# FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 10 : — Prädikatenlogik: Normalformen und Unifikation

Es seien auf diesem Übungsblatt $\mathsf{a}, \mathsf{b}$ Konstanten, $\mathsf{f}$ ein einstelliges Funktionssymbol, $\mathsf{g}, \mathsf{h}$ zweistellige Funktionssymbole, $\mathsf{R}$ ein einstelliges Prädikatensymbol, $\mathsf{P}, \mathsf{Q}$ zweistellige Prädikatensymbole, $\mathsf{S}$ ein dreistelliges Prädikatensymbol und $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y}_2$ Variablen.

**Präsenzaufgabe 10.1**

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 10 Minuten abgeschlossen sein.

Es sei $\sigma = [\mathsf{x}/\mathsf{h}(\mathsf{a}, \mathsf{y})]$ eine (Variablen-)Substitution und $\mathsf{F} = \forall \mathsf{z}\ (\mathsf{Q}(\mathsf{z}, \mathsf{x}) \Rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{R}(\mathsf{x}))$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathsf{F})$ $(= \mathsf{F}_\sigma)$.

**Präsenzaufgabe 10.2**

1. Geben Sie zu der Formel $\mathsf{F}$ eine äquivalente, bereinigte Formel $\mathsf{F}_1$ an. Welche Variablen müssen hierzu warum umbenannt werden? Welche Umbenennungen führen zu einer äquivalenten Formel (warum)? Welche Umbenennungen führen nicht zu einer äquivalenten Formel?

$$\mathsf{F} = \forall \mathsf{x}\ \exists \mathsf{y}\ (\mathsf{S}(\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{z}) \vee \neg \exists \mathsf{y}\ \neg(\forall \mathsf{z}\ \mathsf{R}(\mathsf{z}) \Rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{y}, \mathsf{x})))$$

2. Geben Sie zu $\mathsf{F}_1$ eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel $\mathsf{F}_2$ an.

3. Formen Sie $\mathsf{F}_2$ nun zu einer äquivalenten geschlossenen, bereinigten Pränexform (BPF) $\mathsf{F}_3$ um. Benennen Sie bei jedem Umformungsschritt die entsprechende Regel.

4. Geben Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform $\mathsf{F}_4$ zu $\mathsf{F}_3$ an. Führen Sie die neu eingeführten Skolemkonstanten und -funktionen samt ihrer Stelligkeit und den jeweils für die Variable substituierten Term auf.

**Präsenzaufgabe 10.3** Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf **eine** der folgenden Literalmengen $\mathbf{L_i}$ an und bilden Sie damit, wenn möglich, einen Unifikator $\sigma$, so dass $|\ \mathbf{L_i}\sigma\ | = 1$. Sind die Literale nicht unifizierbar, so erläutern Sie das Problem.

1. $\mathbf{L_1} = \{\ \mathsf{S}(\mathsf{h}(\mathsf{x}, \mathsf{b}), \mathsf{a}, \mathsf{z})\ ,\ \mathsf{S}(\mathsf{z}, \mathsf{x}, \mathsf{h}(\mathsf{y}, \mathsf{b}))\ \}$

2. $\mathbf{L_2} = \{\ \mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x}))\ ,\ \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{y})\ \}$

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

**Übungsaufgabe 10.4**

1. Bilden Sie zu folgender Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform und stellen Sie diese auch in der Mengendarstellung dar. Gehen Sie vor wie in der Präsenzaufgabe 10.2 und geben Sie bei jedem Schritt an, welche Umformung Sie vornehmen und ob das Resultat äquivalent oder erfüllbarkeitsäquivalenz zu der Formel ist, auf die die Umformung angewendet wurde.

   $G = \exists x\ (Q(x,y) \lor \forall y\ Q(y,x)) \Rightarrow \exists x\ \forall z\ Q(x, g(z,y))$

2. Gegeben seien die Klauselnormalformen $F$ und $F'$ mit den Mengendarstellungen $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{F}'$.

   $$\begin{array}{lcl} F & = & \forall x\ \forall y\ ((P(x,y) \lor Q(y,x)) \land (\neg P(x,f(y)) \lor Q(x,y))) \\ F' & = & \forall x_1\ \forall y_1\ \forall x_2\ \forall y_2\ ((P(x_1,y_1) \lor Q(y_1,x_1)) \land (\neg P(x_2,f(y_2)) \lor Q(x_2,y_2))) \\ \mathbf{F} & = & \{\{P(x,y), Q(y,x)\}, \{\neg P(x,f(y)), Q(x,y)\}\} \\ \mathbf{F}' & = & \{\{P(x_1,y_1), Q(y_1,x_1)\}, \{\neg P(x_2,f(y_2)), Q(x_2,y_2)\}\} \end{array}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $F$ und $F'$ äquivalent sind.

   (b) Erläutern Sie an diesem Beispiel, warum bei der Mengendarstellung von Klauselnormalformen das Vorkommen derselben Variable in verschiedenen Klauseln unerheblich ist.

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

**Übungsaufgabe 10.5** Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen $\mathbf{L_i}$ an und bilden Sie damit, wenn möglich, einen Unifikator $\sigma$, so dass $|\ \mathbf{L_i}\sigma\ | = 1$. Sind die Literale nicht unifizierbar, so erläutern Sie das Problem.

1. $\mathbf{L_3} = \{Q(x,a), Q(h(y,z),y), Q(h(f(u),f(v)),v)\}$

2. $\mathbf{L_4} = \{Q(z,f(z)), Q(y,w), Q(x,x)\}$

3. $\mathbf{L_5} = \{Q(f(y),h(w,z)), Q(v,h(u,a)), Q(f(x),x)\}$

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

**Übungsaufgabe 10.6** In dieser Aufgabe geht es um den Unterschied zwischen durch Allquantoren gebundene Variablen und freien Variablen, aber auch die Gemeinsamkeiten dieser Variablen.
Es sei $F$ eine prädikatenlogische Formel.

1. Beweisen Sie: $\forall x\ F \models F$ (anders gesagt: aus $\forall x\ F$ folgt $F$.)

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Formel $F$ an, so dass $F \not\models \forall x\ F$. (Anders gesagt: $\forall x\ F$ folgt nicht aus $F$). Dazu gehört auch, dass Sie zeigen, dass für dieses Beispiel die Aussage $F \not\models \forall x\ F$ richtig ist.

3. Beweisen Sie: Wenn $F$ allgemeingültig (= eine Tautologie) ist, dann ist auch $\forall x\ F$ allgemeingültig.

4. Beweisen Sie: Wenn $\forall x\ F$ allgemeingültig ist, dann ist auch $F$ allgemeingültig.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/teaching/vorlesungen/FGI1_SoSe12