FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

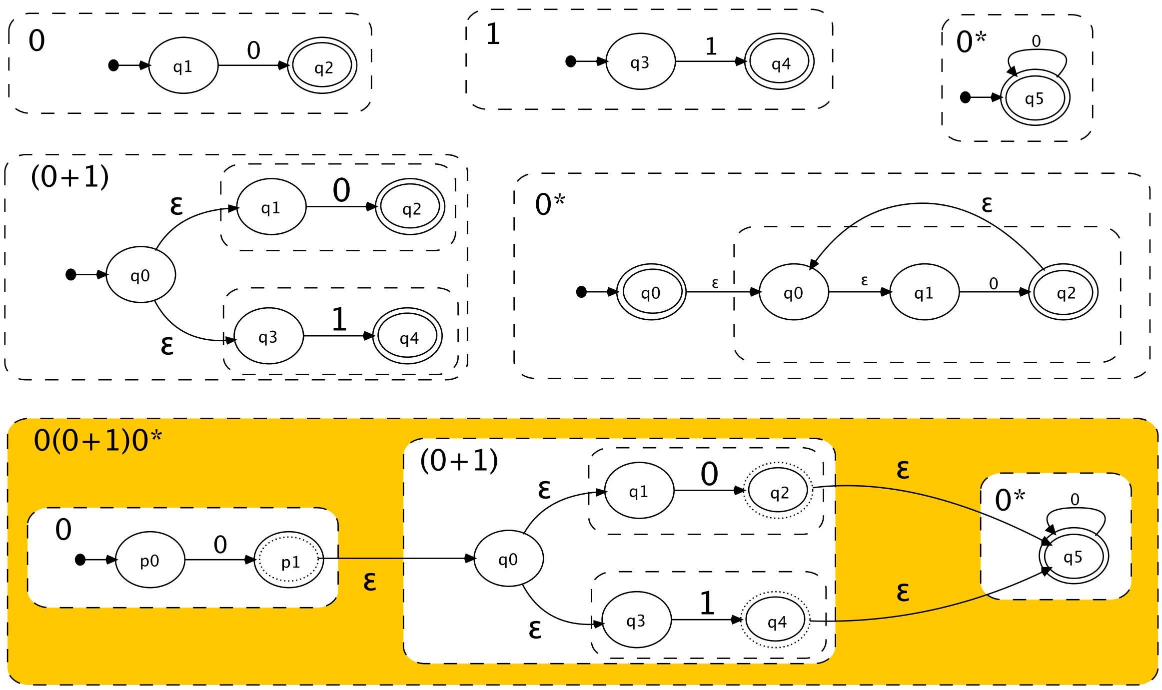
Musterlösung 3 : Reguläre Ausdrücke und Satz von Kleene

Präsenzaufgabe 3.1: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie *nach der in der Vorlesung behandelten Konstruktionsvorschrift (i.w. Satz 14.2 und Folie 119)* zu dem regulären Ausdruck

$$E = 0(0+1)0^*$$

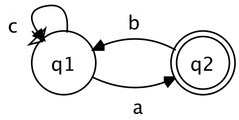
einen ϵ-FA A, so dass $M_E = L(A)$ gilt.

Lösung: Wir konstruieren zu allen Teilausdrücken Automaten. Beachte: Wir haben einige Zustände umbenannt, um Eindeutigkeit zu erhalten. Für den Teilausdruck 0^* haben wir die Kurzform gewählt. Die etwas längere Variante ist als Alternative auch angegeben.



Präsenzaufgabe 3.2:

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Kleene-Verfahrens aus folgendem NFA A einen regulären Ausdruck. Nutzen Sie dabei Vereinfachungen wie $\emptyset \cdot M = \emptyset$, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$, $AA^* = A^+$, $A \cup AB^+ = AB^*$ etc.



Lösung: Wir lesen am Automaten ab: $R^0_{1,1} = \{\epsilon, c\}$, $R^0_{1,2} = \{a\}$, $R^0_{2,1} = \{b\}$ und $R^0_{2,2} = \{\epsilon\}$. Die Sprache ergibt sich als $L(A) = R^2_{1,2}$.

$$\begin{aligned} R^2_{1,2} &= R^1_{1,2} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} = R^1_{1,2} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^+ = R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* \\ &= (\{c\}^*\{a\})(\{\epsilon\} \cup \{b\}\{c\}^*\{a\})^* \\ &= \{c\}^*\{a\}(\{b\}\{c\}^*\{a\})^* \\ &\simeq (c^*a)(bc^*a)^* \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\begin{aligned} R^1_{1,2} &= R^0_{1,2} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} = (R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\ &= \{\epsilon, c\}^*\{a\} = \{c\}^*\{a\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R^1_{2,2} &= R^0_{2,2} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\ &= \{\epsilon\} \cup \{b\}\{c\}^*\{a\} \end{aligned}$$

2. Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Beweisen Sie $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$.

Lösung: Es ist $M^* := \bigcup_{i \geq 0} M^i$. Wir zeigen zwei Inklusionen:

(a) Dass $A^i \subseteq (\{\epsilon\} \cup A)^i$ gilt, ist offensichtlich. Daraus folgt dann $\bigcup_{i \geq 0} A^i \subseteq \bigcup_{i \geq 0}(\{\epsilon\} \cup A)^i$.

(b) Wir zeigen, dass $\bigcup_{i=0}^n (\{\epsilon\} \cup A)^i \subseteq \bigcup_{i=0}^n A^i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, woraus dann $\bigcup_{i \geq 0}(\{\epsilon\} \cup A)^i \subseteq \bigcup_{i \geq 0} A^i$ folgt. Induktion über n.

- Ind.Anfang für $n = 0$: Es ist $(\{\epsilon\} \cup A)^0 = \{\epsilon\}$ und $A^0 = \{\epsilon\}$. Also gilt die Behauptung für $n = 0$.
- Ind.Annahme: Die Behauptung gelte für alle Werte bis zu einem festen n.
- Ind.Schritt von n nach $n + 1$: Wir verwenden die Abkürzung $B := (\{\epsilon\} \cup A)$.

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{i=0}^{n+1} (\{\epsilon\} \cup A)^i &= \textstyle\bigcup_{i=0}^n B^i \cup B^{n+1} \\ &= \textstyle\bigcup_{i=0}^n B^i \cup B^n B \text{ nach IA} \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=0}^n A^i \cup B^n B \text{ nach IA} \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=0}^n A^i \cup (\bigcup_{i=0}^n A^i)B \\ &= \textstyle\bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^i(\{\epsilon\} \cup A) \\ &= \textstyle\bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^i\{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=0}^n A^i A \\ &= \textstyle\bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^{i+1} \\ &= \textstyle\bigcup_{i=0}^{n+1} A^i \end{aligned}$$

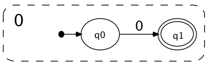
Also gilt die Ind.Behauptung für alle n.

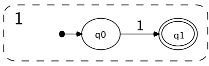
Übungsaufgabe 3.3: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie *nach der in der Vorlesung behandelten Konstruktionsvorschrift (i.w. Satz 14.2 und Folie 119)* zu folgenden regulären Ausdrücken E jeweils einen ϵ-FA A, so dass $M_E = L(A)$ gilt.

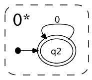
von
4

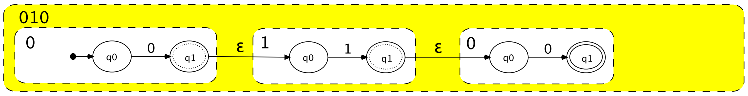
1. $E = 010$
2. $E = 0^*(0 + 1)^*0$
3. $E = 0^*(1(0 + 1)^*0)^*$

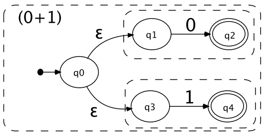
Lösung: Wir konstruieren zu allen Teilausdrücken Automaten. Wir haben in den Abbildungen die Zustände nicht umbenannt, um die Zuordnung zu erleichtern. In der formalen Fassung können wir dies durch geeignete Subskripte erreichen.

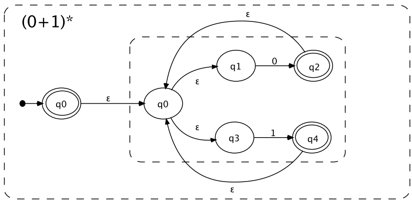

0
q0
q1

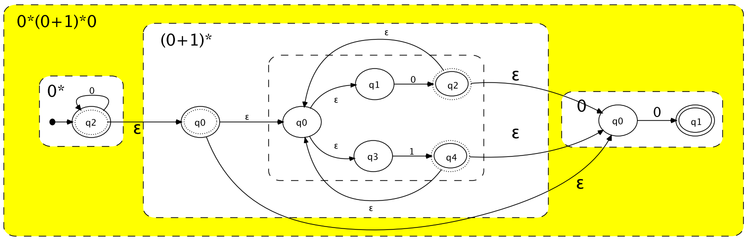

1
q0
q1

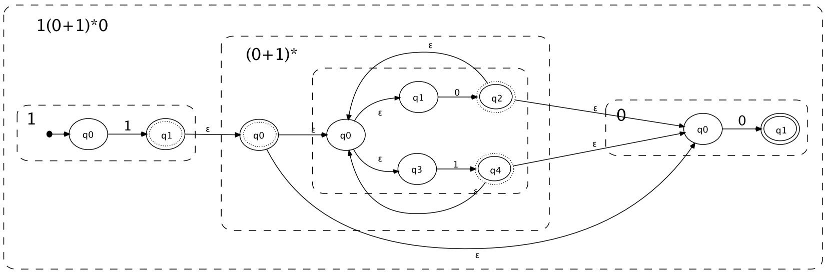

0*
q2

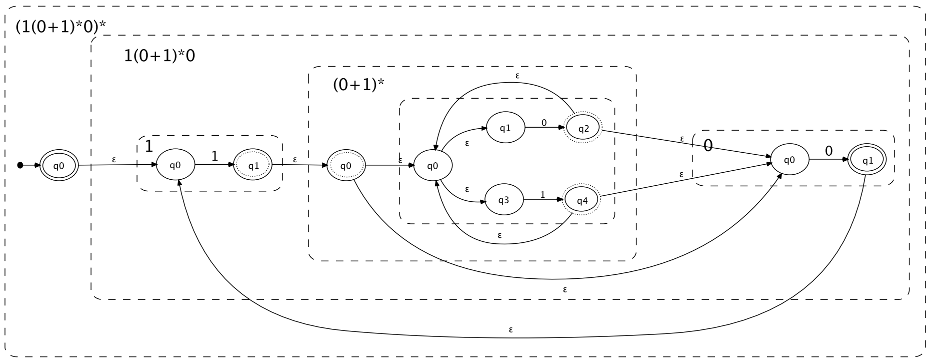

010

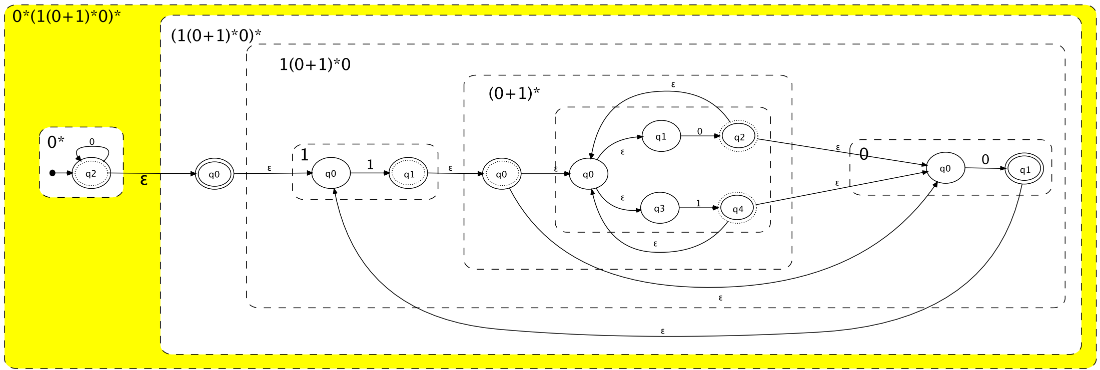

(0+1)


(0+1)*


0*(0+1)*0

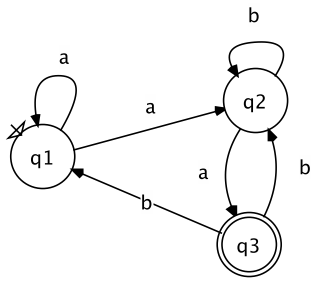

1(0+1)*0


(1(0+1)*0)*


0*(1(0+1)*0)*

Übungsaufgabe 3.4: Konstruieren Sie mit Hilfe des Kleene-Verfahrens aus folgendem NFA A einen äquivalenten regulären Ausruck. Nutzen Sie dabei Vereinfachungen wie $\emptyset \cdot M = \emptyset$, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $AA^* = A^+$, $A \cup AB^+ = AB^*$, $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$ etc.

von
4



Lösung: Es empfiehlt sich, die Rekursionsgleichung

$$R^k_{i,j} = \begin{cases} \{x \mid \delta(q_i, x) = q_j \text{ oder } (x = \epsilon) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R^{k-1}_{i,j} \cup R^{k-1}_{i,k} \cdot (R^{k-1}_{k,k})^* \cdot R^{k-1}_{k,j}, & \text{falls } k \geq 1. \end{cases}$$

zunächst durch rekursives Einsetzen und zwischenzeitliches Vereinfachen so weit “abzuwickeln”, bis deutlich wird, welche der Mengen $R^1_{i,j}$ wirklich benötigt werden. Die Anfangsmengen sind nicht schwer zu ermitteln:

$$\begin{array}{lll} R^0_{1,1} = \{\epsilon, a\} & R^0_{2,1} = \emptyset & R^0_{3,1} = \{b\} \\ R^0_{1,2} = \{a\} & R^0_{2,2} = \{\epsilon, b\} & R^0_{3,2} = \{b\} \\ R^0_{1,3} = \emptyset & R^0_{2,3} = \{a\} & R^0_{3,3} = \{\epsilon\} \end{array}$$

Eventuell könnten in der Herleitung des regulären Ausdruckes beim Abwickeln der Rekursion manche Mengen $R^k_{i,j}$ gar nicht auftreten, und müssten dann auch nicht weiter betrachtet werden.

Es ergibt sich nun:

$$L(A) = R^3_{1,3} \quad = \quad R^2_{1,3} \cup R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3}$$

In dieser Gleichung gibt es schon Vereinfachungsmöglichkeiten, die wir hervorheben wollen, da solche in ähnlicher Weise häufiger vorkommen (vergl. Präsenzaufgabe 1):

$$\begin{aligned} R^3_{1,3} &= R^2_{1,3} \cup R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} \\ &= R^2_{1,3} \cup R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^+ \\ &= R^2_{1,3}(\{\epsilon\} \cup (R^2_{3,3})^+) \\ &= R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* \end{aligned}$$

Nun sind also nur zwei Rekursionen aufzulösen:

$$R^2_{1,3} \;=\; R^1_{1,3} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} \quad \text{und} \quad R^2_{3,3} \;=\; R^1_{3,3} \cup R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3}$$

Die zu berechnenden Bestandteile ergeben sich in weiteren Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
R^1_{1,2} &= R^0_{1,2} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\
&= R^0_{1,2} \cup (R^0_{1,1})^+ R^0_{1,2} \\
&= (R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\
&= \{a, \epsilon\}^* \{a\} \\
&= \{a\}^* \{a\} \\
&= \{a\}^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{1,3} &= R^0_{1,3} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} \\
&= R^0_{1,3} \cup (R^0_{1,1})^+ R^0_{1,3} \\
&= (R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} \\
&= \{a, \epsilon\}^* \emptyset = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{2,2} &= R^0_{2,2} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\
&= R^0_{2,2} \cup \emptyset \cdot (R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\
&= R^0_{2,2} = \{\epsilon, b\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{2,3} &= R^0_{2,3} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} \\
&= R^0_{2,3} \cup \emptyset \cdot (R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} \\
&= R^0_{2,3} = \{a\}
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt zunächst:

$$\begin{aligned}
R^2_{1,3} &= R^1_{1,3} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} \\
&= \emptyset \cup \{a\}^+ \{\epsilon, b\}^* \{a\} \\
&= \{a\}^+ \{b\}^* \{a\}
\end{aligned}$$

Für die zweite Rekursion berechnen wir:

$$\begin{aligned}
R^1_{3,2} &= R^0_{3,2} \cup R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\
&= \{b\} \cup \{b\}\{a, \epsilon\}^* \{a\} \\
&= \{b\} \cup \{b\}\{a\}^+ \\
&= \{b\}\{a\}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{3,3} &= R^0_{3,3} \cup R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} \\
&= R^0_{3,3} \cup R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* \emptyset \\
&= R^0_{3,3} = \{\epsilon\}
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
R^2_{3,3} &= R^1_{3,3} \cup R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} \\
&= \{\epsilon\} \cup (\{b\}\{a\}^*)\{\epsilon, b\}^* \{a\} \\
&= \{\epsilon\} \cup \{b\}\{a\}^* \{b\}^* \{a\}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Lösungsgleichung ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} L(A) = R^3_{1,3} &= R^2_{1,3} \cup R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} \\ &= R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* \\ &= (\{a\}^+\{b\}^*\{a\}) \cdot (\{\epsilon\} \cup \{b\}\{a\}^*\{b\}^*\{a\})^* \\ &= \{a\}^+\{b\}^*\{a\} \cdot (\{b\}\{a\}^*\{b\}^*\{a\})^* \end{aligned}$$

Als regulären Ausdruck erhalten wir daher:

$$E = aa^*b^*a \cdot (ba^*b^*a)^*$$

von
4

Übungsaufgabe 3.5: Die Menge der *erweiterten regulären Ausdrücke (ERA)* über Σ ist folgendermaßen definiert:

1. Die Konstante $\emptyset$ ist ein erweiterter regulärer Ausdruck. Er steht für die Menge $M_\emptyset := \emptyset$.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein erweiterter regulärer Ausdruck. Er steht für die Menge $M_a := \{a\}$.
3. Wenn E_1 und E_2 erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(E_1 \cdot E_2)$. Er steht für die Menge $M_{(E_1 \cdot E_2)} := M_{E_1} \cdot M_{E_2}$.
4. Wenn E ein erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann auch E^*. Er steht für die Menge $M_{E^*} := (M_E)^*$.
5. Wenn E ein erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann auch $(-E)$. Er steht für die Menge $M_{(-E)} := \Sigma^* \setminus M_E$.
6. Wenn E_1 und E_2 erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(E_1 \otimes E_2)$ einer. Er beschreibt die Menge $M_{(E_1 \otimes E_2)} := M_{E_1} \cap M_{E_2}$.

1. Zeigen Sie: Jeder erweiterte reguläre Ausdruck E beschreibt eine reguläre Menge.

   Lösung: Alle Operatoren sind Abschlusseigenschaften und zu jedem existiert eine Konstruktion, die aus Automaten für die Teilausdrücke einen Automaten für den Gesamtausdruck konstruieren. Dies gilt insbesondere für die beiden neuen Operatoren: für das Komplement und den Durchschnitt.

2. Zeigen Sie: Zu jedem erweiterten regulären Ausdruck E existiert ein regulärer Ausdruck E', der die gleiche Menge beschreibt.

   Lösung: Aus obigen Resultat wissen wir, dass jeder erweiterte reguläre Ausdruck E eine reguläre Menge beschreibt. Also gibt es einen DFA A, der M_E akzeptiert.

   Mit dem Kleene-Verfahren konstruieren wir zu dem DFA A einen regulären Ausdruck E', der dann $M_{E'} = L(A) = M_E$ beschreibt.