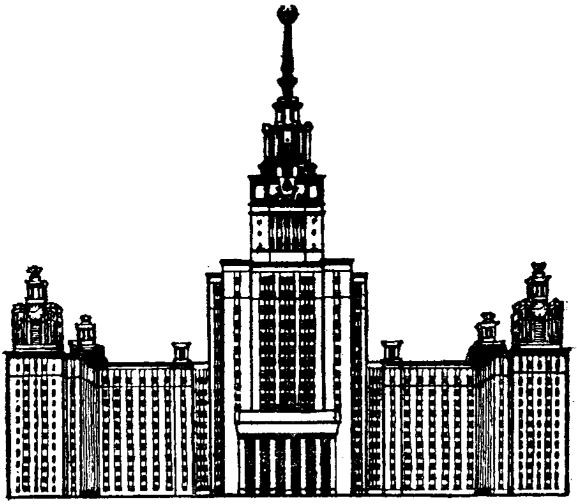
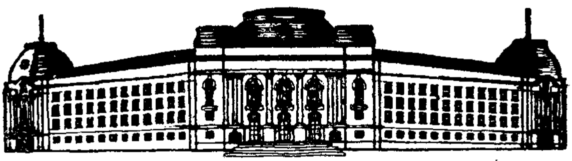
В.А. Ильин, В.А. Садовничий,
Бл. Х. Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2

МГУ





СОВМЕСТНОЕ ИЗДАНИЕ
МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
И СОФИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ КЛИМЕНТА ОХРИДСКОГО,
НАПИСАННОЕ В СООТВЕТСТВИИ
С ЕДИНОЙ ПРОГРАММОЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

В.А. Ильин, В.А. Садовничий,
Бл.Х. Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРОДОЛЖЕНИЕ КУРСА

Под редакцией академика А.Н. Тихонова

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальностям „Математика“,
„Прикладная математика“, „Механика“

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1987

УДК 517

Ильин В. А. и др. Математический анализ. Продолжение курса / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 358 с.

Учебник представляет собой вторую часть (ч. 1 — 1985 г.) курса математического анализа, написанного в соответствии с единой программой, принятой в СССР и НРБ. В книге рассмотрены теория числовых и функциональных рядов, теория кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, теория поля (включая дифференциальные формы), теория интегралов, зависящих от параметра, и теория рядов и интегралов Фурье. Особенность книги — три четко отделяемых друг от друга уровня изложения: облегченный, основной и повышенный, что позволяет использовать ее как студентам технических вузов с углубленным изучением математического анализа, так и студентам механико-математических факультетов университетов.

Рецензенты:

кафедра математики МИФИ
(зав. кафедрой проф. **А. И. Приленко**),
чл.-корр. АН СССР **А. В. Бицадзе**

И $\dfrac{\mathbf{1702050000-164}}{\mathbf{077(02)-87}}$ 119—87

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является второй частью учебника по математическому анализу и полностью охватывает материал второго года обучения, предусмотренный программой для студентов университетов СССР и НРБ, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика» и «Механика».

Книга содержит теорию числовых и функциональных рядов, теорию собственных и несобственных кратных интегралов Римана, теорию криволинейных и поверхностных интегралов и интегралов, зависящих от параметров, теорию поля (в том числе и теорию дифференциальных форм и евклидовых пространств), теорию рядов и преобразований Фурье.

Как и в первой части (В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ. Начальный курс. — М.: Изд-во МГУ, 1985), изложение материала ведется на трех легко отделяемых друг от друга уровнях: облегченном, основном и повышенном.

Облегченный уровень отвечает программе технических вузов СССР с углубленным изучением математического анализа, основной уровень изложения — программе специальности «Прикладная математика», материал повышенного уровня изложения дополняет материал основного уровня рядом разделов, обычно излагаемых на механико-математических факультетах университетов.

Для понимания материала облегченного уровня изложения не требуется чтение материала основного и повышенного уровней, а для понимания материала основного уровня изложения не требуется чтения материала повышенного уровня.

Текст, относящийся к повышенному уровню изложения, выделен в книге двумя вертикальными чертами; текст, относящийся к основному уровню изложения, выделен одной вертикальной чертой, остальной текст книги составляет содержание облегченного уровня изложения.

В целом материал данной книги весьма приближен к тому курсу, который реально может быть прочитан для студентов университетов.

При написании этой книги авторы использовали сложившиеся в Московском и в Софийском университетах лекционные курсы и часть материала из книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа» (М.: Наука, 1980).

Авторы выражают глубокую благодарность титульному редактору этой книги академику А. Н. Тихонову за многие ценные советы и замечания. Особую благодарность авторы выражают И. С. Ломову и С. Троянскому, которые оказали неоценимую помощь на всех этапах написания этой книги. Весьма существенному улучшению изложения материала учебника способствовал труд редактора Т. И. Кузнецовой, которой авторы также выражают глубокую благодарность.

Москва, октябрь 1986 г.

Глава 1

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Еще в курсе средней школы читателю приходилось сталкиваться с суммами, содержащими бесконечное число слагаемых (например, с суммой бесконечного числа членов геометрической прогрессии).

Исследование такого рода сумм, называемых рядами, может быть сведено к исследованию числовых последовательностей, тем не менее эти суммы требуют самостоятельного углубленного изучения, так как служат важным вспомогательным средством для представления различных встречающихся в анализе функций.

§ 1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА

1. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ и формально образуем из ее элементов бесконечную сумму вида

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Формально составленную сумму (1.1) принято называть числовым рядом или просто рядом. При этом отдельные слагаемые u_k принято называть членами ряда (1.1). Сумму первых n членов ряда (1.1) принято называть n-й частичной суммой ряда и обозначать символом S_n.

Итак, по определению

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

Определение. *Ряд* (1.1) *называется* ***сходящимся,*** *если сходится последовательность* $\{S_n\}$ *частичных сумм* (1.2) *этого ряда. При этом предел* S *указанной последовательности* $\{S_n\}$ *называется* ***суммой*** *ряда* (1.1).

Таким образом, для сходящегося ряда (1.1), имеющего сумму S, мы можем формально записать равенство

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случае, если для данного ряда (1.1) предела последовательности частичных сумм (1.2) не существует, этот ряд называется *расходящимся*.

Мы видим, что понятие суммы определено лишь для сходящегося ряда, причем (в отличие от понятия суммы конечного числа слагаемых) понятие суммы ряда вводится посредством операции предельного перехода.

В современной математике и в ее приложениях часто приходится сталкиваться с расходящимися рядами, для которых предела последовательности частичных сумм (1.2) не существует. Для таких рядов вводится понятие суммы в некоторых обобщенных смыслах. В § 7 настоящей главы будут рассмотрены наиболее употребительные методы обобщенного суммирования расходящихся рядов.

Одним из главных вопросов теории числовых рядов является установление признаков, позволяющих решить вопрос о сходимости или расходимости данного ряда. В § 2 такие признаки будут установлены для рядов, все члены которых являются неотрицательными числами, а в § 4 — для рядов с произвольными членами.

Примеры. 1°. Изучим вопрос о сходимости ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}. \tag{1.3}$$

Так как n-я частичная сумма S_n этого ряда при $q\neq 1$ имеет вид

$$S_n=1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.4}$$

то очевидно, что при $|q|<1$ последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет предел, равный $1/(1-q)$. Таким образом, при $|q|<1$ ряд (1.3) сходится и имеет сумму, равную $1/(1-q)$.

Если $|q|>1$, то из выражения (1.4) очевидно, что предела последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ не существует, т. е. при $|q|>1$ ряд (1.3) расходится.

Для полноты картины остается рассмотреть случай $|q|=1$, т. е. случай, когда q равно либо $+1$, либо -1. В случае, когда $q=+1$, все члены ряда (1.3) равны единице и n-я частичная сумма этого ряда S_n равна n. Отсюда следует, что и в случае $q=+1$ предела последовательности $\{S_n\}$ не существует, т. е. ряд (1.3) расходится.

Наконец, в случае $q=-1$ ряд (1.3) имеет вид $1-1+1-1+\ldots$, так что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм совпадает с заведомо расходящейся последовательностью $1, 0, 1, 0, \ldots$. Стало быть, и при $q=-1$ ряд (1.3) расходится.

2°. Фиксировав любую точку x числовой прямой, рассмотрим вопрос о сходимости трех числовых рядов [1]:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{1.5}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{1.6}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{1.7}$$

Обозначая n-е частичные суммы рядов (1.5), (1.6) и (1.7) соответственно через $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$, можем записать:

$$S_n^{(1)}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.8}$$

$$S_n^{(2)}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{1.9}$$

$$S_n^{(3)}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \tag{1.10}$$

Сопоставляя выражения (1.8), (1.9) и (1.10) с разложениями по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 [2]), мы получим

$$\begin{aligned} e^x&=S_n^{(1)}(x)+R_n^{(1)}(x),\\ \sin x&=S_n^{(2)}(x)+R_n^{(2)}(x),\\ \cos x&=S_n^{(3)}(x)+R_n^{(3)}(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ обозначают n-е остаточные члены в разложении по формуле Маклорена функцией e^x, $\sin x$ и $\cos x$ соответственно.

В § 9 гл. 6 ч. 1 доказано, что в каждой точке x числовой прямой указанные остаточные члены имеют равный нулю предел при $n\to\infty$. Следовательно, в силу соотношений (1.11) в каждой точке x прямой частичные суммы $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$ сходятся к пределам, равным соответственно e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Это означает,

[1] Символ 0! мы отождествляем с числом 1.

[2] Здесь и далее ч. 1 — это краткое обозначение книги: Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

что ряды (1.5), (1.6) и (1.7) сходятся в каждой точке x числовой прямой и их суммы равны соответственно e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Замечание 1. С формальной точки зрения изучение числовых рядов представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо 1) каждому ряду (1.1) однозначно соответствует последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, 2) произвольной числовой последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует числовой ряд (1.1) с членами $u_1=S_1$, $u_k=S_k-S_{k-1}$ при $k>1$, для которого эта последовательность служит последовательностью частичных сумм.

Замечание 2. Отметим два простых свойства произвольного ряда, непосредственно вытекающие из определения его сходимости:

I. *Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.*

II. *Если c — отличная от нуля постоянная, $u_k'=cu_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.*

Для обоснования первого из этих свойств достаточно заметить, что в результате указанного отбрасывания (или добавления) конечного числа членов все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, изменятся на одну и ту же постоянную величину.

Для доказательства второго из указанных свойств обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ соответственно через S_n' и S_n и учтем, что $S_n'=cS_n$, где $c\neq 0$. Из последнего равенства вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. Критерий Коши сходимости ряда. Так как вопрос о сходимости ряда по определению эквивалентен вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм, то мы получим необходимое и достаточное условие сходимости данного ряда, сформулировав критерий сходимости Коши для последовательности его частичных сумм. Для удобства приведем формулировку критерия Коши для последовательности (см. п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1):

Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N$, и для всех натуральных p ($p=1, 2, 3, \ldots$)

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

В качестве следствия из этого утверждения получим следующую основную теорему.

Теорема 1.1 (критерий Коши для ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* ε *нашелся номер* N *такой, что для всех номеров* n, *удовлетворяющих условию* $n \geqslant N$, *и для всех натуральных чисел* p $(p=1, 2, \ldots)$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \qquad (1.12)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что величина, стоящая под знаком модуля в неравенстве (1.12), равна разности частичных сумм $S_{n+p}-S_n$.

Отметим, что критерий сходимости Коши представляет в основном теоретический интерес. Его использование для исследования сходимости или расходимости тех или иных конкретных рядов, как правило, сопряжено с трудностями. Поэтому наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении других практически эффективных признаков сходимости и расходимости рядов.

Из теоремы 1.1 легко получить два элементарных, но важных следствия.

Следствие 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то последовательность* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *является бесконечно малой.*

Принято называть величину r_n n-м **остатком** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Чтобы доказать следствие 1, достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что $|r_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Последнее неравенство непосредственно вытекает из неравенства (1.12), справедливого для любого $p=1, 2, 3, \ldots$, и из теоремы 3.13 ч. 1.

Следствие 2 (необходимое условие сходимости ряда). *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *необходимо, чтобы последовательность* $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ *членов этого ряда являлась бесконечно малой.*

Достаточно доказать, что для данного сходящегося ряда и любого $\varepsilon>0$ найдется номер N_0 такой, что при $n \geqslant N_0$ $|u_n| < \varepsilon$. Пусть дано любое $\varepsilon>0$. Согласно теореме 1.1 найдется номер N такой, что при $n \geqslant N$ и для любого натурального p выполняется неравенство (1.12). В частности, при $p=1$ это неравенство имеет вид

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{при } n \geqslant N). \qquad (1.12')$$

Если теперь положить номер N_0 равным $N+1$, то при $n \geqslant N_0$ в силу неравенства (1.12′) получим $|u_n| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Иначе следствие 2 можно сформулировать так: для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = 0$. Таким образом, при исследовании данного ряда на сходимость следует прежде всего посмотреть, стремится ли к нулю k-й член этого ряда при $k \to \infty$. Если это не так, то ряд заведомо расходится. Так, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{7k^2 + 8000k}$$

заведомо расходится, ибо

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{7k^2 + 8000k} = \frac{1}{7} \neq 0.$$

Аналогично расходимость уже встречавшегося выше ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ вытекает из того, что $\lim\limits_{k \to \infty} (-1)^{k-1}$ не существует.

Отметим, что стремление к нулю k-го члена ряда при $k \to \infty$ является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots \qquad (1.13)$$

Этот ряд обычно называют **гармоническим** рядом. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, но (как доказано в п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1) последовательность частичных сумм этого ряда расходится.

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами. Ряды с неотрицательными членами часто встречаются в приложениях. Кроме того, их предварительное изучение облегчит изучение рядов с членами любого знака. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что речь идет о ряде с неотрицательными членами, мы часто будем обозначать члены такого ряда символом p_k вместо u_k.

Можно сразу же отметить основное характеристическое свойство ряда с неотрицательными членами: *последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей.* Это позволяет нам доказать следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной (в силу теоремы 3.8 ч. 1).

Достаточность вытекает из того, что последовательность частичных сумм не убывает и, следовательно, для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена (в силу теоремы 3.15 ч. 1).

2. Признаки сравнения. В этом пункте мы установим ряд признаков, позволяющих сделать заключение о сходимости (или расходимости) рассматриваемого ряда посредством сравнения его с другим рядом, сходимость (или расходимость) которого известна.

Теорема 1.3. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ — *два ряда с неотрицательными членами. Пусть, далее, для всех номеров k справедливо неравенство*

$$p_k \leqslant p_k'. \tag{1.14}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *влечет за собой сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; *расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *влечет за собой расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ соответственно через S_n и S_n'. Из неравенства (1.14) заключаем, что $S_n \leqslant S_n'$. Последнее неравенство означает, что ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n'\}$ влечет за собой ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ и, наоборот, неограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ влечет за собой неограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n'\}$. В силу теоремы 1.2 теорема 1.3 доказана.

Замечания к теореме 1.3. 1) В условии теоремы 1.3 можно требовать, чтобы неравенство (1.14) было выполнено не для всех номеров k, а лишь начиная с некоторого номера k. В самом деле, в силу замечания 2 п. 1 § 1 отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

2) Теорема 1.3 останется справедливой, если в условии этой теоремы заменить неравенство (1.14) следующим неравенством:

$$p_k \leqslant c p_k'. \qquad (1.15)$$

где c — любая положительная постоянная.

В самом деле, в силу замечания 2 из п. 1 § 1 вопрос о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ эквивалентен вопросу о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (cp_k')$. При этом, конечно, можно требовать, чтобы неравенство (1.15) было выполнено лишь начиная с некоторого достаточно большого номера k.

Следствие из теоремы 1.3. *Если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ — ряд с неотрицательными членами, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ — ряд со строго положительными членами и если существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L,$$

то сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказательство. Так как $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$, то по определению предела для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $k \geqslant N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L + \varepsilon.$$

Следовательно, при $k \geqslant N$ справедливо неравенство $p_k < (L+\varepsilon)p_k'$. Последнее неравенство совпадает с неравенством (1.15) при $c = L + \varepsilon$. В силу замечания 2 к теореме 1.3 следствие доказано.

Теорема 1.4. *Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ — два ряда со строго положительными членами. Пусть далее для всех номеров k справедливо неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p_{k+1}'}{p_k'}. \qquad (1.16)$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *влечет за собой сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, *расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *влечет за собой расходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказательство. Запишем неравенство (1.16) для $k=1, 2, \ldots, n-1$, где n — любой номер:

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{p'_2}{p'_1},$$

$$\frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{p'_3}{p'_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{p'_n}{p'_{n-1}}.$$

Перемножая почленно все написанные неравенства, получим

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{p'_n}{p'_1}, \quad \text{или} \quad p_n \leqslant \frac{p_1}{p'_1}\, p'_n.$$

Поскольку в последнем, неравенстве величина $c=p_1/p_1'$ представляет собой положительную постоянную, не зависящую от номера n, то в силу замечания 2 к теореме 1.3 теорема 1.4 доказана.

Замечание к теореме 1.4. В условии теоремы 1.4 можно требовать, чтобы неравенство (1.16) было выполнено не для всех номеров k, а лишь начиная с некоторого номера k (см. замечание 2 п. 1 § 1).

Обе доказанные в настоящем пункте теоремы называют **теоремами сравнения** или **признаками сравнения**.

Примеры. 1°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+b^k}, \quad \text{где } b > 0.$$

Если $b \leqslant 1$, то k-й член рассматриваемого ряда не стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, нарушено необходимое условие сходимости ряда, и ряд расходится. Если же $b > 1$, то, поскольку для любого номера k справедливо неравенство

$$\frac{1}{2+b^k} < \frac{1}{b^k}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^k}$ сходится, теорема сравнения 1.3 позволяет утверждать сходимость рассматриваемого ряда.

2°. Исследуем вопрос о сходимости для любого $\alpha \leqslant 1$ следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{k^\alpha}+\ldots \qquad (1.17)$$

Этот ряд часто называют **обобщенным гармоническим рядом**. Поскольку при $\alpha \leqslant 1$ для любого номера k справедливо неравенство

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$$

и гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится[3], то теорема сравнения 1.3 позволяет утверждать расходимость ряда (1.17) для любого $\alpha \leqslant 1$.

3. Признаки Даламбера и Коши. К признакам сравнения непосредственно примыкают два весьма употребительных признака сходимости рядов с положительными членами — признаки Даламбера и Коши, которые основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из элементов геометрической прогрессии, а именно со сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q+q^2+\ldots+q^k+\ldots,\quad |q|<1, \qquad (1.18)$$

или с расходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1+1+\ldots+1\ldots \qquad (1.19)$$

Теорема 1.5 (признак Даламбера)[4]. I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

---

[3] Расходимость гармонического ряда обоснована в конце п. 2 § 1.

[4] Жак Лерон Даламбер — французский математик и философ (1717—1783).

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right)^{5)}, \tag{1.20}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{1.21}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится при* $L<1$ *и расходится при* $L>1$.

Теорему II обычно называют признаком Даламбера в предельной форме. В этой форме он наиболее часто используется.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.

1) Для доказательства теоремы I положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогда $\frac{p'_{k+1}}{p'_k}=q$, где $q<1$ $\left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k}=1\right)$, и мы можем переписать равенство (1.20) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right). \tag{1.22}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$, совпадающий с рядом (1.18) ((1.19)), сходится (расходится), то неравенство (1.22) на основании теоремы сравнения 1.4 гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$. Теорема I доказана.

2) Докажем теперь теорему II. Если $L<1$, то найдется положительное число ε такое, что $L=1-2\varepsilon$, т. е. $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k\geqslant N$

$$L-\varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L+\varepsilon = 1-\varepsilon. \tag{1.23}$$

Число $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играет роль q в теореме I. Ряд сходится.

Если же $L>1$, то найдется *положительное* число ε такое, что $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В этом случае на основании левого из неравенств (1.23) получим

[5] При этом, конечно, предполагается, что все члены ряда (по крайней мере начиная с некоторого номера) строго положительны.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{при } k \geqslant N).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится на основании теоремы I. Теорема 1.5 полностью доказана.

Замечание к теореме 1.5. 1) Обратим внимание на то, что в теореме 1.5 (I) неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$ (для всех k, начиная с некоторого) нельзя заменить на $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$.

В самом деле, как доказано выше, гармонический ряд (1.13) расходится, но для этого ряда $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ (для всех номеров k).

2) Если в условиях теоремы 1.5 (II) $L=1$, то нельзя сказать ничего определенного о сходимости ряда (т. е. при $L=1$ признак Даламбера «не действует»). В самом деле, для гармонического ряда (1.13) $L=1$, причем этот ряд, как мы знаем, расходится. Вместе с тем для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{1.24}$$

также $L=1$, но этот ряд, как будет показано в следующем пункте, сходится.

Теорема 1.6 (признак Коши). I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1), \tag{1.25}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \tag{1.26}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$.

Теорему II обычно называют признаком Коши в предельной форме.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.

1) Для доказательства теоремы I положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогда из неравенства (1.25) получим

$$p_k \leqslant p_k' \quad (p_k \geqslant p_k'). \tag{1.27}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, совпадающий с рядом (1.18) ((1.19)), сходится (расходится), то неравенство (1.27) на основании теоремы сравнения 1.3 гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$. Теорема 1.6 (I) доказана.

2) Для доказательства теоремы (II) следует дословно повторить схему доказательства теоремы 1.5 (II), заменив во всех рассуждениях $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[k]{p_k}$. Теорема 1.6 полностью доказана.

Замечания к теореме 1.6. 1) Как и в теореме 1.5 (I), в теореме 1.6 (I) неравенство $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1$ нельзя заменить на $\sqrt[k]{p_k} < 1$.

2) При $L=1$ признак Коши в предельной форме «не действует». Можно сослаться на два примера, указанные в соответствующем замечании к признаку Даламбера.

Примеры. 1°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}. \tag{1.28}$$

Применим признак Даламбера в предельной форме. Имеем

$$p_k = \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}, \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}\, k!}{(k+1)!\,(\sqrt{k})^k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{1.29}$$

На основании (1.29)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} \right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1,$$

т. е. ряд (1.28) сходится.

2°. Изучим вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^{-k}. \tag{1.30}$$

Применим признак Коши в предельной форме. Имеем

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\sqrt[k]{k}. \qquad (1.31)$$

На основании[6] (1.31) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}<1$. Таким образом, признак Коши устанавливает сходимость ряда (1.30).

Возникает вопрос о том, какой из двух признаков, Даламбера или Коши, является более сильным. Проанализируем этот вопрос в отношении признаков Даламбера и Коши, взятых в предельной форме. Ниже будет доказано, что из существования предела (1.21) вытекают существование предела (1.26) и факт равенства этих пределов. Обратное неверно. В самом деле, легко убедиться в том, что для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}} \qquad (1.32)$$

предел (1.26) существует и равен 1/2, в то время как предел (1.21) вообще не существует. Таким образом, признак Коши является более сильным, чем признак Даламбера, ибо всякий раз, когда действует признак Даламбера, действует и признак Коши и вместе с тем существуют ряды (например, ряд (1.32)), для которых действует признак Коши и не действует признак Даламбера. Несмотря на это, признак Даламбера на практике употребляется чаще, чем признак Коши.

Итак, докажем

Утверждение. *Из существования равного* L *предела* (1.21) *вытекает существование равного тому же* L *предела* (1.26).

Доказательству утверждения предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к пределу* l, *то к тому же пределу сходится и последовательность* $\sigma_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$ *средних арифметических чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Доказательство. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу l, то для любого $\varepsilon>0$ можно фиксировать номер N такой, что $|a_n-l|<\varepsilon/2$ для всех $n\geqslant N$. Используя этот факт и учитывая, что при всех $n>N$

$$\sigma_n-l=\frac{(a_1-l)+\ldots+(a_n-l)}{n}=$$

[6] Для вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$ следует прологарифмировать выражение $x^{1/x}$ и применить правило Лопиталя.

$$=\left[\frac{(a_1-l)+\ldots+(a_N-l)}{n}\right]+\left\{\frac{(a_{N+1}-l)+\ldots+(a_n-l)}{n}\right\},$$

мы получим, что $|\sigma_n-l|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N_1$.

В самом деле, модуль дроби, заключенной в фигурные скобки, не превосходит числа $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(n-N)}{n}$, меньшего $\varepsilon/2$. Далее, поскольку номер N фиксирован, модуль дроби, заключенной в квадратные скобки, не превосходит $\varepsilon/2$ при всех $n\geqslant N_1$, где N_1 — достаточно большое число. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу L, то к тому же пределу сходится и последовательность $b_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ средних геометрических чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу непрерывности логарифмической функции для $L>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln L$. Но тогда по лемме 1 о пределе среднего арифметического существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n}{n}=\ln L.$$

Из последнего равенства в силу непрерывности показательной функции получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}=e^{\ln L}=L.$$

(Эти рассуждения справедливы и при $L=0$, если считать $\ln L=-\infty$.) Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения. Применяя лемму 2 к числам $a_1=p_1$, $a_2=p_2/p_1$, $\ldots$, $a_n=p_n/p_{n-1}$, мы, опираясь на существование равного L предела (1.21), установим существование равного тому же L предела (1.26).

4. Интегральный признак Коши—Маклорена. Признаки Даламбера и Коши оказываются непригодными для выяснения вопроса о сходимости некоторых часто встречающихся рядов с положительными членами. Так, например, с помощью этих признаков нельзя выяснить вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \tag{1.33}$$

(α — любое вещественное число).

В конце п. 2 мы установили, что при $\alpha\leqslant 1$ ряд (1.33) расходится, однако остается открытым вопрос о сходимости этого ряда при $\alpha>1$. В этом пункте мы установим еще один общий признак сходимости ряда с неотрицательными членами, из которого, в частности, будет вытекать сходимость ряда (1.33) при $\alpha>1$.

Теорема 1.7. (признак Коши — Маклорена). *Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x\geqslant m$, где m — любой фиксированный номер. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)=f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\ldots \tag{1.34}$$

сходится в том и только в том случае, когда существует предел при $n\to\infty$ последовательности

$$a_n=\int_m^n f(x)\,dx. \tag{1.35}$$

Доказательство. Пусть k — любой номер, удовлетворяющий условию $k\geqslant m+1$, а x — любое значение аргумента из сегмента $k-1\leqslant x\leqslant k$. Так как по условию функция $f(x)$ не возрастает на указанном сегменте, то для всех x из указанного сегмента справедливы неравенства

$$f(k)\leqslant f(x)\leqslant f(k-1). \tag{1.36}$$

Функция $f(x)$, будучи ограниченной и монотонной, интегрируема на сегменте $[k-1, k]$ (см. п. 2 § 3 гл. 9 ч. 1). Более того, из неравенства (1.36) и из свойства 6) (см. п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1) вытекает, что

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx\leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx,$$

или

$$f(k)\leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqslant f(k-1). \tag{1.37}$$

Эти неравенства установлены нами для любого $k\geqslant m+1$. Запишем их для значений k, равных $m+1$, $m+2$, ..., n, где n — любой номер, превосходящий m:

$$f(m+1)\leqslant \int_{m}^{m+1} f(x)\,dx\leqslant f(m),$$

$$f(m+2)\leqslant \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,dx\leqslant f(m+1),$$

. . . .

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1).$$

Складывая почленно записанные неравенства, получим

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{m}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \tag{1.38}$$

Договоримся обозначать символом S_n n-ю частичную сумму ряда (1.34), равную

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} f(k).$$

Приняв это обозначение и учитывая обозначение (1.35), мы можем следующим образом переписать неравенства (1.38):

$$S_n - f(m) \leqslant a_n \leqslant S_{n-1}. \tag{1.39}$$

Эти неравенства позволяют без труда доказать теорему. В самом деле, из формулы (1.35) очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Следовательно для сходимости этой последовательности необходима и достаточна ее ограниченность. Для сходимости ряда (1.34) в силу теоремы 1.2 необходима и достаточна ограниченность последовательности $\{S_n\}$. Из неравенств (1.39) вытекает, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{a_n\}$, т. е. тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Примеры. 1°. Прежде всего применим интегральный признак Коши—Маклорена для выяснения сходимости обобщенного гармонического ряда (1.33). Поскольку ряд (1.33) можно рассматривать как ряд вида (1.34) при $m=1$, $f(x)=1/x^{\alpha}$ и функция $f(x)$ убывает и положительна на полупрямой $x \geqslant 1$, вопрос о сходимости ряда (1.33) эквивалентен вопросу о сходимости последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=n} = \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln x\Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Из вида элементов a_n вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$, причем в последнем случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\alpha-1}$. Таким образом, ряд (1.33) расходится при $\alpha \leqslant 1$ (это мы уже установили выше другим способом) и сходится при $\alpha>1$. В частности, при $\alpha=2$ ряд (1.33) переходит в ряд (1.24), сходимость которого мы теперь можем утверждать.

2°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}, \tag{1.40}$$

где β — фиксированное положительное вещественное число. Ряд (1.40) можно рассматривать как ряд вида (1.34) при $m=2$ и $f(x)=\dfrac{1}{x \ln^{\beta} x}$. Поскольку функция $f(x)$ неотрицательна и невозрастает на полупрямой $x \geqslant 2$, вопрос о сходимости ряда (1.40) эквивалентен вопросу о сходимости последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^{\beta} x}\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\right|_{x=2}^{x=n} = \dfrac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{при } \beta \neq 1, \\ \ln \ln x \Big|_{x=2}^{x=n} = \ln \ln n - \ln \ln 2 \text{ при } \beta = 1. \end{cases}$$

Из вида элементов a_n вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$. Таким образом, ряд (1.40) сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$.

5. Признак Раабе. Признаки Даламбера и Коши были основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, представляющим собой сумму членов геометрической прогрессии. Естественно, возникает идея о получении более тонких признаков, основанных на сравнении рассматриваемого ряда с другими стандартными рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд, составленный из всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В этом пункте мы установим признак, основанный на сравнении рассматриваемого ряда с изученным в предыдущем пункте стандартным рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots \tag{1.41}$$

Теорема 1.8 (признак Раабе[7]). I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

$$k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geqslant q > 1 \quad \left(k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leqslant 1\right)^{8)}, \tag{1.42}$$

[7] Иозеф Людвиг Раабе — швейцарский математик (1801—1859).

[8] Конечно, при этом предполагается, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, по крайней мере начиная с некоторого номера, имеет строго положительные члены.

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L, \tag{1.43}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится при* $L>1$ *и расходится при* $L<1$. Теорему II обычно называют признаком Раабе в предельной форме.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.
1) Для доказательства теоремы I перепишем неравенство (1.42) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant 1-\frac{q}{k}\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant 1-\frac{1}{k}\right). \tag{1.44}$$

Так как $q>1$, то найдется некоторое число α, удовлетворяющее неравенствам $q>\alpha>1$. Разложив функцию $(1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1), будем иметь

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x).$$

Полагая в последней формуле $x=-\frac{1}{k}$, получим

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha=1-\frac{\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.45}$$

Поскольку последовательность $\frac{o(1/k)}{1/k}$ является бесконечно малой, то, начиная с некоторого номера k_0, справедливо неравенство

$$\frac{o\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\leqslant q-\alpha. \tag{1.46}$$

Сопоставляя (1.45) и (1.46), получим неравенство

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\geqslant 1-\frac{q}{k}\ (\text{при } k\geqslant k_0). \tag{1.47}$$

Сравнение неравенств (1.44) и (1.47) дает

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant 1-\frac{1}{k}\right)\ (\text{при } k\geqslant k_0).$$

Последние неравенства можно переписать в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}\right) \text{ (при } k \geqslant k_0\text{)}. \qquad (1.48)$$

Поскольку ряд (1.41) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha=1$, то неравенства (1.48) и теорема сравнения 1.4 позволяют утверждать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). Теорема I доказана.

2) Точно так же, как и в признаках Даламбера и Коши, мы сведем теорему II к теореме I. Пусть сначала $L>1$. Положим $\varepsilon=(L-1)/2$, $q=1+\varepsilon=L-\varepsilon$. По определению предела (1.43) для этого ε можно указать номер k_0, начиная с которого $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right|<\varepsilon$ и, следовательно, справедливо левое неравенство (1.42). Если же $L<1$, то мы положим $\varepsilon=1-L$ и, используя определение предела (1.43), получим, что, начиная с некоторого номера k_0, справедливо правое неравенство (1.42). Теорема 1.8 полностью доказана.

Замечание. В теореме 1.8 (I) в левом неравенстве (1.42) нельзя взять $q=1$ (при этом сходимость ряда может не иметь места). При $L=1$ теорема 1.8 (II) «не действует» (возможны и сходимость и расходимость ряда).

В качестве примера исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k, \text{ где } p_k = a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}, \quad a=\text{const}>0.$$

Признаки Даламбера и Коши в применении к этому ряду «не действуют». Применим признак Раабе. Легко проверить, что

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-\frac{1}{k}}-1}{\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$

Последняя дробь при $k\to\infty$ стремится к производной функции a^x в точке $x=0$, т. е. стремится к $\ln a$. В силу признака Раабе рассматриваемый ряд сходится при $\ln a>1$, т. е. при $a>e$, и расходится при $\ln a<1$, т. е. при $a<e$. При $a=e$ вопрос о сходимости ряда требует дополнительного исследования, так как признак Раабе «не действует». Другим примером ряда, в примене-

нии к которому «не действует» признак Раабе, может служить ряд (1.40).

6. Отсутствие универсального ряда сравнения. Мы уже отмечали, что признаки Даламбера и Коши основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а признак Раабе — на сравнении с более медленно сходящимся (или расходящимся) рядом (1.41).

Естественно, возникает вопрос о том, не существует ли такой универсальный (предельно медленно!) сходящийся (или расходящийся) ряд, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед взятого ряда с неотрицательными членами. Докажем, что такого универсального ряда не существует.

Пусть даны два сходящихся ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$; обозначим символами r_n и r_n' соответственно их n-е остатки. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'} = 0$.

Утверждение. *Для каждого сходящегося ряда существует ряд, сходящийся медленнее этого ряда.*

В самом деле, пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ — любой сходящийся ряд, r_n $(n \geqslant 0)$ — его n-й остаток[9]. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, где $p_k' = \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$ сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$. В самом деле, если r_n' — n-й остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}} = 0.$$

Теперь докажем отсутствие универсального сходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости любого наперед взятого сходящегося ряда. В самом

[9] За r_0 принимаем всю сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.

деле, если бы такой универсальный сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ существовал, то взяв для него построенный выше ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, мы получили бы, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}\right) = 0.$$

Таким образом, из сравнения с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ нельзя сделать заключения о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$. Аналогично доказывается отсутствие универсального расходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о расходимости любого наперед взятого расходящегося ряда.

§ 3. АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов. Теперь мы перейдем к изучению рядов, члены которых являются вещественными числами *любого* знака.

Определение 1. *Будем называть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.49}$$

абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.50}$$

Заметим, что в этом определении ничего не сказано о том, предполагается ли при этом сходимость самого ряда (1.49). Оказывается, такое предположение оказалось бы излишним, ибо справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9. *Из сходимости ряда* (1.50) *вытекает сходимость ряда* (1.49).

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для ряда (т. е. теоремой 1.1). Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N$, и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon. \tag{1.51}$$

Фиксируем любое $\varepsilon>0$. Так как ряд (1.50) сходится, то в силу теоремы 1.1 найдется номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N$, и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \tag{1.52}$$

Так как модуль суммы нескольких слагаемых не превосходит суммы их модулей, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \tag{1.53}$$

Сопоставляя неравенства (1.52) и (1.53), получим неравенство (1.51). Теорема доказана.

Определение 2. *Ряд* (1.49) *называется* ***условно сходящимся,*** *если этот ряд сходится, в то время как соответствующий ряд из модулей* (1.50) *расходится.*

Примером абсолютно сходящегося ряда может служить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \text{ где } \alpha > 1.$$

Этот ряд сходится абсолютно, ибо при $\alpha>1$ сходится ряд (1.33).

Приведем пример условно сходящегося ряда. Докажем условную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{1.54}$$

Так как соответствующий ряд из модулей (гармонический ряд), как мы уже знаем, расходится, то для доказательства условной сходимости ряда (1.54) достаточно доказать, что этот ряд сходится. Докажем, что ряд (1.54) сходится к числу $\ln 2$. В п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 мы получили разложение по формуле Маклорена функции

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Там же для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ получена следующая оценка остаточного члена:

$$|R_{n+1}(x)|<1/(n+1).$$

Полагая в двух последних соотношениях $x=1$, будем иметь

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+R_{n+1}(1),$$

где

$$|R_{n+1}(1)|<1/(n+1),$$

или

$$\left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right|<\frac{1}{n+1}. \qquad (1.55)$$

Обозначая через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.54), мы можем переписать последнее неравенство (1.55) в виде

$$|S_n-\ln 2|<1/(n+1). \qquad (1.56)$$

Из (1.56) следует, что разность $S_n-\ln 2$ представляет собой бесконечно малую последовательность. Это и доказывает сходимость ряда (1.54) к числу $\ln 2$.

2. **О перестановке членов условно сходящегося ряда.** Одним из важнейших свойств суммы конечного числа вещественных слагаемых является переместительное свойство. Естественно, возникает вопрос, остается ли справедливым это свойство для суммы сходящегося ряда, т. е. может ли измениться сумма сходящегося ряда от перестановки членов этого ряда. В этом пункте мы выясним этот вопрос в отношении условно сходящегося ряда. Начнем рассмотрение с изучения некоторой конкретной перестановки членов ряда (1.54). Для удобства запишем ряд (1.54) в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\ldots$$

В конце предыдущего пункта мы доказали, что ряд (1.54) сходится условно и имеет сумму $\ln 2$. Переставим теперь члены ряда (1.54) так, чтобы после одного положительного члена стояли два отрицательных члена. В результате такой перестановки членов получим ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\ldots. \qquad (1.57)$$

Докажем, что ряд (1.57), полученный в результате указанной перестановки членов ряда (1.54), сходится и имеет сумму, вдвое меньшую, чем ряд (1.54). Будем обозначать m-е частичные суммы рядов (1.54) и (1.57) символами S_m и S_m' соответственно. Можем записать:

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Итак,

$$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}. \tag{1.58}$$

Далее, очевидно, что

$$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}, \tag{1.59}$$

$$S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}. \tag{1.60}$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$, в пределе при $m\to\infty$ из формул (1.58), (1.59) и (1.60) получим

$$\lim_{m\to\infty}S'_{3m}=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty}S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty}S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S.$$

Таким образом, ряд (1.57) сходится и имеет сумму, равную $\frac{1}{2}S$. Так как $S=\ln 2\neq 0$, то $\frac{1}{2}S\neq S$. Следовательно, в результате указанной выше перестановки членов сумма условно сходящегося ряда (1.54) изменилась. Рассмотренный нами пример показывает, что условно сходящийся ряд *не обладает переместительным свойством.* Полную ясность в вопрос о влиянии перестановок членов на сумму условно сходящегося ряда вносит следующее замечательное утверждение, принадлежащее Риману.

Теорема 1.10 (теорема Римана). *Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед взятое число L, можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу L.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{1.61}$$

произвольный условно сходящийся ряд. Обозначим через p_1, p_2, p_3, ... положительные члены ряда (1.61), выписанные в таком порядке, в каком они стоят в этом ряде, а через q_1, q_2, q_3, ... модули отрицательных членов ряда (1.61), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде. Ряд (1.61) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, ибо если бы членов одного знака было конечное число, то, отбросив не влияющее на сходимость конечное число первых членов, мы бы получили бы ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость означала бы абсолютную сходимость.

Итак, с рядом (1.61) связаны два бесконечных ряда с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Будем обозначать первый из этих рядов символом P, а второй — символом Q. Докажем, что оба ряда P и Q являются расходящимися. Обозначим символом S_n n-ю частичную сумму ряда (1.61), символом P_n сумму всех положительных членов, входящих в S_n, символом Q_n сумму модулей всех отрицательных членов, входящих в S_n. Тогда, очевидно, $S_n=P_n-Q_n$, и так как по условию ряд (1.61) сходится к некоторому числу S, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=S. \tag{1.62}$$

С другой стороны, так как ряд (1.61) не сходится абсолютно, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n+Q_n)=+\infty. \tag{1.63}$$

Сопоставляя (1.62) и (1.63), получим $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n=+\infty$, т. е. доказано, что оба ряда P и Q расходятся. Из расходимости рядов P и Q вытекает, что даже после удаления любого конечного числа первых членов этих рядов, мы можем взять из оставшихся членов как ряда P, так и ряда Q столь большое число членов, что их сумма превзойдет любое наперед взятое число.

Опираясь на этот факт, докажем, что можно так переставить члены исходного ряда (1.61), что в результате получится ряд, сходящийся к наперед взятому числу L. В самом деле, выберем из исходного ряда (1.61) *ровно столько* положительных членов $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$, чтобы их сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}$ превзошла L. Добавим к выбранным членам *ровно столько* отрицательных членов $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$, чтобы общая сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}$ оказалась меньше L. Затем снова добавим *ровно столько* положительных членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_3}$, чтобы общая сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_3}$ оказалась больше L. Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы получим бесконечный ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда (1.61), так как каждый раз нам придется добавлять хотя бы один положительный или отрицательный член исходного ряда.

Остается доказать, что полученный ряд сходится к L. Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются группы положительных и группы отрицательных членов. Если частичная сумма полученного ряда заканчивается полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего его члена [10]. Если же частичная сумма заканчивается не полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего члена предпоследней из групп. Для установления сходимости ряда к L достаточно убедиться в том, что модули последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность, а это непосредственно вытекает из необходимого условия сходимости исходного ряда (1.61). Теорема Римана доказана.

Замечание. Аналогично можно было бы доказать, что если ряд сходится условно, то его члены можно переставить так, что последовательность частичных сумм преобразованного ряда будет бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (соответственно отрицательны).

3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. В предыдущем пункте мы доказали, что условно сходящийся ряд не обладает переместительным свойством. Докажем, что для всякого абсолютно сходящегося ряда справедливо переместительное свойство.

Теорема 1.11 (теорема Коши). *Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.*

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.64}$$

сходится абсолютно и сумма ряда равна S. Пусть, далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \tag{1.65}$$

ряд, полученный из ряда (1.64) посредством некоторой перестановки членов. Требуется доказать, что: 1) ряд (1.65) сходится и имеет сумму, равную S; 2) ряд (1.65) сходится абсолютно. Докажем сначала 1). Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что при $n\geqslant N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| < \varepsilon. \tag{1.66}$$

[10] Так как мы добавляем в данную группу члены ровно до тех пор, пока общая сумма «не перейдет» через число L.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд (1.64) сходится абсолютно и имеет сумму, равную S, то для выбранного $\varepsilon>0$ можно указать номер N_0 такой, что будут справедливы неравенства

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — любое натуральное число}) \qquad (1.67)$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}\text{[11]}. \qquad (1.68)$$

Выберем теперь номер N столь большим, чтобы любая частичная сумма S_n' ряда (1.65) с номером n, превосходящим N, содержала все первые N_0 членов ряда (1.64) [12].

Оценим разность, стоящую в левой части (1.66), и докажем, что при $n \geqslant N$ для этой разности справедливо неравенство (1.66). В самом деле, указанную разность можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - S = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right). \qquad (1.69)$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то из (1.69) получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - S \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|. \qquad (1.70)$$

Из неравенств (1.68) и (1.70) очевидно, что для доказательства неравенства (1.66) достаточно доказать, что при $n \geqslant N$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.71)$$

Для доказательства неравенства (1.71) заметим, что при $n \geqslant N$ первая из сумм, стоящих в его левой части, содержит все N_0 первых членов ряда (1.64). Вследствие этого разность

$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \qquad (1.72)$$

---

[11] Номер N_0 в неравенствах (1.67) и (1.68) можно взять один и тот же. В самом деле, предварительно записав указанные два неравенства с разными номерами N_0, мы затем можем взять наибольший из двух номеров N_0.

[12] Такой номер N выбрать можно, ибо ряд (1.65) получается из ряда (1.64) посредством некоторой перестановки членов.

представляет собой сумму $n-N_0$ членов ряда (1.64) с номерами, *каждый из которых превосходит* N_0.

Если выбрать натуральное p столь большим, чтобы номер N_0+ $+p$ превосходил номера всех $n-N_0$ членов только что указанной суммы, то для разности (1.72) во всяком случае справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|. \tag{1.73}$$

Из неравенств (1.73) и (1.67) вытекает неравенство (1.71). Тем самым доказано неравенство (1.66), т. е. доказано, что ряд (1.65) сходится и имеет сумму, равную S. Остается доказать утверждение 2) о том, что ряд (1.65) сходится абсолютно. Доказательство этого утверждения следует из утверждения 1), если его применить к рядам

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'|. \tag{1.74}$$

При этом мы докажем сходимость второго из рядов (1.74), т. е. докажем абсолютную сходимость ряда (1.65). Теорема 1.11 полностью доказана.

§ 4. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

В § 2 мы установили ряд признаков сходимости для рядов с неотрицательными членами. Здесь мы изучим вопрос о признаках сходимости для рядов с членами любого знака. Итак, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.75}$$

ряд, члены которого имеют какие угодно знаки. Прежде всего заметим, что для установления абсолютной сходимости этого ряда, т. е. для установления сходимости ряда с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|, \tag{1.76}$$

можно применить любой из признаков § 2 (признак Даламбера, Коши, Раабе или интегральный признак). Однако ни один из указанных признаков не дает возможности выяснить более тонкий вопрос об условной сходимости ряда (1.75) [13].

[13] Заметим, что признаки Даламбера и Коши можно применять для установления р а с х о д и м о с т и ряда с членами л ю б о г о з н а к а (1.75). В са-

Ниже мы и займемся отысканием более тонких признаков, позволяющих устанавливать сходимость ряда (1.75) и в тех случаях, когда этот ряд не является абсолютно сходящимся.

Начнем рассмотрение с вывода одного важного тождества, представляющего собой основной инструмент для установления формулируемых ниже признаков.

Утверждение. *Пусть* $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *— две произвольные последовательности,* $S_k=u_1+u_2+\ldots+u_k$, *n и p — два произвольных номера* ($n\geqslant 0$, $S_0=0$). *Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})+S_{n+p}v_{n+p}-S_n v_{n+1}, \qquad (1.77)$$

называемое преобразованием Абеля.

Так как для любого $k\geqslant 1$ справедливо равенство $u_k=S_k-S_{k-1}$, то левой части (1.77) можно придать вид

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k-\sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}v_k. \qquad (1.78)$$

В последней сумме правой части (1.78) заменим индекс суммирования k на $k+1$. В результате получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k-\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1}=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})+$$
$$+S_{n+p}v_{n+p}-S_n v_{n+1}.$$

Таким образом, тождество Абеля (1.77) доказано.

мом деле, всякий раз, когда признак Даламбера или Коши констатирует расходимость ряда из модулей $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$, k-й член ряда (1.76) $|u_k|$ не стремится к нулю при $k\to\infty$, т. е. ряд (1.75) расходится. В качестве примера установим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k!\left(\frac{x}{k}\right)^k$ расходится для любого фиксированного значения x, удовлетворяющего неравенству $|x|>e$. Отметим, что непосредственная проверка того, что k-й член рассматриваемого ряда не стремится к нулю при $k\to\infty$, является затруднительной. Применим к рассматриваемому ряду признак Даламбера. Обозначая k-й член этого ряда через a_k, будем иметь $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=$ $=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|}{e}>1$. Расходимость ряда доказана.

Определение 1. *Последовательность* $\{v_k\}$ *назовем последовательностью с ограниченным изменением, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}-v_k|. \tag{1.79}$$

Очевидно следующее

Утверждение 2. *Всякая последовательность с ограниченным изменением является сходящейся.*

В самом деле, из сходимости ряда из модулей (1.79) вытекает сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}-v_k]. \tag{1.80}$$

Обозначив сумму ряда (1.80) через S, а n-ю частичную сумму этого ряда через S_n и учитывая, что $S_n=v_{n+1}-v_1$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1}$ существует и равен $S+v_1$. Это означает, что последовательность $\{v_k\}$ сходится к пределу $S+v_1$.

Теорема 1.12 (первый признак Абеля). *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.81}$$

обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ *представляет собой последовательность с ограниченным изменением, сходящуюся к нулю, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{1.82}$$

сходится.

Доказательство. По условию существует число $M>0$ такое, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (1.81) удовлетворяет условию $|S_n|\leqslant M$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему номер N такой, что при $n\geqslant N$ и для любого натурального p справедливы неравенства

$$|v_n|<\frac{\varepsilon}{3M}, \tag{1.83}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}-v_k|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{1.84}$$

(здесь мы воспользовались сходимостью к нулю последовательности $\{v_k\}$ и сходимостью ряда (1.79)).

В силу тождества Абеля (1.77) и в силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}|\cdot|v_{n+p}| + |S_n|\cdot|v_{n+1}|.$$

Так как для всех номеров n справедливо неравенство $|S_n| \leqslant \leqslant M$, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| + M|v_{n+p}| + M|v_{n+1}|.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (1.83) и (1.84), получаем, что при всех $n \geqslant N$ и для любого натурального p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon, \tag{1.85}$$

а это и означает, что ряд (1.82) сходится (в силу критерия Коши). Теорема 1.12 доказана.

Теорема 1.13 (второй признак Абеля). *Если ряд* (1.81) *сходится, а* $\{v_k\}$ *представляет собой совершенно произвольную последовательность с ограниченным изменением, то ряд* (1.82) *сходится.*

Доказательство. Так как сходящийся ряд (1.81) заведомо обладает ограниченной последовательностью частичных сумм $\{S_n\}$, то существует постоянная $M>0$ такая, что $|S_n| \leqslant M$ для всех номеров n.

Обозначим сумму ряда (1.81) через S, а предел последовательности $\{v_k\}$ через v. Тогда можно утверждать, что каждое из произведений $\{S_n v_n\}$ и $\{S_n v_{n+1}\}$ сходится при $n \to \infty$ к пределу $S \cdot v$, а потому каждая из последовательностей

$$\{S_n v_n - Sv\} \text{ и } \{S_n v_{n+1} - Sv\} \tag{1.86}$$

является бесконечно малой.

Учитывая это и сходимость ряда (1.79) и фиксируя произвольное $\varepsilon>0$, мы найдем номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ и для любого натурального p

$$|S_n v_n - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n v_{n+1} - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.87}$$

Неравенства (1.87), оценка $|S_n| \leqslant M$ и тождество Абеля (1.77), переписанное в виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + [S_{n+p} v_{n+p} - Sv] + [Sv - S_n v_{n+1}],$$

позволяют нам утверждать справедливость неравенства (1.85) (при всех $n \geqslant N$ и для любого натурального p). В силу критерия Коши теорема 1.13 доказана.

Следствие 1 из теоремы 1.12 (признак Дирихле — Абеля). *Если ряд* (1.81) *обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а* $\{v_k\}$ *представляет собой невозрастающую последовательность, сходящуюся к нулю, то ряд* (1.82) *сходится.*

Достаточно заметить, что невозрастающая сходящаяся к нулю последовательность является последовательностью с ограниченным изменением, ибо для нее n-я частичная сумма S_n ряда (1.79) равна $v_1 - v_{n+1}$ и имеет предел, равный v_1.

Чтобы сформулировать еще одно следствие из теоремы 1.12 введем понятие ряда Лейбница.

Определение 2. *Назовем ряд знакочередующимся, если все его члены с нечетными номерами положительны, а все члены с четными номерами отрицательны.*

Определение 3. *Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к нулю последовательность, назовем рядом Лейбница.*

Следствие 2 из теоремы 1.12 (признаки Лейбница). *Всякий ряд Лейбница сходится.*

В самом деле, всякий ряд Лейбница можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots, \qquad (1.88)$$

где $\{v_k\}$ — невозрастающая сходящаяся к нулю последовательность (все $v_k > 0$). Такой ряд представляет собой частный случай ряда (1.82) при $u_k = (-1)^{k-1}$ с рядом (1.81), обладающим ограниченной последовательностью частичных сумм[14]. В таком случае справедливость признака Лейбница вытекает из уже доказанного признака Дирихле — Абеля (следствия 1 из теоремы 1.12).

Замечание. Легко убедиться в том, что для произвольного ряда Лейбница (1.88) последовательность $\{S_{2n}\}$ частичных сумм с четными номерами является неубывающей, а последовательность $\{S_{2n-1}\}$ частичных сумм с нечетными номерами является невозрастающей. Отсюда и из замечания 3 к теореме 3.15 ч. 1 вытекает, что сумма S ряда Лейбница (1.88) для любого номера n удовлетворяет неравенствам

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.$$

[14] Последовательность S_n частичных сумм ряда (1.81) с членами $u_k = (-1)^{k-1}$ имеет вид 1, 0, 1, 0, ...

Так как $S_{2n-1}-S_{2n}=v_{2n}$, то каждая из сумм S_{2n} и S_{2n-1} отклоняется от S не более чем на v_{2n}. Отсюда и из того, что $v_{2n-1}\geqslant\geqslant v_{2n}$, вытекает, что для любого номера n справедлива оценка $|S_n-S|\leqslant v_n$. Эта оценка играет важную роль для приближенного вычисления суммы ряда Лейбница с помощью его частичной суммы.

Примеры. 1°. Выше с помощью формулы Маклорена для функции $\ln(1+x)$ мы уже доказали сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots$$

Заметим, что сходимость этого ряда сразу вытекает из признака Лейбница.

2°. Изучим вопрос о сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}+\ldots$$

Этот ряд является рядом вида (1.82) при $v_k=\frac{1}{k}$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=-2$, $u_4=1$, $u_5=1$, $u_6=-2, \ldots$

Легко видеть, что последовательность частичных сумм ряда (1.81) с такими u_k имеет вид 1, 2, 0, 1, 2, 0, ..., т. е. является ограниченной.

Так как последовательность $\{1/k\}$ не возрастает и сходится к нулю, то исследуемый ряд сходится по признаку Дирихле — Абеля.

3°. Выясним вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$, где x — некоторое фиксированное вещественное число. Пользуясь обозначениями теоремы 1.13, положим $u_k=\cos kx$, $v_k=\frac{1}{k}$. Оценим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$. Поскольку для любого номера k

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то, суммируя это соотношение по k от 1 до n, получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\sin\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для любого x, не кратного 2π, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена:

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

По теореме 1.13 *рассматриваемый ряд сходится для любого значения x, не кратного* 2π. Если же x кратно 2π, то рассматриваемый ряд превращается в гармонический и, как доказано выше, расходится.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся рядов.

Теорема 1.14. *Если два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся и имеют суммы, соответственно равные U и V, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ сходится и имеет сумму, равную $U \pm V$.*

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно через S_n, U_n и V_n. Тогда, очевидно, $S_n = U_n \pm V_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$, то согласно теоремам 3.9 и 3.10 ч. 1 существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = U \pm V$. Теорема доказана.

Таким образом, любые сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать. Переходя к вопросу о возможности почленного перемножения рядов, докажем следующее утверждение.

Теорема 1.15. *Если два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U* и *V, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_k v_l$* ($k=1, 2, \ldots;$ $l=1, 2, \ldots$), *занумерованных в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна UV.*

Доказательство. Обозначим через w_1, w_2, w_3, ... произведения вида $u_k v_l$ ($k=1, 2, \ldots$; $l=1, 2, \ldots$), занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |w_i|$ сходится. Пусть S_n — n-я частичная сумма этого ряда. Сумма S_n состоит из членов вида $|u_k v_l|$. Среди индексов k и l таких членов, входящих в сумму S_n, найдем наибольший индекс, который мы обозначим через m. Тогда

$$S_n \leqslant (|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_m|)(|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_m|). \qquad (1.89)$$

В правой части неравенства (1.89) стоит произведение m-х частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|$. В силу сходимости указанных рядов с неотрицательными членами все их частичные суммы (а следовательно, и их произведение) ограничены. Поэтому ограничена и последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, а это доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |w_i|$, т. е. абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$.

Остается доказать, что последний ряд имеет сумму S, равную UV. Так как этот ряд сходится абсолютно, то в силу теоремы 1.11 его сумма S не зависит от порядка, в котором мы его суммируем. Какую бы мы ни взяли последовательность (или подпоследовательность [15]) частичных сумм этого ряда, она сходится к числу S. Но в таком случае сумма S ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$ заведомо равна UV, так как именно к этому числу сходится подпоследовательность W_m частичных сумм этого ряда вида

$$W_m = (u_1+u_2+\ldots+u_m)(v_1+v_2+\ldots+v_m).$$

Теорема доказана.

Произведение рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ для многих целей удобно записывать в специальном виде:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_k + u_2v_{k-1} + \ldots \\ \ldots + u_kv_1) + \ldots .$$

[15] См. утверждение 1° п. 1 § 3 гл. 3 ч. 1.

Теорема 1.16 (теорема Мертенса[16]). *Ряд, полученный перемножением двух рядов указанным специальным способом, сходится к произведению сумм перемножаемых рядов в случае, когда один из перемножаемых рядов сходится абсолютно, а другой — сходится хотя бы условно.*

Пусть, например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится хотя бы условно. Обозначим n-е частичные суммы указанных рядов соответственно через U_n и V_n, а их суммы соответственно через U и V. Положим

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1,$$

$$W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

Достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = UV$. Элементарно проверяется, что $W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \ldots + u_n V_1$.

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ его остаток $\alpha_n = V - V_n$ является бесконечно малой, а следовательно, и ограниченной последовательностью, т. е. существует постоянная M такая, что $|\alpha_n| \leqslant M$ для всех номеров n. Заметим, что

$$W_n = u_1 (V - \alpha_n) + u_2 (V - \alpha_{n-1}) + \ldots + u_n (V - \alpha_1) = U_n V - \beta_n,$$

где $\beta_n = u_1 \alpha_n + u_2 \alpha_{n-1} + \ldots + u_n \alpha_1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, то достаточно доказать, что последовательность $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем для него такой номер m, что $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Кроме того, можно утверждать существование постоянной M_1 такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M_1$ для любого номера n.

Представив теперь β_n в виде суммы двух сумм

$$\beta_n = [u_1 \alpha_n + \ldots + u_m \alpha_{n+1-m}] + [u_{m+1} \alpha_{n-m} + \ldots + u_n \alpha_1]$$

и выбрав по найденному номеру m номер n_1 настолько боль-

[16] Мертенс Франц Карл Йозеф — немецкий математик (1840—1927).

шим, что $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ при $k > n_1 - m$ (это можно сделать в силу бесконечной малости $\{\alpha_n\}$), с помощью четырех неравенств

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M_1, \quad |\alpha_n| \leqslant M \text{ и } |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

$$(\text{при } k > n_1 - m)$$

убедимся в том, что при $n \geqslant n_1$ каждая квадратная скобка в выражении для β_n по модулю меньше числа $\varepsilon/2$. Отсюда следует, что $|\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_1$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ сформулированное утверждение доказано.

Замечание. В случае, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ оба сходятся только условно, почленное перемножение этих рядов даже указанным специальным способом приводит, вообще говоря, к расходящемуся ряду.

Достаточно в качестве каждого из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ взять условно сходящийся (по признаку Лейбница) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ и убедиться в том, что для таких рядов определенные выше величины w_n имеют вид

$$w_n = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}} \right\}.$$

Так как в фигурных скобках стоит n положительных слагаемых, каждое из которых не меньше числа $1/n$, то $|w_n| \geqslant 1$, а это означает, что нарушено необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ — стремление к нулю его n-го члена.

§ 6. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Основные понятия. К понятию числового ряда близко примыкает понятие бесконечного числового произведения. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$. Записанное формально выражение вида

$$v_1 v_2 v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \tag{1.90}$$

принято называть **бесконечным произведением**. Отдельные элементы v_k принято называть **членами** данного бесконечного произведения. Произведение первых n членов данного бесконечного произведения принято называть n-м **частичным произведением** и обозначать символом

$$P_n = v_1 v_2 \ldots v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Бесконечное произведение (1.90) называют **сходящимся**, если последовательность частичных произведений P_n имеет конечный предел P, **отличный**[17] **от нуля**. В случае сходимости бесконечного произведения (1.90) указанный предел P называют **значением этого бесконечного произведения** и пишут:

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Отметим, что последнее равенство имеет смысл лишь для сходящегося бесконечного произведения. Ясно, что рассмотрение бесконечных произведений по существу представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо каждому данному бесконечному произведению однозначно соответствует последовательность его частичных произведений и каждой числовой последовательности $\{P_k\}$, все элементы которой отличны от нуля, однозначно соответствует бесконечное произведение, для которого эта последовательность является последовательностью частичных произведений (достаточно положить члены бесконечного произведения равными $v_k = P_k/P_{k-1}$ при $k>1$ и $v_1 = P_1$).

Теорема 1.17. *Необходимым условием сходимости бесконечного произведения* (1.90) *является стремление к единице его k-го члена при $k \to \infty$.*

Доказательство. Пусть бесконечное произведение (1.90) сходится и имеет значение P, отличное от нуля. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Поскольку $v_k = P_k/P_{k-1}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ существует и равен единице.

Заметим, что на сходимость бесконечного произведения не влияет удаление любого конечного числа членов этого произведения (если среди этих членов нет равных нулю). Поскольку бесконечное произведение, у которого хотя бы один член равен нулю согласно принятому выше определению считается расходящимся, то

[17] Тот факт, что при $P=0$ бесконечное произведение принято считать расходящимся, хотя и носит условный характер, но позволяет провести четкую аналогию между сходимостью рядов и бесконечных произведений.

мы в дальнейшем вообще исключим из рассмотрения бесконечные произведения, у которых хотя бы один член равен нулю.

Примеры.

$$1°.\quad \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^k}\ldots \tag{1.91}$$

(x — любое фиксированное число).

Докажем, что бесконечное произведение (1.91) при любом $x \neq \pi n$ сходится и имеет значение $\frac{\sin x}{x}$. Подсчитаем n-е частичное произведение

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}. \tag{1.92}$$

Умножая обе части (1.92) на $\sin\frac{x}{2^n}$ и последовательно используя формулу для синуса двойного угла $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, получим

$$P_n \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x.$$

Из последней формулы[18] имеем

$$P_n = \frac{\sin x}{x}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2^n}}\right\}.$$

Поскольку выражение в фигурных скобках стремится к единице при $n \to \infty$ (в силу первого замечательного предела), то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ существует и равен $\frac{\sin x}{x}$. Тем самым доказано, что бесконечное произведение (1.91) сходится и имеет значение $\frac{\sin x}{x}$ при любом $x \neq \pi n$.

$$2°.\quad \prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\ldots$$

$$\ldots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\ldots \tag{1.93}$$

---

[18] Мы считаем, что $x \neq 0$. Если $x = 0$, то все члены (1.91) и его значение равны единице.

Докажем, что бесконечное произведение (1.93) сходится и имеет значение 1/3. Подсчитаем частичное произведение P_n:

$$P_n = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ \cdots\ \frac{(n-1)}{n}\right]\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\ \cdots\ \frac{(n+2)}{(n+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$ существует и равен 1/3.

2. Связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов. Если бесконечное произведение (1.90) сходится, то в силу теоремы 1.17 все его члены v_k, начиная с некоторого номера, положительны [19]. Поскольку конечное число первых членов вообще не влияет на сходимость бесконечного произведения, то при изучении вопроса о сходимости бесконечных произведений можно, не ограничивая общности, рассматривать лишь такие бесконечные произведения, у которых все члены положительны.

Теорема 1.18. *Для того чтобы бесконечное произведение* (1.90) *с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \tag{1.94}$$

В случае сходимости сумма S ряда (1.94) *и значение P произведения* (1.90) *связаны формулой*

$$P = e^S. \tag{1.95}$$

Доказательство. Обозначив через P_n n-е частичное произведение бесконечного произведения (1.90), а через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.94), можем записать:

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

В силу непрерывности показательной функции для всех значений аргумента и непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента последовательность P_n сходится тогда и только тогда, когда сходится S_n, причем если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$. Теорема доказана.

При исследовании на сходимость бесконечного произведения оказывается очень удобным представить его в виде

[19] Так как $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 1$.

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)=(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_k)\dots \tag{1.96}$$

При этом, конечно, в соответствии с принятым выше предположением будем считать, что все $u_k > -1$.

Теорема 1.18 утверждает, что вопрос о сходимости произведения (1.96) эквивалентен вопросу о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k). \tag{1.97}$$

Теперь мы можем доказать еще одно утверждение.

Теорема 1.19. *Если все u_k (по крайней мере начиная с некоторого номера) сохраняют один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения* (1.96) *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k. \tag{1.98}$$

Доказательство. Поскольку условие $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$ является необходимым и для сходимости ряда (1.98), и для сходимости произведения (1.96), можно считать это условие выполненным как при доказательстве необходимости, так и при доказательстве достаточности. Но из указанного условия и из асимптотической формулы [20]

$$\ln(1+y)=y+o(y)$$

вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k}=1 \tag{1.99}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{\ln(1+u_k)}=1. \tag{1.100}$$

Поскольку по условию теоремы все члены рядов (1.97) и (1.98), начиная с некоторого номера, сохраняют один и тот же знак, условия (1.99) и (1.100) в силу следствия из теоремы сравнения 1.3 позволяют утверждать, что ряд (1.98) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (1.97). Теорема доказана.

Так же, как и для рядов, для бесконечных произведений вводятся понятия абсолютной и условной сходимостей. Бесконечное произведение (1.96) называется абсолютно сходящимся в том и только в том случае, когда сходится абсолютно

[20] См. п. 6 § 10 гл. 6 ч. 1.

ряд (1.97). Теоремы Коши 1.11 и Римана 1.10 позволяют заключить, что абсолютно сходящееся произведение обладает переместительным свойством, в то время как условно сходящееся произведение заведомо им не обладает.

Теорема 1.20. *Бесконечное произведение* (1.96) *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд* (1.98).

Для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\ln(1+u_k)|$. Это последнее легко вытекает из существования пределов (1.99) и (1.100). Детали рассуждений предоставляем читателю.

Примеры. 1°. Из расходимости гармонического ряда и из теоремы 1.19 вытекает расходимость следующих бесконечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\ldots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\ldots$$

Легко понять, что первое из указанных произведений расходится к $+\infty$, а второе — к нулю.

2°. Из той же теоремы 1.19 и из сходимости ряда (1.33) при $\alpha>1$ вытекает сходимость при $\alpha>1$ следующих бесконечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)\ldots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right]=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^\alpha}\right)\ldots$$

3°. Рассмотрим бесконечное произведение

$$x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\ldots \tag{1.101}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, то в силу теорем 1.19 и 1.20 бесконечное произведение (1.101) сходится абсолютно для любого фиксированного значения x, отличного от $l\pi$ (где $l=0, \pm 1, \ldots$). В п. 3 мы докажем, что это произведение сходится к значению $\sin x$. Тем самым будет обосновано разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.102}$$

4°. Из разложения (1.102) с помощью соотношения $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ элементарно получается следующее разложение:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right]. \tag{1.103}$$

Абсолютная сходимость произведения, стоящего в правой части (1.103), для любого x, отличного от $\frac{\pi}{2}(2l-1)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$, вытекает из теорем 1.19 и 1.20 и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

5°. Полагая в разложении (1.102) $x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}. \tag{1.104}$$

Из (1.104) получается так называемая формула Валлиса[21])

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{(2k-1)} \cdot \frac{2k}{(2k+1)} \cdots \tag{1.105}$$

Путем несложных преобразований формулу Валлиса можно привести к виду

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2. \tag{1.106}$$

---

[21]) Джон Валлис — английский математик (1616—1703).