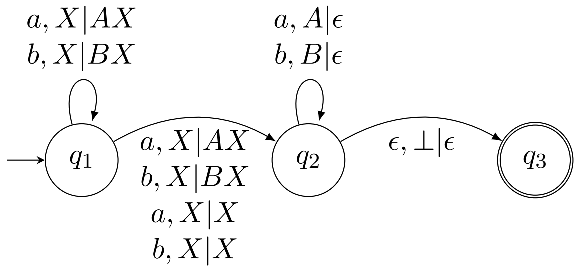
4.3 1. $X \in \{A, B, \perp\}$
X steht für ein beliebiges der drei möglichen Zeichen im Keller.



Im Zustand q_1 wird jeder Buchstabe in den Keller geschrieben. Der Wechsel zu q_2 kann mit jedem Kellerinhalt passieren, entweder mit dem letzten Buchstaben der ersten Worthälfte oder mit dem mittleren Buchstaben. Bei einer geraden Buchstabenzahl wird er bei dem Übergang in den Keller geschrieben, bei einer ungeraden nicht. Die Schleife bei q_2 läuft so lange, bis der Keller leer ist. Wenn er zu früh leer ist, erreicht er keinen Endzustand. Das Schlusszeichen $\perp$ wird mit dem letzten ϵ-Übergang zu q_2 aus dem Keller geholt. Wenn das alles erfolgreich war, erreicht der Automat dort seinen Endzustand.

2.

$$
\begin{aligned}
&L = \{a^n b^* c^n | b \text{ kann nur folgen, wenn } n \geq 1\};\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 0\\
&G = (\Sigma, N, P, S)\\
&\Sigma = \{a, b, c\}\\
&N = \{S, T\}\\
&P = \{S \to \epsilon,\ S \to aSc,\ S \to aTc,\ T \to bT,\ T \to \epsilon\}\\
&S = S
\end{aligned}
$$

Beweis von $L(G) = L$

$L(G) \subseteq L$ Das leere Wort ist in $L(G)$ enthalten. Da die Sprache L mit $\{\dots\}^*$ definiert ist, enthält sie auch ϵ.
Die weiteren Möglichkeiten von S sind:

$S \to aSc$ gleiche Anzahl von a und c mit noch Unbekanntem in der Mitte. Die bisherigen Terminale sind in L enthalten.

$S \to aTc$ es kommt ein neues a an den Anfangsblock und ein c an den Endblock. Auch hier sind die Terminale in L.

Nun geht es mit T weiter. $T \to bT$ erzeugt eine beliebig lange Reihe $\{b\}^*$ und bricht mit $T \to \epsilon$ ab. Die Reihe von b innerhalb der a und c ist auch in der Sprache enthalten. Damit stimmt die Aussage $L(G) \subseteq L$.

$L \subseteq L(G)$ In L sind am Anfang beliebig viele (n) a und am Ende genauso viele c. Für $n = 0$ gibt es $S \to \epsilon$.

Die a und c lassen sich mit $S \to aSc$ erzeugen und sind damit in $L(G)$. Nach dem Wechsel über $S \to aTc$ lassen sich mit $T \to bT$ beliebig viele b erzeugen. Diese sind in der Mitte des Wortes und damit an der richtigen Position. $T \to \epsilon$ sorgt dafür, dass nicht unbedingt ein b existieren muss und die Schleife beendet werden kann.

Damit sind alle erforderlichen Bedingungen von $L(G)$ erfüllt und es gilt $L = L(G)$.

4.4 1. ϵ-frei machen
$S \to BCD \mid BC \mid BD \mid B \mid a$
$A \to aBD \mid aDb \mid CSSD \mid aB \mid ab \mid CSS \mid SSD$
$B \to bB \mid aC \mid bD \mid a \mid b$
$C \to Cc \mid c$
$D \to AC \mid A$

2. Reduzieren
Es sind keine unproduktiven Terminale enthalten.

3. Kettenregeln entfernen
$S \to BCD \mid BC \mid BD \mid bB \mid aC \mid bD \mid a \mid b$
$A \to aBD \mid aDb \mid CSSD \mid aB \mid ab \mid CSS \mid SSD$
$B \to bB \mid aC \mid bD \mid a \mid b$
$C \to Cc \mid c$
$D \to AC \mid aBD \mid aDb \mid CSSD \mid aB \mid ab \mid CSS \mid SSD$

4. Ersetzen langer Terminalregeln
$S \to BCD \mid BC \mid BD \mid \langle b\rangle B \mid \langle a\rangle C \mid \langle b\rangle D \mid a \mid b$
$A \to \langle a\rangle BD \mid \langle a\rangle D\langle b\rangle \mid CSSD \mid \langle a\rangle B \mid \langle a\rangle\langle b\rangle \mid CSS \mid SSD$
$B \to \langle b\rangle B \mid \langle a\rangle C \mid \langle b\rangle D \mid a \mid b$
$C \to C\langle c\rangle \mid c$
$D \to AC \mid \langle a\rangle BD \mid \langle a\rangle D\langle b\rangle \mid CSSD \mid \langle a\rangle B \mid \langle a\rangle\langle b\rangle \mid CSS \mid SSD$
$\langle a\rangle \to a$
$\langle b\rangle \to b$
$\langle c\rangle \to c$

5. Verkürzen zu langer Regeln
$S \to \langle BC\rangle D \mid BC \mid BD \mid \langle b\rangle B \mid \langle a\rangle C \mid \langle b\rangle D \mid a \mid b$
$A \to \langle a\rangle\langle BD\rangle \mid \langle\langle a\rangle D\rangle\langle b\rangle \mid \langle CS\rangle\langle SD\rangle \mid \langle a\rangle B \mid \langle a\rangle\langle b\rangle \mid \langle CS\rangle S \mid S\langle SD\rangle$
$B \to \langle b\rangle B \mid \langle a\rangle C \mid \langle b\rangle D \mid a \mid b$
$C \to C\langle c\rangle \mid c$
$D \to AC \mid \langle a\rangle\langle BD\rangle \mid \langle\langle a\rangle D\rangle\langle b\rangle \mid CSSD \mid \langle a\rangle B \mid \langle a\rangle\langle b\rangle \mid \langle CS\rangle S \mid S\langle SD\rangle$
$\langle a\rangle \to a$
$\langle b\rangle \to b$
$\langle c\rangle \to c$

$\langle BC \rangle \to BC$
$\langle BD \rangle \to BD$
$\langle\langle a \rangle D \rangle \to \langle a \rangle D$
$\langle CS \rangle \to CS$
$\langle SD \rangle \to SD$

6. Wiederherstellen der ursprünglichen Sprache durch evtl. Hinzunahme einer ϵ-Regel
   Es muss keine ϵ-Regel hinzugefügt werden, da in der Sprache keine leeres Wort erzeugt werden konnte.
   $S \to BCD$ mit $C \to \epsilon$, $D \to \epsilon$ und $B \to bB \;|aC \mid bD$
   S wird also mindestens auf a, oder b abgeleitet.

4.5