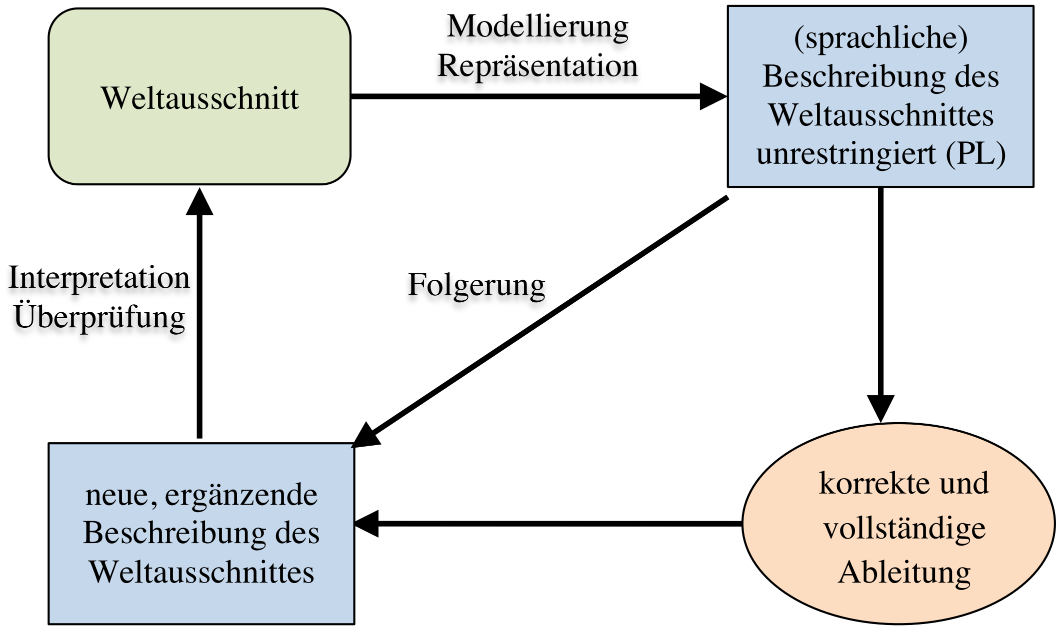
Modellierung, Folgerung und Ableitung in Logik



Zur Erinnerung: Resolution in der Aussagenlogik

Voraussetzung: Eingabe in KNF (Mengendarstellung)

Definition 8.1 (Resolvente)

Seien K_1 und K_2 Klauseln in Mengendarstellung und sei L ein Literal mit $L \in K_1$ und $\overline{L} \in K_2$. Dann heißt die Literalmenge $R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\})$ *Resolvente* von K_1 und K_2 (bzgl. L). (Falls $K_1 = \{L\}$ und $K_2 = \{\overline{L}\}$, so ist die Resolvente die *leere Klausel* $\square$.)

Resolutionssatz 8.6

Eine Klauselmenge F ist genau dann unerfüllbar, wenn $\square \in Res^*(F)$, d.h. $F \vdash_{res} \square$

Resolutionsalgorithmus

Eingabe: Eine Formel F in KNF (als Klauselmenge), d.h. eine **endliche** Klauselmenge !

```
REPEAT
    G := F;
    F := Res(F);
    UNTIL (□ ∈ F) OR (F = G)
IF □ ∈ F THEN „F ist unerfüllbar“
    ELSE „F ist erfüllbar“
```

Bei n Aussagensymbolen gibt es maximal 4^n Klauseln.
$F = G$ Prüfung sichert den Abbruch.

Prädikatenlogik: Resolution

- Beweisverfahren, Widerlegungsverfahren für die Prädikatenlogik
  - Vorverarbeitung: Wandlung der eigentlichen Aufgabenstellung (z.B. Folgerungsprüfung) in eine Widerlegungsaufgabe
    Bildung einer (erfüllbarkeitsäquivalenten) Skolemform zu der Widerlegungsaufgabe (vgl. Kap. 10)
  - Ausgangspunkt:
    Beziehung zwischen aussagenlogischer und prädikatenlogischer Semantik
    ➔ Grundresolution
  - Erweiterung der aussagenlogischen Resolution um die Behandlung von Variablen
    ➔ Unifikation
    ➔ prädikatenlogische Resolventenbildung

➔ In dieser Vorlesung wird das Verfahren der prädikatenlogischen Resolution vorgestellt, die semantischen Hintergründe (einschließlich Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweise) sind Gegenstand von spezialisierten Vorlesungen (insbesondere im Masterstudium).

Resolution: Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik (1)

Prädikatenlogik ohne Variablen und Quantoren

- berücksichtigt die interne Struktur von Aussagen und erlaubt es, zusätzlich bestimmte Beziehungen zwischen 'Objekten' zum Ausdruck zu bringen.
- Engl_ersch(hp7) ≈ Harry Potter 7 ist auf englisch erschienen.
- Dt_ersch(hp7) ≈ Harry Potter 7 ist auf deutsch erschienen.
- Dt_ersch(hp7) ⇒ Engl_ersch(hp7) ≈ Wenn Harry Potter 7 auf deutsch erschienen ist, dann ist Harry Potter 7 auf englisch erschienen.
- Sei **F** = {Dt_ersch(hp7), Dt_ersch(hp7) ⇒ Engl_ersch(hp7)}
- Gilt dann: **F** $\models$ Engl_ersch(hp7) ? [Ja, ergibt sich direkt aus Def 9.8, 9.12.]
- Gilt dann: **F** $\vdash_{MP}$ Engl_ersch(hp7) ? [Ja, bei Substitution einer PL-Formel bei der Anwendung der Inferenzregeln, Def 6.5]
- Gilt dann: **F** $\vdash_{res}$ Engl_ersch(hp7) ? [Ja, wenn wir PL-Literale zulassen]

Eine intuitive Vorüberlegung zur Resolutionsableitung: Beispiel 1

Gegeben: Dt_ersch(hp7) ∧ (Dt_ersch(hp7) ⇒ Engl_ersch(hp7))
In KNF: Dt_ersch(hp7) ∧ (¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7))

Ableitbarkeit von Engl_ersch(hp7) durch Resolution?

Resolutionsableitung

Dt_ersch(hp7)   (¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7))

Engl_ersch(hp7)

Da Dt_ersch(hp7) und ¬ Dt_ersch(hp7) komplementäre Literale sind.

Folgerbarkeitstest durch Resolutionsableitung: Beispiel 2

Gegeben: F_1= Dt_ersch(hp7) ∧ (¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7))
Negation von Engl_ersch(hp7): ¬ Engl_ersch(hp7)
Unerfüllbarkeitstest durch Resolution von

(Dt_ersch(hp7)   (¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7))   ¬ Engl_ersch(hp7)

Engl_ersch(hp7)

$\square$

Da Dt_ersch(hp7) und ¬ Dt_ersch(hp7) sowie
Engl_ersch(hp7) und ¬ Engl_ersch(hp7)
jeweils komplementäre Literale sind.

Warum sind

- Engl_ersch(hp6) ≈ Harry Potter 6 ist auf englisch erschienen.
- Jp_ersch(hp7) ≈ Harry Potter 7 ist auf japanisch erschienen.

nicht auf entsprechende Weise als aus F nachweisbar ?

Resolution: Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik (2)

Prädikatenlogik mit Quantoren

- erlaubt es, generische Aussagen über Objektbereiche zu machen, ohne Objekte einzeln zu benennen.
- Engl_ersch(hp7) ≈ Harry Potter 7 ist auf englisch erschienen.
- Dt_ersch(hp7) ≈ Harry Potter 7 ist auf deutsch erschienen.
- ∀x (Dt_ersch(x) ⇒ Engl_ersch(x)) ≈ Wenn etwas auf deutsch erschienen ist, dann ist es (auch) auf englisch erschienen.
- Sei **F** = {Dt_ersch(hp7), ∀x (Dt_ersch(x) ⇒ Engl_ersch(x))}
- Gilt dann: **F** ⊨ Engl_ersch(hp7) ? [Ja, ergibt sich direkt aus Def 9.8, 9.12.]
- Gilt dann: **F** $\vdash_{MP}$ Engl_ersch(hp7) ? [Nein, wir brauchen eine weitere Regel um von ∀x (Dt_ersch(x) ⇒ Engl_ersch(x)) zu Dt_ersch(hp7) ⇒ Engl_ersch(hp7) zu kommen]
- Gilt dann: **F** $\vdash_{res}$ Engl_ersch(hp7) ? [Nicht mit der bisherigen Regel]
- Wie ist **F** ⊨ Engl_ersch(hp7) unter Verwendung eines angepassten Resolutionsverfahrens nachzuweisen?

Folgerbarkeitstest durch Resolutionsableitung: Beispiel 3

Eine andere Implikationsbeziehung: ∀x (Dt_ersch(x) ⇒ Engl_ersch(x))
Umformung: ∀x (¬ Dt_ersch(x) ∨ Engl_ersch(x))
Gegeben: F_2 = Dt_ersch(hp7) ∧ ∀x (¬ Dt_ersch(x) ∨ Engl_ersch(x))
Negation von Engl_ersch(hp7): ¬ Engl_ersch(hp7)

Unerfüllbarkeitstest durch Resolution von

(Dt_ersch(hp7)   ∀x (¬ Dt_ersch(x) ∨ Engl_ersch(x))   ¬ Engl_ersch(hp7)

(¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7))

Engl_ersch(hp7)

$\square$

➔ Die Konsequenz (¬ Dt_ersch(hp7) ∨ Engl_ersch(hp7)) des All-Satzes ∀x (¬ Dt_ersch(x) ∨ Engl_ersch(x)) wird im Verfahren benötigt, dann erhalten wir auch Komplementarität der Literale.

Exkurs: Logik ohne Variablen und Quantoren [s.a. 9-60]

Atomare Formeln der Aussagenlogik

- ungegliedert: A_1, A_2, …
- können gleich oder verschieden sein

Atomare Formeln der Prädikatenlogik ohne Variablen

- zusammengesetzt: P(a), Q(a), P(f(a)), R(a, b), R(b, a), …
- können dieselben oder verschiedene Prädikatssymbole aufweisen
- können dieselben oder verschiedene Teil-Terme haben
- dieselben Teil-Terme können in denselben oder verschiedenen Argumentpositionen der Prädikatensymbole auftreten.

Geschlossene Formeln der PL ohne Variablen / Quantoren

- Für die Bestimmung des Wahrheitswertes (einer komplexen Formel) ist nur der Wahrheitswert der atomaren Teilformeln wichtig, nicht deren Aufbau.
- Für die Erfüllbarkeit ist wichtig, ob Teilformeln gleich oder verschieden sind.
  Es ist nicht wichtig, worin Unterschiede bestehen.

➔ Mengen solcher Formeln können wie aussagenlogische Formelmengen behandelt werden

Grundsubstitution, Grundinstanz

Definition 11.1

Es sei F eine Formel in Skolemform mit Matrix F*.

- Eine Substitution, die alle freien Variablen in F* durch geschlossene (d.h. variablenfreie) Terme ersetzt, heißt *Grundsubstitution*.
- Wenn alle freien Variablen in F* durch eine Grundsubstitution ersetzt werden, heißt die resultierende Formel eine *Grundinstanz* von F bzw. F*.
- [Anm.: Wenn freie Variablen in F* durch Substitution ersetzt werden, heißt die resultierende Formel eine *Instanz* von F bzw. F*]

Beobachtung zu 11.1

Ist F eine Formel in Skolemform und G eine (Grund-)Instanz von F, dann folgt G aus F.

- Die Menge der Grundinstanzen von F spielen eine besondere Rolle für die prädikatenlogische Resolution.

Beispiel: Grundsubstitution

$F = (P(x, y, z) \vee P(z, x, z))$

$\sigma_5 = [x / g(a), z / f(a, b), y / b]$: die beiden Variablen werden parallel substituiert !

$$
\begin{aligned}
\sigma_5(F) &= \sigma_5((P(x, y, z) \vee P(z, x, z))) \\
&= (\sigma_5(P(x, y, z)) \vee \sigma_5(P(z, x, z))) \\
&= (P(\sigma_5(x), \sigma_5(y), \sigma_5(z)) \vee P(\sigma_5(z), \sigma_5(x), \sigma_5(z))) \\
&= (P(g(a), b, f(a, b)) \vee P(f(a, b), g(a), f(a, b)))
\end{aligned}
$$

Grundterme (Herbrand-Universum)

Definition 11.20

Sei F eine (geschlossene) Formel in Skolemform.
Die *Menge der Grundterme* (das *Herbrand-Universum*) zu F, symbolisiert als **G**(F), ist induktiv definiert durch:

1) Ist k eine in F vorkommende Konstante, dann ist $k \in \mathbf{G}(F)$.
2) Falls in F keine Konstante vorkommt, so wird eine neue Konstante a gewählt [$a \in \mathbf{G}(F)$].
3) Für jedes in F vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und Terme $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{G}(F)$ ist der Term $f(t_1, \ldots, t_n)$ in $\mathbf{G}(F)$.
4) Das sind alle Elemente von $\mathbf{G}(F)$.

Beobachtungen zu Def. 11.20

- **G**(F) ist eine Menge von geschlossenen, d.h. Variablen-freien Termen.
- Alle Terme in **G**(F) sind aus den Bestandteilen von F (und ggf. der zusätzlichen Konstante a) aufgebaut.
- Alle geschlossenen Terme, die aus den Bestandteilen von F (und ggf. der zusätzlichen Konstante a) aufgebaut sind, sind in **G**(F) enthalten.
- In **G**(F) treten auch die Skolemsymbole auf.

Grundinstanzen (Herbrand-Expansion)

Definition 11.21

Sei $F = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\ F^*$ eine geschlossene Formel in Skolemform [F^* die Matrix].

Für F wird die *Menge der Grundinstanzen* (*Herbrand-Expansion*) **E**(F) definiert durch:

$$\mathbf{E}(F) = \{F^*[y_1/t_1][y_2/t_2] \ldots [y_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{G}(F)\}$$

- In der Matrix F^* werden alle Variablen durch Terme aus **G**(F) substituiert. Hierbei werden alle Substitutionsmöglichkeiten wahrgenommen.

Beispiel $F := \forall x\ \forall y\ \forall z\ P(x, f(y), g(z, x))$ $F^* = P(x, f(y), g(z, x))$

E(F) enthält

$P(a, f(a), g(a, a))$	$= F^*[x/a][y/a][z/a]$
$P(f(a), f(a), g(a, f(a)))$	$= F^*[x/ f(a)][y/a][z/a]$
$P(a, f(f(a)), g(a, a))$	$= F^*[x/a][y/ f(a)][z/a]$
$P(a, f(a), g(f(a), a))$	$= F^*[x/a][y/a][z/ f(a)]$
…	…

- Die Formeln aus **E**(F) sind geschlossen und quantorenfrei. Sie können als – intern strukturierte – aussagenlogische Formeln aufgefasst werden.

Grundresolution

Definition 11.3

Seien K_1, K_2 und R prädikatenlogische Klauseln von Grundinstanzen in Mengendarstellung. R heißt (Grund-)*Resolvente* von K_1 und K_2, falls gilt:

1. Es gibt ein Literal mit $L \in K_1$, so dass $\overline{L} \in K_2$ und
2. $R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\})$

Beispiel: $F_0 = \forall x\ \forall y\ ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$

Skolemform $F = \forall x\ \forall y\ ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$

Matrix $F^* = ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$

Grundinstanzen aus **E**(F) mit Instanziierungen über $\{a, b\}$, den Konstanten in F:

$$F_1 = ((\neg P(a) \vee Q(a)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$$
$$F_2 = ((\neg P(a) \vee Q(b)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$$
$$F_3 = ((\neg P(b) \vee Q(a)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$$
$$F_4 = ((\neg P(b) \vee Q(b)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b))$$

Grundresolution [Forts. des Beispiels]

$F_1 = \{ \{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(b)\} \}$

$\{Q(a)\}$

$F_2 = \{ \{\neg P(a), Q(b)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(b)\} \}$

$\{\neg P(a)\}$

$\square$

$F_3 = \{ \{\neg P(b), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(b)\} \}$

$F_4 = \{ \{\neg P(b), Q(b)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(b)\} \}$

$\{\neg P(b)\}$

Gültigkeitsprüfung mit Hilfe von Grundresolution

Ist $H = \neg\exists y\, \forall z\, [P(z, y) \Leftrightarrow \neg\exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z))]$ gültig?

➔ ist $\neg H \equiv F = \exists y\, \forall z\, [P(z, y) \Leftrightarrow \neg\exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z))]$ unerfüllbar?

Umformungen zur Erstellung einer Klauselnormalform für F:

$F = \exists y\, \forall z\, [P(z, y) \Leftrightarrow \neg\exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z))]$

Biimplikation eliminieren

$\equiv \exists y\, \forall z\, [(\neg P(z, y) \vee \neg\exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z))) \wedge (P(z, y) \vee \exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z)))]$

Negation nach innen

$\equiv \exists y\, \forall z\, [(\neg P(z, y) \vee \forall x\, (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))) \wedge (P(z, y) \vee \exists x\, (P(z, x) \wedge P(x, z)))]$

[x/w] Umbenennung

$\equiv \exists y\, \forall z\, [(\neg P(z, y) \vee \forall x\, (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))) \wedge (P(z, y) \vee \exists w\, (P(z, w) \wedge P(w, z)))]$

Pränexform

$\equiv \exists y\, \forall z\, \exists w\, \forall x\, [(\neg P(z, y) \vee (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))) \wedge (P(z, y) \vee (P(z, w) \wedge P(w, z)))]$

Skolemisierung [y/a]

erfäqui $\forall z\, \exists w\, \forall x\, [(\neg P(z, a) \vee (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))) \wedge (P(z, a) \vee (P(z, w) \wedge P(w, z)))]$

Skolemisierung [w/f(z)]

erfäqui $\forall z\, \forall x\, [(\neg P(z, a) \vee (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))) \wedge (P(z, a) \vee (P(z, f(z)) \wedge P(f(z), z)))]$

KNF-Erstellung

$\equiv \forall z\, \forall x\, [(\neg P(z, a) \vee \neg P(z, x) \vee \neg P(x, z)) \wedge (P(z, a) \vee P(z, f(z))) \wedge (P(z, a) \vee P(f(z), z))]$

Gültigkeitsprüfung mit Hilfe von Grundresolution [Fortsetzung]

Matrix: $F^* = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$

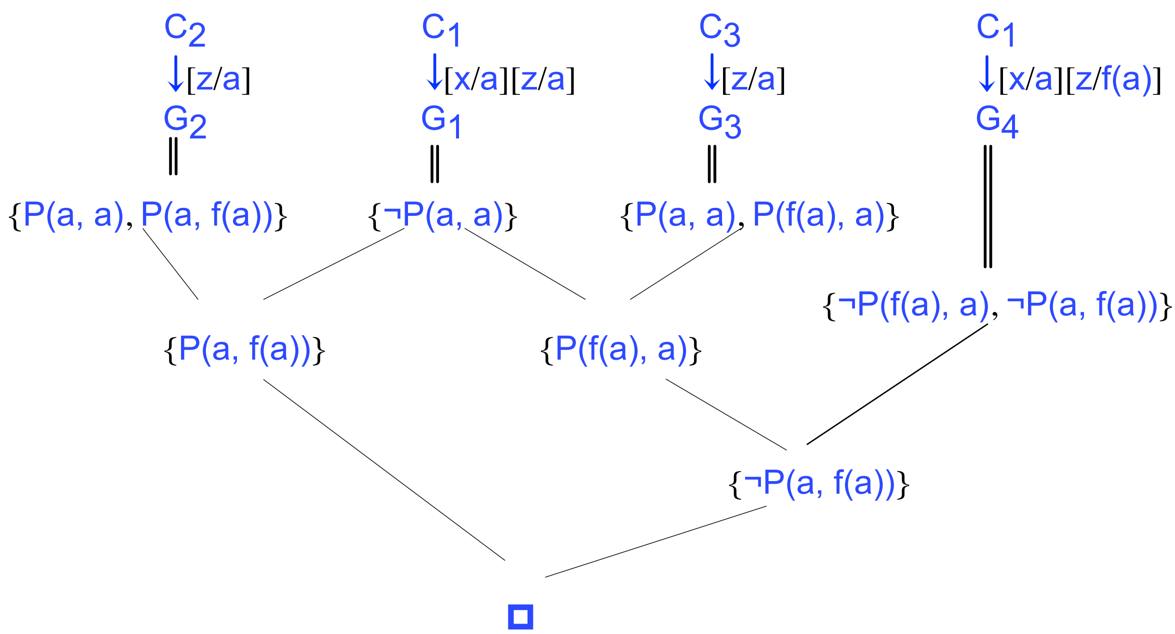
$C_1 = (\neg P(z, a) \vee \neg P(z, x) \vee \neg P(x, z))$
$C_2 = (P(z, a) \vee P(z, f(z)))$
$C_3 = (P(z, a) \vee P(f(z), z))$

[Bei der Bildung der Grundinstanzen können die Klauseln individuell betrachtet werden, da die Konjunktion bei der Mengendarstellung sowieso aufgelöst wird.]

Einige Möglichkeiten der Bildung von Grundinstanzen zu den Klauseln (auf der Basis der Konstanten von F^*)

Klausel	Grundsubstitution	Grundinstanz der Klausel	Mengendarstellung
C_1	[x/a][z/a]	$G_1 = \neg P(a, a) \vee \neg P(a, a) \vee \neg P(a, a)$	$\{\neg P(a, a)\}$
C_2	[z/a]	$G_2 = P(a, a) \vee P(a, f(a))$	$\{P(a, a), P(a, f(a))\}$
C_3	[z/a]	$G_3 = P(a, a) \vee P(f(a), a)$	$\{(P(a, a), P(f(a), a))\}$
C_1	[x/a][z/f(a)]	$G_4 = \neg P(f(a), a) \vee \neg P(f(a), a) \vee \neg P(a, f(a))$	$\{\neg P(f(a), a), \neg P(a, f(a))\}$

Gültigkeitsprüfung mit Hilfe von Grundresolution [Fortsetzung]



➔ F ist unerfüllbar.
➔ H ist gültig.

Grundresolution: Zwischenfazit

Das Schema der Grundresolution

Klauseln	C_i , …	C_k
Grundsubstitutionen	$\downarrow$ $[x_i/t_i]$, …	$\downarrow$ $[x_k/t_k]$, …
Grundinstanzen	G_i	G_k
zu einigen Klauseln		
Resolution	$\square$	

- Zu zwei aussagenlogischen Klauseln gibt es stets nur endlich viele Resolventen.
- Zu zwei prädikatenlogischen Klauseln kann es unendlich viele Grundinstanzen geben, die die Bildung von (unendlich vielen) Resolventen erlauben.
- Der Aufwand des Grundresolutionsverfahrens ergibt sich durch den Aufwand bei der Suche nach geeigneten Grundinstanzen.
- Wünschenswerte Eigenschaft prädikatenlogischer Resolution:
  Für jedes Klauselpaar: Beschränkung auf eine endliche Menge von Resolventen, so dass im Gesamtverfahren die Ableitbarkeit der leeren Klausel gegenüber der Grundresolution nicht eingeschränkt wird.

Von der aussagenlogischen Resolventenbildung zur prädikatenlogischen Resolventenbildung

- Grundresolutionsverfahren der Prädikatenlogik separiert zwei Aspekte
  - Bildung der Grundinstanzen:
    reduziert prädikatenlogische Ausdrücke zu aussagenlogischen Ausdrücken
  - Resolution: ist ein Verfahren für aussagenlogische Ausdrücke
- Der Kern des Resolutionsprinzips:
  Resolvieren von Klauseln mit komplementären Literalen:
  - Aussagenlogik: z.B. $\{(\neg P \lor Q), P, \neg Q\} \vdash_{res} Q$
    und $\{(\neg P \lor Q), P, \neg Q, Q\} \vdash_{res} \square$
  - Prädikatenlogik: z.B. $\forall x\, \forall y\, ((\neg P(x) \lor Q(y)) \land P(a) \land \neg Q(b))$
    - In welchen Sinne sind $\neg P(x)$ und $P(a)$ komplementär?
    - Wie können etwa $\neg P(x)$ und $P(a)$ komplementär gemacht werden?
      ➔ z.B. durch geeignete Grundsubstitution.
- Prädikatenlogik allgemein:
  - In welchen Sinne sind $\neg P(x)$ und $P(y)$, bzw. $\neg Q(x)$ und $Q(f(y))$ komplementär?
  - Was ist die Resolvente zweier prädikatenlogischen Klauseln?

Von der Grundresolution zur prädikatenlogischen Resolution

- Statt Grundsubstitutionen andere Arten geeigneter Substitutionen, denn
  - Grundsubstitutionen sind sehr speziell (Festlegung auf individuelle geschlossene Terme)
  - Grundsubstitutionen erzeugen viele Grundinstanzen, die später in der Resolution nicht verwendet werden.
- Ziel: „zurückhaltende" Substitutionen:

Beispiel: $\{P(x), \neg Q(g(x))\}$ $\{\neg P(f(y))\}$

$\downarrow$ $[x / f(y)]$

$\{P(f(y)), \neg Q(g(f(y)))\}$ $\{\neg P(f(y))\}$

$\downarrow$ (prädikatenlogische) Resolution

$\{\neg Q(g(f(y)))\}$

➔ keine Festlegung im Hinblick auf y.

- *Unifikation* / *unifizieren*: vereinigen, zusammenführen.

Definition 11.5

Eine Substitution σ ist genau dann ein *Unifikator* einer endlichen Menge von Ausdrücken (Termen $t_1, \ldots, t_n$, bzw. Formeln $F_1, \ldots, F_k$), wenn durch σ alle Ausdrücke dieser Menge auf denselben Ausdruck abgebildet werden.

D.h. $t_1\sigma = \ldots = t_n\sigma$ bzw. $F_1\sigma = \ldots = F_k\sigma$

- Wichtiger Spezialfall: Die Unifikation von Literalen
- Terme sind nur mit Termen unifizierbar, Formeln nur mit Formeln

Eine Menge von Ausdrücken ist *unifizierbar*, falls es einen Unifikator für diese Menge gibt.

- Beispiel: $\{x, f(y)\}$ bzw. $\{P(x), P(f(y))\}$

  $\sigma = [x / f(y)]$

  $x\sigma = f(y) = f(y)\sigma$ bzw. $P(x)\sigma = P(x\sigma) = P(f(y)) = P(f(y))\sigma$

- Anmerkung zur Definition bei U. Schöning:
  Schöning fokussiert auf den Fall der Unifikation von Literalen.

Komposition von Substitutionen

Definition 11.6

- Es seien x und y Variablen und t_1 und t_2 Terme.
- $[x/t_1]\ [y/t_2]$ bezeichnet die Substitution, die zuerst jedes freie Vorkommen von x durch t_1 ersetzt und anschließend jedes freie Vorkommen von y durch t_2 ersetzt.
- Seien σ und τ Substitutionen. Die *Komposition* von σ und τ ist die Substitution $\sigma\tau$, für die gilt: $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$, d.h.: $\sigma\tau(x) = \tau(\sigma(x))$, für alle Variablen x.

Beispiel

$F = P(x) \wedge Q(f(y))$

$F_{[x/a]} =$	$P(a) \wedge Q(f(y))$	$F_{[x/y]} =$	$P(y) \wedge Q(f(y))$	$F_{[x/g(y)]} =$	$P(g(y)) \wedge Q(f(y))$
$F_{[x/a][y/b]} =$	$P(a) \wedge Q(f(b))$	$F_{[x/y][y/a]} =$	$P(a) \wedge Q(f(a))$	$F_{[x/g(y)][y/a]} =$	$P(g(a)) \wedge Q(f(a))$

Die Relation *allgemeiner als* zwischen Substitutionen (Unifikatoren)

Definition 11.7 Seien σ_1 und σ_2 zwei Substitutionen. σ_2 ist *allgemeiner als* σ_1, falls es eine Substitution τ gibt, für die gilt: $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Beispiel: $\sigma_1 = [x/\ f(g(a,\ g(w,\ y)))]\ [y/\ g(h(w),\ b))]\ [z/\ h(w)]$

$\sigma_2 = [x/\ f(g(x,\ y))]\ [y/\ g(z,\ b)]$

$\tau = [x/\ a]\ [y/\ g(w,\ y)]\ [z/\ h(w)]$

denn: $\sigma_2\tau = [x/\ f(g(x,\ y))]\ [y/\ g(z,\ b)]\ [x/a]\ [y/\ h(z)]\ [z/\ h(w)]$

	x	y	z
σ_2	$f(g(x,\ y))$	$g(z,\ b)$	
τ	$[x/\ a]$ $[y/\ g(w,\ y)]$	$[z/\ h(w)]$	$[z/\ h(w)]$
$\sigma_2\tau$	$f(g(a,\ g(w,\ y)))$	$g(h(w),\ b)$	$h(w)$

➔ σ_2 ist *allgemeiner als* σ_1 im folgenden Sinne: Es ist möglich erst σ_2 auszuführen und dann durch eine weitere Substitution, τ, den Effekt zu erreichen, den σ_1 in einem Schritt erzielt.

Zum Selbststudium

Satz 11.8

(i) Seien σ_1, σ_2 und σ_3 Substitutionen. Wenn σ_3 *allgemeiner* ist als σ_2 und σ_2 *allgemeiner* ist als σ_1, dann ist σ_3 *allgemeiner* als σ_1. [Transitivität]

(ii) Für alle Substitutionen σ gilt: σ ist *allgemeiner* als σ. [Reflexivität]

(iii) Seien σ_1 und σ_2 Substitutionen. Wenn σ_1 *allgemeiner* ist als σ_2 und σ_2 *allgemeiner* ist als σ_1, dann gilt für alle Variablen x: $x\sigma_1$ und $x\sigma_2$ unterscheiden sich nur in der Wahl von Variablen.

Beispiel für 11.8.iii

$\sigma_1 = [x/ f(y)][z / g(b, y)]$

$\sigma_2 = [x/ f(u)][z / g(b, u)]$

mit $\tau_1 = [y/ u]$ und $\tau_2 = [u/ y]$ gilt $\sigma_1 = \sigma_2 \tau_2$ und $\sigma_2 = \sigma_1 \tau_1$

Allgemeinster Unifikator

Definition 11.9

Ein Unifikator σ einer endlichen Menge von Ausdrücken (Termen $t_1, \ldots, t_n$, bzw. Formeln $F_1, \ldots, F_k$) ist genau dann ein *allgemeinster Unifikator*, wenn er allgemeiner ist als alle Unifikatoren dieser Menge.

- Allgemeinster Unifikator σ einer Menge von Ausdrücken **M**:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & \mathbf{M}\sigma \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathbf{M}\sigma\tau = \mathbf{M}\sigma' \end{tikzcd}$$

- allgemeinster Unifikator – *most general unifier* – MGU
- Wenn σ ein allgemeinster Unifikator einer Menge $\mathbf{L} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ von Literalen ist, dann werden alle Literale aus **L** durch σ auf $L_1\sigma = \ldots = L_k\sigma$ abgebildet.
  Derartige $L_i\sigma$ sind die Formeln, die Ausgangspunkt der prädikatenlogischen Resolution sind.

Satz 11.10

Jede endliche unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.

Konstruktiver Beweis

- Durch die Angabe eines Unifikationsalgorithmus
  Die Idee:
  Sukzessive Konstruktion eines Unifikators
  - Ausgangspunkt: $\mathbf{L} = \{ L_1, \ldots , L_n\}$
  - $\mathbf{L}$ ist noch nicht unifiziert, wenn $\mathbf{L}\sigma = \{ L_1\sigma , \ldots , L_n\sigma \}$ mehr als ein Element besitzt:

    $|\, \mathbf{L}\sigma \,| = 1$ bedeutet $\mathbf{L}$ wird durch σ unifiziert.

    $|\, \mathbf{L}\sigma \,| > 1$ bedeutet $\mathbf{L}$ wird durch σ nicht unifiziert.
  - Sukzessive Konstruktion von Substitutionen σ_i:
    - Jede zusätzliche Substitution unifiziert eine Abweichung zwischen Termen
    - $|\, \mathbf{L}\sigma_1 \ldots \sigma_i \,|$ wird immer kleiner. Ziel: $|\, \mathbf{L}\sigma_1 \ldots \sigma_i \,| = 1$.

➔ Unifikation bezieht sich stets auf endliche Mengen.

Eingabe: Eine nicht-leere (endliche) Menge $\mathbf{L}$ von Literalen
i := 0; σ_0:=[ ]; (≈ leere Substitution, jede Variable wird auf sich selbst abgebildet)
while $|\, \mathbf{L}\sigma_i \,| > 1$ **do**
begin Suche in $\mathbf{L}\sigma_i$ (von links nach rechts) die erste Position, in der sich mindestens zwei Literale L_j und L_k unterscheiden.
    if Der Unterschied wird durch Junktor (Negation) oder Prädikatensymbole hervorgerufen
    then stoppe mit der Ausgabe „nicht unifizierbar“
    else **if** keiner der unterschiedlichen Terme ist eine Variable
        then stoppe mit der Ausgabe „nicht unifizierbar“
        else **begin** Sei x die Variable und t der andere Term
            if x kommt in t (als echter Teilterm) vor
            then stoppe mit der Ausgabe „nicht unifizierbar“
            else $\sigma_{i+1} := \sigma_i\, [x/t]$; i := i+1;
        end;
end;
Gib σ_i als allgemeinsten Unifikator aus!

Unifikationsalgorithmus (Beispiel 1)

L = {Q(x, f(a)), Q(b, y)} σ_0 = [ ] | $\mathbf{L}\sigma_0$ | = 2

1. L_1 = Q(x, f(a)) L_2 = Q(b, y)
   t_1 = x t_2 = b Paar unterschiedlicher Terme
   σ_1 = [x/b]

2. $L_1\sigma_1$ = Q(b, f(a)) $L_2\sigma_1$ = Q(b, y) | $\mathbf{L}\sigma_1$ | = 2
   t_1 = f(a) t_2 = y Paar unterschiedlicher Terme
   σ_2 = [x/b] [y/ f(a)]

3. $L_1\sigma_2$ = Q(b, f(a)) $L_2\,\sigma_2$ = Q(b, f(a)) | $\mathbf{L}\sigma_2$ | = 1

➔ Die Literalmenge **L** wurde erfolgreich unifiziert.
➔ allgemeinster Unifikator: [x/b] [y/ f(a)]

Unifikationsalgorithmus (Beispiel 2)

1. **L** = {Q(x, f(a)), P(b, y)} σ_0 = [ ] | $\mathbf{L}\sigma_0$ | = 2
   L_1 = Q(x, f(a)) L_2 = P(b, y)
   unterschiedliche Prädikatensymbole

➔ Die Literalmenge **L** ist nicht unifizierbar.

2. **L** = {Q(x, f(a)), Q(b, f(x))}
   L_1 = Q(x, f(a)) L_2 = Q(b, f(x)) | $\mathbf{L}\sigma_0$ | = 2
   t_1 = x t_2 = b Paar unterschiedlicher Terme
   σ_1 = [x/b]
   $L_1\sigma_1$ = Q(b, f(a)) $L_2\sigma_1$ = Q(b, f(b)) | $\mathbf{L}\sigma_1$ | = 2
   t_1 = a t_2 = b Paar unterschiedlicher Terme
   aber variablenfrei.

➔ Die Literalmenge **L** ist nicht unifizierbar.

Unifikationsalgorithmus (Beispiel 3)

$\mathbf{L} = \{Q(x, x), Q(y, f(y))\}$

$L_1 = Q(x, x)$ $L_2 = Q(y, f(y))$ $|\mathbf{L}\sigma_0| = 2$

$t_1 = x$ ↑ $t_2 = y$ ↑ Paar unterschiedlicher Terme

$\sigma_1 = [x/y]$

$L_1\sigma_1 = Q(y, y)$ $L_2\sigma_1 = Q(y, f(y))$ $|\mathbf{L}\sigma_1| = 2$

$t_1 = y$ ↑ $t_2 = f(y)$ ↑ Paar unterschiedlicher Terme

y kommt als echter Teilterm in $f(y)$ vor.

➔ Die Literalmenge **L** ist nicht unifizierbar.

Zum Selbststudium: Unifikationsalgorithmus (Beispiel 4)

$\mathbf{L} = \{\neg P(f(z, g(a, y)), h(z)), \neg P(f(f(u, v), w), h(f(a, b)))\}$

$\sigma_0 = [\,]$ $|\mathbf{L}\sigma_0| = 2$

1. $L_1 = \neg P(f(z, g(a, y)), h(z))$ $L_2 = \neg P(f(f(u, v), w), h(f(a, b)))$

   $t_1 = z$ ↑ ↑ $t_2 = f(u, v)$

   $\sigma_1 = [z/ f(u, v)]$

2. $L_1\sigma_1 = \neg P(f(f(u, v), g(a, y)), h(f(u, v)))$ $L_2\sigma_1 = \neg P(f(f(u, v), w), h(f(a, b)))$

   $t_1 = g(a, y)$ ↑ ↑ $t_2 = w$

   $\sigma_2 = [z/ f(u, v)]\ [w/ g(a, y)]$

3 $L_1\sigma_2 = \neg P(f(f(u, v), g(a, y)), h(f(u, v)))$ $L_2\sigma_2 = \neg P(f(f(u, v), g(a, y)), h(f(a, b)))$

   $t_1 = u$ ↑ $t_2 = a$ ↑

   $\sigma_3 = [z/ f(u, v)]\ [w/ g(a, y)]\ [u/a]$

4. $L_1\sigma_3 = \neg P(f(f(a, v), g(a, y)), h(f(a, v)))$ $L_2\sigma_3 = \neg P(f(f(a, v), g(a, y)), h(f(a, b)))$

   $t_1 = v$ ↑ $t_2 = b$ ↑

   $\sigma_4 = [z/ f(u, v)]\ [w/ g(a, y)]\ [u/a]\ [v/b]$

5. $L_1\sigma_4 = \neg P(f(f(a, b), g(a, y)), h(f(a, b)))$ $L_2\sigma_4 = \neg P(f(f(a, b), g(a, y)), h(f(a, b)))$

   $|\mathbf{L}\sigma| = 1$ ➔ Die Literalmenge **L** wurde erfolgreich unifiziert.

Unifikationsalgorithmus (Termination und Korrektheit)

Termination

- Eingabe: Eine endliche Menge **L** = { L_1, … , L_n} von Literalen. Die Gesamtzahl der auftretenden Variablen ist dann auch endlich.

➔ In jedem Schritt wird
  - entweder eine Variable gefunden, die durch eine Substitution ersetzt wird (somit wird die Anzahl der Variablen in **L**σ_i kleiner),
  - oder es wird ein Paar nicht unifizierbarer Literale gefunden, und somit das Verfahren abgebrochen.

➔ Die Zahl der Schleifendurchläufe ist also durch die Gesamtzahl der in **L** auftretenden Variablen beschränkt.

Korrektheit

- Die while-Schleife wird nur dann erfolgreich verlassen, wenn | **L**σ_i | = 1, d.h. wenn ein Unifikator gefunden ist.
- Noch zu zeigen
  - Die gebildete Substitution σ ist ein allgemeinster Unifikator.
  - Wenn **L** unifizierbar ist, dann wird die while-Schleife erfolgreich durchlaufen

Zwischenfazit: Unifikation für die Resolution

Zurückhaltende Substitution

Beispiel: {P(x), ¬Q(g(x))} {¬P(f(y))}

↓ [x / f(y)]

{P(f(y)), ¬Q(g(f(y)))} {¬P(f(y))}

↓ (prädikatenlogische) Resolution

{¬Q(g(f(y)))}

➔ keine Festlegung im Hinblick auf y.

Satz 11.10

Jede endliche unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.

Unifikationsalgorithmus

- Unifikatoren für unifizierbare Literalmenge sind (leicht) bestimmbar.
- Unifikatoren sind (bis auf Variablenbenennung) eindeutig bestimmt

➔ Resolution basierend auf Unifikation (im Gegensatz zu Grundsubstitution) liefert bei endlichen Klauselmengen nur endlich viele Resolventen.

Zum Selbststudium: Algorithmus liefert allgemeinsten Unifikator

Satz 11.11

Wenn **L** eine unifizierbare Menge von Literalen ist, dann ist der durch den Unifikationsalgorithmus konstruierte Unifikator σ ein allgemeinster Unifikator für **L**.
D.h.: Ist σ' ein Unifikator von **L**, dann gibt es eine Substitution τ mit: $\sigma' = \sigma\,\tau$

Hilfssatz 11.12 (Verallgemeinerung von 11.11)

Ist σ' ein Unifikator von **L**, dann gilt für jede im Unifikationsalgorithmus gebildete Substitution σ_i: $\sigma' = \sigma_i\,\sigma'$.

Beweis

Induktionsverankerung: $\sigma' = [\,]\,\sigma' = \sigma_0\,\sigma'$
Induktionsvoraussetzung: Es sei σ_i eine Substitution mit $\sigma' = \sigma_i\,\sigma'$
Induktionsschritt: $\sigma_{i+1} := \sigma_i\,[x/t]$, wobei x eine Variable und t ein Term ist und x und t in korrespondierenden Positionen in Literalen von $\mathbf{L}\sigma_i$ auftauchen, also (nach Induktionsvoraussetzung) durch σ' unifizierbar sind. Das heißt: $x\sigma' = t\sigma'$.
Für x ist $x\,[x/t]\,\sigma' = t\,\sigma' = x\,\sigma'$.
Für jede Variable $y \neq x$ ist $y\,[x/t]\,\sigma' = y\,\sigma'$, da x in y nicht vorkommt.
Also ist $[x/t]\,\sigma' = \sigma'$ und damit ist $\sigma_{i+1}\,\sigma' = \sigma_i\,[x/t]\,\sigma' = \sigma_i\,\sigma' = \sigma'$

Zum Selbststudium

Hilfssatz 11.13

Ist σ' ein Unifikator von **L**, dann wird die Schleife erfolgreich durchlaufen bis $|\,\mathbf{L}\sigma_i\,| = 1$.

Beweis

Da in jedem Durchlauf $\mathbf{L}\sigma_i$ durch σ' unifizierbar ist, kann der im Algorithmus gefundene Unterschied zwischen den Literalen nur in den Termen liegen.
Weiterhin muss mindestens einer der Terme eine Variable x sein (sonst haben wir abweichende Funktionssymbole / Konstanten und die Terme sind nicht unifizierbar oder wir haben den Unterschied noch nicht genau lokalisiert), den anderen Term nennen wir t.
Weiterhin muss gelten: $x\sigma' = t\sigma'$.
Wäre nun x ein echter Teilterm von t, dann wäre $x\sigma'$ auch ein echter Teilterm von $t\sigma'$, die beiden also nicht identisch. Also kommt x nicht in t vor und der Algorithmus bricht auch bei der dritten Möglichkeit nicht ab.

Prädikatenlogische Resolution: Resolventenbildung

Definition 11.14

Seien K_1, K_2 und R prädikatenlogische Klauseln in Mengendarstellung. R heißt *prädikatenlogische Resolvente* von K_1 und K_2 ($\{ K_1, K_2 \} \vdash_{res} R$) falls gilt:

1. Es gibt Variablenumbenennungen (Substitutionen) σ_1 und σ_2, so dass $K_1\sigma_1$ und $K_2\sigma_2$ keine gemeinsamen Variablen aufweisen.
2. Es gibt eine nicht leere Menge von Literalen $\{L_1, \ldots, L_m\}$ aus $K_1\sigma_1$ und eine nicht leere Menge von Literalen $\{L'_1, \ldots, L'_n\}$ aus $K_2\sigma_2$, so dass $\{ \overline{L_1}, \ldots, \overline{L_m}, L'_1, \ldots, L'_n\}$ mit dem allgemeinsten Unifikator σ unifizierbar ist.
3. $R = ((K_1\sigma_1 - \{ L_1, \ldots, L_m \}) \cup (K_2\sigma_2 - \{ L'_1, \ldots, L'_n \}))\, \sigma$

- Nach Konstruktion gilt auch: $R = (K_1\sigma_1\sigma - \{ L_1\}\sigma) \cup (K_2\sigma_2\sigma - \{ \overline{L_1} \}\sigma)$
- Die aussagenlogische Resolventenbildung ist ein Spezialfall der prädikatenlogischen Resolventenbildung (da keine Variablen auftreten):

➔ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = [\,]$

➔ m = n = 1

Prädikatenlogische Resolution – Beispiel zu 11.14 (1)

$K_1 = \{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $K_2 = \{\neg P(x), R(g(x), a)\}$

Auswahl von Literalen für die Resolution

$\{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $\{\neg P(x), R(g(x), a)\}$

(keine gemeinsamen Variablen)

$\sigma_1 = [\,]$ $\qquad$ $\sigma_2 = [x/u]$

$\{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $\{\neg P(u), R(g(u), a)\}$

(Unifikation)

$\sigma = [z/ f(x)][u/ f(x)]$

$\{P(f(x)), \neg Q(f(x))\}$ $\qquad$ $\{\neg P(f(x)), R(g(f(x)), a)\}$

(Resolution)

$\{\neg Q(f(x)), R(g(f(x)), a)\}$

Prädikatenlogische Resolution – Beispiel zu 11.14 (2)

$K_1 = \{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $K_2 = \{\neg P(x), R(g(x), a)\}$

Auswahl von Literalen für die Resolution

$\{P(f(x)), \neg Q(z), \boxed{P(z)}\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(x)}, R(g(x), a)\}$

(keine gemeinsamen Variablen)

$\sigma_1 = [\,]$ $\qquad$ $\sigma_2 = [x/u]$

$\{P(f(x)), \neg Q(z), \boxed{P(z)}\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(u)}, R(g(u), a)\}$

(Unifikation)

$\sigma = [u/ z]$

$\{P(f(x)), \neg Q(z), \boxed{P(z)}\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(z)}, R(g(z), a)\}$

(Resolution)

$\{P(f(x)), \neg Q(z), R(g(z), a)\}$

Prädikatenlogische Resolution – Beispiel zu 11.14 (3)

$K_1 = \{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $K_2 = \{\neg P(x), R(g(x), a)\}$

Auswahl von Literalen für die Resolution

$\{\boxed{P(f(x))}, \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(x)}, R(g(x), a)\}$

(keine gemeinsamen Variablen)

$\sigma_1 = [\,]$ $\qquad$ $\sigma_2 = [x/u]$

$\{\boxed{P(f(x))}, \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(u)}, R(g(u), a)\}$

(Unifikation)

$\sigma = [u/ f(x)]$

$\{\boxed{P(f(x))}, \neg Q(z), P(z)\}$ $\qquad$ $\{\boxed{\neg P(f(x))}, R(g(f(x)), a)\}$

(Resolution)

$\{ \neg Q(z), P(z), R(g(f(x)), a)\}$

Kurzdarstellung der Beispiele zu 11.14

Anstelle der ausführlichen Resolutionsgraphen oben verwenden wir im folgenden die Kurzdarstellung:

{P(f(x)), ¬Q(z), P(z)}   {¬P(x), R(g(x), a)}

[z/ f(x)]   [x/ f(x)]

{¬Q(f(x)), R(g(f(x)), a)}

{P(f(x)), ¬Q(z), P(z)}   {¬P(x), R(g(x), a)}

[ ]   [x/z]

{P(f(x)), ¬Q(z), R(g(z), a)}

{P(f(x)), ¬Q(z), P(z)}   {¬P(x), R(g(x), a)}

[ ]   [x/f(x)]

{ ¬Q(z), P(z), R(g(f(x)), a)}

Prädikatenlogische Resolution

Beobachtung zu Beispiel zu 11.14

Abgesehen von Varianten in der Variablenbenennung haben K_1= {P(f(x)), ¬Q(z), P(z)} und K_2= {¬P(x), R(g(x), a)} drei prädikatenlogische Resolventen

- {¬Q(f(x)), R(g(f(x)), a)}
- {¬Q(z), P(z), R(g(f(x)), a)}
- {P(f(x)), ¬Q(z), R(g(z), a)}

(Welche Resolvente bei der Ableitung der leeren Klausel gebildet werden muss, hängt von den anderen beteiligten Klauseln ab.)

Satz 11.15

Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln in Mengendarstellung. Abgesehen von Variationen in der Variablenbenennung gibt es für K_1 und K_2 nur endlich viele prädikatenlogische Resolventen.

Beweisidee

Die Resolvente wird eindeutig durch die Klauseln und die Wahl der Literalmengen in Def. 11.14.2 bestimmt. Alternativen bei der Festlegung der beteiligten Substitutionen führen nur zu Variationen bei den Variablenbenennungen.

Zum Selbststudium: Prädikatenlogische Resolutionsableitung

Definition 11.16 (Resolventenmengen; vgl. 8.4)

Sei **F** eine Formel in Klauselnormalform in Mengendarstellung.

$\mathrm{Res}(\mathbf{F}) := \mathbf{F} \cup \{ R \mid R$ ist prädikatenlogische Resolvente zweier Klauseln in $\mathbf{F} \}$

Dies wird induktiv fortgesetzt durch:

$$\mathrm{Res}^0(\mathbf{F}) := \mathbf{F}$$
$$\mathrm{Res}^{n+1}(\mathbf{F}) := \mathrm{Res}\,(\mathrm{Res}^n(\mathbf{F})) \quad n \geq 0$$
$$\mathrm{Res}^*(\mathbf{F}) := \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Res}^n\,(\mathbf{F})$$

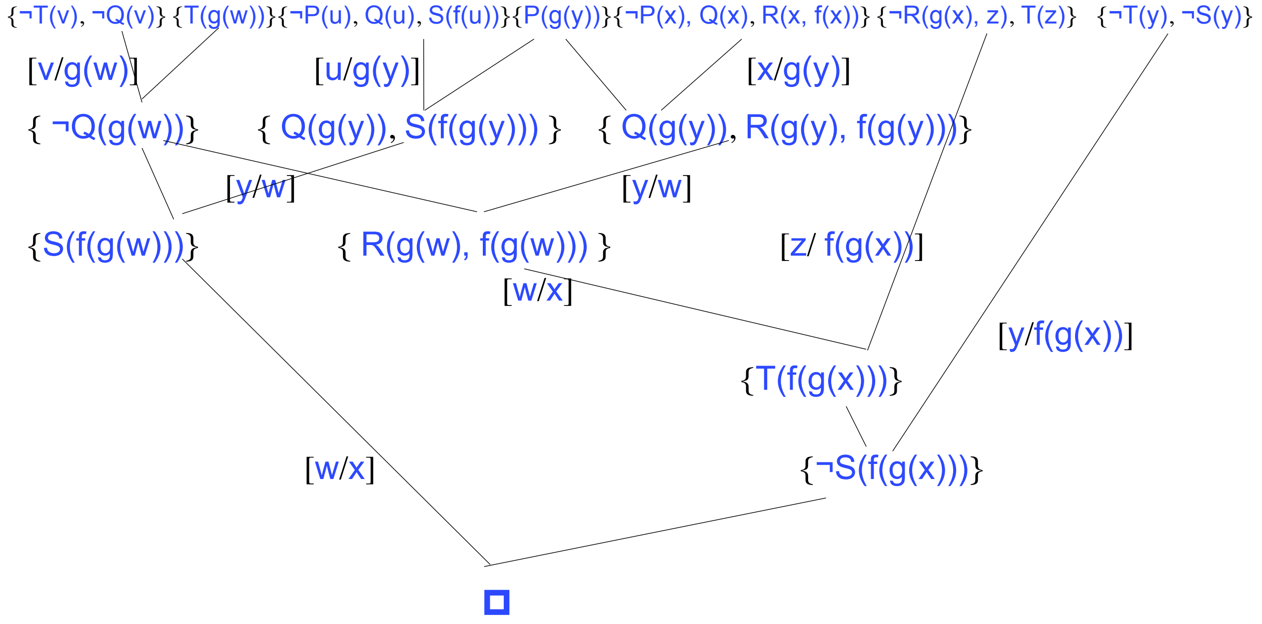
- $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F})$ GDW. Es gibt eine Folge von Klauseln $K_1, K_2, \ldots, K_n$ derart, dass
- $K_n = \square$
- Für i = 1, …, n ist K_i entweder Element von **F** oder K_i ist Resolvente von K_{i1}, K_{i2} mit $i_1, i_2 < i$.

Zum Selbststudium: Prädikatenlogische Resolutionsableitung – Beispiel

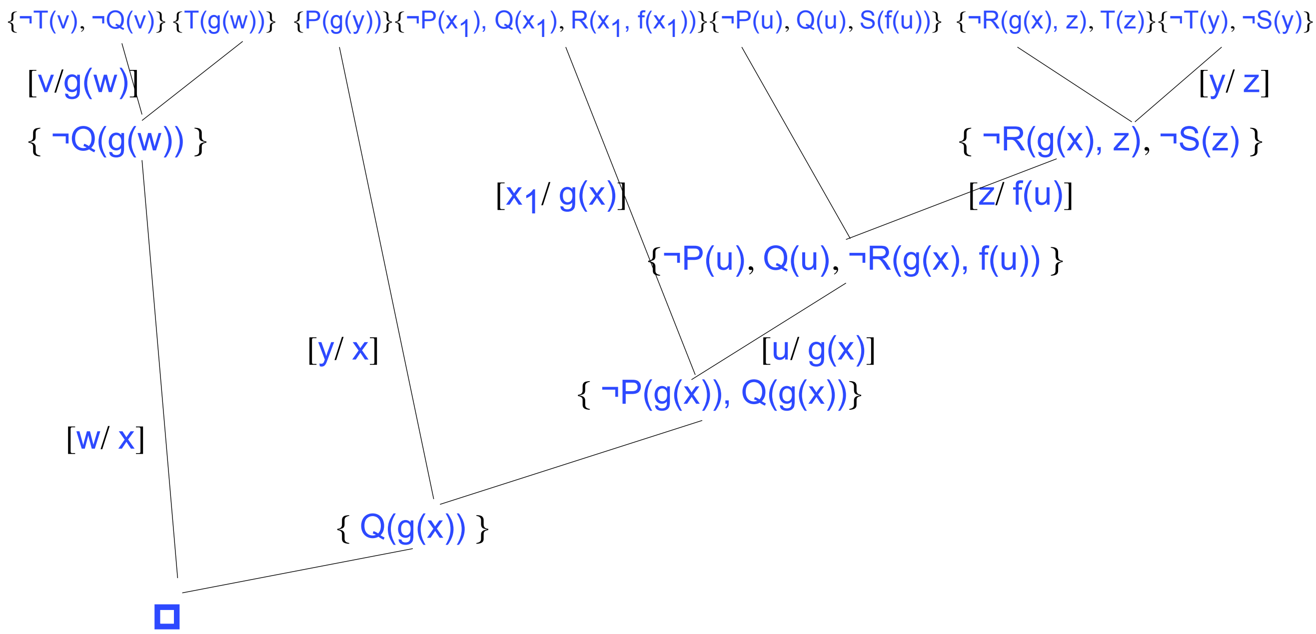
$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\}$ $\{\neg P(u), Q(u), S(f(u))\}$ $\{T(g(w))\}$ $\{P(g(y))\}$
$\{\neg R(g(x), z), T(z)\}$ $\{\neg T(v), \neg Q(v)\}$ $\{\neg T(y), \neg S(y)\}$

(1)	$\{T(g(w))\}$	in **F**		
(2)	$\{\neg T(v), \neg Q(v)\}$	in **F**		
(3)	$\{\neg Q(g(w))\}$	Resolvente	(1)	(2) [v/g(w)]
(4)	$\{\neg P(u), Q(u), S(f(u))\}$	in **F**		
(5)	$\{P(g(y))\}$	in **F**		
(6)	$\{Q(g(y)), S(f(g(y)))\}$	Resolvente	(4) [u/g(y)]	(5)
(7)	$\{S(f(g(w)))\}$	Resolvente	(3)	(6) [y/w]
(8)	$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\}$	in **F**		
(9)	$\{Q(g(y)), R(g(y), f(g(y)))\}$	Resolvente	(5)	(8) [x/g(y)]
(10)	$\{R(g(w), f(g(w)))\}$	Resolvente	(3)	(9) [y/w]
(11)	$\{\neg R(g(x), z), T(z)\}$	in **F**		
(12)	$\{T(f(g(x)))\}$	Resolvente	(10) [w/ x]	(11) [z/ f(g(x))]
(13)	$\{\neg T(y), \neg S(y)\}$	in **F**		
(14)	$\{\neg S(f(g(x)))\}$	Resolvente	(12)	(13) [y/ f(g(x))]
(15)	$\square$	Resolvente	(7) [w/ x]	(14)

Zum Selbststudium: Resolution in der Prädikatenlogik



Resolution in der Prädikatenlogik – Resolutionsgraph



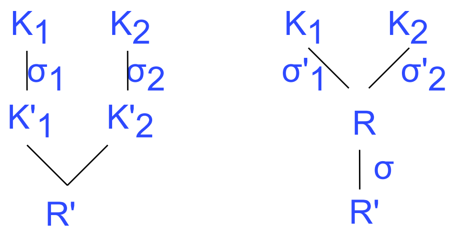
Zum Selbststudium: Lifting-Lemma

Satz 11.17 (Lifting Lemma)

Seien K_1 und K_2 zwei prädikatenlogische Klauseln und K'_1 und K'_2 zwei Grundinstanzen dieser Klauseln, die zu R' resolvierbar sind.
Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, so dass R' Grundinstanz von R ist.

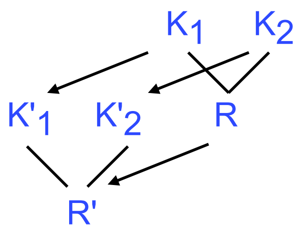
Grundsubstitution

Grundresolution



prädikatenlogische Resolution / Unifikation

Grundsubstitution



Beweis: siehe Schöning (Kap. 2.5)

Resolutionssatz der Prädikatenlogik

Satz 11.18 (Resolutionssatz)

Sei F eine Aussage in Klauselnormalform und F die Mengendarstellung von F.
Dann gilt: F ist genau dann unerfüllbar, wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$.

Beweisskizze (Details siehe Schöning)

Korrektheit

Wenn $F \vdash_{res} R$, dann $F \vDash \{ R \}$, der Beweis stützt sich wesentlich auf:

Wenn $\{ K_1, K_2 \} \vdash_{res} R$, dann $\{ K_1, K_2 \} \vDash \{ R \}$

- Hier ist zu berücksichtigen:
  - die implizite Allquantifizierung von Variablen in Klauseln
  - die Unifikation (der Terme bzw. Literale)

Der Rest ergibt sich dann durch einen einfachen Schluss:

➔ Also: Wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$, dann $F \vDash \bot$, also ist dann F eine Kontradiktion.

Resolutionssatz der Prädikatenlogik [Fortsetzung]

Vollständigkeit

Sei F unerfüllbar

- Der Grundresolutionssatz sichert die Existenz einer Folge von Klauseln $K'_1, K'_2, \ldots, K'_n$, so dass
  - $K'_1, K'_2, \ldots, K'_n$ ist eine aussagenlogische Resolutionsableitung
  - $K'_n = \square$
- Zu dieser Folge von Grundinstanzklauseln existiert eine korrespondierende Folge von prädikatenlogischen Klauseln, die wir von i = 1 ausgehend konstruieren:
  - Falls K'_i, eine Grundinstanz zu einer Klausel $K \in F^*$ ist, wähle $K_i = K$.
  - Falls K'_i die Resolvente von K'_{i1} und K'_{i2} ($i_1, i_2 < i$) ist, so sind für K'_{i1} und K'_{i2} schon korrespondierende prädikatenlogische Klauseln, K_{i1} und K_{i2} festgelegt.
    Aufgrund des Lifting-Lemmas gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R, die K'_i als Grundinstanz besitzt. Wir legen fest: $K_i = R$.

➔ $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ist eine prädikatenlogische Resolutionsableitung, mit $K_n = \square$.

Übersicht: Resolution

- Aussagenlogische Resolution

- Prädikatenlogische Resolution

➔ Grundresolution: Bildung von Grundinstanzen + aussagenlogische Resolution

➔ Prädikatenlogische Resolution durch Unifikation

- Vollständigkeit der Grundresolution und der prädikatenlogischen Resolution

---

- Verfeinerung der Resolution
  - Restriktionen
  - Strategien
- können vom aussagenlogischen Fall in den prädikatenlogischen Fall übertragen werden

➔ Vollständigkeit muss bewiesen werden (Modifikation des Resolutionssatzes)

Von der Modelltheorie zur prädikatenlogischen Beweistheorie: Herbrands Konzeption

- Die Konzeption von Herbrand stellt spezifische Strukturen und Modelle bereit, vermittels derer Formeln in Mengen von Zeichenketten interpretiert werden.
- Auf dieser Grundlage kann die Erfüllbarkeit / Unerfüllbarkeit von Klauselnormalformen über Erfüllbarkeit / Unerfüllbarkeit von aussagenlogischen Formelmengen geprüft werden.
- Ein Test auf Erfüllbarkeit / Unerfüllbarkeit einer prädikatenlogischen Formel erfordert damit eine gezielte Suche einer endlichen unerfüllbaren Teilmenge in einer unendlichen AL-Formelmenge.
- Die Herbrand-Expansion **E**(F) einer Formel F ist eine Menge von geschlossenen und quantorenfreien Formeln. Sie korrespondiert zur Menge der Grundinstanzen von F.

➔ Die zentrale Frage ist somit:
Welche Grundsubstitutionen führen zu unerfüllbaren Teilmengen von **E**(F) ?

➔ Zur Herbrandkonzeption:
- Schöning Kapitel 2.4 und/oder Spies Kapitel 10.5
- Vorlesungen im Masterstudium

Theorem von Skolem-Herbrand-Gödel – Satz von Herbrand

Theorem von Skolem-Herbrand-Gödel

Sei F eine geschlossene Formel in Skolemform. F ist genau dann erfüllbar, wenn die Formelmenge **E**(F) erfüllbar ist.

- Erfüllbarkeit einer geschlossenen prädikatenlogischen Formel F in Skolemform entspricht Erfüllbarkeit einer Menge von aussagenlogischen Formeln – **E**(F).

Satz von Herbrand 11.22

Sei F ein geschlossene Formel in Skolemform.
F ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von **E**(F) gibt, die unerfüllbar ist.

Beweisidee

- Endlichkeitssatz der Aussagenlogik:
  Eine Menge **M** von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar ist.

Zum Selbststudium: Grundresolutionsalgorithmus (vgl. Schöning Kap 2.5)

Algorithmus

Eingabe: Eine geschlossene Formel F in Skolemform mit der Matrix F^* in KNF:
[$F_1, F_2, \ldots$ sei eine Aufzählung von $\mathbf{E}(F)$.]

i := 0; $M := \emptyset$;

repeat

i := i +1; $M := M \cup \{ F_i \}$; $M := \text{Res}^*(M)$;

until $\square \in M$

Ausgabe: Gib „unerfüllbar" aus und stoppe.

- Die Vorschrift (der Berechnungsschritt) $M := \text{Res}^*(M)$ terminiert für jedes i, da die Resolution einer endlichen Menge von Grundinstanzen terminiert. (Aussagenlogischer Resolutionssatz)

Satz 11.4

Bei Eingabe einer Formel F in Klauselnormalform stoppt der Grundresolutionsalgorithmus genau dann nach endlich vielen Schritten mit der Ausgabe „unerfüllbar", wenn F unerfüllbar ist.

Kommentar zum Resolutionssatz der Prädikatenlogik

Satz 11.18 (Resolutionssatz)

Sei F eine Aussage in Klauselnormalform und F die Mengendarstellung von F.
Dann gilt: F ist genau dann unerfüllbar, wenn $\square \in \text{Res}^*(F)$.

Dieser Satz behandelt nur unerfüllbare Formeln !

- w-Vollständigkeit: Ist eine Formel unerfüllbar, dann gibt es eine endliche Resolutionsableitung der leeren Klausel.
- Es gibt sogar systematische Verfahren, die garantieren, dass nach endlicher Zeit eine solche Ableitung gefunden wird,
- wobei ‘endlich’ auch sehr lange dauern kann: es gibt keine Obergrenze des Aufwandes

(Un)erfüllbarkeit in der Prädikatenlogik ist aber unentscheidbar !

- Bei erfüllbaren Formeln als Eingabe kann es passieren, dass das Verfahren nicht abbricht, da immer neue (interessante) Resolventen gebildet werden.
- Schlimmer noch: Für jede Strategie gibt es Formeln, die zu nicht abbrechenden Läufen führen, ohne dass man feststellen kann, ob sie noch abbrechen werden (→ Halteproblem).

(Un)erfüllbarkeit in der Aussagenlogik ist entscheidbar !

Wichtige Konzepte dieser Vorlesung

- Substitution, Grundsubstitution, Unifikator, allgemeinster Unifikator
- Grundinstanz, Grundresolution
- Unifikation, unifizierbar
- Unifikationsalgorithmus
- Prädikatenlogische Resolution, Resolutionsableitung
- Resolutionssatz (w-Vollständigkeit der prädikatenlogischen Resolution)