И. А. Виноградова, С. Н. Олехник,
В. А. Садовничий

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

И. А. Виноградова,
С. Н. Олехник,
В. А. Садовничий

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Под общей редакцией
В. А. САДОВНИЧЕГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

ББК 22.161
В49
УДК 517(075.8)

Рецензенты:
чл.-кор. АН СССР *Л. Д. Кудрявцев*,
чл.-кор. АН СССР *В. А. Ильин*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Виноградова И. А. и др.
В49 Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Под общ. ред. В. А. Садовничего. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 416 с.: ил.
ISBN 5–211–00081–1.

Учебное пособие соответствует программе 1-го курса для студентов-математиков и отражает опыт преподавания математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Бо́льшая часть задач отлична от содержащихся в известном задачнике Б. П. Демидовича.

В $\dfrac{1702050000(4309000000)-121}{077(02)-88}$ 81—88 **ББК 22.161**

Учебное издание

ВИНОГРАДОВА ИРИНА АНДРЕЕВНА,
ОЛЕХНИК СЛАВ НИКОЛАЕВИЧ,
САДОВНИЧИЙ ВИКТОР АНТОНОВИЧ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*. Редактор *Л. А. Николова*. Художественный редактор *Е. М. Дёмина*. Технический редактор *М. Б. Терентьева*. Корректоры *М. И. Эльмус*, *Н. В. Картышева*

ИБ № 3105

Сдано в набор 31.07.87. Подписано в печать 15.07.88. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 26,0. Уч.-изд. л. 29,77. Тираж 15 000 экз. Заказ 162. Изд. № 136. Цена 1 р. 30 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

ISBN 5–211–00081–1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник составлен на материале занятий по курсу математического анализа на I курсе механико-математического факультета МГУ и отражает опыт преподавания кафедры математического анализа. Он состоит из двух частей, соответствующих I и II семестру.

В каждой части отдельно выделены вычислительные упражнения и теоретические задачи. Первая часть включает построение эскизов графиков функций, вычисление пределов, дифференциальное исчисление функций одного действительного переменного, теоретические задачи. Вторая часть — неопределенный интеграл, определенный интеграл Римана, дифференциальное исчисление функций многих переменных, теоретические задачи.

В главах, содержащих вычислительные упражнения, каждый параграф предваряется развернутыми методическими указаниями. В них даны все используемые в этом параграфе определения, формулировки основных теорем, вывод некоторых необходимых соотношений, приведены подробные решения характерных задач, обращено внимание на часто встречающиеся ошибки. Всего в обеих частях разобрано около 250 примеров.

Содержание задач и упражнений согласовано с теоретическим курсом математического анализа, читаемым на 1 курсе мехмата. Бóльшая часть задач и упражнений отлична от задач, содержащихся в известном задачнике Б. П. Демидовича, существенно также изменено изложение и объем темы «Построение эскизов и графиков функций». В главу «Вычисление пределов» включено большое количество упражнений, требующих использования формулы Тейлора. В главе «Дифференциальное исчисление функций многих переменных» методические указания написаны с точки зрения современного изложения этой темы в учебных курсах.

В обе части сборника включено около 1800 упражнений на вычисления и 350 теоретических задач.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем сотрудникам кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за полезные обсуждения, замечания, предложения при подготовке настоящей книги.

Часть I

ГРАФИКИ, ПРЕДЕЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава I
ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Основными элементарными функциями считаются: *степенная функция* $y=x^a$, *показательная функция* $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, *логарифмическая функция* $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, *тригонометрические функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, *обратные тригонометрические функции* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Рассмотрим построение эскизов графиков функций путем качественного анализа с наименьшим числом вычислений. Мы выделим некоторые классы элементарных функций и установим их главные свойства, опираясь на известные свойства основных элементарных функций и правила преобразования графика при определенных операциях с функцией. Техника дифференцирования практически применяться не будет; она либо излишняя (нет необходимости пользоваться производной для определения положения вершины параболы или максимумов синусоиды), либо слишком громоздка, например, при анализе рациональных дробей. Но некоторые утверждения, которые строго доказываются с помощью дифференциального исчисления, будут сформулированы, и соответствующие свойства функций и их графиков будут использоваться. Более конкретно о том, что именно должен иллюстрировать в поведении функции эскиз ее графика, будет сказано в соответствующих замечаниях и при разборе примеров.

Допустим, что построен график функции $y=f(x)$, $x\in X$. В следующей таблице описано, как изменяется этот график при определенном преобразовании функции $f(x)$ или ее аргумента.

Построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отображение и т. д.) графика функции $f(x)$.

Представим y в виде

$$y=Cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]+D.$$

Таблица

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости XOY
$f(x) + A \quad A \neq 0$	Сдвиг вверх по оси OY графика функции $y = f(x)$ на A единиц, если $A > 0$, и сдвиг вниз на $\|A\|$ единиц, если $A < 0$
$f(x - a) \quad a \neq 0$	сдвиг вправо по оси OX на a единиц, если $a > 0$, сдвиг влево на $\|a\|$ единиц, если $a < 0$
$kf(x),\ k > 0 \quad k \neq 1$	растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в k раз, если $k > 1$, сжатие вдоль оси OY в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$f(kx),\ k > 0 \quad k \neq 1$	сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$-f(x)$	симметричное отображение графика относительно оси OX
$\|f(x)\|$	часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения
$f(-x)$	симметричное отображение графика относительно оси OY
$f(\|x\|)$	стереть часть графика функции $y = f(x)$, лежащую слева от оси OY; оставить часть графика $y = f(x)$, лежащую справа от оси OY и на ней; часть графика функции $y = f(x)$, расположенную в области $x \geqslant 0$, симметрично отобразить относительно оси OY в область $x < 0$

Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции

$$y_1=Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right).$$

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2=f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3=$ $=f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y=Cf\left[a\left(x+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{b}{a}\right)\right]+D$ необходимо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования:

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси OX относительно оси OY, если $a>0$; симметрично отобразить относительно оси OY и сжать или растянуть вдоль оси OX относительно оси OY, если $a<0$.

2. Сдвинуть по оси OX полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right.$: влево, если $\frac{b}{a}>0$, и вправо, если $\frac{b}{a}<0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ вдоль оси OY относительно оси OX, если $C>0$; симметрично отобразить относительно оси OX и сжать или растянуть вдоль оси OY относительно оси OX, если $C<0$.

4. Сдвинуть полученный график функции $Cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ на D вверх, если $D>0$, и вниз на $|D|$, если $D<0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x)\to f(ax)\to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\equiv f(ax+b)\to Cf(ax+b)\to$$
$$\to Cf(ax+b)+D.$$

На практике удобнее построение графика функции $y=Cf(ax+$ $+b)+D$ начинать с написания цепочки

$$Cf(ax+b)+D\leftarrow Cf(ax+b)\leftarrow f(ax+b)\equiv$$
$$\equiv f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\leftarrow f(ax)\leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

Пример 1. Построим эскиз графика функции

$$y=\log_3(1-2x).$$

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_3(1-2x) \equiv \log_3\left[-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \xleftarrow{\text{сдвиг на } 1/2 \text{ вправо}}$$

$$\leftarrow \log_3(-2x) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3 x.$$

Итак, построение эскиза графика функции $y=\log_3(1-2x)$ начинается с построения графика $y_1=\log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси OX относительно оси OY в два раза, затем симметричного отображения относительно оси OY и, наконец, сдвига полученного графика на 1/2 вправо вдоль оси OX (см. рис. 1).

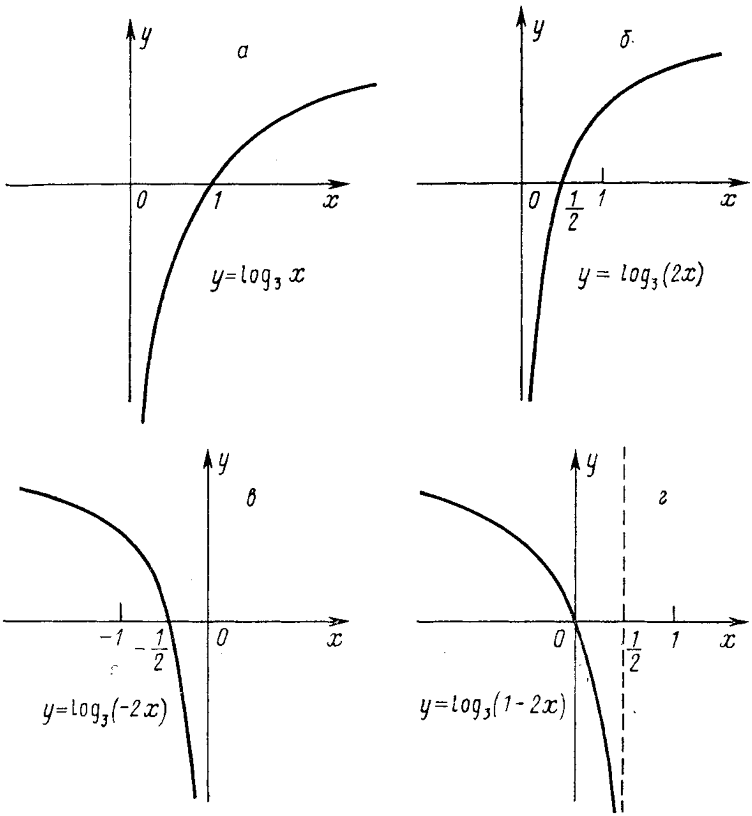

Рис. 1

Чтобы избежать ошибок при построении графиков, следует подчеркнуть еще раз, что величина сдвига вдоль оси OX определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

В связи с этим рекомендуется операцию сдвига вдоль оси OX проводить после операций сжатия или растяжения вдоль оси OX относительно оси OY.

Пример 2. Построим эскиз графика функции

$$y = -2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6}.$$

Решение. Напишем цепочку преобразований

$$-2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \equiv \mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)\right] \leftarrow$$

$$\leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2} \leftarrow \mathrm{tg}\,x.$$

Последовательно эскизы смотри на рис. 2.

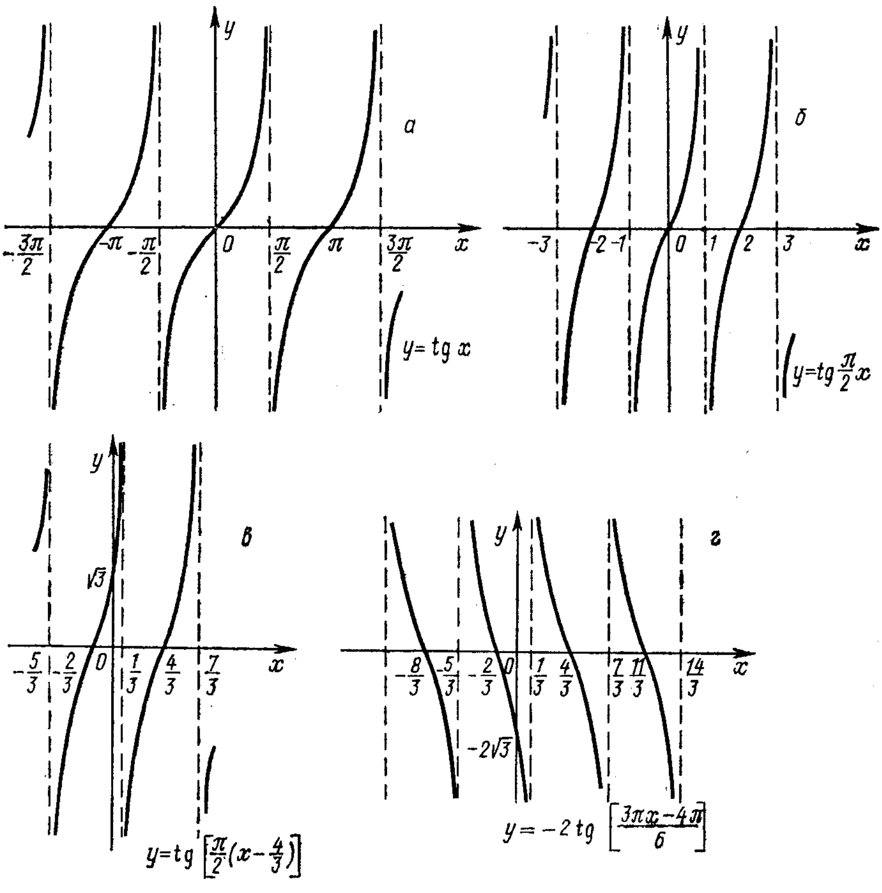

Рис. 2

Пример 3. Построим эскиз графика функции

$$y = \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leftarrow \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] \leftarrow \sin 3x \leftarrow \sin x.$$

Последовательно эскизы смотри на рис. 3.

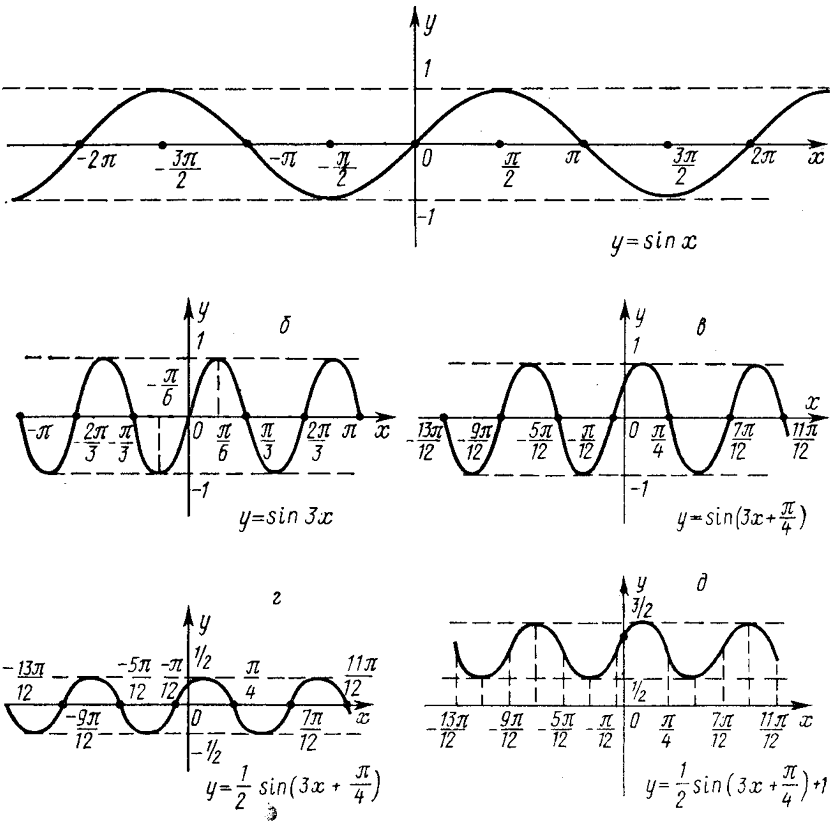

Рис. 3

Аналогичным методом строятся эскизы графиков функций с применением и других преобразований.

Пример 4. Построим эскиз графика $y = \log_{\frac{1}{2}} |1 - 2||x| - 1||$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_{1/2}|1-2||x|-1|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2|x-1|| \xleftarrow{\text{сдвиг на 1 вправо}}$$

$$\leftarrow \log_{1/2}|1-2|x|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2x| \equiv \log_{1/2}|2x-1| \equiv$$

$$\equiv \log_{1/2}\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow{\text{сдвиг на 1/2 вправо}} \log_{1/2}|2x| \xleftarrow{x>0}$$

$$\leftarrow \log_{1/2} 2x \xleftarrow{\text{сжатие в 2 р.}} \log_{1/2} x.$$

Эскизы смотри на рис. 4.

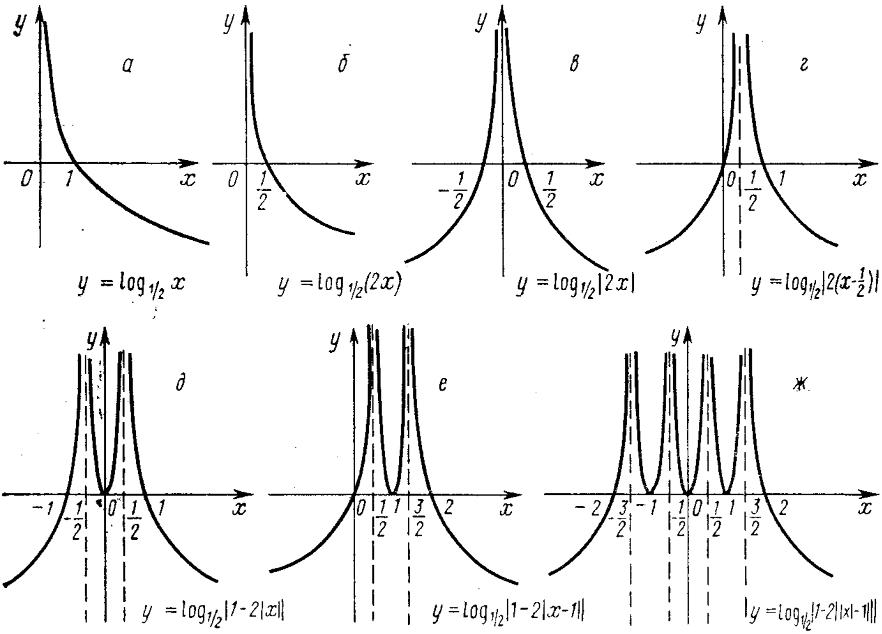

Рис. 4

Разберем следующий пример, где потребуются несколько иные рассуждения.

Пример 5. Построим эскиз графика функции $y=2^{1/x}$.

Решение. Графики функций $g=1/x$ и $y=2^g$ смотри на рис. 5, *а*, *б*. Функция $y=2^{1/x}$ определена на объединении множеств $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, т. е. на множестве $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. На множестве $(-\infty, 0)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x\to-\infty$ и монотонно стремится к $-\infty$ при $x\to 0$; на множестве $(0, +\infty)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $x\to 0$ и монотонно стремится к 0 при $x\to+\infty$. Отсюда легко заключить, что функция $y=2^g$ определена на множестве $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

На множестве $(-\infty, 0)$, когда x стремится к $-\infty$, функция $y=2^g$ стремится к единице, оставаясь меньше 1, а когда $x \to 0$, то стремится к 0. На множестве $(0, +\infty)$, когда $x \to 0$, функция $y=2^g$ стремится к $+\infty$, а когда $x \to +\infty$, то стремится к единице,

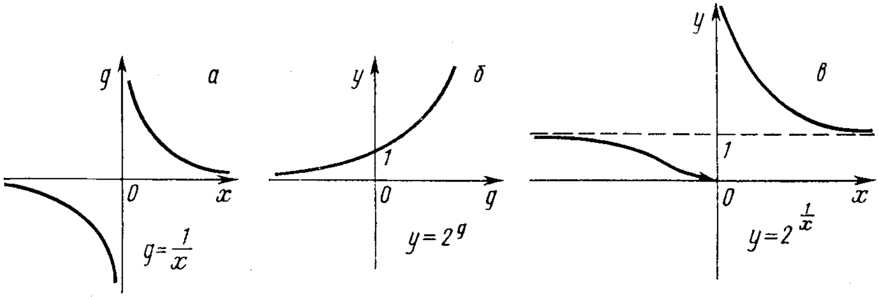

Рис. 5

оставаясь больше 1. Теперь рисуем эскиз графика функции $y=2^{1/x}$ (см. рис. 5, *в*).

Замечание. Полученные исследования полезно свести в таблицу и потом строить график

x	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	участки монотонности функции $\frac{1}{x}$
$g=\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	изменение $g(x)$ на этих участках
$y=2^{\frac{1}{x}}$	$1 \searrow 0$	$+\infty \searrow 1$	изменение $y=y(g(x))$ на этих участках

Пример 6. Построим эскиз графика функции $y=\log_{1/2}(x^2+x)$.

Решение. Построим графики $g=x^2+x$ и $y=\log_{1/2} g$ (см. рис. 6, *а*, *б*). Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция $g=x^2+x$ не положительна (рис. 6, *а*), то функция $y=\log_{1/2}(x^2+x)$ определена при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Составим таблицу.

x	$-\infty \nearrow -1$	$0 \nearrow +\infty$
$g=x^2+x$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$
$y=\log_{1/2} g$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Переходим к эскизу графика функции $y=\log_{1/2}(x^2+x)$ (см. рис. 6, *в*). Одной из существенных качественных характеристик функции является ее поведение у «границы области определения», т. е. при $x\to a$, где a — граничная точка области определения и при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, если область определения не ограничена слева или справа.

Введем некоторые количественные оценки этого поведения. Если при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ разность $f(x)-g(x)\to 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ на плюс или минус бесконечности ведут себя асимптотически одинаково. Если $g(x)$ по структуре более

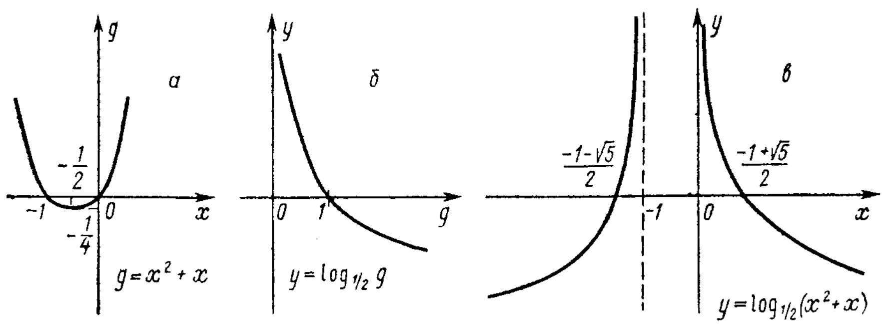

Рис. 6

«проста», чем $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ асимптотически ведет себя как $g(x)$.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^4+e^{3x}}{x^2+e^{2x}}$.

После тождественных преобразований получим

$$\frac{x^4+e^{3x}}{x^2+e^{2x}}=e^x+\left(\frac{x^4}{e^{2x}}-\frac{x^2}{e^x}\right):\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)=x^2+\frac{e^{3x}-x^2e^{2x}}{x^2+e^{2x}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ (показательная функция $y=a^x$, $a>1$, на плюс бесконечности растет быстрее степенной $y=x^\alpha$, $\alpha>0$, это строго доказывается позже) и $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{2x}=$ $=\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z^2}{e^{2z}}=0$, то видно, что $y(x)$ на плюс бесконечности асимптотически ведет себя как e^x и на минус бесконечности — как x^2. Если $g(x)=kx+b$ и $f(x)-g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), то говорят, что график функции $f(x)$ имеет правую (левую) асимптоту, наклонную при $k\neq 0$, горизонтальную при $k=0$. Правая асимптота существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела: $k_{+}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$ и $b_{+}=\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-k_{+}x)$, левая — когда существуют $k_{-}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}$ и $b_{-}=\lim\limits_{x\to-\infty}(y(x)-k_{-}x)$. Если правая и левая асимптоты совпадают, то говорят, что график функции имеет асимптоту (наклонную или горизонтальную).

Пример 8. Рассмотрим функцию $f(x)=x+(\sin x)/x$. Так как $(\sin x)/x\to 0\,(x\to\infty)$ (почему ?), то прямая $y=x$ есть асимптота графика этой функции. Обратите внимание, что график данной

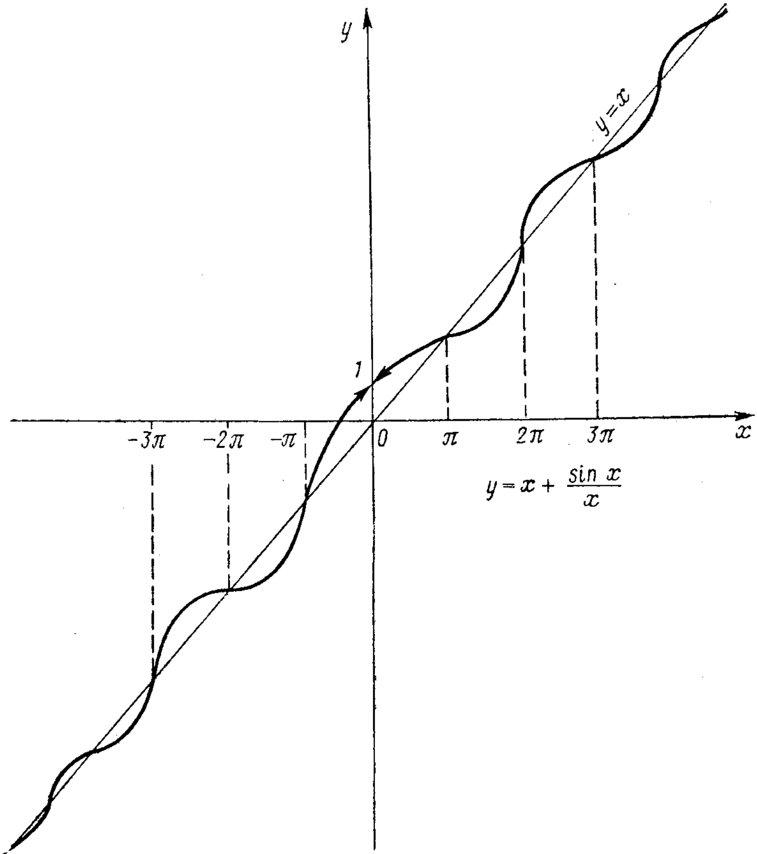

Рис. 7

функции пересекает свою асимптоту в бесконечном числе точек: $x=k\pi$ для каждого целого k, $k\neq 0$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 7.

Если при $x\to a\,(x\to a^{+},\ x\to a^{-})$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности, тогда прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой (двусторонней или односторонней). В таком случае иногда используется следующая характеристика функции: если в некоторой окрестности (правой или левой полуокрестностях) точки $x=a$ имеет место соотношение $0<C_1<|f(x)/g(x)|<C_2$, то говорят, что $f(x)$ имеет при $x\to a$ ($x\to a^+$, $x\to a^-$) порядок роста $g(x)$.

§ 2. ГРАФИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Рациональной функцией (рациональной дробью) называют отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\quad (Q_m(x)\neq 0).$$

Простейшим после многочленов подклассом рациональных функций является класс дробно-линейных функций

$$y(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad c\neq 0.$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x=-d/c$, есть постоянная a/c и график ее имеет вид,

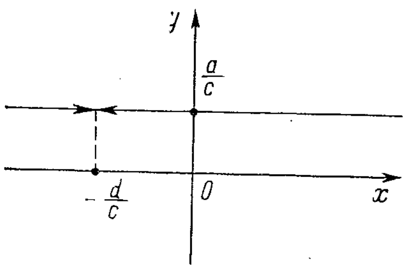

Рис. 8

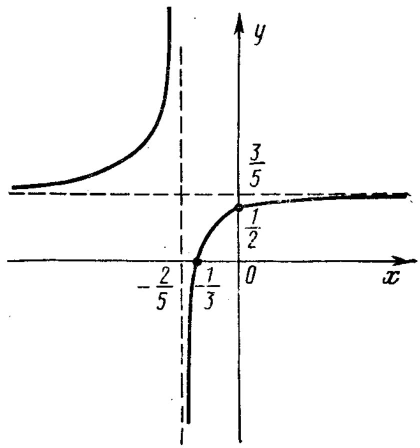

Рис. 9

изображенный на рис. 8. Обратите внимание на отличие этого графика от графика функции $y=a/c$!

В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемая дробь несократима (т. е. $bc\neq ad$). После тождественного преобразования

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{k}{x+\dfrac{d}{c}}$$

видно, что график дробно-линейной функции — кривая обратной пропорциональности $y=k/x$ (гипербола), сдвинутая по оси OX на $|d/c|$ вправо или влево в зависимости от знака d/c и по оси OY на $|a/c|$ вверх или вниз в зависимости от знака a/c. Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать ее асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична с первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x=-d/c$ и $y=a/c$, полученные соответствующим сдвигом асимптот кривой $y=k/x$, а положение одной из ветвей определяется точкой пересечения гиперболы с осью OX или OY.

Пример 1. Построим эскиз графика функции $y=\dfrac{3x+1}{5x+2}$.

Решение. Асимптотами являются прямые: $x=-2/5$, $y=3/5$. Точка пересечения гиперболы с осью OY есть $(0,\ y(0))=(0,\ 1/2)$. Итак, одна из ветвей гиперболы лежит в четвертой четверти относительно асимптот; вторая, симметричная с первой, — во второй. Эскиз графика смотри на рис. 9.

Из эскиза графика рациональной дроби должны быть видны следующие свойства: знак, нули и точки неопределенности функции, ее поведение около точек неопределенности и асимптотическое поведение на бесконечности.

Всякая рациональная дробь $R(x)$ представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби (степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя), т. е. $R(x)=T_q(x)+$ $+\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$, $k<m$, где T_q, P_k, Q_m — многочлены. Правильная дробь при $x\to\infty$ стремится к нулю (почему?), поэтому $R(x)$ на бесконечности асимптотически ведет себя как многочлен $T_q(x)$, в частности, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ или уходит в бесконечность, или имеет один и тот же конечный предел. Если рассматривать только несократимые дроби, то через каждую точку неопределенности (нуль знаменателя) проходит вертикальная асимптота; если $x=a$ нуль знаменателя кратности k, т. е. знаменатель имеет вид $(x-a)^kQ(x)$, $Q(a)\neq0$, то порядок роста функции около такой точки есть $1/(x-a)^k$.

Если α — корень числителя кратности m, то функция в окрестности точки $x=\alpha$ имеет вид $C(x-\alpha)^m$.

Пример 2. Построим эскиз графика функции

$$y=\frac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

Решение. Запишем соотношения

$$\frac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}=-4x+3+\frac{25x^2+4x-12}{(x+2)^2\ (1-x)\ (1+x)}=$$

$$=\frac{x^4(4x+13)}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

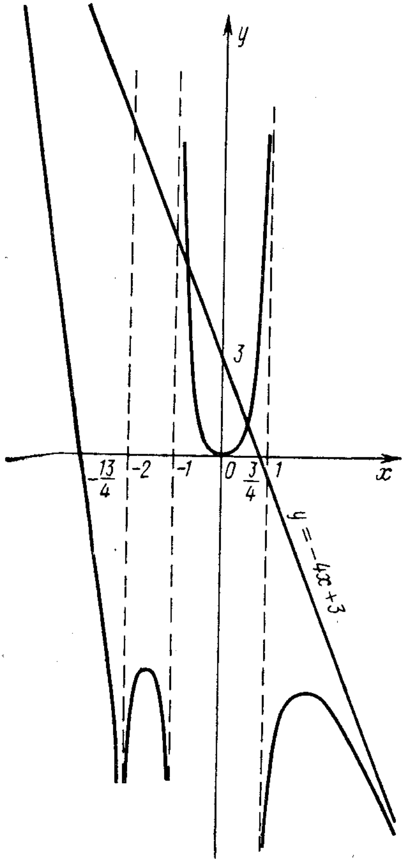

Рис. 10

Отсюда заключаем, что точки $x=0$, $x=-13/4$ — нули функции, прямые $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ — вертикальные асимптоты, прямая $y=-4x+3$ — наклонная асимптота. Перемена знака функции происходит в точках $x=-13/4$, $x=-1$, $x=1$; точка $x=0$ — корень четного порядка числителя, точка $x=-2$ — знаменателя, поэтому в этих точках знак функции не меняется. Эскиз графика представлен на рис. 10. Заметим, что на промежутке $(-1, 1)$ кривая дважды пересекла асимптоту $y=-4x+3$. Так как многочлен $25x^2+4x-12$ более двух корней иметь не может, то больше точек пересечения графика функции с этой асимптотой нет. Вообще, точное положение таких точек чаще всего находить не обязательно, достаточно ограничиться качественным анализом, как в этом примере. Точно так же чисто качественные рассуждения о поведении функции приводят к выявлению экстремальных точек на промежутках $(-2, -1)$, $(1, +\infty)$.

§ 3. ГРАФИКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе рассматриваем функции вида $y = P_1^{\alpha_1}(x)\cdot P_2^{\alpha_2}(x)\dots P_k^{\alpha_k}(x)$, где $P_1(x), \dots, P_k(x)$ — многочлены, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — рациональные числа, или конечные суммы таких произведений. После выделения всех множителей вида $(x-\alpha)^\beta$, $\beta>0$ произведение $P_1^{\alpha_1}\dots P_k^{\alpha_k}$ примет вид

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_p)^{\alpha_p}}{(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\dots(x-b_q)^{\beta_q}}\cdot T(x), \qquad (1)$$

где $\alpha_i\geqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant p$, $\beta_j\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant q$, $T(x)$ всюду определенная и не обращающаяся в нуль функция. Если в (1) все α_i — натуральные числа, все β_i равны нулю и $T(x)$ — многочлен, то числа $a_1, a_2, \dots, a_p$ называются *корнями*, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ называются *кратностью* соответствующего корня; в общем случае принято говорить о порядке корня в числителе и в знаменателе.

Например, функция $y=x\sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}}$ имеет в числителе корень $x=0$ порядка 4/3, а в знаменателе корень $x=-2$ порядка 2/3.

Отметим основные свойства степенной функции $y=x^\alpha$ с положительным рациональным показателем $\alpha=m/n$, где $m\in N$, $n\in N$.

Если n четное, то функция $y=x^{1/n}$ определена для $x\geqslant 0$ и $y=(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$.

Если n нечетное, то функция $y=x^{m/n}$ определена для всех действительных x, причем для $x>0$ имеем

$$y=(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$$

и

$$y(-x)=(\sqrt[n]{-x})^m=(-\sqrt[n]{x})^m=(-x^{1/n})^m.$$

Отсюда видно, что функция $y=x^{m/n}$ нечетна, если m и n нечетны, и четна, если n нечетно, а m четно. Поэтому для любого рационального α достаточно рассматривать поведение функции $y=x^\alpha$ на положительной полуоси, а ее поведение на отрицательной полуоси, если она там определена, обусловливается свойством четности или нечетности.

Так как $\alpha>0$, то график функции $y=x^\alpha$ проходит через начало координат, точку (1, 1) и функция стремится к плюс бесконечности при $x\to+\infty$. Чем больше α, тем ближе к оси OX график функции $y=x^\alpha$ на промежутке (0, 1) и дальше от оси OX на промежутке $(1, +\infty)$. Пользуясь техникой дифференцирования, можно показать, что при $\alpha>1$ график функции $y=x^\alpha$ не только лежит ниже прямой $y=x$ на (0, 1), но имеет в нуле горизонтальную касательную, а если $0<\alpha<1$, то график функции $y=x^\alpha$ лежит выше прямой $y=x$ и имеет в нуле вертикальную касательную.

Эти характерные свойства степенной функции используются для построения эскизов графиков.

Отметим еще, что график функции $y=(x-a)^\alpha\cdot h(x)$ (если $h(a)\neq 0$, и график функции $h(x)$ не имеет в точке $x=a$ вертикальной касательной) имеет в точке $x=a$ вертикальную или горизонтальную касательную одновременно с графиком функции $y=(x-a)^\alpha$.

Пример 1. Для функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ поведение в окрестности точки $x=0$ определяется множителем $(-\sqrt[3]{x^2})$, поскольку $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^3-1}$ и $\sqrt[3]{x^3-1}\neq 0$ при $x=0$. Поведение функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ в окрестности точки $x=0$ показано на рис. 11. В точке $x=1$ поведение функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ определяется множителем $\sqrt[3]{x-1}$, поскольку $y=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}$ и $\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}\neq 0$ при $x=1$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 11.

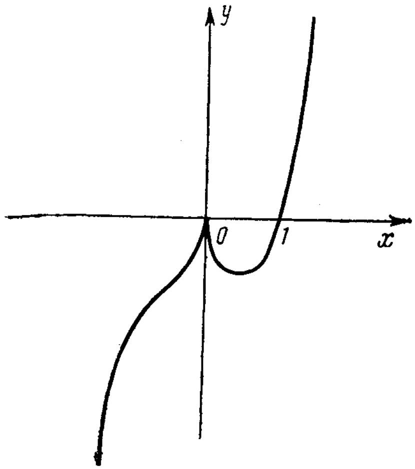

Рис. 11

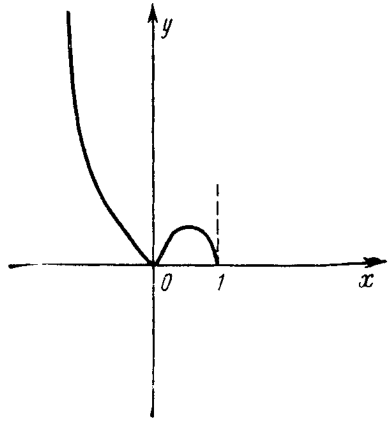

Рис. 12

Пример 2. Для функции $y=\sqrt{x^2-x^3}$ поведение в точке $x=0$ определяется множителем $\sqrt{x^2}=|x|$, так как $y=\sqrt{x^2-x^3}=\sqrt{x^2}\times\times\sqrt{1-x}$, а в точке $x=1$ определяется множителем $\sqrt{1-x}$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 12.

Если $y=y_1(x)+y_2(x)$ и функция $y_1(x)$ имеет в точке $x=x_0$ вертикальную касательную, а функция $y_2(x)$ не имеет такой касательной в точке $x=x_0$, то функция y имеет в точке $x=x_0$ вертикальную касательную.

Пример 3. График функции $y=\sqrt{x}-\cos x$ касается оси OY в точке $(0, -1)$, поскольку график функции $y=\sqrt{x}$ имеет в точке $x=0$ вертикальную касательную (рис. 13).

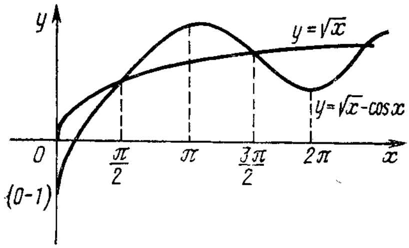

Рис. 13

На эскизе графика функции $y=P_1^{\alpha_1}(x)\cdot P_2^{\alpha_2}(x)\cdot\ \ldots\ \cdot P_m^{\alpha_m}(x)$, где $P_i(x)$ — многочлены, α_i — рациональные числа, должны быть видны асимптоты этой кривой, точки пересечения с осями координат, расположение кривой относительно осей координат, точки, в которых кривая имеет вертикальную или горизонтальную касательную.

П р и м е р 4. Построим эскиз графика функции

$$y=\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}\cdot\sqrt[3]{x-2}}{x\sqrt[6]{(x+1)^4(x+4)}}.$$

Р е ш е н и е. Функция определена при $x\geqslant -2$. Точки $x=-2$, $x=1$, $x=2$ — нули функции, прямая $x=-1$ и ось OY — вертикальные асимптоты, перемена знака функции происходит в точках $x=0$ и $x=2$, график имеет вертикальные касательные в точках $x=-2$ и $x=2$, точка $x=1$ — угловая (т. е. в окрестности этой точки данная функция имеет вид $C\sqrt{(x-1)^2}=C|x-1|$). После преобразования, тождественного для $x>2$, имеем

$$y=\frac{\sqrt{(1-1/x)^2(1+2/x)}\cdot\sqrt[3]{1-2/x}}{\sqrt[6]{(1+1/x)^4(1+4/x)}}.$$

Отсюда видно, что при $x\to+\infty$ прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота. Эскиз графика функции представлен на рис. 14.

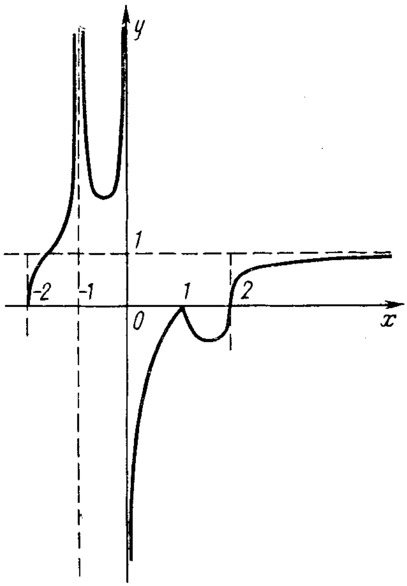

Рис. 14

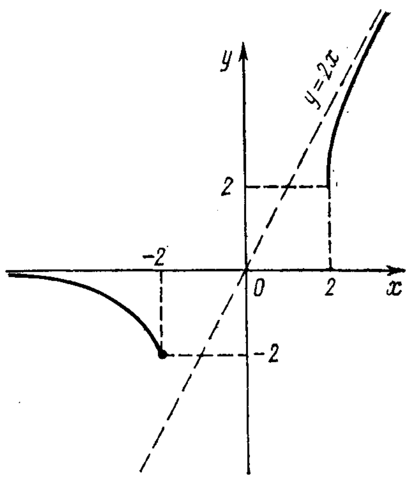

Рис. 15

При построении подобных эскизов, вообще говоря, не требуется ответа на вопрос, пересекается ли график функции со своими асимптотами. В данном примере можно ответить на этот вопрос.

Пусть $-1<x<0$, тогда $|x-2|>2$, $|x-1|^2\,|x+2|>1$, $|x|\sqrt[6]{(x+1)^4\cdot(x+4)}<\sqrt[6]{4}$ и $y>\sqrt[3]{2}\,/\,\sqrt[6]{4}=1$, т. е. график функции на этом промежутке лежит выше асимптоты. Пусть $x>2$, тогда

$(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2=(x-1)^6(x^2-4)^2(x+2)<x^6(x+4)(x^2-4)^2<$
$<x^6(x+4)(x^2+2x+1)^2$, следовательно, $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2}}{\sqrt[6]{x^6(x+1)^4(x+4)}}<1$,
т. е. кривая лежит ниже асимптоты.

Пример 5. Построим эскиз графика функции $y=x+\sqrt{x^2-4}$.

Решение. Функция определена при $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -2$. Рассмотрим функцию при $x\geqslant 2$. В точке $x=2$ график имеет вертикальную касательную, проходит через точку $(2, 2)$ и монотонно растет к плюс бесконечности с ростом x. Проверим, имеет ли график наклонную асимптоту

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=2;\quad \lim_{x\to+\infty}(y-2x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$$

Следовательно, прямая $y=2x$ — правая асимптота. Для рассмотрения функции на промежутке $x<-2$ удобно сделать замену $z=-x$, тогда $y=\sqrt{z^2-4}-z$ и видно, что для $z>2$, $y>-2$, при $z\to+\infty$, $y\to 0$; в точке $x=-2$ график имеет вертикальную касательную, проходит через точку $(-2, -2)$, и так как $y=$ $=\dfrac{-4}{\sqrt{z^2-4}+z}$, то функция монотонно убывает при $z\to+\infty$ $(x\to$ $-\infty)$. Эскиз графика функции представлен на рис. 15.

При построении эскиза графика сложной функции, в определение которой входят функции

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}\quad \text{и}\quad \operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

наиболее естественно выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля или sign не меняет знака. Стоит обратить внимание на то, что функция $|x|$ — элементарная (почему?) и непрерывная, но имеет в нуле угловую точку, так что и в композиции с этой функцией непрерывность не нарушается, а угловые точки могут появиться; функция $y=\operatorname{sign} x$ разрывна, и при композиции с этой функцией также могут появиться точки разрыва.

§ 4. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Рассмотрим функцию $y=\sin x$. Эта функция, рассматриваемая на всей числовой прямой, не является монотонной. Чтобы говорить об обратной функции, выделим участок монотонности функции $y=\sin x$. Одним из участков монотонности этой функции является отрезок $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Функцию, обратную для функции $y=\sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, обозначим через $y=\arcsin x$, т. е. $y=\arcsin x$ означает, что $x=\sin y$ и $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Если рассмотрим функцию $y=\sin z$ на другом участке, например $\pi/2 \leqslant z \leqslant 3\pi/2$, то существует обратная функция, которая выражается через функцию $y=\arcsin z$ следующим образом: $y=\pi-\arcsin z$ (почему?). Аналогично, рассматривая функцию $y=\cos x$ на промежутке $[0, \pi]$, определяется обратная функция $y=\arccos x$, т. е. запись $y=\arccos x$ означает, что $x=\cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Для функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ определяется обратная функция $y=\operatorname{arctg} x$, т. е. запись $y=\operatorname{arctg} x$ означает, что $x=\operatorname{tg} y$ и $-\pi/2<y<\pi/2$. Для функции $y=\operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0, \pi)$ определяется обратная функция $y=\operatorname{arcctg} x$, т. е. запись $y=\operatorname{arcctg} x$ означает, что $x=\operatorname{ctg} y$ и $0<y<\pi$.

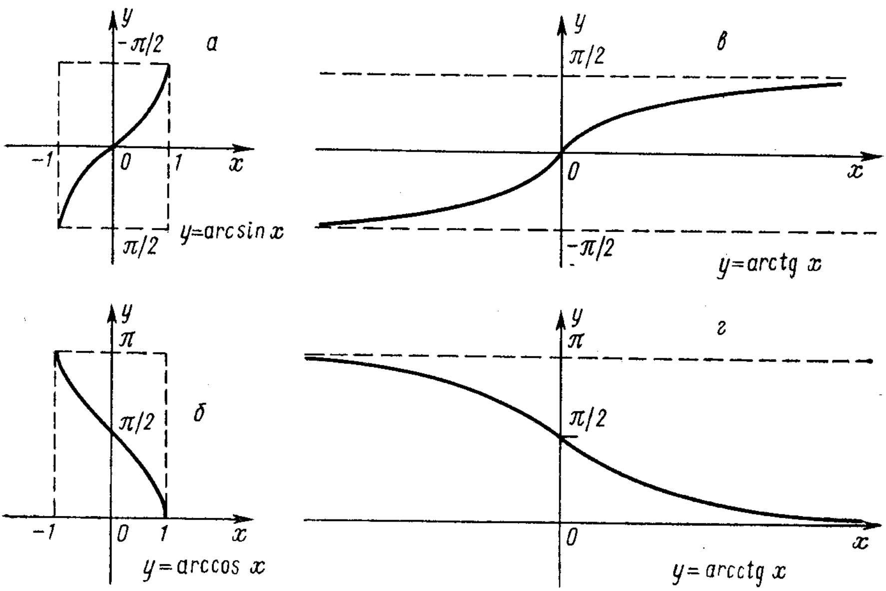

Рис. 16

Приводим графики обратных тригонометрических функций (см. 16).

Пример 1. Построим эскиз графика функции

$$y=\arcsin \frac{x-2}{3}.$$

Решение. Пишем цепочку преобразований:

$$y = \arcsin \frac{x-2}{3} \equiv \arcsin\left[\frac{1}{3}(x-2)\right] \xleftarrow{\text{сдвиг на 2 вправо}}$$

$$\leftarrow \arcsin \frac{1}{3}x \leftarrow \arcsin x.$$

Последовательно эскизы графиков смотри на рис. 17.

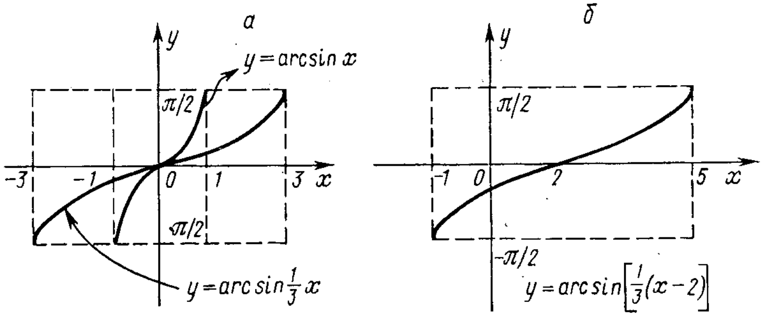

Рис. 17

Пример 2. Построим эскиз графика функции
$y = \arccos|(1-2|x|)/3|$.

Решение. Пишем цепочку преобразований:

$$\arccos|(1-2|x|)/3| \xleftarrow{x>0} \arccos|(1-2x)/3| \equiv$$

$$\equiv \arccos\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow{\text{сдвиг на 1/2 вправо}} \arccos\left|\frac{2}{3}x\right| \xleftarrow{x>0}$$

$$\leftarrow \arccos\left(\frac{2}{3}x\right) \leftarrow \arccos x.$$

Последовательно эскизы графиков изображены на рис. 18.

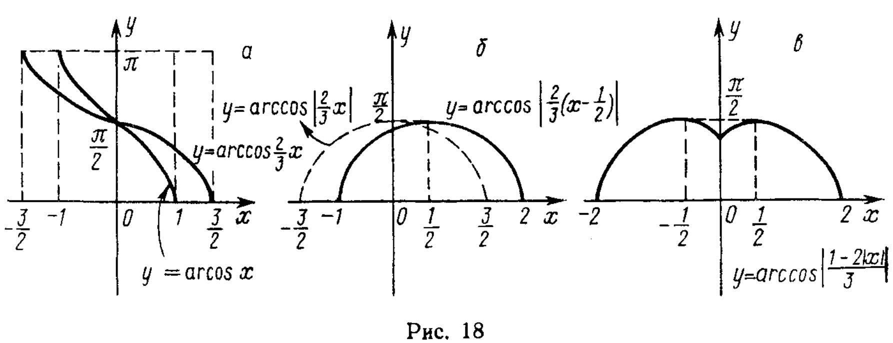

Рис. 18

Справедливы следующие формулы:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad |x| < \infty;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2, \quad |x| < \infty;$$

$$\arcsin(\sin x) \equiv x, \quad |x| \leqslant \pi/2;$$

$$\sin(\arcsin x) \equiv x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(\cos x) \equiv x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$

$$\cos(\arccos x) \equiv x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \quad |x| < \pi/2;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) \equiv x, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Докажем некоторые из них.

1. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1.$

Пусть $\arccos(-x) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -x$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Из соотношения $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ следует $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$, а из соотношения $\cos\alpha = -x$ следует, что $\cos(\pi - \alpha) = x$. Поэтому $\pi - \alpha = \arccos x$, откуда $\alpha = \pi - \arccos x$, т. е. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

2. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad |x| \leqslant 1.$

Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$, тогда $x = \sin\alpha = \cos\beta$ и $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Имеем $\sin\alpha = \cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta)$. Из соотношения $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ следует, что $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \beta \leqslant \pi/2$. Итак,

$$\sin\alpha = \sin(\pi/2 - \beta) \text{ и } -\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2, \quad -\pi/2 \leqslant \pi/2 - \beta \leqslant \pi/2.$$

Поэтому $\alpha = \pi/2 - \beta$, откуда получаем, что

$$\alpha + \beta = \pi/2, \text{ т. е. } \arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

3. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < x < 1.$

Пусть $0 < x < 1$. Обозначим $\arcsin x = \alpha$, тогда $x = \sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$. Значит, $\cos\alpha = +\sqrt{1 - x^2}$, откуда

$$\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}, \text{ т. е. } \arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2},$$

что и требовалось доказать.

4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1 - xy}{x + y}, \quad x > 0,\ y > 0.$

Обозначим $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$, $x > 0$, $y > 0$. Тогда $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Поэтому

$$0 < \alpha + \beta < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

Так как $0 < \alpha + \beta < \pi$, то $\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x + y}$, т. е.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y}.$$

Пример 3. Вычислим $\arcsin(\sin 10)$.

Решение. Поскольку $\arcsin(\sin x) \equiv x$ при $|x| \leqslant \pi/2$, то, пользуясь свойствами функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, а также периодичностью функции $y = \sin x$, имеем $\arcsin(\sin 10) = \arcsin\sin(10 - 2\pi) = \arcsin\sin[\pi - (10 - 2\pi)] = 3\pi - 10$, поскольку $|3\pi - 10| < \pi/2$.

Пример 4. Построим эскиз графика функции $y = \arccos(\sin x^2)$.

Решение. Областью определения функции является вся ось OX. Из тождества $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ при $|x| \leqslant 1$ имеем $\arccos(\sin x^2) = \pi/2 - \arcsin\sin x^2$ (так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ для любого x). В силу четности функции $\arcsin\sin x^2$ достаточно построить ее график в области $x \geqslant 0$. Поскольку $\arcsin\sin x \equiv x$, если $|x| \leqslant \pi/2$, то $\arcsin\sin x^2 \equiv x^2$ при $x^2 \leqslant \pi/2$, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$. Следовательно, при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ имеем, что $\arccos \sin x^2 = \pi/2 - x^2$ (см. рис. 19, *а*). Если $x \in (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2})$, то $x^2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$, а поскольку $x^2 - \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\sin(x^2 - \pi) = -\sin x^2$, то $\arcsin(\sin x^2) = \arcsin(-\sin(x^2 - \pi)) = -\arcsin(\sin(x^2 - \pi)) = -(x^2 - \pi) = \pi - x^2$.

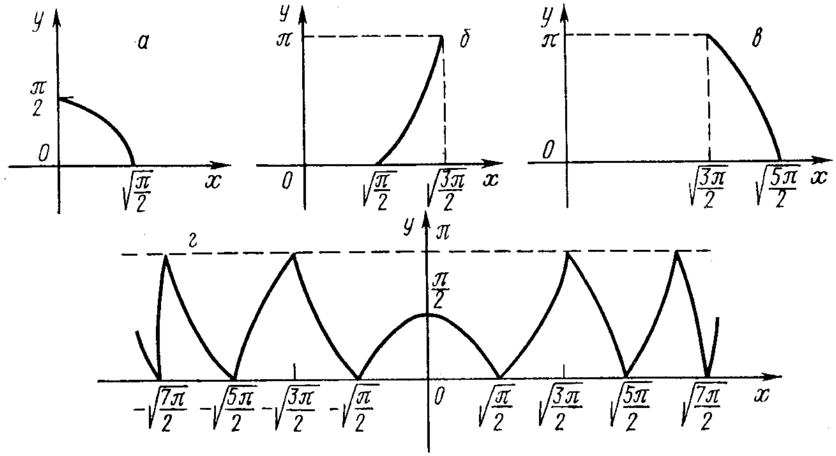

Рис. 19

Поэтому при $x \in (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2})$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\pi/2 - (\pi - x^2) = x^2 - \pi/2$ (см. рис. 19,*б*). При $x \in (\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{5\pi/2})$ имеем, что $x^2 \in (3\pi/2, 5\pi/2)$, $x - 2\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$, и так как $\sin x^2 = \sin(x^2 - 2\pi)$, то $\arcsin \sin x^2 = x^2 - 2\pi$. Поэтому при $x \in (\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{5\pi/2})$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\pi/2 - (x^2 - 2\pi) = 5\pi/2 x^2$ (см. рис. 19,*в*). Аналогично при $x \in (\sqrt{2k-1)\pi/2}, \sqrt{(2k+1)\pi/2})$, $k \geqslant 3$, имеем, что график исходной функции совпадает с графиком функции

$$y = \pi/2 + (-1)^{k+1}(x^2 - k\pi).$$

Окончательный вид эскиза графика функции $y = \arccos \sin x^2$ представлен на рис. 19, *в*.

§ 5. КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости XOY, координаты которых определяются из соотношений $x = x(t)$, $y = y(t)$ при каждом фиксированном t из некоторого множества T. Обычно в качестве множества T берется некоторый промежуток. Если от функций $x(t)$ и $y(t)$ потребовать только непрерывность на промежутке T, то образом этого промежутка при отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$ может быть множество в плоскости XOY, совсем непохожее на интуитивное представление о кривой. Например, можно задать такое отображение, что образом будет внутренность квадрата. Не углубляясь в теорию кривых, предполагаем, что рассматриваемый промежуток T изменения параметра t разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция $x(t)$ строго монотонна. На таком промежутке определена обратная функция $t(x)$ и $y(t)=y(t(x))$. Итак, каждому промежутку строгой монотонности $x(t)$ соответствует однозначная функция $y(x)$, график которой называется ветвью данной кривой. Количество ветвей определяется количеством участков строгой монотонности $x(t)$. Если точка $(x(t_0), y(t_0))$ не является общей для нескольких ветвей данной кривой, то в окрестности этой точки можно определить функцию $y=y(x)$, заданную параметрически, график которой проходит через эту точку.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически, на плоскости XOY необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции. Пусть t возрастает. Тогда если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и т. д. Если при $t \to t_0$ имеем $x \to a$, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x=a$. Если при $t \to t_0$ имеем, что $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t) \to b$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=b$. Наклонная асимптота может быть только тогда, когда при $t \to t_0$ функции $x(t)$ и $y(t)$ одновременно стремятся к бесконечности. Коэффициенты асимптоты $y=kx+b$ вычисляются, как было указано выше, с заменой условия $x \to \infty$ $(x \to \infty, x \to -\infty)$ на условие $t \to t_0$ $(t \to t_0^+, t \to t_0^-)$.

Из всего вышесказанного видно, что для построения эскиза кривой, заданной параметрически, важно точное определение участков монотонности, по крайней мере функции $x(t)$. Иногда это можно сделать из качественных соображений, но часто приходится обращаться к помощи производных.

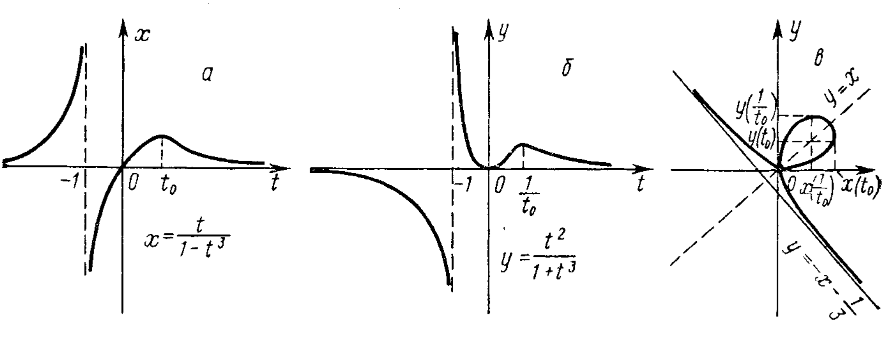

Рис. 20

Пример 1. Построим эскиз кривой $x=t/(1+t^3)$, $y=t^2/(1+t^3)$.

Решение. Эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ смотри на рис. 20, *а*, *б*. Примем без доказательства, что точка t_0 — единственная точка экстремума $x(t)$. Тогда участками монотонности $x(t)$ будут промежутки $(-\infty, -1)$, $(-1, t_0)$, $(t_0, +\infty)$. Оценим положение точки t_0. Поскольку $y/x=t$, то для $0<t<1$ имеем, что $0<y<x$, т. е. исследуемая кривая лежит в первой четверти ниже прямой $y=x$, а для $t>1$ — выше. Так как $x(1/t)=y(t)$, $y(1/t)=x(t)$, то кривая симметрична относительно прямой $y=x$ (вместе с точкой (x, y) на ней лежит и точка (y, x)). Если $t_0>1$, то точка, симметричная с точкой $(x(t_0), y(t_0))$, лежащей выше прямой $y=x$, имеет координату $x=y(t_0)=x(1/t_0)$, большую, чем $x(t_0)$, что противоречит условию. Итак, $0<t_0<1$.

Проверим, имеет ли кривая наклонную асимптоту. Имеем

$$\lim_{t\to-1} y/x=\lim_{t\to-1} t=-1;\quad \lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1} t(t+1)/(t^3+1)=$$
$$=\lim_{t\to-1} t/(t^2-t+1)=-1/3,$$

поэтому прямая $y=-x-1/3$ есть наклонная асимптота исследуемой кривой. Кривая проходит через начало координат: $x(0)=0$, $y(0)=0$. Когда t растет от 0 до t_0, значения функций $x(t)$, $y(t)$ растут, движение по кривой происходит направо вверх до точки $(x(t_0), y(t_0))$. Когда t убывает от 0 до -1, движение по кривой происходит налево вверх, асимптотически приближаясь к прямой $y=-x-1/3$. В точке $(x(t_0), y(t_0))$ начинается вторая ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $(t_0, +\infty)$. С ростом t функция $x(t)$ убывает и движение по кривой происходит влево, сначала вверх до точки $(x(1/t_0), y(1/t_0))$, а затем вниз; при $t\to+\infty$ имеем $x(t)\to0$, $y(t)\to0$. Наконец, при росте t на промежутке $(-\infty, -1)$ функция $x(t)$ возрастает, $y(t)$ убывает. При $t\to-\infty$ получаем, что $x(t)\to0$, $y(t)\to0$, при $t\to-1$ движение по кривой происходит вправо вниз, асимптотически приближаясь к прямой $y=-x-1/3$. Как уже говорилось, кривая симметрична при замене t на $1/t$, поэтому можно было бы ограничиться рассмотрением t на промежутке $(-1, 1)$, а оставшуюся часть нарисовать по симметрии относительно прямой $y=x$. Эскиз кривой представлен на рис. 20, *в*.

Пользуясь техникой дифференцирования, покажем теперь, что утверждение о монотонности функции $x(t)$ верно, и определим точно значение t_0. Имеем

$$x_t'=\frac{t^3+1-3t^3}{(t^3+1)^2}=\frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2}.$$

При $t<\sqrt[3]{1/2}$, $t\neq-1$, имеем $x_t'>0$ и поэтому $x(t)$ строго возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1, \sqrt[3]{1/2})$; при $t>\sqrt[3]{1/2}$ имеем $x_t'<0$ и поэтому $x(t)$ строго убывает на промежутке $(\sqrt[3]{1/2},$

$+\infty$). Так как функция $x(t)$ непрерывна в точке $t_0=\sqrt[3]{1/2}$, то эта точка есть точка экстремума (точка максимума).

Пример 2. Построим эскиз кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $a>0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0+2\pi),\ y(t_0+2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0),\ y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке $(0,\ 2\pi)$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 21, *а*, *б*).

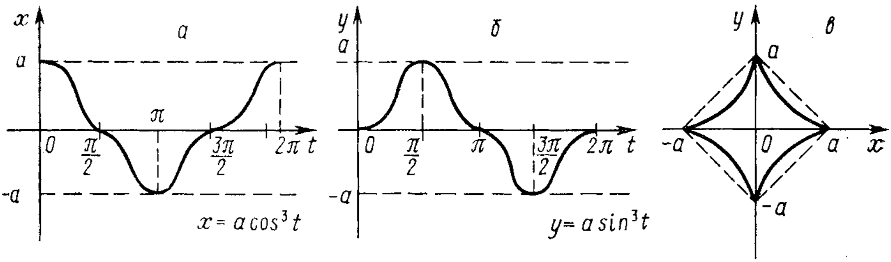

Рис. 21

Промежутками монотонности $x(t)$ являются $(0,\ \pi)$ и $(\pi,\ 2\pi)$. Когда t растет от 0 до $\pi/2$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(a,\ 0)=(x(0),\ y(0))$ до точки $(x(\pi/2),\ y(\pi/2))=$ $=(0,\ a)$; когда t растет от $\pi/2$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi),\ y(\pi))=(-a,\ 0)$. В этой точке начинается вторая ветвь кривой. Когда t растет от π до $3\pi/2$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $(x(3\pi/2),$ $y(3\pi/2))=(0,\ a)$. Когда t растет от $3\pi/2$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi),\ y(2\pi))=(a,\ 0)$. Так как $x(2\pi-t_0)=x(t_0)$, $y(2\pi-t_0)=-y(t_0)$, $x(\pi-t_0)=-x(t_0)$, $y(\pi-t_0)=y(t_0)$, то вместе с точкой $(x_0,\ y_0)$ на кривой лежат точки $(-x_0,\ y_0)$ и $(x_0,\ -y_0)$, т. е. она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $(0,\ \pi/2)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $\tilde{x}=a\cos^2 t$, $\tilde{y}=a\sin^2 t$. Это отрезок прямой $\tilde{x}+\tilde{y}=a$, лежащий в первой четверти. Так как при любом t, $0<t<\pi/2$, $x<\tilde{x}$, $y<\tilde{y}$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рис. 21, *в*.

Пример 3. Построим эскиз кривой $x=a\cos 2t$, $y=a\sin 3t$, $a>0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0+2\pi),\ y(t_0+2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0),\ y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Отметим еще следующие соотношения: $x(-t)=$ $=x(t)$, $y(-t)=-y(t)$, $x(\pi-t)=x(t)$, $y(\pi-t)=y(t)$; из них видно, что при изменении t на промежутке $[0,\ \pi/2]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на $[\pi/2,\ \pi]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi,\ 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси OX с точками, полученными при изменении t

на $[0, \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $[0, \pi/2]$. Построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 22, *а*, *б*).

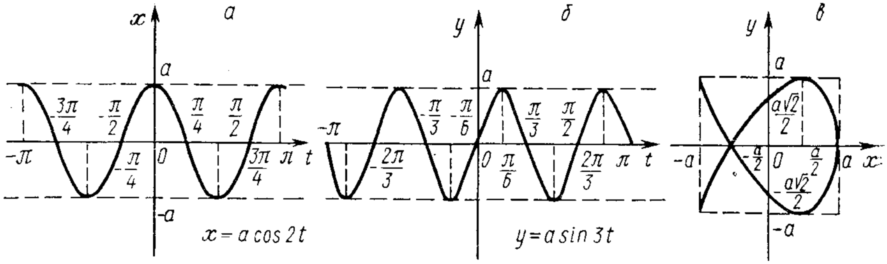

Рис. 22

На промежутке $[0, \pi/2]$ $x(t)$ монотонно убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растет от 0 до $\pi/6$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $(x(\pi/6), y(\pi/6)) = (a/2, a)$. Когда t растет от $\pi/6$ до $\pi/2$, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi/2), y(\pi/2)) = (-a, -a)$, пересекая ось OY в точке $(x(\pi/4), y(\pi/4)) = (0, a\sqrt{2}/2)$ и ось OX в точке $(x(\pi/3), y(\pi/3)) = (-a/2, 0)$. При дальнейшем росте t от $\pi/2$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t), y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от 0 до $-\pi$ получаем вторую ветвь кривой, симметричную с первой относительно оси OX. Эскиз кривой представлен на рис. 22, *в*.

§ 6. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ В ЭТОЙ СИСТЕМЕ

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, луча OP, выходящего из этой точки, называемого полярной осью, масштаба для измерения длины и направления отсчета углов. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.

Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются: расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM. Для полюса O полагается, что $r=0$, а φ — не определен. Полярный угол точки M, отличной от O, имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси за положительное направление оси OX, а за ось OY принять такую ось, что угол от положительного направления оси OX до положительного направления оси OY равен $\pi/2$ (такие системы назовем совмещенными), то между декартовыми координатами x, y точки M и ее полярными координатами r и φ имеют место соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

И обратно, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$.

Замечание. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то угол φ можно найти из условия $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, причем за главное значение φ взять угол из $[0, 2\pi)$ такой, что знак $\sin\varphi$ равен знаку y.

Пример 1. Пусть точка $M(x, y)$ имеет декартовы координаты $(-1, -1)$. Найдем полярные координаты этой точки, если системы совмещены.

Решение. $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = -\sqrt{2}/2, \quad \sin\varphi = -\sqrt{2}/2, \text{ откуда } \varphi = 5\pi/4 + 2\pi k, \ k \in Z,$$

т. е. полярные координаты точки M есть $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 2. Нарисуем кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = \cos 3\varphi$.

Решение. Функция $\cos 3\varphi$ — периодическая с главным периодом T, равным $2\pi/3$, поэтому достаточно построить кривую для $0 \leqslant \varphi < 2\pi/3$, а затем, используя периодичность, построить ее для $2\pi/3 \leqslant \varphi < 4\pi/3$ и, наконец, для $4\pi/3 \leqslant \varphi < 2\pi$. Построим ту часть кривой, которая расположена в угле $0 \leqslant \varphi < 2\pi/3$. Функция $r = \cos 3\varphi$ на отрезке $[0, \pi/6]$ монотонно убывает от 1 до 0; на интервале $(\pi/6, \pi/2)$ $r < 0$, поэтому нет точек линии, расположенных внутри угла $\pi/6 < \varphi < \pi/2$; на отрезке $[\pi/2, 2\pi/3]$ кривая монотонно возрастает от 0 до 1. Для $\varphi \in [0, \pi/6] \cup [\pi/2, 2\pi/3]$ эскиз кривой представлен на рис. 23, *а*. Осталось построить кривую в других двух углах: $2\pi/3 \leqslant \varphi < 4\pi/3$ и $4\pi/3 \leqslant \varphi < 2\pi$, используя при этом периодичность функции $\cos 3\varphi$. Эскиз кривой приведен на рис. 23, *б*.

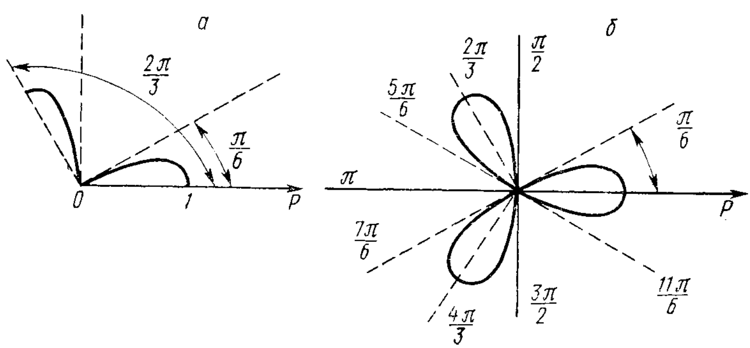

Рис. 23

Пример 3. Определим вид кривой на декартовой плоскости XOY, уравнение которой в полярной системе координат, совмещенной с декартовой, имеет вид $r=\cos\varphi$.

Решение. Поскольку $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}$, то в декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид $\sqrt{x^2+y^2}=x/\sqrt{x^2+y^2}$ или $x^2+y^2=x$, откуда $(x-1/2)^2+y^2=1/4$, — это есть уравнение окружности радиуса 1/2 с центром в точке $(1/2, 0)$.

Замечание. Из условия $r=\cos\varphi$ следует, что $r^2=r\cos\varphi$, откуда $x^2+y^2=x$.

Пример 4. Построим эскиз кривой, задаваемой в декартовой системе уравнением $(x^2+y^2)^{3/2}=2xy$.

Решение. Ясно, что кривая располагается в I и III квадрантах симметрично относительно начала координат (если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на кривой, то и точка $M'(-x_0, -y_0)$ лежит на кривой). Поэтому достаточно построить кривую в первой четверти.

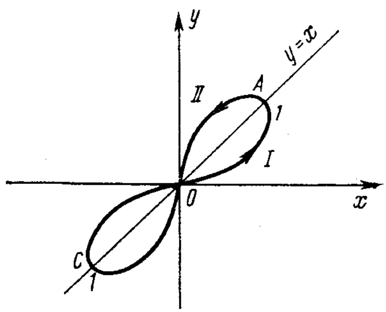

Рис. 24

Перейдем к полярной системе координат, совмещенной с декартовой, тогда имеем $r^3=2r^2\cos\varphi\sin\varphi$ или $r=\sin 2\varphi$. При изменении угла φ от 0 до $\pi/4$ r возрастает от 0 до 1 (на рис. 24 это движение от точки 0 до точки A — путь I). При изменении угла φ от $\pi/4$ до $\pi/2$ r убывает от 1 до 0 (на рис. 24 это движение от точки A до точки 0 — путь II). Используя замечание, приведенное выше, получаем эскиз кривой (см. рис. 24).

§ 7. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Пусть задано уравнение $F(x, y)=0$. Если множество точек плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из конечного числа непрерывных кривых, каждая из которых есть график однозначной функции $y=y(x)$, то говорят, что это уравнение неявно определяет соответствующее семейство функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_k(x)$. Если точка (x_0, y_0) лежит только на одной из этих кривых, то условие $y(x_0)=y_0$ позволяет однозначно выбрать эту кривую из всего семейства, т. е. уравнение $F(x, y)=0$ и условие $y(x_0)=y_0$ определяют (или задают) однозначную неявную непрерывную функцию в окрестности точки (x_0, y_0) такую, что $F(x, y(x))\equiv 0$, $y(x_0)=y_0$.

Простейшим уравнением вида $F(x, y)=0$ является уравнение $x-f(y)=0$, определяющее функцию, обратную к $f: y=f^{-1}(x)$. Ось OY меняется местами с осью OX при симметричном отображении плоскости XOY относительно биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, кривая $y=f(x)$ симметрична кривой $x=f(y)$ или $y=f^{-1}(x)$ относительно этой биссектрисы. При этом отображении непрерывная монотонная функция перейдет в непрерывную монотонную функцию, т. е. обратная функция однозначна, непрерывна и монотонна. Если же непрерывная функция $x=f(y)$ не монотонна, то кривая, определяемая уравнением $x-f(y)=0$, уже не будет графиком функции $y=y(x)$, так как нет однозначной зависимости функции от аргумента.

Если уравнение $F(x, y)=0$ можно разрешить относительно одной из переменных, то построение множества точек (x, y), для которых это уравнение справедливо, следует из предыдущих рассмотрений. Иногда можно ввести параметр t так, что уравнение $F(x, y)=0$ равносильно соотношению $\{x=x(t), y=y(t), t\in T\}$ (или нескольким таким соотношениям).

Пример 1. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением $x=y-\sin y$.

Решение. Имеем, что $x(k\pi)=k\pi$, $k\in Z$; $x_y'=1-\cos y\geqslant 0$, $x(y)$ — монотонная нечетная функция. Эскиз кривой в системе YOX представлен на рис. 25,*а*, а эскиз кривой, определенной уравнением $x=y-\sin y$ (т. е. в системе XOY), представлен на рис. 25, *б*.

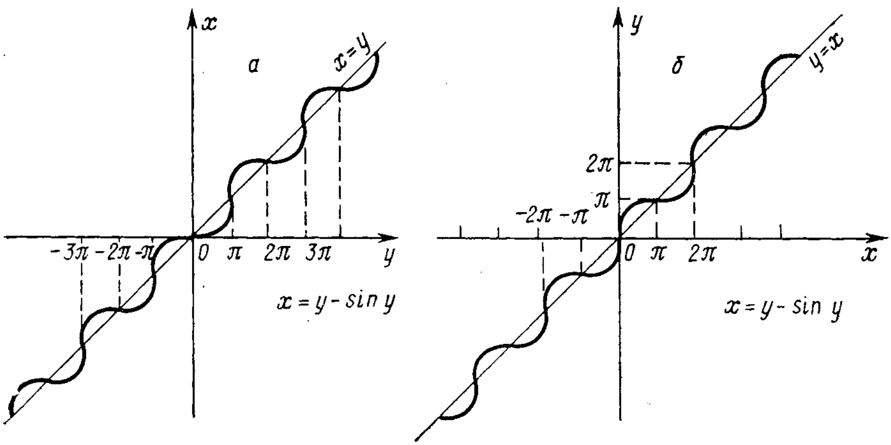

Рис. 25

Пример 2. Нарисуем эскиз кривой, заданной уравнением $x=y\cos y$.

Решение. Функция $x(y)$ — нечетная; для $y\geqslant 0$ имеем $|x|\leqslant y$, $x(\pi/2+k\pi)=0$, $x(2k\pi)=2k\pi$, $x((2k+1)\pi)=-(2k+1)\pi$. Эскиз кривой $x(y)$ в системе YOX представлен на рис. 26, *а*, а эскиз кривой $y(x)$ — в системе XOY, определяемой уравнением $x=y\cos y$, представлен на рис. 26, *б*.

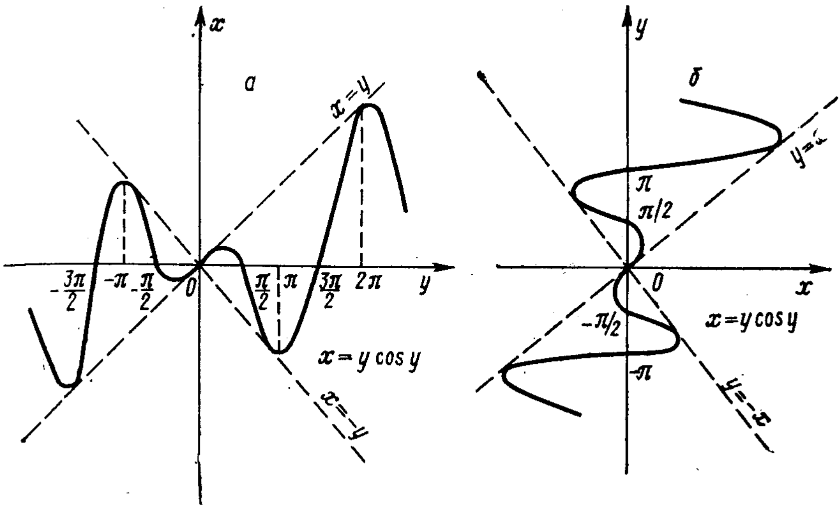

Рис. 26

Пример 3. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением $x^5+y^5=2x^2y^2$.

Решение. Заметим, что точка (0, 0) принадлежит данной кривой. Других точек вида $(0, y)$ на этой кривой нет. Для построения кривой введем параметр $t=y/x$. Тогда данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$x^5(1+t^5)=2t^2x^4.$$

Отсюда видно, что уравнение $x^5+y^5=2x^2y^2$ равносильно соотношениям $x(t)=2t^2/(1+t^5)$, $y(t)=2t^3/(1+t^5)$, так как точка (0, 0) также принадлежит этой кривой при $t=0$. Построение таких кривых было проведено выше. Кривая представлена на рис. 27.

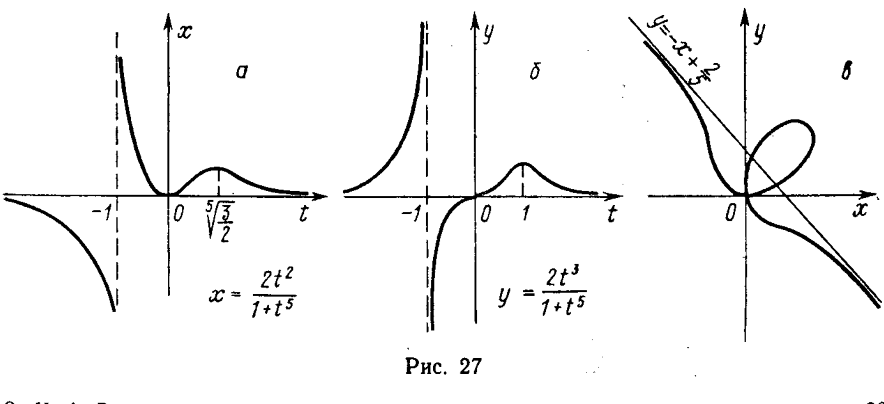

Рис. 27

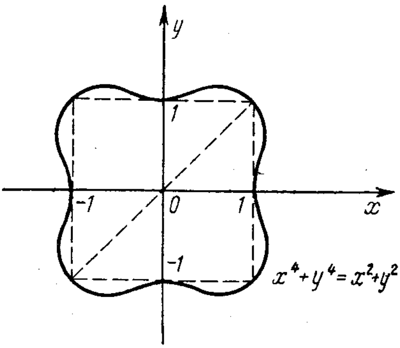

Рис. 28

Пример 4. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением

$$x^4+y^4=x^2+y^2.$$

Решение. Перейдем к полярной системе координат, совмещенной с декартовой, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнение данной кривой принимает вид

$$r^2=1/(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi), \text{ т. е. }$$

$$r^2=4/(3+\cos 4\varphi).$$

Построение таких кривых также было приведено выше. Эскиз данной кривой представлен на рис. 28.

Задачи

В одной и той же системе координат построить эскизы графиков следующих функций:

1. $y=x,\ y=x^2,\ y=x^4.$
2. $y=x,\ y=x^3,\ y=x^5.$
3. $y=x,\ y=\sqrt{x},\ y=\sqrt[3]{x},\ y=\sqrt[4]{x}.$
4. $y=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{1}{x^2},\ y=\dfrac{1}{x^3}.$
5. $y=\sqrt{x^2},\ y=\sqrt[3]{x^2},\ y=\sqrt[4]{x^2}.$
6. $y=2^x,\ y=3^{2x},\ y=2^{2x},\ y=x.$
7. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ y=3^{-x},\ y=2^{-2x},\ y=x.$
8. $y=x,\ y=\log_2 x,\ y=\log_3 x.$
9. $y=x,\ y=\log_{1/2} x,\ y=\log_{1/3} x.$
10. $y=x,\ y=\sin x,\ y=\cos x.$
11. $y=x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x.$

Используя правило построения графика функции $y=Af(x)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

12. $y=-x^2.$ **13.** $y=-\dfrac{1}{x}.$ **14.** $y=-\cos x.$

15. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg} x$. 16. $y=3\log_2 x$. 17. $y=2{,}1\sqrt{x}$.

18. $y=-\frac{1}{3}\cdot 5^x$. 19. $y=\frac{1}{2}\log_{1/3} x$. 20. $y=0{,}2\operatorname{ctg} x$.

Используя правило построения графика функции $y=f(-x)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

21. $y=\log_2(-x)$. 22. $y=\sqrt[3]{-x}$. 23. $y=\sqrt{-x}$.

24. $y=\sin(-x)$. 25. $y=\operatorname{tg}(-x)$. 26. $y=\operatorname{ctg}(-x)$.

27. $y=2^{-x}$. 28. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$. 29. $y=(2{,}1)^{-x}$.

30. $y=-3\sqrt[4]{-x}$. 31. $y=\cos(-x)$. 32. $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-5x}$.

Используя правило построения графика функции $y=f(kx)$ $(k\neq 0)$ по графику $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

33. $y=\sin 2x$. 34. $y=\cos\frac{1}{2}x$. 35. $y=\cos\pi x$.

36. $y=\sin\frac{1}{\pi}x$. 37. $y=\log_2 2x$. 38. $y=\log_{1/2}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

39. $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x$. 40. $y=\operatorname{tg} 3x$. 41. $y=\sqrt{2x}$.

42. $y=\sqrt[3]{-0{,}5x}$. 43. $y=\sqrt[100]{-2x}$. 44. $y=\sqrt[33]{4x}$.

45. $y=\log_3(-3x)$. 46. $y=\sin(-2x)$. 47. $y=\operatorname{ctg}(-2x)$.

Используя правило построения графика функции $y=f(x+a)$ $(a\neq 0)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

48. $y=(x-2)^2$. 49. $y=(x+1)^3$. 50. $y=\sqrt{2+x}$.

51. $y=(x+4)^2$. 52. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 53. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

54. $y=\frac{1}{x-3}$. 55. $y=\operatorname{tg}(1-x)$. 56. $y=(2,\ 2)^{1-x}$.

57. $y=\sqrt{1-x}$. 58. $y=\sqrt[3]{x+3}$. 59. $y=\log_{1/3}(x+1)$.

Используя правило построения графика функции $y=f(ax+b)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

60. $y=\log_3(2x+3)$. 61. $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 62. $y=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$.

63. $y=\operatorname{ctg}\frac{3x+\pi}{6}$. 64. $y=\cos\frac{2\pi x+\pi}{4}$. 65. $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

66. $y=\sin\frac{6\pi x-\pi}{3}$. 67. $y=\cos\frac{2\pi x-\pi}{5}$. 68. $y=\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$.

69. $y=\frac{1}{1-2x}$. 70. $y=\sqrt[3]{2-3x}$. 71. $y=\sqrt{(1-3x)^3}$.

72. $y=\sqrt[3]{(2x-5)^2}$. 73. $y=\frac{3}{(1-2x)^2}$. 74. $y=(\pi-3)^{2x-1}$.

75. $y=\sin x+\cos x$. 76. $y=x^2+2x-5$. 77. $y=2x-x^2+4$.

Используя правило построения графика функции $y=f(x)+A$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

78. $y=1+\sin x$. 79. $y=2-3\cos x$. 80. $y=2-\sqrt{-x}$.

81. $y=2+\log_2(1+x)$. 82. $y=\sin^2 x$. 83. $y=\cos^2 x$.

84. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log_{1/2}(1+2x)$. 85. $y=2-3\sqrt[3]{1-2x}$.

86. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. 87. $y=2-3(x-1)^2$.

88. $y=x^2+4x+8$. 89. $y=1-3x-4x^2$.

Построить эскизы графиков следующих дробно-линейных функций:

90. $y=\frac{5x-1}{3x+2}$. 91. $y=\frac{9x-3}{15x-5}$. 92. $y=\frac{4+x}{2x+1}$.

93. $y=\frac{7x+2}{x}$. 94. $y=\frac{5x+20}{3x+12}$. 95. $y=\frac{2x-8}{x-2}$.

96. $y=-\frac{x+2}{x+5}$. 97. $y=-\frac{7x+6}{x+1}$. 98. $y=\frac{14x-8}{2x-1}$.

Построить эскизы графиков следующих рациональных функций:

99. $y=(x-2)(x^2-4)$. 100. $y=(x+2)(x-1)^3$.

101. $y=(1-x^4)(x+3)(x-2)^2$. 102. $y=(1-x)(1-x^2)^3(2+x)^5$.

103. $y=\frac{x^2}{1-x}$. 104. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

105. $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. 106. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}$.

107. $y=\frac{x^2-4}{2x^2-1}$. 108. $y=\frac{(x-4)(x^2-9)}{x^2-5x+6}$.

109. $y=\frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$. 110. $y=\frac{3x^2-2x-1}{(x^2-4)(x+2)}$.

111. $y=\frac{3x^2+4x+1}{(2x+1)(x-1)}$. 112. $y=\frac{(x^2-3x-4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$.

113. $y=\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$.

114. $y=\dfrac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

115. $y=\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(2x-1)^2}$.

116. $y=\dfrac{(4x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}$.

117. $y=\dfrac{x^4-4x^3+2x^3}{(x-2)^2(x+1)}$.

118. $y=\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)(x^2+1)}$.

119. $y=\dfrac{(x-4)^2(x+1)(x+3)}{(x^2-4)(x+2)^2}$.

120. $y=\dfrac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

121. $y=\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{(x^2-4)(x+1)^2}$.

122. $y=\dfrac{(x-2)(x^4+2x^3+3x^2)}{(4x^2-4x+1)(4x^2-1)}$.

Построить эскизы графиков следующих алгебраических функций:

123. $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$.

124. $y=\sqrt[3]{(x+3)^5(x-2)^2(x+1)}$.

125. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

126. $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^2(x-3)^{-\frac{2}{3}}$.

127. $y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}$.

128. $y=x^{2/3}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$.

129. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)}}{\sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)^3}\cdot\sqrt{x+10}}$.

130. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^7(x-2)^2(x+1)}}{\sqrt{(x+2)^2(x+5)}}$.

Построить эскизы графиков следующих функций:

131. $y=|x|-x$.

132. $y=|x|-(\sqrt{x})^2$.

133. $y=|x|-\sqrt{x^2}$.

134. $y=||x|-1|$.

135. $y=||2x-1|-2|$.

136. $y=|x|-|x-1|$.

137. $y=|x|+|x+1|$.

138. $y=|x|-|x+1|-|x+2|$.

139. $y=x^2-|x|$.

140. $y=|x^2-1|-x^2$.

141. $y=x^2-3|x|+1$.

142. $y=|x^2+x|-x+1$.

143. $y=|x^2+3x|+2x-8$.

144. $y=(|x|-1)(x+1)$.

145. $y=\left|\dfrac{2x-1}{3x+2}\right|$.

146. $y=\dfrac{|1-3x|}{|2x+1|}$.

147. $y=\left|\dfrac{|x|-1}{x}\right|$.

148. $y=\dfrac{|2x+3|}{|x|-1}$.

149. $y=\operatorname{sign}\cos x$.

150. $y=x+\operatorname{sign}\sin x$.

151. $y=\dfrac{x^2 \operatorname{sign} \cos \pi x}{1+x^2}$.

152. $y=\sqrt[3]{x^2 \operatorname{sign} \cos \pi x}$.

153. $y=\operatorname{sign} \sin \pi x+\operatorname{sign} \cos \pi x$.

154. $y=\operatorname{sign}(\sin \pi x+\cos \pi x)$.

Вычислить:

155. $\cos(\arcsin 1)$.

156. $\sin(\arccos 0{,}8)$.

157. $\sin\left(2 \arccos \dfrac{1}{4}\right)$.

158. $\operatorname{tg}\left(\arcsin \dfrac{2}{3}\right)$.

159. $\cos\left(\arcsin \dfrac{3}{5}-\arccos \dfrac{5}{13}\right)$.

160. $\sin\left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{3}\right)$.

161. $\sin\left(\arcsin \dfrac{1}{3}+\arcsin \dfrac{1}{4}\right)$.

162. $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

163. $\arcsin(\sin 11)$.

164. $\arccos(\cos 7)$.

165. $\arcsin(\cos 8)$.

166. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 25)$.

167. $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 4)$.

168. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

Доказать, что:

169. $\arcsin \dfrac{4}{5}=\arccos \dfrac{3}{5}=\operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}=\operatorname{arcctg} \dfrac{3}{4}$.

170. $\arccos\left(-\dfrac{9}{41}\right)=\pi-\arcsin \dfrac{40}{41}$.

171. $\arcsin\left(-\dfrac{7}{25}\right)=-\operatorname{arctg} \dfrac{7}{24}$.

172. $2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{4}+\operatorname{arctg} \dfrac{7}{23}=\dfrac{\pi}{4}$.

173. $\pi-\arcsin 0{,}9=2 \operatorname{arctg} 4$.

174. $\operatorname{arctg} \dfrac{2}{3}+\operatorname{arctg} \dfrac{1}{5}=\dfrac{\pi}{4}$.

175. $\cos(2 \arccos x)=2x^2-1, \quad |x| \leqslant 1$.

176. $\sin(3 \arcsin x)=3x-4x^3, \quad |x| \leqslant 1$.

177. $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2|\operatorname{arctg} x|, \quad |x|<\infty$.

178. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{x}, \quad 0<|x|<\infty$.

179. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}\operatorname{arcctg} x, & x>0,\\ \operatorname{arcctg} x-\pi, & x<0.\end{cases}$

180. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4}, & x<1,\\ \operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{4}, & x>1.\end{cases}$

Построить эскизы графиков следующих обратных тригонометрических функций:

181. $y=\arcsin(2x+1)$.

182. $y=\arccos(3x-2)$.

183. $y=\operatorname{arctg}(2-3x)$.

184. $y=\operatorname{arcctg}(1-2x)$.

185. $y=\arcsin\left(\frac{1-5x}{4}\right)$.

186. $y=\arccos\left(\frac{1+3x}{7}\right)$.

187. $y=\arccos\left(\frac{1-|x|}{2}\right)$.

188. $y=\arcsin\left(\frac{2+3|x|}{4}\right)$.

189. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+|x|}{4}\right)$.

190. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{2|x|-3}{5}\right)$.

191. $y=\arcsin\frac{1}{x+2}$.

192. $y=\arccos\frac{2}{x-3}$.

193. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

194. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

195. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-3}$.

196. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x+1}{|x|-2}$.

197. $y=\operatorname{arctg}\frac{|1-x|}{\sqrt{3}\,x+2}$.

198. $y=\arcsin\frac{1+x}{1-x}$.

199. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg}\left||x|-1\right|}$.

200. $y=\frac{1}{\arcsin\left|\frac{1-|x|}{3}\right|}$.

201. $y=\arcsin(\sin x)$.

202. $x=\arcsin\cos x$.

203. $y=\arccos(\cos x)$.

204. $y=\arccos(\sin x)$.

205. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

206. $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$.

207. $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.

208. $y=\arccos(\operatorname{ctg} x)$.

209. $y=\sin\arcsin 2x$.

210. $y=\cos\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$.

211. $y=\sin(\operatorname{arctg} x)$.

212. $y=\sin(\operatorname{arcctg} x)$.

213. $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

214. $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

215. $y = \operatorname{tg}(\arccos x)$.

216. $y = \operatorname{ctg}(\arcsin x)$.

217. $y = \arccos \sin x^3$.

218. $y = \arcsin \cos \sqrt{x}$.

219. $y = \cos \arcsin \frac{1}{x}$.

220. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2x+1))$.

221. $y = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

222. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

223. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x^2+1}{x}$.

224. $y = \operatorname{arctg} \frac{2^x+1}{2^x-1}$.

225. $y = \arcsin \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3}$.

226. $y = \arccos \frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$.

227. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$.

228. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x^4-4x^3+2x^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

229. $y = \operatorname{arctg} \frac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^3+1)(x-3)^5}$.

230. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

231. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

232. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)^2(x^2+1)}$.

Построить эскизы графиков следующих функций:

233. $y = (\sqrt{x})^2 - |x|$.

234. $y = \sqrt{2}^{\log_2 x}$.

235. $y = \log_{1/2}(x-1)^2$.

236. $y = 2^{|\log_2 x|}$.

237. $y = -\frac{1}{2} \sin x \cos x$.

238. $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$.

239. $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

240. $y = \sqrt{1-\cos^2 x}$.

241. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

242. $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

243. $y = 2^{\log_4 \sin x}$

244. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$.

245. $y = x^{\log_x (x^2-1)}$

246. $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$.

247. $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$.

248. $y=\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x}$.

249. $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg}|x|$.

250. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

251. $y=(\sqrt{\sin 3x})^{22}$.

252. $y=(\sqrt{\cos x})^{18}$.

253. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

254. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

255. $y=\dfrac{1+|\cos x|}{\sin |x|}$.

256. $y=|x^3-x^5+2|$.

257. $y=|x^2-x^4|+4$.

258. $y=(|x|+1)(x-3)x^2$.

259. $y=\sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)}$.

260. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

261. $y=\sqrt[3]{x^6(2+x)^4(1-x)}$.

262. $y=\dfrac{1}{|1-|x|-2|}$.

263. $y=\sqrt[5]{2x^2(x-3)^3(x^2-2x)^4}$.

264. $y=\dfrac{|2|x-1|-3|}{|x-1|+2}$.

265. $y=\dfrac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}$.

266. $y=\dfrac{||x-1|-2|}{||x|-1|-2}$.

267. $y=\left|\sqrt[3]{x^2-x}\right|+1$.

268. $y=\left|\sqrt[3]{x^2+x}-2\right|$.

269. $y=\dfrac{|x+2|(x-1)^2}{x^2+1}$.

270. $y=\dfrac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^4+2)(x-3)}$.

271. $y=\dfrac{(x^3-1)(x-2)}{(|x|-1)^2(x-4)}$.

272. $y=\dfrac{1}{|2^x-1|}$.

273. $y=\dfrac{1}{x^2-4|x|+3}$.

274. $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

275. $y=\dfrac{1}{\log_2(x-3)-1}$.

276. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-2|x|}-1}$.

277. $y=\log_{1/2}|x^2-x|$.

278. $y=\log_{1/\pi}\sin 2x$.

279. $y=\log_{\sqrt{\pi}}\dfrac{|x|}{x+2}$.

280. $y=\log_{1/7}\cos\dfrac{3\pi x-\pi}{5}$.

281. $y=\log_2\dfrac{|x+2|x}{2-x}$.

282. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

283. $y=2^{|\sin x|+|\cos x|}$.

284. $y=2^{\frac{|1-2x|}{3x+4}}$.

285. $y=\log_3\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

286. $y=\log_5|1-2^{-x}|$.

287. $y=\cos^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

288. $y=\sin^4\left(5x-\frac{10\pi}{3}\right)$.

289. $y=2^{\sec\left(\frac{2\pi x-3\pi}{8}\right)}$.

290. $y=e^{-x^2+x}$.

291. $y=\sin\frac{1}{x}$.

292. $y=\cos\frac{1}{x}$.

293. $y=x^4-(1-x)^4$.

294. $y=x^2+\frac{x^2}{|x|}+\frac{(1-x)^2}{|1-x|}$.

295. $y=\frac{(x+1)^3}{x+1}-\frac{|x^3|}{x}$.

296. $y=\frac{x^2+x}{|x|}+\frac{x^2-x}{|1-x|}+\frac{x^2-1}{|1+x|}$.

297. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)}-1$.

298. $y=3^{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

299. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x-\cos^3 x}}$.

300. $y=2^{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$.

301. $y=x+\sin x$.

302. $y=x-\sin x$.

303. $y=x+2^x$.

304. $y=x+\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$.

305. $y=x^2\sin x$.

306. $y=x\sin x$.

307. $y=e^x\sin\pi x$.

308. $y=e^{-x}\cos\pi x$.

309. $y=e^{-x^2}\sin 2\pi x$.

310. $y=\frac{\cos\pi x}{1+x^2}$.

311. $y=(x^2-1)\cos\frac{\pi}{x}$.

312. $y=(x^2-1)\sin\frac{\pi}{x}$.

313. $y=\operatorname{arctg}\lg x$.

314. $y=\arccos\frac{1}{\lg x}$.

315. $y=\operatorname{arcctg}\lg\frac{x+1}{x-1}$.

316. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^3-8}{x^2-9}$.

317. $y=\arccos\frac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

318. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos x}$.

319. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

320. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x^5-1}{x^6-1}$.

321. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$.

322. $y = \dfrac{x}{2^{\frac{x}{1-x}} - 1}$.

323. $y = \dfrac{x+2}{2^{\frac{x-1}{x+1}} - 1}$.

324. $y = (\sin 7)^{\frac{1}{\cos(2|x|-1)}}$.

325. $y = x\left(2 - \sin\dfrac{1}{x}\right)$.

326. $y = x^2\left(2 + \sin^2\dfrac{1}{x}\right)$.

327. $y = x \arcsin\dfrac{1}{x}$.

328. $y = \dfrac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}$.

329. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1} - \sqrt{|x^4-4|}}$.

330. $y = -\sqrt[3]{x^2} + x$.

331. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2x + 1$.

332. $y = x + \sqrt[5]{(x-1)^2}$.

333. $y = \sqrt[5]{(x-1)^4} - x$.

334. $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$.

335. $y \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

336. $y = \sqrt[4]{x^4} + \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

337. $y = \dfrac{x+2}{x-1} \cdot \sqrt{x}$.

338. $y = \dfrac{x-2}{|x+3|} \cdot \sqrt[3]{x+2}$.

339. $y = \sqrt{1-x^2} \cos\dfrac{\pi}{x}$.

340. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-4}$.

341. $y = \sqrt[5]{(x+2)^2}\,(x-1)$.

342. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x^2-x-6}$.

343. $y = \sqrt[3]{x^2-x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

344. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + 6x - 10$.

345. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

346. $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$.

347. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x\,|\sin x|}$.

348. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

349. $y = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{|x^2-4|}}$.

350. $y = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-5x-4}$.

351. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$.

352. $y=\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)^2(x-2)}}{x^2-7x+12}$.

353. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$.

354. $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-4x})$.

355. $x=\arcsin\left(x-\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}\right)$.

356. $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{2x-1}$.

357. $y=e^{-100(1-x)^2}+e^{-100(1+x)^2}$.

358. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

359. $y=(x-1)\sqrt{(x+1)^3(2-x)}\cdot(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{|x|}+1)$.

360. $y=\dfrac{e^x(x^2-4x+3)}{x-5}$.

361. $y=(\sqrt{9-x^2}-x-3)\,e^x\cdot x(x-1)$.

362. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{(x-4)^2}}{x-2}$.

363. $y=2^{\frac{x}{x-1}}(|x|-2-||x|-2|)$.

364. $y=2^{\frac{x}{x-1}}[\operatorname{sgn}(4-x^2)+1]$.

365. $y=x\sqrt{|x^2-1|}-\sqrt{x^2+1}+1$.

366. $y=\arcsin(x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x^4-2|})$.

Построить эскизы графиков следующих кривых, заданных параметрически:

367. $x(t)=\dfrac{t}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$.

368. $x(t)=\dfrac{4-t^2}{1+t^3},\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3}$.

369. $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3}$.

370. $x(t)=t^2,\ y(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t}{t+2}$.

371. $x(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t+2)},\ y(t)=\dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)}$.

372. $x(t)=\dfrac{t^2+1}{4(t-1)}$, $y(t)=\dfrac{t}{t+1}$.

373. $x(t)=\dfrac{t}{1-t^2}$, $y(t)=\dfrac{t(1-4t^2)}{1-t^2}$.

374. $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$, $y(t)=\dfrac{t^2+1}{t+2}$.

375. $x(t)=\arcsin(\sin t)$, $y(t)=\arccos(\cos t)$.

376. $x(t)=\operatorname{arctg} t$, $y(t)=t^3-t$.

377. $x(t)=(\ln t)\sin t$, $y(t)=\cos t$.

378. $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$.

379. $x(t)=\sin 2t$, $y(t)=\sin 4t$.

380. $x(t)=\sin 4t$, $y(t)=\cos t$.

381. $x(t)=\cos 4t$, $y(t)=\cos 3t$.

Построить эскизы графиков кривых, заданных в полярной системе координат уравнениями:

382. $r=2\varphi$. 383. $r=\dfrac{a}{\varphi}$. 384. $r=e^{2\varphi}$.

385. $r=\sin\varphi$. 386. $r=\cos\varphi$. 387. $r=\cos 2\varphi$.

388. $r=\cos 5\varphi$. 389. $r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. 390. $r=\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

391. $r=2$. 392. $\varphi=\pi/3$. 393. $r=\dfrac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

394. $r^2=a^2\cos 2\varphi$. 395. $r=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$. 396. $r=1+2\cos\varphi$.

Преобразовать к полярным координатам уравнение линии (системы совмещены):

397. $x^2+y^2=x$. 398. $x^2+y^2=y$. 399. $x^2+y^2=5$.

400. $y=2x$. 401. $y=4$. 402. $x=3$.

403. $x+y=2$. 404. $(x^2+y^2)^2=xy$. 405. $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

406. $x^4+y^4=x^2+y^2$. 407. $x^2+y^2=(x^2-y^2)^2$.

408. $xy^2+yx^2=(x^2+y^2)^2$.

Преобразовать к декартовым координатам уравнение линии (системы совмещены):

409. $r\cos\varphi=3$. 410. $r^2\sin 2\varphi=2$. 411. $r\sin\varphi=2$.

412. $r=2\cos\varphi$. 413. $r=1+\cos\varphi$. 414. $r=\cos^2\varphi$.

415. $r=\sqrt{2}$. 416. $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 417. $r=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

Нарисовать эскизы графиков следующих кривых:

418. $|y|=x-1$. 419. $|y|=1-|x|$. 420. $|x|+|y|=1$.

421. $[x]+[y]=1$. 422. $|x+y|=-x+|y|$.

423. $||x|-|y||=1$.

424. $||x|+||y|-3|-3|=1$.

425. $|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|x|-x)$.

426. $|y+|y||=||x|-x|$. 427. $x^2+y^2=x+2$.

428. $x^2+y^2=x+y$. 429. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

430. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 431. $x^3+y^3=1$. 432. $x^4+y^4=1$.

433. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. 434. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

435. $y^2=x-x^3$. 436. $x=y-y^3$. 437. $x^2=y-y^3$.

438. $y^2=x+x^3-2x^2$. 439. $x^2y^2+y=1$.

440. $x^4-y^4=x^2-2y^2$. 441. $y^3-x^2y+x^5=0$.

442. $x^5+y^5=xy^2$. 443. $x^2=y^4+y^6$. 444. $2xy^2-3x^2+y^4=0$.

445. $x^2-xy+y^2=1$. 446. $4y^2=4x^2y+x^5$.

447. $x^3+y^3=3x^2$. 448. $y^3-2y^2x-x^2=0$.

449. $x^4+y^4=x^8+y^8$. 450. $y^5+x^4=xy^2$.

451. $\max\{(144-25x^2-9y^2-54y),\ (\min(y,\ 25-5y-x^2))\}=0$.

452. $(x^2+y^2-25)(16x^2+y^2-4)(x^2+16y^2-96y+140)\times$
$\times(4x^2-16x\operatorname{sign}x+4y^2-16y+31)=0$.

453. $\left\{(42-38\operatorname{sign}x)\,y+x\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{10}\right)^2}-1\right)(\sqrt{13-4x}+1)\right\}\times$
$\times\{9\sqrt{5}\,y-x(x-1)\sqrt{x+2}\}\cdot\{4x^2+16y^2+56x-64y+$
$+259\}=0$.

454. $\{(4y+x^2)^2+\operatorname{sign}(x^2+2x)+1\}\cdot\{(x^2+y^2)^{5/2}-$
$-4x(x^2-y^2)\}=0.$

455. $\{x^2-\operatorname{sign}(3y-y^2)+1\}\cdot\{(x^2+y^2)^{5/2}-2(|y|+y)(x^2+y^2)\}\times$
$\times\{(x^2+y^2-2y+1)^{5/2}-2(|y-1|+y-1)(x^2-y^2+2y-1)\}\times$
$\times\{(x^2+y^2-6y+9)^2-2|xy-3x|\}=0.$

456. $\{x^2-\operatorname{sign}(6y-y^2)\}\{x^2+(y-6)^2\}\times$
$\times\{(y-5)^2+(x-2\operatorname{sign}x)^2-1\}\times$
$\times\{(y-6)^2+(x-\operatorname{sign}x)^2-2\operatorname{sign}(y-6)+1\}\times$
$\times\{(x^2+y^2)^2-16y|x|\}\cdot\{\min[(x^4-3y^4),\ (9y+18-$
$-|5x^2-2|)]\}=0.$

457. $\{\min[(x^2+y^2-2x),\ (x^2+16y^2-1),\ y]\}\times$
$\times\{8y+x\sqrt{|x+1|(2+x-x^2)}\}\cdot\{2x^2+2y^2-2x-2y+1\}=0.$

458. $\left\{27y-x^2(x+2)^2(2-x)\left(\sqrt{9-x^2}+\frac{x+3}{40}\right)\right\}\times$
$\times\left\{\max\left[\left(y-\sqrt{x+3}\,\sqrt[3]{x-2}\,(e^{-100(x+1)^2}+6e^{-100(x-2)^2})\right),\right.\right.$
$\left.\left.\operatorname{sign}(x-2)+\frac{1}{2}\right]\right\}\cdot\{9x^2+48x+9y^2+64\}=0.$

459. $(\max\{(2-|x|-2|2y-x+3|),\ (\min[(x^2+y^2-4x),$
$(3x^2-y^2+9-4x\sqrt{9-y^2}),\ (4y^2+x+1-5y\sqrt{1+x})])\})\times$
$\times(16x^2-32x+16y^2-32y+31)=0.$

460. $[(x+4)^2+1-\operatorname{sign}(1-y^2)]\cdot[(x+3)^2+y^2+$
$+2\operatorname{sign}(x+3)+1][(2x+3)^2+y^2-1]\times$
$\times[(x^2-x)^2-\operatorname{sign}(1-y^2)+1]\cdot[y^2+\operatorname{sign}(x^2-x)+1]\times$
$\times[(x-3)^2+y^2+2\operatorname{sign}(x-3)+1]\cdot[(x-2)^2+(y-1)^2+$
$+\operatorname{sign}(2-x)+\operatorname{sign}(y-1)+1]\cdot[(x^2-9x+20)^2-$
$-\operatorname{sign}(1-y^2)+1]\cdot\left[(y+|x-4|+|x-5|)^2-\right.$
$\left.-\operatorname{sign}\left[(x-4)\left(\frac{21}{4}-x\right)\right]+1\right]=0.$

Глава II
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть a — точка расширенной числовой прямой, т. е. число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Обозначим через $U(a)$ окрестность точки a и через $\dot{U}(a)$ – проколотую окрестность: $\dot{U}(a)=U(a)\setminus\{a\}$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E, для которого точка a есть предельная точка (точка сгущения).

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x\to a$ (обозначение: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$), если для любого положительного числа $\varepsilon(\forall\varepsilon>0)$ существует окрестность $U(a)$ точки $a(\exists U(a))$ такая, что для любого x из проколотой окрестности, принадлежащего $E(\forall x\in\dot{U}(a)\cap E)$, выполнено неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon \ (\forall\varepsilon>0 \ \exists U(a): \forall x\in\dot{U}(a)\cap E \ |f(x)-A|<\varepsilon).$$

В таком случае иногда говорят: функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет предел, равный A ($f(x)$ стремится к A при $x\to a$).

Если a — собственная точка числовой прямой (т. е. число), то окрестностью $U(a)$ является интервал с центром в точке a. Тогда определение предела записывается в таком виде: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если для любого положительного числа $\varepsilon(\forall\varepsilon>0)$ существует такое положительное число $\delta(\exists\delta=\delta(\varepsilon))$, что для любого $x(\forall x)$ такого, что $0<|x-a|<\delta$, $x\in E$, выполнено неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Проколотой окрестностью несобственной точки $(+\infty)$ является любой луч $x>\alpha$; проколотой окрестностью несобственной точки $(-\infty)$ — любой луч $x<\alpha$; проколотой окрестностью несобственной точки (∞) — объединение двух лучей: $\{x>\alpha\}\cup\{x<-\alpha\}$. Тогда определение предела записывается (с использованием символов) в таком виде:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \ (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A; \ \lim_{x\to\infty} f(x)=A),$$

если

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists C=C(\varepsilon)>0: \forall x, x>C, \ x\in E \ (x<-C, \ x\in E;$$

$$|x|>C, \ x\in E) \ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Внимание! В определении $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ нет никаких условий на значение $f(a)$; более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Поэтому ни неопределенность в точке a, ни значение $f(a)$, если $a\in E$, не влияют на существование и величину $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример: Пусть $f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq 5, \\ 0, & x=5. \end{cases}$

Так как разность $f(x)-1=0$ для всех значений x, кроме $x=5$ (т. е. в любой окрестности $\dot{U}(5)$), то из определения предела следует, что $\lim\limits_{x=5} f(x)=1$.

В частности, если две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой проколотой окрестности точки a, то либо обе они не имеют предела при $x\to a$, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Пусть a — собственная точка числовой прямой. Если в определении предела функции $f(x)$ заменить множество E на множество $E_+=E\cap\{x>a\}$ $(E_-=E\cap\{x<a\})$, то получим определение односторонних пределов в точке $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to a-} f(x))$. В терминах окрестностей это значит, что берется правая (левая) полуокрестность точки a, т. е. интервал вида $(a, a+\delta)$, $\delta>0$, $((a-\delta, a)$, $\delta>0)$; в терминах неравенств это значит, что рассматриваются значения x, удовлетворяющие неравенству

$$0<x-a<\delta,\ \delta>0\ (0<a-x<\delta,\ \delta>0).$$

Для простоты изложения в дальнейшем считаем, что $f(x)$ определена всюду в некоторой, быть может проколотой, окрестности точки a, тем более что при вычислении пределов имеет место именно это.

Пример 2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x=1$.

Решение. Оценим разность $|1-\sin x|$ (см. определение). Имеем $1-\sin x=2\cos(\pi/4+x/2)\sin(\pi/4-x/2)$. Так как для любого x: $|\cos(\pi/4+x/2)|\leqslant 1$ и $|\sin(\pi/4-x/2)|\leqslant|\pi/4-x/2|$, то $|1-\sin x|\leqslant|\pi/2-x|$. Следовательно, если $\delta=\varepsilon$, то из неравенства $0<|x-\pi/2|<\delta$ следует неравенство $|1-\sin x|<\varepsilon$. Таким образом, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\varepsilon$, $\quad \forall x: 0<|x-\pi/2|<\delta => |1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x=1$.

Следует обратить внимание на то, что мы не решаем неравенства $|1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. не находим множества всех тех и только тех значений x, для которых оно верно. Нас интересует только определение такой окрестности точки $a=\pi/2$, в которой это неравенство выполняется. Выполняется оно вне этой окрестности или нет, нас не интересует. В такой ситуации бывает удобно заранее выделить некоторую окрестность точки a, в которой и проводить дальнейшие оценки. Необходимо только следить за тем, чтобы окрестность, найденная в результате этих оценок, не оказалась больше, чем выделенная заранее.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to-3} x^2=9$.

Решение. Необходимо оценить разность $|x^2-9|$. Имеем $|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|$. Так как на всей числовой прямой множитель $|x-3|$ не ограничен, то оценку произведения сделать проще, если выделить некоторую, например, 1-окрестность точки $a=-3$ — интервал $(-4, -2)$. Для всех $x\in(-4, -2)$ имеем $|x-3|<7$, следовательно, $|x^2-9|<7|x+3|$. Так как δ-окрестность точки $a=-3: (-3-\delta, -3+\delta)$ не должна выходить за пределы 1-окрестности, то берем $\delta=\min(1, \varepsilon/7)$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0<|x+3|<\delta$ следует неравенство $|x^2-9|<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to-3} x^2=9$.

Пример 4. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0.$

Решение. Так же, как в предыдущем примере, выделим удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$ (луч $x>\alpha$): именно луч $x>200$. Для $x>200$ имеем $x^2-100x+3000>$ $>x(x-100)>\dfrac{x^2}{2}$, следовательно,

$$\left|\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right|<\frac{x}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $\alpha=\max\{200, 2/\varepsilon\}$, то из неравенства $x>\alpha$ следует

$$\left|\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right|<\varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0.$$

Пример 5. Покажем, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ не имеет предела при $x\to0$.

Решение. Запишем с использованием символов утверждение «число A не является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ (a — собственная точка числовой прямой)»:

$$\exists\varepsilon_0>0:\forall\delta>0\ \exists x_\delta=x(\delta):0<|x_\delta-a|<\delta,\ x_\delta\in E,$$
$$|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

Если $A=0$, то возьмем $\varepsilon_0=1/2$ и $x_k=1/(2\pi k+\pi/2)$, тогда $\forall\delta\exists k\in$ $\in N:0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-0|=|f(x_k)|=1>\varepsilon_0$, таким образом, нуль не есть предел $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to0$. Если же $A\neq0$, то возьмем $\varepsilon_0=|A|/2$ и $x_k=1/2\pi_k$. Тогда $\forall\delta\exists k\in N:0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-A|=|A|>\varepsilon_0$, таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to0$.

Из приведенных примеров видно, что, пользуясь определением предела, мы проверяем, является ли данное число пределом данной функции или нет, но не имеем конструктивного метода вычисления предела данной функции.

Непосредственно из определения предела можно получить утверждения: если $y(x)$ есть постоянная функция, т. е. $y(x)\equiv C$, то $\lim\limits_{x\to a} y(x)=C$; если $y(x)\equiv x$ и a — собственная точка числовой