FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 9 : — Prädikatenlogik: Syntax und Semantik

Präsenzaufgabe 9.1

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 20 Minuten abgeschlossen sein.

1. Gehen Sie davon aus, dass F_{11} eine prädikatenlogische Formel ist, die aber ohne Berücksichtigung von Benennungskonventionen geschrieben wurde. Geben Sie für die verwendeten Symbole an, welcher syntaktischen Kategorie sie angehören (Variable, Konstante, Funktionssymbol, Prädikatensymbol) und geben Sie für Funktionssymbole und Prädikatensymbole an, in welcher Stelligkeit sie verwendet werden. Für welche Symbole gibt es alternative Lösungen / Mehrdeutigkeiten?

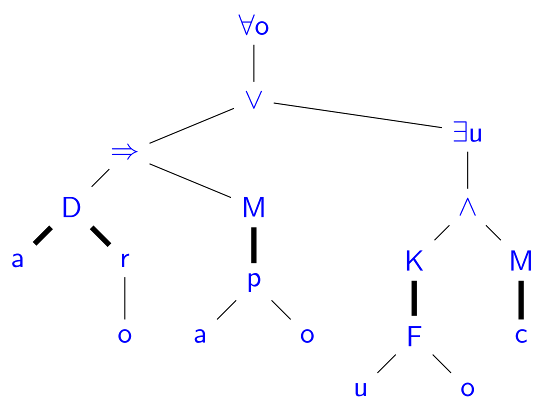
$$\mathsf{F}_{11} = \forall \mathsf{o}\ ((\mathsf{D}(\mathsf{a},\mathsf{r}(\mathsf{o})) \Rightarrow \mathsf{M}(\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{o}))) \vee \exists \mathsf{u}\ (\mathsf{K}(\mathsf{F}(\mathsf{u},\mathsf{o})) \wedge \mathsf{M}(\mathsf{c})))$$

   Lösung

   - o und u müssen Variablen sein, da sie direkt hinter Quantoren auftreten.
   - $\mathsf{D}(\mathsf{a},\mathsf{r}(\mathsf{o})), \mathsf{M}(\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{o})), \mathsf{K}(\mathsf{F}(\mathsf{u},\mathsf{o})), \mathsf{M}(\mathsf{c})$ müssen Formeln sein, da sie mit Junktoren verknüpft werden.
   - Entsprechend müssen $\mathsf{D}, \mathsf{M}, \mathsf{K}$ Prädikatensymbole sein und $\mathsf{a}, \mathsf{r}(\mathsf{o}), \mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{o}), \mathsf{F}(\mathsf{u},\mathsf{o}), \mathsf{c}$ Terme. D ist zweistellig und M, K sind einstellig.
   - a und c könnten Variablen oder Konstanten sein, denn es sind atomare Terme.
   - $\mathsf{r}, \mathsf{p}, \mathsf{F}$ sind Funktionssymbole. r ist einstellig, p, F sind zweistellig.

2. Geben Sie für die Formel aus Teilaufgabe 1 den Strukturbaum an.

   Lösung



3. Es seien x, y und z Variablen. Bestimmen Sie für **eine** der beiden Formeln, welche Variable in welcher Position durch welchen Quantor gebunden wird. (Anders gesagt: Bestimmen Sie, welches Variablenvorkommen durch welchen Quantor gebunden wird.) Welche Variablen kommen in der betrachteten Formel (in welcher Position) frei vor?

(a) $F_{12} = \forall x\,(P(x) \Rightarrow \exists y\,(\exists x\,(Q(x,y) \vee R(z)) \wedge M(x,y,z)))$

Lösung Das x in $P(x)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das x in $Q(x,y)$ wird durch $\exists x$ gebunden.
Das y in $Q(x,y)$ wird durch $\exists y$ gebunden.
Das x in $M(x,y,z)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das y in $M(x,y,z)$ wird durch $\exists y$ gebunden.
Beide Vorkommen von z sind frei.

(b) $F_{13} = \exists y\,(Q(y,x) \wedge \forall x\,(\exists x\, Q(x,y) \Rightarrow (R(x) \vee M(x,y))))$

Lösung Das x in $Q(y,x)$ ist frei.
Das x in $Q(x,y)$ wird durch $\exists x$ gebunden.
Das x in $R(x)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das x in $M(x,y)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Alle Vorkommen von y werden durch $\exists y$ gebunden.

Präsenzaufgabe 9.2

1. Es seien folgende Symbole in der Prädikatenlogik verfügbar:

   - Es seien a, b Konstanten.
   - Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol.
   - Es sei P ein einstelliges Prädikatensymbol.
   - Es sei Q ein zweistelliges Prädikatensymbol.
   - Es seien x, y, z Variablen.

   Weiterhin sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, wobei $U = \{3, 6, 9\}$ und I folgende Abbildungen vornimmt:

	a	b	f	P	Q	x	y	z
I	3	6	$3 \mapsto 6$ $6 \mapsto 9$ $9 \mapsto 9$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	3	9

   Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Formeln F_{21} und F_{22} mit Hilfe der Struktur $\mathcal{A}$.

   (a) $F_{21} = Q(a,b) \Leftrightarrow Q(f(a), f(b))$

   Lösung

	a	b	f	Q	f(a)	f(b)	Q(a,b)	Q(f(a),f(b))	F_{21}
$\mathcal{A}$	3	6	$3 \mapsto 6$ $6 \mapsto 9$ $9 \mapsto 9$	$\{(3,6),(6,9)\}$	6	9	1	1	1

   Da kein Quantor auftaucht, müssen wir auch keine Varianten betrachten.

   (b) $F_{22} = \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x,z))$

   Lösung

	P	Q	x	z	P(x)	Q(x,z)	$P(x) \Rightarrow Q(x,z)$	F_{22}
$\mathcal{A}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	9				0
$\mathcal{A}_{[x/3]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	9	0	0	1	
$\mathcal{A}_{[x/6]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	6	9	1	1	1	
$\mathcal{A}_{[x/9]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	9	9	1	0	0	

Hier gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[x/3]}$. Diese Struktur wird aber zweimal genannt, um die Auswertung übersichtlicher zu gestalten. Unter den drei x-Varianten von $\mathcal{A}$ hat $\mathcal{A}$ keinen Sonderstatus. Der Wert von $\mathcal{A}(F_{21})$ bestimmt sich aus den Werten, die die x-Varianten der Formel $P(x) \Rightarrow Q(x,z)$ zuordnen. In diesem Fall hätte es sogar gereicht, nur die Variante $\mathcal{A}_{[x/9]}$ zu betrachten, da der hier auftretende Wert 0 den Wert von $\mathcal{A}(F_{21})$ bestimmt. Da die Variable z frei in F_{22} vorkommt, wird sie wie eine Konstante behandelt und bei der Evaluation nicht variiert. Fehlende oder leere Zellen in der Tabelle werden für die Bestimmung von $\mathcal{A}(F_{21})$ nicht benötigt.

2. Zeigen Sie, dass F_{21} und F_{22} kontingent sind, indem Sie Strukturen $\mathcal{A}_a$ und $\mathcal{A}_b$ angeben, so dass gilt: $\mathcal{A}_a(F_{21}) \neq \mathcal{A}(F_{21})$ und $\mathcal{A}_b(F_{22}) \neq \mathcal{A}(F_{22})$. Begründen Sie, dass die angegebene Struktur das Gewünschte leistet.

   Tipp: Modifizieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$ geeignet aber möglichst wenig. Dann können Sie die Begründung ggf. auch angeben, ohne die komplette Tabelle aufzuschreiben.
   Lösung

   (a) Wir wählen $\mathcal{A}_a(Q) = \{(3,6)\}$. Ansonsten übernehmen wir die Werte von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}_a(Q(f(a), f(b))) = 0$ und $\mathcal{A}_a(Q(a,b)) = 1$, und damit $\mathcal{A}_a(F_{21}) = 0$.

   (b) Wir wählen $\mathcal{A}_b(P) = \{\}$. Ansonsten übernehmen wir die Werte von $\mathcal{A}$. Dann sind $\mathcal{A}_{b[x/3]}(P(x)) = 0$, $\mathcal{A}_{b[x/6]}(P(x)) = 0$, $\mathcal{A}_{b[x/9]}(P(x)) = 0$. Damit sind dann auch $\mathcal{A}_{b[x/3]}(P(x) \Rightarrow Q(x,z)) = 1$, $\mathcal{A}_{b[x/6]}(P(x) \Rightarrow Q(x,z)) = 1$, $\mathcal{A}_{b[x/9]}(P(x) \Rightarrow Q(x,z)) = 1$, woraus sich $\mathcal{A}_b(F_{22}) = 1$ ergibt.