FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 6 : — Semantik, Äquivalenz, Normalformen

Präsenzaufgabe 6.1

1. Erstellen Sie zu der folgenden aussagenlogischen Formel eine Wahrheitstafel.

$$F = ((A \Leftrightarrow \neg B) \wedge \neg((C \Rightarrow B) \vee A))$$

Lösung

	A	B	C	$\neg B$	$(A \Leftrightarrow \neg B)$	$(C \Rightarrow B)$	$((C \Rightarrow B) \vee A)$	$\neg((C \Rightarrow B) \vee A)$	F
$\mathcal{A}_0$	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$\mathcal{A}_1$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	0	1	1	1	0	0
$\mathcal{A}_3$	0	1	1	0	1	1	1	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	0	0	1	1	1	1	0	0
$\mathcal{A}_5$	1	0	1	1	1	0	1	0	0
$\mathcal{A}_6$	1	1	0	0	0	1	1	0	0
$\mathcal{A}_7$	1	1	1	0	0	1	1	0	0

2. Geben Sie Funktionen $\mathsf{zeilen}, \mathsf{spalten} : \mathcal{L}_{AL} \to I\!N$ zur Bestimmung der Anzahl der erforderlichen Zeilen und Spalten einer Wahrheitstafel für eine Formel an.

   Lösung $\mathsf{zeilen}(F) = 2^{(|\mathsf{Tf}(F) \cap \mathcal{A}s_{AL}|)}$ $\mathsf{spalten}(F) = |\mathsf{Tf}(F)|$

3. Überführen Sie unter Angabe des Übersetzungsschlüssels die folgenden natürlich-sprachlichen Sätze in aussagenlogische Formeln. Bei mehreren möglichen Lesarten geben Sie bitte alle an. Versuchen Sie bei der Übersetzung die logische Struktur in der Formel möglichst fein zu repräsentieren. (Bsp: Der Satz "Es ist nicht der Fall, dass Peter ein Mann ist", sollte z.B. nicht durch A formalisiert werden, da die Negation nicht sichtbar wäre, sondern durch $\neg A$.)

   (a) (Immer) wenn die Sonne scheint, ist Sabine gut gelaunt.
   (b) Sabine geht nur bei schönem Wetter Eis-Essen.
   (c) Peter steht auf, frühstückt und fährt zur Arbeit.
   (d) Sabine und Peter tragen einen Koffer.
   (e) Sabine liebt und hasst Spargel.

   Lösung

   (a) A: Die Sonne scheint. B: Sabine ist gut gelaunt. $(A \Rightarrow B)$
   (b) A: Sabine geht Eis-Essen. B: Es ist schönes Wetter. $(A \Rightarrow B)$ (Ja, wirklich so herum.)
   (c) A: Peter steht auf. B: Peter frühstückt. C: Peter fährt zur Arbeit. $(A \wedge (B \wedge C))$ (Zeitliche Information ist nicht enthalten.)

(d) i. A: Sabine trägt einen Koffer. B Peter trägt einen Koffer. $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$

ii. A: Sabine und Peter tragen gemeinsam einen Koffer. A

(e) A: Sabine liebt Spargel. $(\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{A})$ (Naja, aber einen Versuch war es doch wert? Versuchen Sie doch mal: Diese Kontradiktion ist erfüllbar.)

Präsenzaufgabe 6.2

1. Welche der drei folgenden Formeln ist allgemeingültig, kontingent, erfüllbar, unerfüllbar bzw. falsifizierbar. Welche ist eine Tautologie oder eine Kontradiktion?

   (a) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{A})$ (b) $(\mathsf{A} \Rightarrow \neg\mathsf{A})$ (c) $(\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg\mathsf{A})$

   Lösung

   (a) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{A})$ erfüllbar, allgemeingültig, Tautologie

   (b) $(\mathsf{A} \Rightarrow \neg\mathsf{A})$ erfüllbar, falsifizierbar, kontingent

   (c) $(\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg\mathsf{A})$ falsifizierbar, unerfüllbar, Kontradiktion

	A	$\neg\mathsf{A}$	$(\mathsf{A} \Rightarrow \neg\mathsf{A})$	$(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{A})$	$(\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg\mathsf{A})$
$\mathcal{A}_0$	0	1	1	1	0
$\mathcal{A}_1$	1	0	0	1	0

2. Bilden Sie zu **einer** der folgenden Formeln eine DNF **und** eine KNF durch Äquivalenzumformungen. Geben Sie bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden.

   (a) $((\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \wedge (\neg\mathsf{C} \Rightarrow \neg\mathsf{D}))$

   (b) $(((\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \vee \neg\mathsf{C}) \Rightarrow (\neg\mathsf{C} \wedge \neg(\mathsf{A} \Rightarrow \neg\mathsf{B})))$

   Lösung Wir verwenden hier die Klammerersparnisregeln (äußerste Klammern weglassen, keine interne Klammerung bei mehrfachen Konjunktionen und Disjunktionen, da damit die Lesbarkeit verbessert wird.) Rechts ist jeweils vermerkt, wie wir zur nächsten Zeile kommen. Anwendungen des Kommutativgesetzes sind nicht explizit angegeben.

   (a)
$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \wedge (\neg\mathsf{C} \Rightarrow \neg\mathsf{D}) & \text{Elim. von } \Rightarrow \\
\equiv (\neg\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \wedge (\neg\neg\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D}) & \text{Dopp. Negation} \\
\equiv (\neg\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D}) & \text{KNF} \\
 & \text{Distributivität} \\
\equiv (\neg\mathsf{A} \wedge (\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D})) \vee (\mathsf{B} \wedge (\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D})) & \text{Distributivität} \\
\equiv (\neg\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}) \vee (\neg\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{D}) \vee (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C}) \vee (\mathsf{B} \wedge \neg\mathsf{D}) & \text{DNF}
\end{array}
$$

(b) $((A \Rightarrow B) \vee \neg C) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg(A \Rightarrow \neg B))$ Elim. von $\Rightarrow$

$\equiv \neg((\neg A \vee B) \vee \neg C) \vee (\neg C \wedge \neg(\neg A \vee \neg B))$ de Morgan

$\equiv (\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg\neg C) \vee (\neg C \wedge \neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ de Morgan

$\equiv (\neg\neg A \wedge \neg B \wedge \neg\neg C) \vee (\neg C \wedge \neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ Dopp. Negation

$\equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg C \wedge A \wedge B)$ DNF

Distributivität

$\equiv A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B))$ Distributivität

$\equiv A \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge B)) \wedge (C \vee (\neg C \wedge B))$ Distributivität

$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (C \vee \neg C) \wedge (C \vee B)$ KNF

Tautologieregel

$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee B)$ KNF

Alternativer Weg:

$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg C \wedge A \wedge B)$ DNF

Distributivität

$\equiv (A \vee (\neg C \wedge A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge A \wedge B)) \wedge (C \vee (\neg C \wedge A \wedge B))$ Absorption

$\equiv A \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge A \wedge B)) \wedge (C \vee (\neg C \wedge A \wedge B))$ Distributivität

$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (C \vee \neg C) \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee B)$ KNF

Tautologieregel

$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (C \vee A) \wedge (C \vee B)$ KNF

Absorption

$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee B)$ KNF