(x) = \cos x$ имеет вид $\sin x + C$, где C — постоянная. Таким образом,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Только что проведенное рассуждение имеет общий характер. Можно утверждать, что любая формула дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$, утверждающая, что функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, порождает эквивалентную ей формулу интегрального исчисления $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, утверждающую, что неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен $F(x) + C$, где C — любая постоянная.

Таким образом, выписанная выше таблица производных простейших элементарных функций порождает эквивалентную ей таблицу важных неопределенных интегралов, которую мы приводим ниже.

1°. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq \quad 1).$

2°. $\int \dfrac{dx}{x} = \log_e x + C \quad (x > 0).$

3°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log_e a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

В частности, при $a = e$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

4°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6^0. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

7^0. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ $(\pi n < x < \pi + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8^0. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ $(|x| < 1)$.

9^0. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$.

Приведенная таблица в систематическом курсе анализа будет дополнена двумя важнейшими правилами интегрирования (интегрированием посредством замены переменной и интегрированием по частям).

Здесь мы не будем приводить формулировку этих правил, а лишь отметим, что написанная таблица вместе с этими правилами составляет важный вычислительный аппарат той части математического анализа, которую принято называть *интегральным исчислением*.

Следует, однако, сразу же подчеркнуть, что для вычисления многих важных неопределенных интегралов этого аппарата оказывается недостаточно. Например, этого аппарата недостаточно для вычисления неопределенного интеграла

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{1.11}$$

играющего важную роль в теории вероятностей и в других разделах точных наук.

Интеграл (1.11) служит примером интеграла от элементарной функции, не являющегося элементарной функцией. Таким образом, в отличие от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит нас из класса элементарных функций. Это обстоятельство подчеркивает условность самого понятия элементарной функции как традиционного объекта классического анализа.

Недостаточность описанного нами аппарата ставит на повестку дня задачу о существовании и о вычислении первообразной и неопределенного интеграла от любой функции $f(x)$, только непрерывной в каждой точке x области своего задания.

Оказывается, такую задачу можно решить при помощи другого подхода к проблеме интегрирования функции, к выяснению которого мы сейчас и перейдем.

8. Снова предположим, что функция $f(x)$ представляет собой мгновенную скорость движущейся вдоль оси Oy материальной точки. Поставим цель — вычислить путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от $x = a$ до $x = b$.

Для облегчения рассуждений будем считать, что скорость $f(x)$ неотрицательна для всех значений времени x.

Для решения поставленной задачи разобьем промежуток времени на малые промежутки, ограниченные моментами времени

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Естественно считать, что на каждом малом промежутке времени от x_{k-1} до x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) скорость $f(x)$ меняется мало (что заведомо будет иметь место всякий раз, когда $f(x)$ является непрерывной в каждой точке x). Но тогда приближенно можно считать скорость $f(x)$ постоянной на каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ и равной значению $f(\xi_k)$, где ξ_k — некоторое значение времени из промежутка $[x_{k-1}, x_k]$.

Таким образом, путь $S[x_{k-1}, x_k]$, пройденный движущейся точкой за промежуток времени от x_{k-1} до x_k, приближенно можно считать равным произведению $f(\xi_k)$ на длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ промежутка $[x_{k-1}, x_k]$. Итак,

$$S[x_{k-1}, x_k] \approx f(\xi_k)\Delta x_k.$$

В таком случае путь $S[a, b]$, пройденный материальной точкой за весь промежуток времени от $x = a$ до $x = b$, будет приближенно равен сумме

$$S[a, b] \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n. \qquad (1.12)$$

Сумму, стоящую в правой части (1.12), принято называть **интегральной суммой**.

Естественно ожидать, что точное значение пути $S[a, b]$ мы получим, переходя в интегральной сумме, стоящей в правой части (1.12), к пределу при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_k (при этом, конечно, общее число n частичных промежутков будет неограниченно возрастать).

Используя символ предела и обозначая через d наибольшее из чисел $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, получим, что

$$S[a, b] = \lim_{d \to 0} \{f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n\}. \qquad (1.13)$$

Разумеется, требует уточнения вопрос о том, что мы понимаем под пределом интегральной суммы, стоящим в правой части (1.13). На этот раз операция предельного перехода встречается в новой и более сложной форме, чем при вычислении обычного предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Строгое определение и изучение свойств предела вида (1.13) будет дано в систематическом курсе анализа. Здесь же мы укажем, что в математике *предел, стоящий в правой части* (1.13), *называется* ***определенным интегралом*** *от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.14)$$

Итак, определенный интеграл (1.14) равен пути $S[a, b]$, пройденному движущейся со скоростью $f(x)$ материальной точкой за промежуток времени от $x=a$ до $x=b$.

Вместе с тем очевидно, что интегральная сумма, стоящая в правой части (1.12), геометрически представляет собой сумму площадей прямоугольников, основаниями которых служат отрезки Δx_k, а высотами — отрезки длины $f(\xi_k)$.

Иными словами, интегральная сумма, стоящая в правой части (1.12), равна площади ступенчатой фигуры, обведенной на

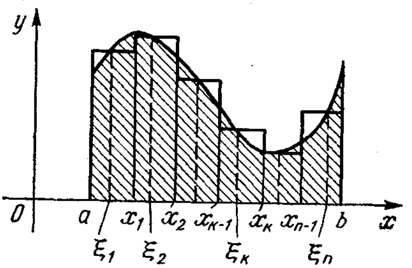


Рис. 1.2

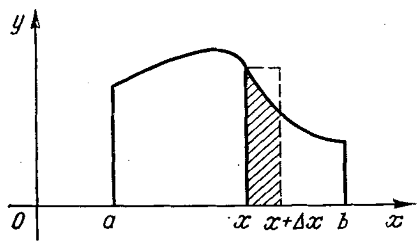


Рис. 1.3

рис. 1.2 жирной линией. Естественно ожидать, что при стремлении к нулю длины d наибольшего из чисел Δx_k площадь указанной ступенчатой фигуры будет стремиться к площади криволинейной фигуры, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (на рис. 1.2 эта фигура заштрихована). Эту фигуру принято называть **криволинейной трапецией**.

Таким образом, определенный интеграл (1.14) равен площади указанной криволинейной трапеции.

Конечно, проведенные нами наглядные рассуждения требуют уточнения. В частности, в систематическом курсе анализа надлежит уточнить само понятие площади криволинейной трапеции и вообще площади плоской фигуры.

Итак, с понятием определенного интеграла (1.14) связаны две фундаментальные задачи: физическая задача о вычислении пути, пройденного движущейся со скоростью $f(x)$ материальной точкой за промежуток времени от $x=a$ до $x=b$, и геометрическая задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

9. Теперь настало время заняться вопросом о связи определенного интеграла (1.14) с введенным ранее неопределенным интегралом (или с первообразной), а также вопросом о способах вычисления определенного интеграла.

Обозначим через $F(x)$ определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до x, где a — некоторое фиксированное значение аргумента, а x — переменное значение. Иными словами, положим *

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{1.15}$$

С геометрической точки зрения этот интеграл, как это показывает проведенное выше рассмотрение, равен площади криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на сегменте $[a, x]$. На рис. 1.3 эта криволинейная трапеция обведена жирной линией.

Используя наглядные геометрические соображения, убедимся в том, что введенная нами функция (1.15) является одной из первообразных функции $f(x)$, т. е. убедимся в том, что $F'(x)=f(x)$.

Пусть Δx — некоторое достаточно малое приращение аргумента x. Очевидно, разность $F(x+\Delta x)-F(x)$ представляет собой площадь «узкой» криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 1.3. С другой стороны, если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x, т. е. если значение этой функции при малом изменении аргумента меняется мало, то указанная площадь «узкой» криволинейной трапеции мало отличается от площади $f(x)\,\Delta x$ прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(x)$.

Отсюда следует, что при малом Δx разностное отношение

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \tag{1.16}$$

мало отличается от высоты $f(x)$ указанного прямоугольника, т. е. предел при $\Delta x\to 0$ разностного отношения (1.16) обязан быть равен $f(x)$. Вместе с тем, по определению, указанный предел равен производной $F'(x)$.

Итак, мы убедились в том, что $F'(x)=f(x)$, т. е. функция (1.15) является одной из первообразных функции $f(x)$. Но тогда любая первообразная функции $f(x)$ равна

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C, \tag{1.17}$$

где C — постоянная.

Проведенные нами рассуждения имеют предварительный характер, но при наличии развитого аппарата математического ана-

* Переменную под знаком определенного интеграла мы обозначаем через t, чтобы не путать ее с верхним пределом интегрирования x.

лиза им легко придать строгий характер и строго доказать, что у любой функции $f(x)$, только непрерывной в каждой точке x, существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл), причем любая первообразная этой функции определяется равенством (1.17).

Равенство (1.17), в свою очередь, позволяет установить связь между определенным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ и любой первообразной $\Phi(x)$ функции $f(x)$.

Для установления такой связи возьмем в равенстве (1.17) в качестве верхнего предела интегрирования сначала число b, а затем число a. При этом получим

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt+C=\int_a^b f(x)\,dx+C, \tag{1.18}$$

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt+C=C \tag{1.19}$$

(ибо интеграл $\int_a^a f(t)\,dt$, очевидно, равен нулю).

Вычитая из равенства (1.18) равенство (1.19), мы получим знаменитую ф о р м у л у Н ь ю т о н а — Л е й б н и ц а

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a),$$

сводящую вопрос о вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ к вычислению разности значений любой первообразной $\Phi(x)$ функции $f(x)$ в точках b и a.

Строгое обоснование формулы Ньютона — Лейбница является одной из важных задач математического анализа.

10. Заметим, однако, что точное аналитическое выражение для первообразной можно получить лишь для узкого класса функций. Поэтому наличие формулы Ньютона — Лейбница не снимает вопроса о приближенных способах вычисления определенного интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла (так называемый м е т о д п р я м о у г о л ь н и к о в) основан на замене вычисляемого интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ интегральной суммой, стоящей в правой части (1.12), у которой все точки

ξ_k являются серединами соответствующих сегментов $[x_{k-1}, x_k]$, а длины всех указанных сегментов, т. е. все числа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, равны друг другу.

В систематическом курсе анализа будет доказано, что при определенных требованиях на функцию $f(x)$ ошибка, совершаемая при замене интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ указанной специальной интегральной суммой, имеет порядок n^{-3}, где n — число частичных сегментов.

Замечательным является то обстоятельство, что метод прямоугольников (как и многие другие методы приближенного вычисления определенного интеграла) допускает удобную реализацию на ЭВМ. Это обстоятельство и равенство (1.17) делают эти методы эффективным средством вычисления первообразных и неопределенных интегралов.

Ниже мы приводим результат вычисления на ЭВМ по методу прямоугольников так называемого **интеграла Пуассона**

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

для значения x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Результаты вычислений собраны нами в табл. 1, в которой в первой колонке стоит аргумент x интеграла Пуассона, во второй колонке указана длина h частичного сегмента (или шага), в третьей колонке приведен результат вычисления, а в четвертой колонке указано число n частичных сегментов *.

Таким образом, для интеграла Пуассона, не являющегося, как указано выше, элементарной функцией, с помощью ЭВМ и простейших приближенных методов без труда могут быть составлены таблицы его значений, делающие использование этого интеграла столь же доступным, как и использование любой элементарной функции.

11. Наряду с приближенными методами вычисления интегралов важную роль в современной математике играют приближенные методы отыскания корней различных уравнений.

Рассмотрим простейшее уравнение

$$f(x) = 0. \qquad (1.20)$$

В систематическом курсе анализа будет доказано, что при опре-

* При этом следует учитывать ошибки округления, возникающие при переводе чисел, взятых в десятичной системе счисления, в двоичную систему ЭВМ и обратном переводе чисел, полученных в двоичной системе счисления, в десятичную. Вследствие указанных ошибок округления из десяти выписанных после запятой десятичных знаков можно гарантировать правильность первых шести знаков (остальные четыре знака в табл. 1 взяты в скобки).

Таблица 1

x	h	$F(x)$	n
0,0999999642	0,0099999964	0,039827 (9885)	10
0,1999999285	0,0099999964	0,079260 (0074)	20
0,2999998927	0,0099999964	0,117911 (8581)	30
0,3999998569	0,0099999964	0,155422 (3028)	40
0,4999998212	0,0099999964	0,191463 (1319)	50
0,5999997854	0,0099999964	0,225747 (6439)	60
0,6999997497	0,0099999964	0,258037 (1805)	70
0,7999997139	0,0099999964	0,288145 (4843)	80
0,8999996781	0,0099999964	0,315940 (7870)	90
0,9999996424	0,0099999964	0,341345 (6679)	100
0,0999999642	0,0009999996	0,039827 (8248)	100
0,1999999285	0,0009999996	0,079259 (6848)	200
0,2999998927	0,0009999996	0,117911 (3861)	300
0,3999998569	0,0009999996	0,155421 (6952)	400
0,4999998212	0,0009999996	0,191462 (4058)	500
0,5999997854	0,0009999996	0,225746 (8192)	600
0,6999997497	0,0009999996	0,258036 (2789)	700
0,7999997139	0,0009999996	0,288144 (5284)	800
0,8999996781	0,0009999996	0,315939 (7992)	900
0,9999996424	0,0009999996	0,341344 (6698)	1000

деленных требованиях, налагаемых на функцию $f(x)$, корень $x=c$ уравнения (1.20) может быть найден как предел последовательности итераций x_n ($n=1, 2, 3, \ldots$), первая из которых x_1 берется из некоторого достаточно широкого диапазона, а все последующие шаг за шагом определяются по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.21}$$

Указанный метод приближенного вычисления корня уравнения (1.20) называется *методом Ньютона* (или *методом касательных*). Этот метод допускает очень удобную реализацию на ЭВМ.

В качестве конкретного примера рассмотрим уравнение (1.20) с функцией $f(x)$ вида $f(x)=x^k-a$, где a — положительное вещественное число, а $k\geqslant 2$ — целое положительное число. Для такой функции $f(x)$ положительным корнем уравнения (1.20) будет являться число $\sqrt[k]{a}$ (т. е. корень степени k из положительного вещественного числа a).

Формула (1.21), определяющая последовательные приближения метода Ньютона, на этот раз принимает вид

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.22}$$

(Чтобы убедиться в этом, достаточно учесть, что $f'(x)=kx^{k-1}$.)

Формула (1.22) представляет собой эффективный легко реализуемый на ЭВМ алгоритм вычисления корня степени k из положительного числа a.

Приведем пример вычислений, проведенных на ЭВМ по этой формуле.

Всякое положительное вещественное число a представимо (и притом единственным способом) в виде $a=2^l x$, где l — целое число, а x удовлетворяет неравенствам $1/2 \leqslant x < 1$. Будем каждый раз выбирать за первое приближение x_1 число $x_1=2^{[l/k]}$, где k — степень извлекаемого корня, а символ $[l/k]$ обозначает целую часть числа l/k.

Результаты вычислений собраны нами в приводимую ниже табл. 2, в которой в первой колонке стоят числа a, из которых извлекается корень, во второй колонке указаны степени k извлекаемых корней, в третьей колонке приведен результат вычислений, а в четвертой колонке указано число сделанных итераций.

Таблица 2

a	k	$\sqrt[k]{a}$	n
2	2	1,41423181	4
3	2	1,732049942	5
4	2	1,999999046	5
2	5	1,148697853	5
3	5	1,245730400	5
4	5	1,319507599	6
2	10	1,071773529	5
3	10	1,116123199	6
4	10	1,148697853	6

12. Мы рассмотрели постановку важнейших задач математического анализа, отправляясь от простейшей механической модели — движения материальной точки вдоль прямой линии. Такая модель естественно привела нас к необходимости построения дифференциального и интегрального исчисления функции $f(x)$ одной независимой переменной.

При описании более сложных задач естествознания возникает понятие функции нескольких независимых переменных x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Так, например, температура u нагреваемого тела представляет собой функцию четырех независимых переменных: трех координат x_1, x_2, x_3 точки этого тела и времени t. Эту функцию естественно обозначить символом $u=f(x_1, x_2, x_3, t)$.

Для функции нескольких независимых переменных естественно ввести понятие производной по каждой из переменных (такую производную называют частной производной по данной переменной).

Важной задачей для последующего развития математического анализа является построение дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных.

Наконец, математический анализ, понимаемый в совсем широком смысле, включает в себя теорию так называемых дифференциальных уравнений (т. е. уравнений, содержащих искомые функции под знаками производных).

В последние десятилетия широкое развитие получили теории, исходящие из обобщенной трактовки самого понятия функции, понятия производной и понятия решения дифференциального уравнения, связывающего производные функции.

Создание математического анализа является одним из величайших достижений человеческого разума. Оно позволило от рассмотрения отдельных разрозненных физических и геометрических задач (таких, как падение тела под действием силы тяжести, вычисление площади, лежащей под параболой) перейти к развитию общих методов решения больших классов задач. Развитие математического анализа, в свою очередь, оказало огромное влияние на прогресс науки и техники.

Классический математический анализ представляет собой очень удобную идеализированную модель, основанную на том, что мы располагаем точными значениями всех исходных величин и можем найти точные значения всех вычисляемых величин.

Заметим вместе с тем, что, отправляясь от этой модели, мы, как правило, можем оценить погрешность, возникающую вследствие того, что исходные величины заданы нам с некоторой ошибкой и все вычисления могут быть проведены лишь с определенной точностью.

Таким образом, аппарат математического анализа может быть использован для построения численных методов и оценки погрешностей.

Подводя итог, систематизируем первоочередные и наиболее важные проблемы, выявившиеся в результате проведенного нами предварительного рассмотрения.

1. Уточнение понятий вещественного числа, множества и функции.

2. Развитие теории пределов и связанного с этой теорией понятия непрерывности функции.

3. Построение аппарата дифференциального и интегрального исчислений.

4. Построение теории определенного интеграла как предела сумм специального вида.

5. Развитие приближенных методов вычисления определенных интегралов и приближенных методов решения уравнений.

6. Выяснение некоторых геометрических понятий (таких, как площадь плоской фигуры, длина дуги).

Глава 2

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

В предыдущей главе мы убедились в том, что развитие теории вещественных * чисел необходимо для строгого и последовательного изучения понятия предела, являющегося одним из важнейших понятий математического анализа.

Необходимая нам теория вещественных чисел, излагаемая в этой главе, включает в себя определение операций упорядочения сложения и умножения этих чисел и установление основных свойств указанных операций, а также доказательство существования точных граней у множеств чисел, ограниченных сверху или снизу.

В конце главы дается представление о дополнительных вопросах теории вещественных чисел, не являющихся необходимыми для построения теории пределов и вообще курса математического анализа (полнота множества вещественных чисел в смысле Гильберта, аксиоматическое построение теории вещественных чисел, связь между различными способами введения вещественных чисел).

Самый последний параграф главы посвящен элементарным вопросам теории множеств, близко примыкающих к теории вещественных чисел.

§ 1. МНОЖЕСТВО ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ БЕСКОНЕЧНЫМИ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ, И ЕГО УПОРЯДОЧЕНИЕ

1. Свойства рациональных чисел. Понятие рационального числа и основные свойства рациональных чисел известны из курса средней школы. В настоящем пункте мы даем систематизацию хорошо известных из курса средней школы вопросов теории рациональных чисел.

Рациональным называется число, представимое (хотя бы одним способом) в виде отношения двух целых чисел, т. е. в виде дроби m/n, где m и n — целые числа и $n \neq 0$.

---

* Вместо термина «вещественное число» часто употребляют термин «действительное число».

Рациональные числа обладают следующими 16 основными свойствами *. (При формулировке этих свойств мы вместо термина «рациональное число» употребляем более краткий термин «число».)

1°. Любые два числа a и b связаны одним и только одним из трех знаков $>$, $<$ или $=$, причем если $a>b$, то $b<a$. Иными словами, существует правило, позволяющее установить, каким из указанных трех знаков связаны два данных числа. Это правило называется **правилом упорядочения** **.

2°. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c, называемое их **суммой** и обозначаемое символом $c=a+b$ ***. Операция нахождения суммы называется **сложением**.

3°. Существует правило, посредством которого любым числам a и b ставится в соответствие третье число c, называемое их **произведением** и обозначаемое символом $c=a\cdot b$ ****. Операция нахождения произведения называется **умножением**.

Правило упорядочения обладает следующим свойством:

4°. Из $a>b$ и $b>c$ вытекает, что $a>c$ (свойство транзитивности знака $>$); из $a=b$ и $b=c$ вытекает, что $a=c$ (свойство транзитивности знака $=$).

Операция сложения обладает следующими четырьмя свойствами:

5°. $a+b=b+a$ (коммутативность или перестановочное свойство).

6°. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность или сочетательное свойство).

7°. Существует число 0 такое, что $a+0=a$ для любого числа a (особая роль нуля).

8°. Для каждого числа a существует противоположное ему число a' такое, что $a+a'=0$.

Аналогичными четырьмя свойствами обладает операция умножения:

---

* Все приводимые нами свойства рациональных чисел могут быть получены из свойств целых чисел.

** Правило упорядочения рациональных чисел формулируется так: два неотрицательных числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$, у которых $n_1>0$ и $n_2>0$, связаны тем же знаком, что и два целых числа $m_1\cdot n_2$ и $m_2\cdot n_1$; два неположительных числа a и b связаны тем же знаком, что и два неотрицательных числа $|b|$ и $|a|$; если a неотрицательно, а b отрицательно, то $a>b$.

*** Правило образования суммы двух рациональных чисел $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ определяется равенством $\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot n_2+m_2\cdot n_1}{n_1\cdot n_2}$, которое получается с помощью известного приема приведения к общему знаменателю.

**** Правило образования произведения двух рациональных чисел $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ определяется равенством $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$.

9°. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность).

10°. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность).

11°. Существует число 1 такое, что $a \cdot 1 = a$ для любого числа a (особая роль единицы).

12°. Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное ему число a' такое, что $a \cdot a' = 1$.

Операции сложения и умножения связаны следующим свойством:

13°. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность или распределительное свойство умножения относительно суммы).

Следующие два свойства связывают операцию упорядочения с операцией сложения или соответственно умножения:

14°. Из $a > b$ вытекает, что $a+c > b+c$.

15°. Из $a > b$ и $c > 0$ вытекает, что $a \cdot c > b \cdot c$.

Особая роль принадлежит последнему свойству.

16°. Каково бы ни было число a, можно число 1 повторить слагаемым столь раз, что сумма превзойдет a *.

Перечисленные 16 свойств называют **основными** потому, что все другие алгебраические свойства, относящиеся к операциям сложения и умножения и к сочетанию равенств и неравенств, могут быть извлечены как логические следствия из указанных 16 свойств.

Так, например, из основных свойств вытекает следующее часто используемое в дальнейшем свойство, позволяющее почленно складывать неравенства одного знака:

$$\text{если } a > b \text{ и } c > d, \text{ то } a+c > b+d.$$

В самом деле, из неравенств $a > b$ и $c > d$ и из свойств 14° и 5° вытекает, что $a+c > b+c$ и $b+c > b+d$, а из двух последних неравенств и свойства 4° вытекает, что $a+c > b+d$.

2. Недостаточность рациональных чисел для измерения отрезков числовой оси. *Договоримся называть числовой осью прямую, на которой выбраны определенная точка O (начало отсчета), масштабный отрезок OE, длину которого мы принимаем равной единице, и положительное направление (обычно от O к E).* Очевидно, каждому рациональному числу соответствует на числовой оси определенная точка. В самом деле, из курса средней школы известно, как построить отрезок, длина которого составляет $1/n$ часть длины масштабного отрезка OE (n — любое целое положительное число). Следовательно, мы можем построить и отрезок, длина которого относится к длине масштабного отрезка как m/n, где m и n — любые целые положительные числа. Отложив такой отрезок вправо (влево) от точки O, мы получим точку M_1 (M_2), соответствующую рациональному числу m/n ($-m/n$) (рис. 2.1).

* Это свойство часто называют аксиомой Архимеда.

Заметим теперь, что не каждой точке M числовой оси соответствует рациональное число. Так, например, если точка M выбрана так, что длина отрезка OM равна диагонали квадрата, стороной которого служит масштабный отрезок OE, то поскольку длина масштабного отрезка OE равна единице, по теореме Пифагора длина x отрезка OM является корнем уравнения $x^2=2$ и, как показано в курсах средней школы, не является рациональным числом. Но это и означает, что указанной точке M не соответствует рациональное число.

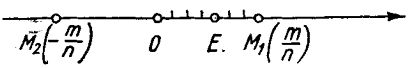


Рис. 2.1

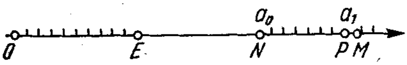


Рис. 2.2

Естественно, возникает потребность расширить множество рациональных чисел и ввести в рассмотрение более широкое множество чисел так, чтобы каждой точке числовой оси соответствовало некоторое число из этого более широкого множества (или, что то же самое, чтобы с помощью этого более широкого множества чисел можно было выразить длину любого отрезка OM числовой оси).

Убедимся в том, что посредством измерения отрезка OM каждой точке M числовой оси можно поставить в соответствие вполне определенную бесконечную десятичную дробь.

Пусть M — любая точка числовой оси. Ради определенности предположим, что точка M лежит направо от O. Проведем процесс измерения отрезка OM при помощи масштабного отрезка OE.

Сначала выясним, сколько раз целый масштабный отрезок уложится в отрезке OM *. Могут представиться два случая:

1) Отрезок OE укладывается в отрезке OM целое число a_0 раз с некоторым остатком NM, меньшим OE (рис. 2.2). В этом случае целое число a_0 представляет собой результат измерения по недостатку с точностью до числа 1.

2) Отрезок OE укладывается в отрезке OM целое число a_0 раз **без остатка**. В этом случае процесс измерения можно считать законченным и целое рациональное число a_0 считать длиной отрезка OM. Формально мы можем утверждать, что в этом случае точке M соответствует бесконечная десятичная дробь $a_0{,}000\ldots$, которая отождествляется с целым рациональным числом a_0.

---

* В силу аксиомы Архимеда для отрезка, каковы бы ни были два отрезка AB и CD, повторив один из этих отрезков слагаемым достаточно большое число раз, мы получим отрезок, длина которого превосходит длину второго отрезка.

В первом случае процесс измерения следует продолжить и выяснить, сколько раз 1/10 часть масштабного отрезка OE укладывается в отрезке NM (являющемся остатком измерения с помощью целого отрезка OE). Снова могут представиться два случая:

1) 1/10 часть OE укладывается в отрезке NM a_1 раз с некоторым остатком PM, меньшим 1/10 части OE (см. рис. 2.2). В этом случае рациональное число a_0, a_1 представляет собой результат измерения OM по недостатку с точностью до числа 1/10.

2) 1/10 часть OE укладывается в отрезке NM целое число a_1 раз без остатка. В этом случае процесс измерения можно считать законченным и рациональное число a_0, a_1 считать длиной отрезка OM. Формально мы можем утверждать, что в этом случае точке M соответствует бесконечная десятичная дробь $a_0,a_1000...$, отождествляемая с рациональным число a_0,a_1.

Продолжая указанные рассуждения далее, мы придем к двум возможностям:

1) либо описанный процесс измерения оборвется на n-м шаге вследствие того, что точке M соответствует рациональное число $a_0,a_1a_2 \ldots a_n$ (в этом случае точке M соответствует бесконечная десятичная дробь $a_0,a_1a_2 \ldots a_n000 \ldots$, которую мы отождествляем с рациональным числом $a_0,a_1a_2 \ldots a_n$);

2) либо описанный процесс измерения никогда не оборвется и мы получим бесконечную последовательность рациональных чисел

$$a_0;\ a_0, a_1;\ \ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n;\ \ldots, \tag{2.1}$$

представляющих собой результат измерения по недостатку отрезка OM с точностью до $1, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$.

Каждое из чисел последовательности (2.1) может быть получено обрыванием на соответствующем знаке бесконечной десятичной дроби

$$a_0,\ a_1a_2 \ldots a_n \ldots . \tag{2.2}$$

Таким образом, в случае 2) точке M числовой оси отвечает вполне определенная бесконечная десятичная дробь (2.2). Можно сказать, что и в случае 1) точке M отвечает бесконечная десятичная дробь (2.2), но в этом случае у этой дроби все десятичные знаки с номером, большим n, равны нулю, т. е. указанная дробь в случае 1) имеет вид $a_0, a_1a_2 \ldots a_n000 \ldots$.

Приведенные нами рассуждения применимы и для случая, когда точка M лежит левее точки O, только в этом случае естественно считать, что все элементы последовательности (2.1) и бесконечная дробь имеют отрицательный знак.

Итак, мы убедились, что описанный нами процесс измерения позволяет поставить в соответствие каждой точке M числовой оси вполне определенную бесконечную десятичную дробь. Это обстоятельство естественно приводит нас к необходимости рассмотрения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями.

Замечание. Конечно, описанный нами процесс измерения отрезка OM можно видоизменить так, что он будет приводить к рассмотрению не бесконечных десятичных, а, например, бесконечных двоичных или бесконечных троичных дробей. Желание рассматривать бесконечные десятичные дроби вызвано лишь той особой ролью, которую традиционно играет десятичная система счисления. Развитие электронной вычислительной техники повысило роль двоичной и троичной систем счисления, ибо (в силу конструктивных особенностей ЭВМ) эти системы счисления более удобны в практике использования ЭВМ.

3. Упорядочение множества бесконечных десятичных дробей. Во вводной главе мы уже отмечали, что понятие числа относится к так называемым начальным понятиям (т. е. к понятиям, которые могут быть разъяснены, но не могут быть строго определены, ибо всякая попытка дать строгое определение такого понятия неизбежно сведется к замене определяемого понятия ему эквивалентным). Мы введем понятие вещественных чисел, отправляясь от множества бесконечных десятичных дробей.

Рассмотрим множество всевозможных бесконечных десятичных дробей (как положительных, т. е. взятых со знаком $+$, так и отрицательных, т. е. взятых со знаком $-$).

Мы будем придерживаться следующего плана.

Для множества всех чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, мы введем операцию упорядочения. После этого мы убедимся, что для введенной нами операции упорядочения остается справедливым то же самое свойство 4°, которое сформулировано в п. 1 для рациональных чисел (т. е. свойство транзитивности знаков $>$ и $=$).

Наличие только одного этого свойства позволит нам доказать замечательную теорему о том, что у *множества чисел, представимых бесконечными десятичными дробями и ограниченных сверху (или соответственно снизу), существует число, представимое бесконечной десятичной дробью и являющееся точной верхней (или соответственно точной нижней) гранью указанного множества чисел.*

После этого вводятся операции сложения и умножения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями. Это дает нам возможность ввести *вещественные числа как такие числа, которые представимы бесконечными десятичными дробями и для которых указанным нами способом определены операции упорядочения, сложения и умножения.* Доказанная нами теорема о существовании точных граней позволит доказать *существование суммы и произведения* двух любых вещественных чисел, а также справедливость для этих чисел тех же самых *16 основных свойств,* которые сформулированы в п. 1 для рациональных чисел.

Приступим к реализации указанного плана.

В этом пункте мы введем для чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, операцию упорядочения и установим, что эта операция обладает свойством 4°, сформулированном в п. 1 для рациональных чисел (т. е. свойством транзитивности знаков $>$ и $=$).

Рассмотрим произвольное число, представимое бесконечной десятичной дробью, отличной от 0,000... . *Это число мы будем называть* ***положительным****, если оно представимо бесконечной десятичной дробью, взятой со знаком* $+$, *и* ***отрицательным****, если оно представимо бесконечной десятичной дробью, взятой со знаком* $-$.

Числа, не являющиеся положительными, мы будем называть ***неположительными****, а числа, не являющиеся отрицательными,* — ***неотрицательными****.*

Сразу же отметим, что все рациональные числа относятся к множеству чисел, представимых бесконечными десятичными дробями. Представление данного рационального числа бесконечной десятичной дробью можно получить двумя способами:

1) взяв точку M, отвечающую данному рациональному числу на числовой оси, и произведя измерение отрезка OM с помощью масштабного отрезка способом, указанным в п. 2;

2) взяв обыкновенную дробь m/n, представляющую данное рациональное число, и поделив числитель m на знаменатель n «столбиком» *.

Мы представляем читателю убедиться в том, что оба эти способа эквивалентны друг другу. Так, при любом из указанных способов рациональному числу $1/2$ ставится в соответствие бесконечная десятичная дробь 0,5000..., рациональному числу $4/3$ — бесконечная десятичная дробь 1,333... .

Прежде чем перейти к формулировке правила упорядочения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, рассмотрим вопрос о представлении в виде бесконечных десятичных дробей тех рациональных чисел, которые представимы в виде конечной десятичной дроби.

Заметим, что такие рациональные числа допускают **два представления** в виде бесконечных десятичных дробей. Например, рациональное число $1/2=0{,}5$ можно представить в виде двух бесконечных десятичных дробей:

$$1)\ 1/2=0{,}5000...,\quad 2)\ 1/2=0{,}4999... .$$

Вообще, рациональное число $a=a_0, a_1a_2 \ldots a_n$, где $a_n \neq 0$, можно записать в виде двух бесконечных десятичных дробей:

$$1)\ a=a_0, a_1a_2 \ldots a_n000...,\qquad 2)\ a=a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}(a_n-1)999... .$$

* В курсе средней школы доказывается, что при таком делении получается обязательно **периодическая** бесконечная десятичная дробь.

Естественно, мы должны отождествить указанные две бесконечные десятичные дроби (т. е. считать, что они представляют одно и то же вещественное число).

Рассмотрим теперь два произвольных вещественных числа a и b и предположим, что эти числа представляются бесконечными десятичными дробями

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \quad b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots, \tag{2.3}$$

где из двух знаков $+$ и $-$ в каждом представлении берется какой-то один.

Исключим уже рассмотренный выше случай, когда обе бесконечные десятичные дроби в (2.3) имеют одинаковые знаки и служат двумя различными представлениями одного и того же рационального числа, представимого конечной десятичной дробью. После исключения этого случая договоримся называть два числа a и b равными, если их представления в виде бесконечных десятичных дробей (2.3) имеют одинаковые знаки и если справедлива бесконечная цепочка равенств

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n, \dots . \tag{2.4}$$

Итак, *мы называем два числа a и b равными, если их представления в виде бесконечных десятичных дробей* (2.3) *имеют одинаковые знаки и если либо справедлива цепочка равенств* (2.4), *либо бесконечные десятичные дроби в* (2.3) *служат двумя представлениями одного и того же рационального числа, представимого конечной десятичной дробью.*

Пусть даны два неравных числа a и b, представимых бесконечными десятичными дробями. Установим правило, позволяющее заключить, каким из двух знаков, $>$ или $<$, связаны эти числа.

Договоримся называть модулем числа a, представимого бесконечной десятичной дробью, число, представимое той же самой бесконечной десятичной дробью, что и число a, но всегда взятой со знаком $+$.

Модуль числа a будем обозначать символом $|a|$. Число $|a|$ всегда является неотрицательным.

Рассмотрим отдельно три возможных случая: 1) случай, когда a и b оба неотрицательны; 2) случай, когда оба числа a и b отрицательны; 3) случай, когда одно из чисел a и b неотрицательно, а другое отрицательно.

1) Пусть сначала a и b оба неотрицательны и имеют представления $a = a_0, a_1 a_2 \dots$; $b = b_0, b_1 b_2 \dots$. Так как числа a и b не являются равными, то нарушается хотя бы одно из равенств (2.4).

Обозначим через k наименьший из номеров n, для которого нарушается равенство $a_n = b_n$, т. е. предположим, что

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, \ a_k \neq b_k.$$

Тогда мы будем считать, что $a>b$, если $a_k>b_k$, и будем считать, что $a<b$, если $a_k<b_k$.

2) Пусть теперь оба числа a и b отрицательны. Тогда мы будем считать, что $a>b$, если $|b|>|a|$, и $a<b$, если $|b|<<|a|$ *.

3) Пусть, наконец, одно число (например, a) неотрицательно, а другое число (b) отрицательно. Тогда, естественно, мы будем считать, что $a>b$.

Итак, мы полностью сформулировали правило упорядочения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями.

Чтобы сделать сформулированное правило безупречным с логической точки зрения (или, как говорят в математике, корректным), докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* $a=a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ — *произвольное неотрицательное число, а* $b'=b_0, b_1b_2 \dots b_{n-1}b_n000\dots$ *и* $b''=b_0, b_1b_2\dots$ $\dots b_{n-1}(b_n-1)999\dots$ *при* $b_n>0$ — *два различных представления одного и того же рационального числа* $b_0, b_1b_2\dots b_n$, *то условие* $a<b'$ *эквивалентно условию* $a<b''$, *а условие* $a>b'$ *эквивалентно условию* $a>b''$.

Эта лемма позволяет при упорядочении двух неравных чисел не заботиться о том, какое из двух возможных представлений в виде бесконечной десятичной дроби взято для числа, представимого конечной десятичной дробью.

Доказательство. Для полного доказательства леммы следует доказать четыре утверждения: 1) из $a<b'$ вытекает $a<b''$; 2) из $a<b''$ вытекает $a<b'$; 3) из $a>b'$ вытекает $a>b''$; 4) из $a>b''$ вытекает $a>b'$.

Мы ограничимся доказательством утверждений 1) и 2), ибо утверждения 3) и 4) доказываются аналогично.

Пусть $a<b'$. Тогда по правилу упорядочения найдется номер k такой, что

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1, \dots, a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k<b_k \tag{2.5}$$

(в этих соотношениях следует считать все b_{n+1}, $b_{n+2}, \dots$ равными нулю).

Сразу же заметим, что $k\leqslant n$, ибо при $k>n$ неравенство $a_k<b_k$ не может выполняться, так как $0\leqslant a_k\leqslant 9$, а $b_k=0$.

Если при этом $k<n$, то, поскольку при $k<n$ все десятичные знаки до порядка k у b' и b'' совпадают, условия $a<b'$ и $a<b''$, очевидно, эквивалентны.

Остается рассмотреть случай $k=n$. В этом случае соотношения (2.5) принимают вид $a_0=b_0$, $a_1=b_1, \dots, a_{n-1}=b_{n-1}$, $a_n<b_n$. Самое последнее неравенство эквивалентно неравенству $a_n\leqslant b_n-1$. Если при этом $a_n<b_n-1$, то по правилу упорядочения $a<b''$.

---

* При этом мы учитываем, что для неотрицательных a и b правило упорядочения уже определено (см. случай 1)).

Если же в указанном последнем неравенстве $a_n = b_n - 1$, то все десятичные знаки у чисел a и b'' до порядка n совпадают. Поскольку у числа b'' все десятичные знаки порядка, бо́льшего n, равны девяти, то и в этом случае $a < b''$, ибо у числа a все десятичные знаки порядка, бо́льшего n, не могут быть равны девяти (в силу того, что a не равно b').

Итак, утверждение 1) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Предположим, что $a < b''$. Договоримся о следующих обозначениях бесконечных десятичных дробей, представляющих числа b' и b''.

$$b' = b_0', b_1'b_2' \dots b_n' \dots, \quad b'' = b_0'', b_1''b_2'' \dots b_n'' \dots .$$

В этих представлениях

$$b_0' = b_0'' = b_0, \ b_1' = b_1'' = b_1, \dots, b'_{n-1} = b''_{n-1} = b_{n-1}, \ b_n' = b_n, \ b_n'' = b_n - 1.$$

Иными словами, справедлива цепочка соотношений

$$b_0' = b_0'', \ b_1' = b_1'', \dots, b'_{n-1} = b''_{n-1}, \quad b_n' > b_n''.$$

С другой стороны, поскольку $a < b''$, найдется номер k такой, что справедлива цепочка соотношений

$$a_0 = b_0'', \ a_1 = b_1'', \dots, a_{k-1} = b''_{k-1}, \ a_k < b_k''.$$

Обозначим через m н а и м е н ь ш и й из двух номеров n и k и сопоставим между собой две последние цепочки соотношений. Используя свойства транзитивности знаков $>$ и $=$ для целых чисел, мы получим при этом следующую цепочку соотношений:

$$a_0 = b_0', \ a_1 = b_1', \dots, a_{m-1} = b'_{m-1}, \ a_m < b'_m.$$

Полученные соотношения на основании правила упорядочения вещественных чисел устанавливают справедливость неравенства $a < b'$. Тем самым утверждение 2) также доказано.

Еще раз подчеркнем, что доказанная лемма позволяет при упорядочении двух чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, пользоваться любым из двух представлений в виде бесконечной десятичной дроби для рациональных чисел, представимых конечной десятичной дробью.

Легко убедиться в том, что сформулированное правило упорядочения в применении к двум рациональным числам, представленным в виде бесконечных десятичных дробей, приводит к тому же результату, что и прежнее правило упорядочения рациональных чисел, представленных в виде отношения двух целых чисел.

В самом деле, достаточно рассмотреть случай двух н е о т р и ц а т е л ь н ы х рациональных чисел a и b. Пусть $a > b$ согласно прежнему правилу упорядочения рациональных чисел, и пусть $a = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$; $b = b_0, b_1b_2 \dots b_k \dots$. Отложив рациональные числа a и b на числовой оси, мы получим отвечающие им точки M_1 и M_2, причем, поскольку $a>b$, отрезок OM_1 больше отрезка OM_2. Из описанного в п. 2 процесса измерения отрезка числовой оси вытекает, что целое число $a_0a_1a_2\ldots a_k$ показывает, сколько раз 10^{-k} часть масштабного отрезка OE укладывается в отрезке OM_1, а целое число $b_0b_1b_2\ldots b_n$ показывает, сколько раз 10^{-k} часть OE укладывается в отрезке OM_2. Поскольку отрезок OM_1 больше отрезка OM_2, то найдется номер k такой, что $a_0a_1\ldots a_{k-1}=b_0b_1\ldots b_{k-1}$, а $a_0a_1\ldots a_k>b_0b_1\ldots b_k$, но это и означает, что $a>b$ согласно правилу упорядочения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями.

Докажем теперь, что для сформулированного нами правила упорядочения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, остается справедливым свойство 4°, приведенное в п. 1 для рациональных чисел, т. е. докажем, что *для любых трех чисел a, b и c, представимых бесконечными десятичными дробями, из справедливости неравенств $a>b$ и $b>c$ вытекает справедливость неравенства $a>c$ (свойство транзитивности знака $>$), а из справедливости равенств $a=b$ и $b=c$ вытекает справедливость равенства $a=c$ (свойство транзитивности знака $=$).*

Свойство транзитивности знака $=$ сразу же вытекает из справедливости соответствующего свойства для целых чисел.

Докажем свойство транзитивности знака $>$. Пусть $a>b$, $b>c$. Требуется доказать, что $a>c$.

Рассмотрим три возможных случая: 1) c неотрицательно; 2) c отрицательно, a неотрицательно; 3) c отрицательно и a отрицательно.

1) Пусть сначала c неотрицательно. Тогда b также неотрицательно, ибо если бы b было отрицательно, то в силу правила упорядочения мы получили бы, что $c>b$, и это противоречило бы условию $b>c$. Далее, повторяя те же рассуждения, мы получим, что и a неотрицательно (ибо в противном случае мы получили бы, что $b>a$, и это противоречило бы условию $a>b$).

Итак, в рассматриваемом случае все три числа a, b и c неотрицательны. Записав представления этих чисел бесконечными десятичными дробями
$a=a_0, a_1a_2\ldots$; $b=b_0, b_1b_2\ldots$; $c=c_0, c_1c_2\ldots$, мы получим, что в силу условия $a>b$ найдется номер k такой, что

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1, \ldots, a_{k-1}=b_{k-1},\quad a_k>b_k. \tag{2.6}$$

Аналогично в силу условия $b>c$ найдется номер p такой, что

$$b_0=c_0,\quad b_1=c_1, \ldots, b_{p-1}=c_{p-1},\quad b_p>c_p. \tag{2.7}$$

Обозначим через m наименьший из двух номеров k и p. Тогда, очевидно, из соотношений (2.6) и (2.7) и из справедливости свойства транзитивности знаков $>$ и $=$ для целых чисел вытекает, что $a_0=c_0$, $a_1=c_1$, ..., $a_{m-1}=c_{m-1}$, $a_m>c_m$, а это и означает (по правилу упорядочения), что $a>c$.

2) Пусть теперь c отрицательно, a неотрицательно. Тогда (независимое от знака числа b) неравенство $a>c$ справедливо в силу правила упорядочения.

3) Рассмотрим, наконец, случай, когда оба числа a и c отрицательны. Заметим, что в этом случае и b отрицательно (ибо в противном случае мы получили бы из правила упорядочения, что $b>a$, и это противоречило бы условию $a>b$).

Итак, в рассматриваемом случае все три числа a, b и c отрицательны. Но в таком случае (в силу правила упорядочения) неравенства $a>b$, $b>c$ эквивалентны неравенствам $|b|>|a|$ и $|c|>|b|$. Из последних двух неравенств (в силу свойства транзитивности знака $>$, уже доказанного нами в случае 1) для неотрицательных чисел) вытекает, что $|c|>|a|$, а это и означает (в силу правила упорядочения отрицательных чисел a и c), что $a>c$. Тем самым доказательство свойства транзитивности знака $>$ полностью завершено.

§ 2. ОГРАНИЧЕННЫЕ СВЕРХУ (ИЛИ СНИЗУ) МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ БЕСКОНЕЧНЫМИ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

1. Основные понятия. Рассмотрим совершенно произвольное множество $\{x\}$ чисел, представимых бесконечными десятичными дробями.

Отдельные числа, входящие в состав множества $\{x\}$, мы будем называть элементами этого множества.

Всюду в этом параграфе мы будем требовать, чтобы рассматриваемое множество $\{x\}$ содержало хотя бы один элемент (такое множество принято называть непустым).

Введем важное понятие ограниченности множества сверху (или соответственно снизу).

Определение 1. *Множество $\{x\}$ чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, называется ограниченным сверху (соответственно ограниченным снизу), если существует такое представимое бесконечной десятичной дробью число M (соответственно такое представимое бесконечной десятичной дробью число m), что каждый элемент x множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству*

$$x\leqslant M \quad (\textit{соответственно } x\geqslant m). \tag{2.8}$$

При этом число M (число m) называется верхней гранью (нижней гранью) множества $\{x\}$.

Конечно, любое ограниченное сверху множество $\{x\}$ имеет бесконечно много верхних граней. В самом деле, если число M — одна из верхних граней множества $\{x\}$, то любое число M', большее числа M, также является верхней гранью множества $\{x\}$ (ибо из справедливости неравенства (2.8) будет следовать, что $x \leqslant M'$). Аналогичное замечание можно сделать в отношении нижних граней ограниченного снизу множества $\{x\}$.

Так, например, множество всех представимых бесконечными десятичными дробями отрицательных чисел ограничено сверху. В качестве верхней грани M такого множества можно взять любое неотрицательное число. Множество всех целых положительных чисел 1, 2, 3, ... ограничено снизу. В качестве нижней грани этого множества можно взять любое число m, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant 1$.

Естественно, возникает вопрос о существовании наименьшей из верхних граней ограниченного сверху множества и наибольшей из нижних граней ограниченного снизу множества.

Определение 2. *Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества* $\{x\}$ *называется* ***точной верхней гранью*** *этого множества и обозначается символом* $\bar{x} = \sup\{x\}$ *.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $\{x\}$ *называется* ***точной нижней гранью*** *этого множества и обозначается символом* $\underline{x} = \inf\{x\}$ **.

Определение 2 можно сформулировать и по-другому, а именно: *Число* $\bar{x}$ *(число* $\underline{x}$*) называется* ***точной верхней (точной нижней)*** *гранью ограниченного сверху (снизу) множества* $\{x\}$, *если выполнены следующие два требования:* 1) *каждый элемент* x *множества* $\{x\}$ *удовлетворяет неравенству* $x \leqslant \bar{x}$ $(x \geqslant \underline{x})$; 2) *каково бы ни было число* x', *меньшее* $\bar{x}$ *(бóльшее* $\underline{x}$*), найдется хотя бы один элемент* x *множества* $\{x\}$, *удовлетворяющий неравенству* $x > x'$ $(x < x')$.

В этом определении требование 1) утверждает, что число $\bar{x}$ (число $\underline{x}$) является одной из верхних (нижних) граней, а требование 2) говорит о том, что эта грань является наименьшей (наибольшей) и уменьшена (увеличена) быть не может.

2. Существование точных граней. Существование у любого ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (точной нижней) грани не является очевидным и требует доказательства. Докажем следующую основную теорему.

Основная теорема 2.1. *Если множество* $\{x\}$ *чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, ограничено сверху (соответственно снизу) и содержит хотя бы один элемент, то у этого множества существует точная верхняя (соответственно точная нижняя) грань.*

---

* sup — первые три буквы латинского слова supremum («супремум»), которое переводится как «наивысшее».

** inf — первые три буквы латинского слова infimum («инфимум»), которое переводится как «наинизшее».

Доказательство. Мы остановимся лишь на доказательстве существования точной верхней грани у любого ограниченного сверху множества, ибо существование точной нижней грани у любого ограниченного снизу множества доказывается совершенно аналогично.

Итак, пусть множество $\{x\}$ ограничено сверху, т. е. существует такое число M, что каждый элемент x множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant M$.

Могут представиться два случая:

1°. Среди элементов множества $\{x\}$ есть хотя бы одно неотрицательное число. 2°. Все элементы множества $\{x\}$ являются отрицательными числами. Эти случаи мы рассмотрим отдельно.

1°. Рассмотрим лишь неотрицательные числа, входящие в состав множества $\{x\}$. Каждое из этих чисел представим в виде бесконечной десятичной дроби и рассмотрим целые части этих десятичных дробей. В силу неравенства $x \leqslant M$ все целые части не превосходят числа M, а поэтому найдется наибольшая из целых частей, которую мы обозначим через $\bar{x}_0$. Сохраним среди неотрицательных чисел множества $\{x\}$ те, у которых целая часть равна $\bar{x}_0$, и отбросим все остальные числа. У сохраненных чисел рассмотрим первые десятичные знаки после запятой. Наибольший из этих знаков обозначим через $\bar{x}_1$. Сохраним среди неотрицательных чисел множества $\{x\}$ те, у которых целая часть равна $\bar{x}_0$, а первый десятичный знак равен $\bar{x}_1$, и отбросим все остальные числа. У сохраненных чисел рассмотрим вторые десятичные знаки после запятой. Наибольший из этих знаков обозначим через $\bar{x}_2$. Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы последовательно определим десятичные знаки некоторого числа $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \bar{x}_0,\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots . \tag{2.6}$$

Докажем, что это число $\bar{x}$ и является точной верхней гранью множества $\{x\}$. Для этого достаточно доказать два утверждения: 1) каждый элемент x множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant \bar{x}$; 2) каково бы ни было число x', меньшее $\bar{x}$, найдется хотя бы один элемент x множества $\{x\}$, удовлетворяющий неравенству $x > x'$.

Докажем сначала утверждение 1). Так как $\bar{x}$ по построению является неотрицательным числом, то любой отрицательный элемент x множества $\{x\}$ заведомо удовлетворяет неравенству $x < \bar{x}$.

Поэтому нам достаточно доказать, что любой неотрицательный элемент x множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant \bar{x}$.

Предположим, что некоторый неотрицательный элемент $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ не удовлетворяет неравенству $x \leqslant \bar{x}$. Тогда $x > \bar{x}$ и по правилу упорядочения найдется номер k такой, что $x_0 = \bar{x}_0$, $x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$, $x_k > \bar{x}_k$. Но последние соотношения противоречат тому, что в качестве $\bar{x}_k$ берется наибольший из десятичных знаков x_k тех элементов x, у которых целая часть и первые $k-1$ знаков после запятой соответственно равны $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}$.

Полученное противоречие доказывает утверждение 1).

Докажем теперь утверждение 2). Пусть x' — любое число, удовлетворяющее условию $x'<\bar{x}$. Требуется доказать, что существует хотя бы один элемент x множества $\{x\}$, удовлетворяющий неравенству $x>x'$.

Если число x' является отрицательным, то неравенству $x>x'$ заведомо удовлетворяет неотрицательный элемент x множества $\{x\}$ (по предположению хотя бы один такой элемент существует).

Остается рассмотреть случай, когда число x', удовлетворяющее условию $x'<\bar{x}$, является неотрицательным. Пусть $x'=x_0', x_1' \ldots x_n' \ldots$. Из условия $x'<\bar{x}$ и из правила упорядочения вытекает, что найдется номер m такой, что

$$x_0' = \bar{x}_0, \quad x_1' = \bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_{m-1}' = \bar{x}_{m-1}, \quad x_m' < \bar{x}_m. \tag{2.10}$$

С другой стороны, из построения числа (2.9) вытекает, что для любого номера m найдется неотрицательный элемент $x=x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ множества $\{x\}$ такой, у которого целая часть и все первые m знаков после запятой те же, что у числа $\bar{x}$. Иными словами, для номера m найдется элемент x такой, для которого

$$x_0 = \bar{x}_0, \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, \quad x_m = \bar{x}_m. \tag{2.11}$$

Сопоставляя (2.10) и (2.11), мы получим, что

$$x_0 = x_0', \quad x_1 = x_1', \quad \ldots, \quad x_{m-1} = x_{m-1}', \quad x_m > x_m',$$

а это и означает (в силу правила упорядочения), что $x>x'$. Утверждение 2), а с ним и вся теорема для случая 1° доказаны.

2°. Аналогично доказывается существование точной верхней грани и во втором случае, когда все элементы x множества $\{x\}$ являются отрицательными числами.

В этом случае мы представим все элементы x отрицательными бесконечными десятичными дробями и обозначим через $\bar{x}_0$ наименьшую из целых частей этих дробей, через $\bar{x}_1$ — наименьший из первых десятичных знаков тех дробей, целая часть которых равна $\bar{x}_0$, через $\bar{x}_2$ — наименьший из вторых десятичных знаков тех дробей, целая часть и первый десятичный знак которых соответственно равны $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$ и т. д.

Таким образом мы определим неположительное число $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots$.

В полной аналогии со случаем 1° доказывается, что это число $\bar{x}$ является точной верхней гранью множества $\{x\}$, т. е. доказывается справедливость утверждений 1) и 2), сформулированных при рассмотрении случая 1°. Теорема доказана.

§ 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ БЕСКОНЕЧНЫМИ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ, РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Докажем три леммы о приближении чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, рациональными числами.

Сначала убедимся в том, что произвольное число a, представимое бесконечной десятичной дробью, можно с наперед заданной точностью приблизить рациональными числами.

Ради определенности будем считать a неотрицательным и представим его дробью $a=a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$.

Обрывая указанную дробь на n-м знаке после запятой, мы получим рациональное число $a_0, a_1a_2 \dots a_n$, причем из правила упорядочения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, сразу же вытекает, что

$$a_0,\ a_1a_2 \dots a_n \leqslant a.$$

Увеличив указанное рациональное число на 10^{-n}, мы получим другое рациональное число $a_0, a_1a_2 \dots a_n + 10^{-n}$, которое (в силу правила упорядочения) обязано удовлетворять неравенству

$$a \leqslant a_0,\ a_1a_2 \dots a_n + 10^{-n}.$$

Итак, для любого номера n мы нашли два рациональных числа $\alpha_1 = a_0, a_1a_2 \dots a_n$ и $\alpha_2 = a_0, a_1a_2 \dots a_n + 10^{-n}$ такие, что $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = 10^{-n}$.

Убедимся в том, что для любого наперед взятого положительного рационального числа ε, начиная с некоторого номера n, справедливо неравенство $10^{-n} < \varepsilon$.

В самом деле, в силу аксиомы Архимеда найдется лишь конечное число натуральных чисел, не превосходящих чисел $1/\varepsilon$. Значит, лишь для конечного числа номеров n справедливо неравенство $10^n \leqslant 1/\varepsilon$, или $10^{-n} \geqslant \varepsilon$. Для всех остальных номеров n справедливо противоположное неравенство $10^{-n} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Для любого представимого бесконечной десятичной дробью числа a и любого наперед взятого положительного рационального числа ε найдутся два рациональных числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.*

Докажем еще две леммы, характеризующие густоту распределения рациональных чисел среди произвольных чисел, представимых бесконечными десятичными дробями.

Лемма 2. *Каковы бы ни были два представимых бесконечными десятичными дробями числа a и b такие, что $a > b$, найдется рациональное число α, заключенное между ними, т. е. такое, что $a > \alpha > b$ (а следовательно, найдется и бесконечное множество различных рациональных чисел, заключенных между a и b).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда оба числа a и b неотрицательны, ибо случай, когда a и b неположительны, сводится к указанному случаю посредством перехода к модулям, а случай, когда b отрицательно, а a положительно, тривиален (в качестве α можно взять нуль).

Итак, пусть $a>b$ и оба числа a и b неотрицательны. Предположим, что $a=a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$; $b=b_0, b_1b_2\ldots b_n\ldots$, причем в случае, если a является рациональным числом, представимым конечной десятичной дробью, договоримся брать представление a десятичной дробью, заканчивающейся бесконечным числом девяток.

Так как $a>b$, то найдется номер k такой, что $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ..., $a_{k-1}=b_{k-1}$, $a_k>b_k$.

В силу принятой нами договоренности все десятичные знаки a_n при $n>k$ не могут быть равны нулю.

Обозначим через p наименьший из номеров n, бо́льших k, для которых $a_n\neq 0$. Тогда число a можно записать в виде

$$a=a_0, a_1a_2\ \ldots\ a_k00\ \ldots\ 0a_p\ldots \qquad (a_p>0).$$

С помощью правила упорядочения легко проверить, что рациональное число

$$\alpha=a_0, a_1a_2\ldots a_k00\ldots 0(a_p-1)999\ldots$$

удовлетворяет неравенствам $a>\alpha>b$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть x_1 и x_2 — два заданных числа, представимых бесконечными десятичными дробями.*

Пусть далее для любого положительного рационального числа ε найдутся два рациональных числа γ_1 и γ_2 такие, что

$$\gamma_1\leqslant x_1\leqslant\gamma_2;\qquad \gamma_1\leqslant x_2\leqslant\gamma_2;\qquad \gamma_2-\gamma_1<\varepsilon.$$

Тогда числа x_1 и x_2 равны.

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что $x_1\neq x_2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_1<x_2$. В силу леммы 2 найдутся два рациональных числа α_1 и α_2 такие, что

$$x_1<\alpha_1<\alpha_2<x_2.$$

Пусть теперь γ_1 и γ_2 — какие угодно рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $\gamma_1\leqslant x_1\leqslant\gamma_2$, $\gamma_1\leqslant x_2\leqslant\gamma_2$.

Из написанных выше неравенств и свойства транзитивности знаков $>$ и $=$ получим $\gamma_1<\alpha_1<\alpha_2<\gamma_2$. Но тогда $\gamma_2-\gamma_1>\alpha_2-\alpha_1$, что противоречит тому, что разность $\gamma_2-\gamma_1$ может быть сделана меньше любого наперед взятого положительного рационального числа ε. Лемма доказана.

§ 4. ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ. ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1. Определение операций сложения и умножения. Описание понятия вещественных чисел. Хорошо известно, как складывают два числа, представимых бесконечными десятичными дробями, когда требуется вычислить их сумму на практике.

Для того чтобы сложить два таких числа a и b, заменяют их с требуемой точностью рациональными числами и за приближенное значение суммы чисел a и b берут сумму указанных рациональных чисел. При этом совершенно не заботятся о том, с какой стороны (по недостатку или по избытку) взятые рациональные числа приближают a и b.

Фактически указанный практический способ сложения чисел, представимых бесконечными десятичными дробями, предполагает, что чем точнее рациональные числа α и β приближают (с любой стороны) числа a и b соответственно, тем точнее сумма $\alpha+\beta$ приближает то представимое бесконечной десятичной дробью число, которое должно являться суммой чисел a и b.

Желание оправдать указанный практический способ сложения естественно приводит к следующему определению.

Определение 1. *Суммой двух представимых бесконечными десятичными дробями чисел a и b называется такое представимое бесконечной десятичной дробью число x, которое для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих соотношениям $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, удовлетворяет неравенствам*

$$\alpha_1+\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2+\beta_2.$$

Это число x обозначают символом $a+b$.

В п. 2 будет доказано, что такое число x существует и притом только одно. Там же будет установлено, что таким числом является точная верхняя грань множества $\{\alpha_1+\beta_1\}$ сумм всех рациональных чисел α_1 и β_1, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leqslant a$, $\beta_1 \leqslant b$, или точная нижняя грань множества $\{\alpha_2+\beta_2\}$ сумм всех рациональных чисел α_2 и β_2, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant \alpha_2$, $b \leqslant \beta_2$.

В п. 2 будет доказано также, что в применении к двум рациональным числам данное нами определение приводит к тому же результату, что и старое определение суммы рациональных чисел.

Перейдем теперь к определению произведения двух чисел, представимых бесконечными десятичными дробями. Сначала определим произведение двух положительных чисел a и b.

Определение 2. *Произведением двух представимых положительными бесконечными десятичными дробями чисел a и b называется такое представимое бесконечной десятичной дробью число x, которое для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2,* *удовлетворяющих соотношениям* $0<\alpha_1\leqslant a\leqslant\alpha_2$, $0<\beta_1\leqslant b\leqslant\beta_2$, *удовлетворяет неравенствам* $\alpha_1\cdot\beta_1\leqslant x\leqslant\alpha_2\cdot\beta_2$.

Это число x обозначают символом $a\cdot b$.

В п. 2 будет установлено, что такое число x существует и притом только одно. Таким числом x является точная верхняя грань множества $\{\alpha_1\cdot\beta_1\}$ произведений всех рациональных чисел α_1 и β_1, удовлетворяющих неравенствам $0<\alpha_1\leqslant a$, $0<\beta_1\leqslant b$, или точная нижняя грань множества $\{\alpha_2\cdot\beta_2\}$ произведений всех рациональных чисел α_2 и β_2, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant\alpha_2$, $b\leqslant\beta_2$.

Произведение чисел любого знака определяется по следующему правилу:

1) для любого представимого бесконечной десятичной дробью числа a полагают, что

$$a\cdot 0=0\cdot a=0;$$

2) для произвольных отличных от нуля и представимых бесконечными десятичными дробями чисел a и b полагают

$$a\cdot b=\begin{cases} |a|\cdot|b|, & \text{если } a \text{ и } b \text{ одного знака,}\\ -|a|\cdot|b|, & \text{если } a \text{ и } b \text{ разных знаков.}\end{cases}$$

В п. 2 будет установлено, что в применении к двум рациональным числам данное нами определение произведения приводит к тому же результату, что и прежнее определение произведения рациональных чисел.

Теперь мы располагаем всем тем, что необходимо для описания понятия вещественных чисел.

Договоримся называть ***вещественными*** *числа, представимые бесконечными десятичными дробями, при условии, что для этих чисел указанным выше способом определены три операции: упорядочения, сложения и умножения.*

Так как все изложенное в § 2 и 3 (и, в частности, основная теорема 2.1 и леммы 1—3) справедливо для произвольных чисел, представимых бесконечными дробями, для которых определена только одна операция упорядочения, то все изложенное в этих параграфах справедливо и для произвольных вещественных чисел.

В дальнейшем будут рассматриваться числа, представимые бесконечными десятичными дробями, для которых кроме операции упорядочения определены также и операции сложения и умножения.

Такие числа в соответствии со сформулированным нами понятием мы в дальнейшем будем называть вещественными.

2. Существование и единственность суммы и произведения вещественных чисел.

Теорема о существовании суммы вещественных чисел. *Для любых вещественных чисел a и b существует вещественное число x, являющееся их суммой.*

Доказательство. Фиксируем произвольные рациональные числа α_2 и β_2, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant \alpha_2$, $b \leqslant \beta_2$, и рассмотрим всевозможные рациональные числа α_1 и β_1, удовлетворяющие неравенствам $\alpha_1 \leqslant a$, $\beta_1 \leqslant b$.

Убедимся в том, что множество $\{\alpha_1+\beta_1\}$ всех сумм $\alpha_1+\beta_1$, отвечающих указанным выше всевозможным рациональным α_1 и β_1, ограничено сверху.

В силу свойства транзитивности знаков $>$ и $=$ из неравенств $a \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_1 \leqslant a$ вытекает, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, а из неравенств $b \leqslant \beta_2$ и $\beta_1 \leqslant b$ вытекает, что $\beta_1 \leqslant \beta_2$.

Но два неравенства $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ и $\beta_1 \leqslant \beta_2$ одного знака, связывающие рациональные числа, можно складывать почленно (см. конец п. 1 § 1). Значит, справедливо неравенство

$$\alpha_1+\beta_1 \leqslant \alpha_2+\beta_2,$$

которое и доказывает ограниченность множества $\{\alpha_1+\beta_1\}$ сверху и тот факт, что число $\alpha_2+\beta_2$ является одной из верхних граней этого множества.

По основной теореме 2.1 (см. § 2) у множества $\{\alpha_1+\beta_1\}$ существует точная верхняя грань, которую мы обозначим через x. Остается убедиться в том, что это вещественное число x и является суммой чисел a и b, т. е. удовлетворяет неравенствам $\alpha_1+\beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2+\beta_2$. Справедливость левого неравенства $\alpha_1+\beta_1 \leqslant x$ вытекает из того, что x является верхней гранью множества $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а справедливость правого неравенства $x \leqslant \alpha_2+\beta_2$ вытекает из того, что число $\alpha_2+\beta_2$ является одной из верхних граней множества $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а число x является точной, т. е. наименьшей, верхней гранью этого множества. Теорема доказана.

Аналогично можно было бы доказать, что в качестве x можно взять точную нижнюю грань множества $\{\alpha_2+\beta_2\}$ сумм $\alpha_2+\beta_2$ всевозможных рациональных чисел α_2 и β_2, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant \alpha_2$, $b \leqslant \beta_2$.

Теорема единственности суммы двух вещественных чисел. *Может существовать только одно вещественное число x, являющееся суммой двух данных вещественных чисел a и b.*

Доказательство. Предположим, что существуют два вещественных числа x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2+\beta_2, \\ \alpha_1+\beta_2 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2+\beta_2 \end{cases} \tag{2.12}$$

для всевозможных рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2, \qquad \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2. \tag{2.13}$$

Фиксируем произвольное положительное рациональное число ε. В силу леммы 1 из § 3 для положительного рационального числа

$\varepsilon/2$ и для данного вещественного числа a найдутся такие рациональные числа α_1 и α_2, что $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, причем $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2$.

Аналогично для указанного $\varepsilon/2$ и для данного вещественного числа b найдутся такие рациональные числа β_1 и β_2, что $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, причем $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2$.

Если взять в неравенствах (2.13) указанные α_1, α_2, β_1 и β_2, то мы получим, что оба числа x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам (2.12), которые можно переписать в виде

$$\gamma_1 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_2, \qquad \gamma_1 \leqslant x_2 \leqslant \gamma_2,$$

положив $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$.

Учитывая, что

$$\gamma_2 - \gamma_1 = (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

мы получим, что оба числа x_1 и x_2 заключены между рациональными числами γ_1 и γ_2, разность между которыми меньше наперед взятого положительного рационального ε.

В силу леммы 3 из § 3 мы получим, что $x_1 = x_2$.

Теорема доказана.

Следствие. *В применении к двум рациональным числам a и b данное нами определение суммы вещественных чисел приводит к тому же результату, что и прежнее определение суммы рациональных чисел.*

В самом деле, пусть a и b — два рациональных числа, $a+b$ — их сумма согласно прежнему определению, α_1, α_2, β_1 и β_2 — какие угодно рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (2.13). Тогда, очевидно, справедливы неравенства *

$$\alpha_1 + \beta_1 \leqslant a + b \leqslant \alpha_2 + \beta_2, \tag{2.14}$$

причем согласно теореме единственности число $a+b$ является единственным вещественным числом, удовлетворяющим неравенствам (2.14).

Совершенно аналогично доказывается *существование и единственность произведения двух данных вещественных чисел.*

Ясно, что достаточно доказать существование и единственность произведения двух положительных чисел a и b.

Для доказательства существования произведения фиксируем произвольные рациональные числа α_2 и β_2, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant \alpha_2$, $b \leqslant \beta_2$, и рассмотрим всевозможные рациональные числа α_1 и β_1, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha_1 \leqslant a$, $0 < \beta_1 \leqslant b$. Легко убедиться в том, что множество $\{\alpha_1 \cdot \beta_1\}$ всех произведений $\alpha_1 \cdot \beta_1$ ограничено сверху, причем число $\alpha_2 \cdot \beta_2$ является одной из верхних граней этого множества.

* Ибо для рациональных чисел неравенства одного знака можно складывать почленно (см. конец п. 1 § 1).

По основной теореме 2.1 существует точная верхняя грань этого множества x, которая, как легко проверить, удовлетворяет неравенствам $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2$, т. е. является произведением чисел a и b.

Аналогично можно было бы доказать, что *произведением положительных чисел a и b является точная нижняя грань множества $\{\alpha_2 \cdot \beta_2\}$ произведений $\alpha_2 \cdot \beta_2$ всевозможных рациональных чисел α_2 и β_2, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant \alpha_2$, $b \leqslant \beta_2$.*

Для доказательства единственности произведения двух положительных вещественных чисел a и b предположим, что существуют два вещественных числа x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2, \qquad \alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2 \tag{2.15}$$

для всевозможных рациональных α_1, α_2, β_1 и β_2 таких, что *

$$0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2 \leqslant M, \qquad 0 < \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2 \leqslant M. \tag{2.16}$$

Фиксировав любое положительное рациональное число ε, мы с помощью леммы 1 найдем для данных вещественных чисел a и b такие рациональные числа α_1, α_2, β_1 и β_2, удовлетворяющие неравенствам (2.16), для которых $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2M$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2M$.

Но тогда в силу (2.15) оба числа x_1 и x_2 будут заключены между рациональными числами $\alpha_2 \cdot \beta_2$ и $\alpha_1 \cdot \beta_1$, разность между которыми

$$\alpha_2 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \beta_1 = \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_1) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

В силу леммы 3 из § 3 получаем, что $x_1 = x_2$.

С помощью теоремы единственности так же, как и для суммы, доказывается, что *в применении к двум рациональным числам данное нами определение произведения вещественных чисел приводит к тому же самому результату, что и прежнее определение произведения рациональных чисел.*

§ 5. СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1. Свойства вещественных чисел. В этом пункте мы убедимся в справедливости для произвольных вещественных чисел всех основных свойств, перечисленных в п. 1 § 1 для рациональных чисел. Справедливость для вещественных чисел свойств 1°—4° уже установлена выше. Таким образом, нужно выяснить лишь вопрос о справедливости для вещественных чисел свойств 5°—16°. Легко убедиться в справедливости для вещественных чисел свойств 5°—8° и 14°, связанных с понятием суммы. Справедливость свойств 5°—8° непосредственно вытекает из определения

* В качестве M можно взять, например, число $M=2\ (a+b)$.