FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 7 : — Folgerung und Deduktion

Präsenzaufgabe 7.1

1. Beweisen Sie **zwei** der folgenden Behauptungen.

   (a) $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \wedge \mathsf{D} \wedge \mathsf{E} \models \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \vee \mathsf{C}$

   (b) $\mathsf{A} \vee \mathsf{B} \vee \mathsf{C} \vee \mathsf{D} \not\models \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \wedge \mathsf{D}$

   (c) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow \mathsf{C} \models (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$

   Hinweis: Falls Sie Wahrheitstafeln benutzen, geben Sie an, wie Sie das Ergebnis ablesen. Nur die Wahrheitstafel reicht als Beweis nicht.

   Lösung In der Musterlösung zeigen wir, wie man die Aufgabe ohne Wahrheitstafel lösen kann.

   (a) Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung, die die linke Seite wahr macht. Insbesondere gilt dann unter anderem $\mathcal{A}(\mathsf{A}) = 1$, was bereits die Formel der rechten Seite wahr macht.

   (b) Die Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(\mathsf{A}) = 1$ und $A(\mathsf{B}) = 0$ (und sonst beliebig) macht die linke Formel wahr, die rechte hingegen falsch. Die Folgerbarkeitsbeziehung kann also nicht gelten.

   (c) Jede Belegung, die $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow \mathsf{C}$ wahr macht, macht $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$ falsch oder C wahr.

   Fall 1: Eine Belegung, die $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$ falsch macht, macht $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$ wahr.

   Fall 2: Eine Belegung, die C wahr macht, macht auch $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$ wahr und damit auch $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$ wahr.

   Zusammenfassung: Insgesamt macht also jede Belegung, die $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow \mathsf{C}$ wahr macht, auch $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$ wahr. Lt. Def. 5.1 folgt damit $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$ aus $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow \mathsf{C}$.

2. Beweisen Sie **Satz 5.10**: Sei $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}$ eine Formelmenge und $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ eine Formel. F folgt genau dann aus $\mathbf{M}$, wenn $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ unerfüllbar ist.
   ($\mathbf{M} \models \mathsf{F}$ gdw. $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ unerfüllbar.)

   Lösung Im folgenden kommen drei Varianten, die zeigen sollen, dass es verschiedene Vorgehensweisen gibt, die alle gut sind.

   Lösung 1 : Der folgende Beweis zeigt die Aussage der Form "A genau dann, wenn B" als Ganzes.

   Lt. Def. 5.1 folgt F genau dann aus $\mathbf{M}$, wenn jede Belegung, die alle Formeln aus $\mathbf{M}$ wahr macht, auch F wahr macht. Damit folgt F genau dann aus $\mathbf{M}$, wenn jede Belegung, die alle Formeln aus $\mathbf{M}$ wahr macht, $\neg\mathsf{F}$ falsch macht. Also folgt F genau dann aus $\mathbf{M}$, wenn jede Belegung eine Formel aus $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ falsch macht, $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ also unerfüllbar ist.

Lösung 2 : Der folgende Beweis zeigt die Aussage der Form "A genau dann, wenn B", indem er "Wenn A dann, B" und "Wenn B dann, A" in zwei Teilbeweisen zeigt.

Teilbeweis 1: Wir nehmen an, dass F aus $\mathbf{M}$ folgt. Lt. Def. 5.1 macht jede Belegung, die alle Formeln aus $\mathbf{M}$ wahr macht, auch F wahr, und damit $\neg\mathsf{F}$ falsch. Also macht jede Belegung eine Formel aus $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ falsch, $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ ist also unerfüllbar.

Teilbeweis 2: Wir nehmen an, dass $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ unerfüllbar ist. Dann macht jede Belegung eine Formel aus $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ falsch, also macht jede Belegung, die alle Formeln aus $\mathbf{M}$ wahr macht, $\neg\mathsf{F}$ falsch und damit F wahr. Also folgt lt. Def. 5.1 F aus $\mathbf{M}$.

Lösung 3 : Der folgende Beweis zeigt die Aussage der Form "A genau dann, wenn B", indem er "Wenn A dann, B" und "Wenn nicht A dann, (auch) nicht B" in zwei Teilbeweisen zeigt.

Teilbeweis 1: s. Teilbeweis 1 der Lösung 2.

Teilbeweis 2: Wir nehmen an, dass F nicht aus $\mathbf{M}$ folgt. Lt. Def. 5.1 gibt es eine Belegung, die alle Formeln aus $\mathbf{M}$ wahr macht, und F falsch macht. Diese Belegung macht dann aber auch $\neg\mathsf{F}$ wahr und macht damit alle Formeln aus $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ wahr. Also ist $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ erfüllbar.

Präsenzaufgabe 7.2

1. Gegeben sei die Substitution sub_1, für die gilt:

   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{A}) = (\mathsf{C} \wedge \mathsf{D})$,
   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{B}) = (\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B})$,
   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{C}) = \mathsf{A}$,
   für alle anderen Aussagensymbole $\mathsf{A_i}$ sei $\mathsf{sub}_1(\mathsf{A_i}) = \mathsf{A_i}$.

   Bestimmen Sie $\mathsf{sub}_1(\mathsf{F})$ für $\mathsf{F} = (\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$.

   Lösung $\mathsf{sub}_1(\mathsf{F}) = ((\mathsf{C} \wedge \mathsf{D}) \vee \neg(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B})) \Rightarrow (\neg(\mathsf{C} \wedge \mathsf{D}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}))$.
   Dass $\mathsf{sub}_1(\mathsf{C}) = \mathsf{A}$ ist hier völlig egal, da in F das C nicht vorkommt. Nicht durch überflüssige Infos irritieren lassen !

2. Bestimmen Sie alle mit den Regeln MP und MT aus der Formelmenge $\mathbf{M}$ ableitbaren Formeln.

   $$\text{Modus Ponens: } \mathsf{MP} = \frac{\mathsf{A}, \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}{\mathsf{B}} \qquad \text{Modus Tollens: } \mathsf{MT} = \frac{\neg\mathsf{B}, \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}{\neg\mathsf{A}}$$

   $\mathbf{M} = \{\mathsf{B}, (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}), ((\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})), \neg\mathsf{C}\}$

   Lösung

   - Jede Substitution mit $\mathsf{sub}(\mathsf{A}) = \mathsf{B}$ und $\mathsf{sub}(\mathsf{B}) = \mathsf{C}$ resultiert in $\mathsf{sub}(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) = \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}$. Da $\mathsf{B}, \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C} \in \mathbf{M}$, ist $\mathsf{sub}(\mathsf{B}) = \mathsf{C}$ mit Modus Ponens aus $\mathbf{M}$ ableitbar.
   - Jede Substitution mit $\mathsf{sub}(\mathsf{A}) = (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C})$ und $\mathsf{sub}(\mathsf{B}) = (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})$ resultiert in $\mathsf{sub}(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) = (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})$. Da $(\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}), (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D}) \in \mathbf{M}$, ist $\mathsf{sub}(\mathsf{B}) = (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})$ mit Modus Ponens aus $\mathbf{M}$ ableitbar.
   - Jede Substitution mit $\mathsf{sub}(\mathsf{A}) = \mathsf{B}$ und $\mathsf{sub}(\mathsf{B}) = \mathsf{C}$ resultiert in $\mathsf{sub}(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) = \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}$ und $\mathsf{sub}(\neg\mathsf{B}) = \neg\mathsf{C}$. Da $\neg\mathsf{C}, \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C} \in \mathbf{M}$, ist $\mathsf{sub}(\neg\mathsf{A}) = \neg\mathsf{B}$ mit Modus Tollens aus $\mathbf{M}$ ableitbar.

- Es gibt keine weiteren Möglichkeiten. $\mathsf{sub}(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$ ist ja auf jeden Fall eine Formel mit Hauptjunktor $\Rightarrow$ und es gibt in $\mathbf{M}$ nur die beiden bereits behandelten Formeln, die diesem Muster entsprechen. Hat man die Substitution bestimmt, welche $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$ auf eine solche Formel abbildet, dann ist damit auch eindeutig festgelegt, worauf A bzw. $\neg\mathsf{B}$ abgebildet wird. Da die Formel $\neg(\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})$ nicht in $\mathbf{M}$ enthalten sind, gibt es keine weiteren Ableitungsmöglichkeiten.

3. Beweisen Sie: Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{L}_{AL}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$ ein Kalkül der Aussagenlogik (Def. 6.9), $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}, \mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ und sub_3 eine Substitution. Wenn F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}$ ableitbar ist, dann ist $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$ mit $\mathcal{C}$ aus $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M})$ ableitbar, indem Sie aus der Ableitung von F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}$ eine Ableitung von $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$ mit $\mathcal{C}$ aus $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M})$ konstruieren (und zeigen, dass die konstruierte Ableitung die Anforderungen der Def. 6.10 erfüllt). (Symbolisch: Wenn $\mathbf{M} \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{F}$, dann $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M}) \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$.)

   Tipp: Sie dürfen hier Folgendes verwenden: Die Hintereinanderausführungen zweier Substitutionen ist wieder eine Substitution.

   Praktischer Nutzen dieses Satzes: Man kann sich doppelte Arbeit sparen. Hat man einmal eine Ableitung (korrekt) erstellt, dann kann man sich die Arbeit für Varianten der Formel, die durch Substitution entstehen, sparen (insbesondere für den Fall $\mathbf{M} = \emptyset$ ist das sehr nützlich).

   Lösung Es sei $\mathcal{C} = (\mathcal{L}_{AL}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$ ein Kalkül der Aussagenlogik, sub_3 eine Substitution, $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}, \mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$, so dass $\mathbf{M} \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{F}$. Dann gibt es eine Ableitung von F aus $\mathbf{M}$, also eine endliche Sequenz $\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n$ von Formeln aus $\mathcal{L}_{AL}$ gemäß Def. 6.10.

   Wir betrachten nun die durch Anwendung von sub_3 daraus generierte Formelsequenz $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_1), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_n)$ und stellen fest:

   (a) Da $\mathsf{F} = \mathsf{F}_n$ ist auch $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}) = \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_n)$.

   (b) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Ist $\mathsf{F}_k \in \mathbf{M}$, dann ist $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k) \in \mathsf{sub}_3(\mathbf{M})$.

   (c) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Ist $\mathsf{F}_k = \mathsf{sub}(\mathsf{H})$, wobei sub eine Substitution und $\mathsf{H} \in \mathcal{A}x$ ist, dann ist $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k) = \mathsf{sub}_3(\mathsf{sub}(\mathsf{H}))$. Die Hintereinanderausführung der beiden Substitutionen ist wieder eine Substitution, also gibt es eine Substitution sub_{3*}, so dass $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k) = \mathsf{sub}_{3*}(\mathsf{H})$.

   (d) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: ist $R \in \mathcal{R}$ und $\{\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_{k-1}\} \vdash_R \mathsf{F}_k$, dann gibt es Formeln $\mathsf{H}_1, \dots, \mathsf{H}_j, \mathsf{H} \in \mathcal{L}_{AL}$, so dass $R = \frac{\{\mathsf{H}_1, \dots, \mathsf{H}_j\}}{\mathsf{H}}$, und eine Substitution sub, so dass $\{\mathsf{sub}(\mathsf{H}_1), \dots, \mathsf{sub}(\mathsf{H}_j)\} \subseteq \{\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_{k-1}\}$ und $\mathsf{sub}(\mathsf{H}) = \mathsf{F}_k$. Dann ist aber auch $\{\mathsf{sub}_3(\mathsf{sub}(\mathsf{H}_1)), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{sub}(\mathsf{H}_j))\} \subseteq \{\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_1), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_{k-1})\}$ und $\mathsf{sub}_3(\mathsf{sub}(\mathsf{H})) = \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k)$. Da die Hintereinanderausführung der beiden Substitutionen sub und sub_3 wieder eine Substitution ist, ist mit der Regel R dann auch $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k)$ aus $\{\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_1), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_{k-1})\}$ ableitbar ($\{\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_1), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_{k-1})\} \vdash_R \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_k)$).

   Nach Def. 6.10 ist damit die Formelsequenz $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_1), \dots, \mathsf{sub}_3(\mathsf{F}_n)$ eine Ableitung bzgl. $\mathcal{C}$ für $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$