FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 11 : — Resolution, Turingmaschinen

Präsenzaufgabe 11.1 Es sei P ein zweistelliges Prädikatensymbol und $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ Variablen. Weiterhin seien folgende Formeln definiert:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_1 &= \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Rightarrow \neg \mathsf{P}(\mathsf{y},\mathsf{x}))\\
\mathsf{F}_2 &= \forall \mathsf{x}\, \neg \mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{x})\\
\mathsf{F}_3 &= \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, ((\mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \wedge \mathsf{P}(\mathsf{y},\mathsf{z})) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{z}))
\end{aligned}$$

Zeigen Sie unter Verwendung des prädikatenlogischen Resolutionsverfahrens die folgenden Behauptungen:

1. $\mathsf{F}_1 \models \mathsf{F}_2$

   Hilfestellung: Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $(\mathsf{F}_1 \wedge \neg \mathsf{F}_2)$ ist $\{\{\neg \mathsf{P}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{y}_1,\mathsf{x}_1)\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{a},\mathsf{a})\}\}$.

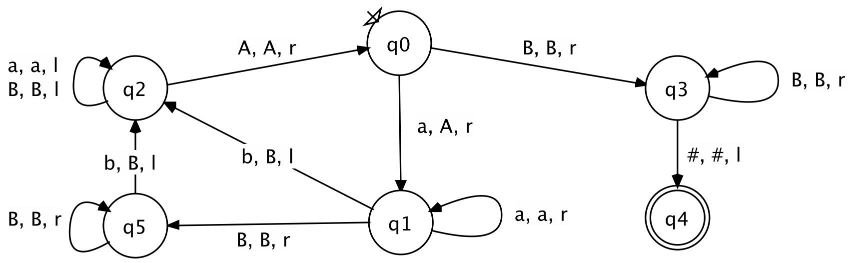
   Erläutern Sie, warum Ihnen diese Information nützlich ist.

2. $\{\mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3\} \models \mathsf{F}_1$

   Hilfestellung: Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $((\mathsf{F}_2 \wedge \mathsf{F}_3) \wedge \neg \mathsf{F}_1)$ ist $\{\{\neg \mathsf{P}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{y}_1,\mathsf{z}_1), \mathsf{P}(\mathsf{x}_1,\mathsf{z}_1)\}, \{\neg \mathsf{P}(\mathsf{x}_2,\mathsf{x}_2)\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{a},\mathsf{b})\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{b},\mathsf{a})\}\}$.

   Erläutern Sie, warum Ihnen diese Information nützlich ist.

Präsenzaufgabe 11.2 Betrachten Sie folgende Turingmaschine A mit $\Sigma = \{a, b\}$ und $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \#\}$.



1. Geben Sie eine maximale Rechnung von A auf der Eingabe $w = aabb$ an.
2. Geben Sie eine maximale Rechnung von A auf der Eingabe $w = abb$ an.
3. Geben Sie zu jedem Zustand eine inhaltliche Beschreibung an, was dieser leistet.
4. Welche Sprache akzeptiert die obige TM?
5. Was würde sich ändern, wenn auch q_3 Endzustand wäre?

Präsenzaufgabe 11.3 Geben Sie jeweils die Funktionsweise einer DTM an, die folgende Funktionen berechnet:

$$f_1 : \{a\}^* \to \{a\}^*, \quad f_1(a^n) := a^{n+1}, n > 0$$

und

$$f_2 : \{a\}^* \to \{b\}^*, \quad f_2(a^n) := b^{2n}, n > 0$$

Übungsaufgabe 11.4 Es seien P und O zweistellige Prädikatensymbole und $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ Variablen. Weiterhin seien folgende Formeln definiert:

von
6

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_1 &= \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{O}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Leftrightarrow \exists \mathsf{z}\, (\mathsf{P}(\mathsf{z},\mathsf{x}) \wedge \mathsf{P}(\mathsf{z},\mathsf{y}))) \\
\mathsf{F}_2 &= \forall \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{x}) \\
\mathsf{F}_3 &= \forall \mathsf{x}\, \mathsf{O}(\mathsf{x},\mathsf{x}) \\
\mathsf{F}_4 &= \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{P}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Rightarrow \mathsf{O}(\mathsf{x},\mathsf{y})) \\
\mathsf{F}_5 &= \forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{O}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Rightarrow \mathsf{O}(\mathsf{y},\mathsf{x}))
\end{aligned}$$

Zeigen Sie unter Verwendung des prädikatenlogischen Resolutionsverfahrens:

1. $\mathsf{F}_1 \wedge \mathsf{F}_2 \models \mathsf{F}_3$

   Hilfestellung: Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $(\mathsf{F}_1 \wedge \mathsf{F}_2 \wedge \neg \mathsf{F}_3)$ ist

   $\{\{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{y}_1)\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{x}_1)\},$
   $\{\mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{x}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{y}_1)\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{x}_2,\mathsf{x}_2)\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{a},\mathsf{a})\}\}$

2. $\mathsf{F}_1 \wedge \mathsf{F}_2 \models \mathsf{F}_4$

   Hilfestellung: Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $(\mathsf{F}_1 \wedge \mathsf{F}_2 \wedge \neg \mathsf{F}_4)$ ist $\{\{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{y}_1)\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{x}_1)\},$
   $\{\mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{x}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{y}_1)\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{x}_2,\mathsf{x}_2)\}, \{\mathsf{P}(\mathsf{a},\mathsf{b})\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{a},\mathsf{b})\}\}$

3. $\mathsf{F}_1 \models \mathsf{F}_5$

   Hilfestellung: Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $(\mathsf{F}_1 \wedge \neg \mathsf{F}_5)$ ist

   $\{\{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{x}_1)\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{y}_1)\},$
   $\{\mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{x}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{y}_1)\}, \{\mathsf{O}(\mathsf{a},\mathsf{b})\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{b},\mathsf{a})\}\}$

4. $\mathsf{F}_1 \not\models \mathsf{F}_2$

   Hilfestellung: Sie dürfen verwenden, dass auch in der Prädikatenlogik N- und P-Resolution widerlegungsvollständig sind.

   Die Mengendarstellung einer Klauselnormalform von $(\mathsf{F}_1 \wedge \neg \mathsf{F}_2)$ ist

   $\{\{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{y}_1)\}, \{\neg \mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1),\mathsf{x}_1)\},$
   $\{\mathsf{O}(\mathsf{x}_1,\mathsf{y}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{x}_1), \neg \mathsf{P}(\mathsf{z}_2,\mathsf{y}_1)\}, \{\neg \mathsf{P}(\mathsf{a},\mathsf{a})\}\}$

5. Die Formelmenge $\{\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3, \mathsf{F}_4, \mathsf{F}_5\}$ ist erfüllbar.

   Hilfestellung: Greifen Sie auf die Teilaufgaben 1 bis 4 zurück.

Übungsaufgabe 11.5 Sei $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{rev}\}$, d.h. die Menge aller Worte über $\{a,b\}$, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten.

von
4

1. Konstruieren Sie eine DTM A, die L akzeptiert und die auf allen Eingaben hält.
2. Erläutern Sie die Funktionsweise ihrer TM.
3. Erläutern Sie, warum ihre TM alle Worte aus L akzeptieren kann und warum sie keine weiteren akzeptieren kann.
4. Geben Sie eine Erfolgsrechnung für $w = ababa$ an.
5. Geben Sie eine Rechnung für $w = abaa$ an.

Übungsaufgabe 11.6 Sei $w \in \{0,1\}^*$, dann bezeichnet $\bar{w}$ das Wort, das man erhält, wenn man in w alle 0 in 1 ersetzt (und umgekehrt). Beispiel: $\overline{100} = 011$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, definiert durch $f(x) = \bar{x}$, Turing-berechenbar ist, indem Sie das Zustandsdiagramm einer DTM angeben, die f berechnet.

von
2