

FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 8: — Hornformeln, Resolution

Präsenzaufgabe 8.1

1. Prüfen Sie mit dem Markierungsalgorithmus **eine** der folgenden Hornformeln auf Erfüllbarkeit. Wenn der Markierungsalgorithmus ‘erfüllbar’ ausgibt, so geben Sie aufgrund der erzeugten Markierungen ein Modell der Formel an.

Achtung: Im folgenden sollen A, B, C, D, E, K, L alle Aussagesymbole sein!

(a) $F_1 = C \wedge (\neg K \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee L) \wedge (\neg L \vee \neg K \vee \neg D \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee D) \wedge K \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg C \vee K) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg L)$

Lösung Umformung in Implikationsschreibweise:

$$F_1 \equiv (\top \Rightarrow C) \wedge (K \Rightarrow A) \wedge ((C \wedge A) \Rightarrow L) \wedge ((L \wedge K \wedge D) \Rightarrow B) \wedge ((D \wedge A) \Rightarrow \perp) \wedge ((C \wedge B) \Rightarrow D) \wedge (\top \Rightarrow K) \wedge ((B \wedge D \wedge C) \Rightarrow K) \wedge ((B \wedge C \wedge L) \Rightarrow \perp)$$

Markierung:

$$(\top \Rightarrow C^1) \wedge (K^1 \Rightarrow A^2) \wedge ((C^1 \wedge A^2) \Rightarrow L^3) \wedge ((L^3 \wedge K^1 \wedge D) \Rightarrow B) \wedge ((D \wedge A^2) \Rightarrow \perp) \wedge ((C^1 \wedge B) \Rightarrow D) \wedge (\top \Rightarrow K^1) \wedge ((B \wedge D \wedge C^1) \Rightarrow K^1) \wedge ((B \wedge C^1 \wedge L^3) \Rightarrow \perp)$$

Es lassen sich keine weiteren Aussagesymbole markieren. In der Tat können wir uns leicht davon überzeugen, dass folgende Belegung F_1 wahr macht:

	A	B	C	D	E	K	L
\mathcal{A}	1	0	1	0	1	1	1

(b) $F_2 = D \wedge (\neg D \vee \neg C \vee A) \wedge (\neg L \vee \neg C \vee A) \wedge C \wedge (\neg D \vee K) \wedge (\neg E \vee \neg L) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee E) \wedge (\neg K \vee \neg D \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee \neg A)$

Lösung Umformung in Implikationsschreibweise:

$$F_2 \equiv (\top \Rightarrow D) \wedge ((D \wedge C) \Rightarrow A) \wedge ((L \wedge C) \Rightarrow A) \wedge (\top \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow K) \wedge ((E \wedge L) \Rightarrow \perp) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow E) \wedge ((K \wedge D \wedge A) \Rightarrow B) \wedge ((D \wedge E \wedge A) \Rightarrow \perp)$$

Markierung:

$$(\top \Rightarrow D^1) \wedge ((D^1 \wedge C^1) \Rightarrow A^2) \wedge ((L \wedge C^1) \Rightarrow A^2) \wedge (\top \Rightarrow C^1) \wedge (D^1 \Rightarrow K^2) \wedge ((E^4 \wedge L) \Rightarrow \perp) \wedge ((A^2 \wedge B^3) \Rightarrow E^4) \wedge ((K^2 \wedge D^1 \wedge A^2) \Rightarrow B^3) \wedge ((D^1 \wedge E^4 \wedge A^2) \Rightarrow \perp)$$

Die Markierung $(D^1 \wedge E^4 \wedge A^2 \Rightarrow \perp)$ zeigt, dass die Formel F_2 nicht erfüllbar ist.

2. Sie haben den Markierungsalgorithmus implementiert, um bei größeren Beständen von Fakten, Regeln und Beschränkungen, die in einer Informationsverarbeitungsaufgabe Ihrer Firma anfallen, die Erfüllbarkeit zu prüfen. Leider erhalten Sie aus verschiedenen Abteilungen immer größere Mengen von Fakten, Regeln und Beschränkungen, so dass die Verarbeitung aufwendig wird.

Ihr Team überlegt, ob durch Vorverarbeitungsschritte die Formelmenge, die in den Markierungsalgorithmus gegeben wird, eingeschränkt werden kann. Dabei werden folgende Eigenschaften angesprochen, die die zu verarbeitende Menge von Hornklauseln haben können.

- (a) Es gibt keine Fakten (also keine Klauseln der Form $\top \Rightarrow A$ für $A \in \mathcal{A}_{s_{AL}}$).
- (b) Es gibt keine Beschränkungen (also keine Klauseln der Form $K \Rightarrow \perp$, wobei K eine Konjunktion von Aussagesymbolen ist).
- (c) Es gibt Aussagesymbole, die nur in Fakten und auf rechten Seiten von Regeln vorkommen.
- (d) Es gibt Aussagesymbole, die nur in Beschränkungen und auf linken Seiten von Regeln vorkommen.

Geben Sie zu **zwei** dieser Fälle an, wie man dem Markierungsalgorithmus die Arbeit durch einen Vorverarbeitungsschritt erleichtern kann und begründen Sie die Korrektheit des Vorverarbeitungsschritts.

Lösung

- (a) Man kann gleich ‘erfüllbar’ ausgeben, da der Markierungsalgorithmus niemals ein Aussagesymbol markieren wird. Werden alle Aussagesymbole auf **0** abgebildet, ergibt sich ein Modell der Eingabeformelmengen. Allgemein gilt: kommt in jeder Klausel einer KNF mindestens ein negatives Literal vor, dann ist die KNF erfüllbar. (Das spart natürlich nicht viel Arbeit, da der Markierungsalgorithmus dasselbe getan hätte.)
- (b) Man kann gleich ‘erfüllbar’ ausgeben, da der Markierungsalgorithmus keinen Widerspruch aufdecken kann. Werden alle Aussagesymbole auf **1** abgebildet, ergibt sich ein Modell der Eingabeformelmengen. Allgemein gilt: kommt in jeder Klausel einer KNF mindestens ein negatives Literal vor, dann ist die KNF erfüllbar. (Das kann dem Markierungsalgorithmus viel Arbeit sparen.)
- (c) In der KNF-Darstellung der Datenbasis taucht das Aussagesymbol dann nur als positives Literal auf. Jede Belegung, die dieses Aussagesymbol auf **1** abbildet, macht alle Hornklauseln, in denen es vorkommt, wahr. Deshalb kann man diese Hornklauseln aus den Eingabedaten löschen und die eingeschränkte Klauselmengen weiterbearbeiten. Ist das Resultat des Markierungsalgorithmus ‘unerfüllbar’, dann gilt das auch für die originale Eingabemenge. Ist das Resultat des Markierungsalgorithmus ‘erfüllbar’, dann gilt das auch für die originale Eingabemenge.
- (d) In der KNF-Darstellung der Datenbasis taucht das Aussagesymbol dann nur als negatives Literal auf. Jede Belegung, die dieses Aussagesymbol auf **0** abbildet, macht alle Hornklauseln, in denen es vorkommt, wahr. Deshalb kann man diese Hornklauseln aus den Eingabedaten löschen und die eingeschränkte Klauselmengen weiterbearbeiten. Ist das Resultat des Markierungsalgorithmus ‘unerfüllbar’, dann gilt das auch für die originale Eingabemenge. Ist das Resultat des Markierungsalgorithmus ‘erfüllbar’, dann gilt das auch für die originale Eingabemenge.

Präsenzaufgabe 8.2

1. Bilden Sie alle möglichen Resolventen basierend auf folgenden Formelmengen. Geben Sie an, ob die Formelmengen aufgrund des Resolutionsergebnisses erfüllbar sind. Sehen Sie einen einfachen Weg, im positiven Fall aus dem Resolutionsergebnis eine erfüllende Belegung zu extrahieren?

- (a) $M_1 = \{A \vee B \vee \neg C, \neg D \vee \neg B \vee \neg E\}$
- (b) $M_2 = \{A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B\}$
- (c) $M_3 = \{A \vee \neg B, \neg A \vee B\}$

Lösung

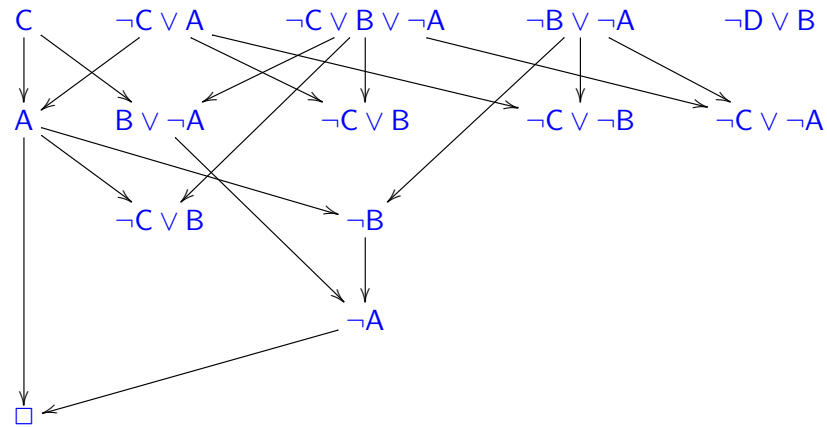
- (a) $M_1 \vdash_{\text{res}} \{A \vee \neg C \vee \neg D \vee \neg E\}$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Resolventen einem nicht unbedingt bessere Information als die Eingabformeln geben, was die erfüllenden Belegungen angeht. Daher ist nicht zu erwarten, dass es einfach ist, aus dem Resolutionsergebnis eine erfüllende Belegung abzulesen.
 - (b) $M_2 \vdash_{\text{res}} \{\neg B\}$
 - (c) $M_3 \vdash_{\text{res}} = \{A \vee \neg A\}$ und $M_3 \vdash_{\text{res}} = \{\neg B \vee B\}$. Mehr nicht !!
2. Zeigen Sie durch Resolution, dass die folgende Formelmengung unerfüllbar ist.
 $M_4 = \{C, \neg C \vee A, \neg C \vee B \vee \neg A, \neg B \vee \neg A, \neg D \vee B\}$
 Welche Ihrer Resolutionsschritte sind bei P-Resolution zulässig? Welche bei N-Resolution.
 Ist Ihre Resolutionsableitung linear?

Lösung Wir ignorieren bei der Resolution die Klausel $\neg D \vee B$, da sie die einzige Klausel ist, die das Aussagesymbol D erwähnt. Da es insbesondere keine Klausel mit dem positiven Literal D gibt, kann bei einer auf $\neg D \vee B$ aufbauenden Resolutionsableitung $\neg D$ nicht entfernt und damit die leere Klausel nicht erreicht werden.

Folgendes sind nur einige Beispiele. Es gibt natürlich noch mehr mögliche Resolutionsschritte. Finden Sie einen kürzeren Weg, die leere Klausel abzuleiten?

- (a) $\{C, \neg C \vee A\} \vdash_{\text{res}} A$
- (b) $\{C, \neg C \vee B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} B \vee \neg A$
- (c) $\{\neg C \vee A, \neg C \vee B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg C \vee B$
- (d) $\{\neg C \vee A, \neg B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg C \vee \neg B$
- (e) $\{\neg C \vee B \vee \neg A, \neg B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg C \vee \neg A$
- (f) $\{A, \neg C \vee B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg C \vee B$
- (g) $\{A, \neg B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg B$
- (h) $\{\neg B, B \vee \neg A\} \vdash_{\text{res}} \neg A$
- (i) $\{A, \neg A\} \vdash_{\text{res}} \square$

Das Ganze graphisch:



P-Resolution liegt vor bei den Schritten: (a), (b), (f), (g), (h), (i).

N-Resolution liegt vor bei den Schritten: (d), (e), (g), (i).

Die Ableitung ist nicht linear.

Es gibt noch diverse andere Wege, die leere Klausel abzuleiten.

Version vom 18. Mai 2012