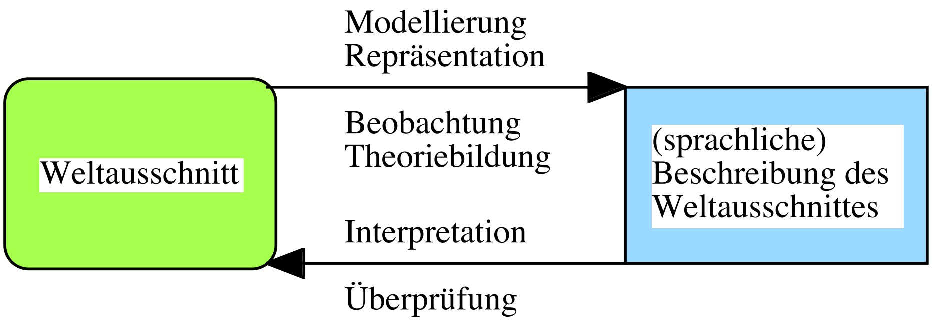
Aussagenlogik: Grundbegriffe, Semantik



Beschreibungen / Formeln

- können einen Weltausschnitt (unter einer Interpretation)
- korrekt oder inkorrekt beschreiben

Mathematische Abstraktion (Aussagenlogik)

- eine Interpretation (Belegung) ordnet Formeln Wahrheitswerte zu.

Ein Beispiel

Unsere Aussagen zur Beschreibung des Weltausschnittes

$\mathcal{As}_{\text{AL}} = \{$ HP7_e, HP7_d, K23_e, K23_d$\}$

- HP7_e ≈ Harry Potter 7 ist auf Englisch erschienen.
- HP7_d ≈ Harry Potter 7 ist auf Deutsch erschienen.
- K23_e ≈ Kunde 23 kauft englische Bücher.
- K23_d ≈ Kunde 23 kauft deutsche Bücher.

Formelmengen stehen für Zustände des Weltausschnittes,

- in denen alle gegebenen Formeln wahr sind.
- {HP7_e, HP7_d, K23_d , ¬K23_e} : Harry Potter 7 ist in Deutsch und in Englisch erschienen, K23 kauft deutsche aber keine englischen Bücher.
- {HP7_e, HP7_d, K23_d} : Harry Potter 7 ist in Deutsch und in Englisch erschienen, K23 kauft deutsche Bücher (ob er englische Bücher kauft, ist nicht bekannt).

Zum Selbststudium: Datenbanken

Datenbanken ≈ Sammlung von atomarer Aussagen

- In Datenbanken werden atomare Aussagen über die Welt gespeichert, z.B. solche, wie im Beispiel der vorigen Folie, die in einer Datenbank eines Internet-Buchhändlers auftauchen:
  - Die HP7-Aussagen betreffen die Verfügbarkeit von Produkten (Büchern), sind also relevant für die Lieferbarkeit und für Ankündigungen.
  - Die K23-Aussagen betreffen das Kaufverhalten eines Kunden, sind also interessant für die on-line Information des Kunden.
- Da in der Datenbank keine Negation dargestellt wird, ist es üblich, zu vereinbaren, dass eine nicht enthaltene Aussage als falsch gilt (das ist die ‚closed world assumption').
- Für Anfragen an die Datenbank gibt es eine komplexe Sprache (SQL), die aufgrund der Datenbankinhalte ausgewertet wird.
- Das hier verwendete Darstellungsformat der Aussagenlogik, d.h. eine Aussage wird durch ein Aussagensymbol repräsentiert, ist etwas vereinfachend.
  - Die Prädikatenlogik (wird in späteren Kapiteln behandelt) macht es möglich, die interne Struktur von Aussagen zu berücksichtigen.
  - In Datenbankanfragesprachen werden meist spezielle Subsysteme/Subsprachen der Prädikatenlogik verwendet; so ist etwa SQL eine Einschränkung der Prädikatenlogik.

Wahrheitswerte

- sind keine Formeln und können nicht in Formeln auftreten
- Die Menge der *Wahrheitswerte* enthält genau zwei Elemente.
- Wir verwenden die Menge {**0**, **1**}, wobei wir **0** auch ‚falsch' aussprechen und **1** als ‚wahr' aussprechen.
- Häufig werden auch die Mengen {**falsch**, **wahr**}, {**f**, **w**}, {**f**, **t**} verwendet.

Aussagen / Formeln

- können bezüglich einer Interpretation / Belegung wahr oder falsch sein

Die aussagenlogische Semantik

- regelt, wie komplexe Formeln zu ihren Wahrheitswerten kommen
- modelliert die Bedeutung von Formeln über die Gesamtheit aller Möglichkeiten der Wahrheitswertzuordnung (Wahrheitswertverläufe)
- stellt Fachtermini für die Beschreibung von Wahrheitswertverläufen und den Vergleich von Wahrheitswertverläufen bereit.

Belegung von Aussagensymbolen: Zuordnung von Wahrheitswerten

Definition 3.1 (wird fortgesetzt)

Eine ***Belegung*** (oder *Wahrheitswertzuordnung*) für $\mathcal{As}_{AL}$ ist eine Funktion $\mathcal{A}_{\mathcal{As}}: \mathcal{As}_{AL} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, die die Aussagensymbole auf Wahrheitswerte abbildet.

Beispiel

16 verschiedene Belegungen (Weltzustände)

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0
$\mathcal{A}_2$	1	0	0	0
$\mathcal{A}_3$	0	1	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	0
$\mathcal{A}_5$	0	0	1	0
$\mathcal{A}_6$	1	0	1	0
$\mathcal{A}_7$	0	1	1	0
$\mathcal{A}_8$	1	1	1	0

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_9$	0	0	0	1
$\mathcal{A}_{10}$	1	0	0	1
$\mathcal{A}_{11}$	0	1	0	1
$\mathcal{A}_{12}$	1	1	0	1
$\mathcal{A}_{13}$	0	0	1	1
$\mathcal{A}_{14}$	1	0	1	1
$\mathcal{A}_{15}$	0	1	1	1
$\mathcal{A}_{16}$	1	1	1	1

Belegung von Aussagensymbolen: Zuordnung von Wahrheitswerten

Definition 3.1

Eine ***Belegung*** (oder *Wahrheitswertzuordnung*) ist eine Funktion
$\mathcal{A}_{\mathcal{As}}: \mathcal{As}_{AL} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, die die Aussagensymbole auf Wahrheitswerte abbildet.

Für jede Belegung $\mathcal{A}_{\mathcal{As}}$ wird rekursiv eine Funktion $\mathcal{A}: \mathcal{L}_{AL} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ definiert, die alle Formeln bewertet.
Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{As}_{AL}$ sei $\mathcal{A}(\mathsf{A}) = \mathcal{A}_{\mathcal{As}}(\mathsf{A})$.

Für alle Formeln $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

$$\mathcal{A}(\neg \mathsf{F}) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(\mathsf{F}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((\mathsf{F} \wedge \mathsf{G})) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(\mathsf{F}) = \mathbf{1} \text{ und } \mathcal{A}(\mathsf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((\mathsf{F} \vee \mathsf{G})) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(\mathsf{F}) = \mathbf{1} \text{ oder } \mathcal{A}(\mathsf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((\mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G})) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(\mathsf{F}) = \mathbf{0} \text{ oder } \mathcal{A}(\mathsf{G}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}((\mathsf{F} \Leftrightarrow \mathsf{G})) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls } \mathcal{A}(\mathsf{F}) = \mathcal{A}(\mathsf{G}) \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Verknüpfungstafeln für Junktoren

- stellen die Bedingungen der Definition 3.1 übersichtlicher dar.

	F	G	$(F \wedge G)$	$(F \vee G)$	$(F \Rightarrow G)$	$(F \Leftrightarrow G)$
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0	1	1
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	1	1	0
$\mathcal{A}_3$	1	0	0	1	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	1	1	1	1

	F	$\neg F$
$\mathcal{A}'_1$	0	1
$\mathcal{A}'_2$	1	0

- In jeder Zeile steht eine Belegung.
- Alle aufgeführten Belegungen unterscheiden sich in der interessierenden Domäne

Zum Selbststudium: Das allgemeine Schema für Verknüpfungstafeln

	Teilformeln		komplexe, zusammengesetzte Formeln			
	F	G	$(F \wedge G)$	$(F \vee G)$	$(F \Rightarrow G)$	$(F \Leftrightarrow G)$
$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_1(F)$	$\mathcal{A}_1(G)$	$\mathcal{A}_1((F \wedge G))$	$\mathcal{A}_1((F \vee G))$	$\mathcal{A}_1((F \Rightarrow G))$	$\mathcal{A}_1((F \Leftrightarrow G))$
$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_2(F)$	$\mathcal{A}_2(G)$	$\mathcal{A}_2((F \wedge G))$	$\mathcal{A}_2((F \vee G))$	$\mathcal{A}_2((F \Rightarrow G))$	$\mathcal{A}_2((F \Leftrightarrow G))$
$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3(F)$	$\mathcal{A}_3(G)$	$\mathcal{A}_3((F \wedge G))$	$\mathcal{A}_3((F \vee G))$	$\mathcal{A}_3((F \Rightarrow G))$	$\mathcal{A}_3((F \Leftrightarrow G))$
$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4(F)$	$\mathcal{A}_4(G)$	$\mathcal{A}_4((F \wedge G))$	$\mathcal{A}_4((F \vee G))$	$\mathcal{A}_4((F \Rightarrow G))$	$\mathcal{A}_4((F \Leftrightarrow G))$

	F	$\neg F$
$\mathcal{A}'_1$	$\mathcal{A}'_1(F)$	$\mathcal{A}'_1(\neg F)$
$\mathcal{A}'_2$	$\mathcal{A}'_2(F)$	$\mathcal{A}'_2(\neg F)$

- Jede Kombination von Wahrheitswerten für die Teilformeln (F und G) muss in einer der Belegungen $\mathcal{A}_i$ vorkommen.

  ➔ Die Verknüpfungstafel für einen n-stelligen Junktor enthält 2^n Zeilen.

Beispiel: $\mathcal{A}_1(\neg((A \wedge B) \vee C))$

Es sei $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}$ eine Belegung, für die gilt: $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(B) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}(C) = \mathbf{0}$
Dann gilt für die Funktion $\mathcal{A}_1$ (als rekursive Fortsetzung von $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s1}$)

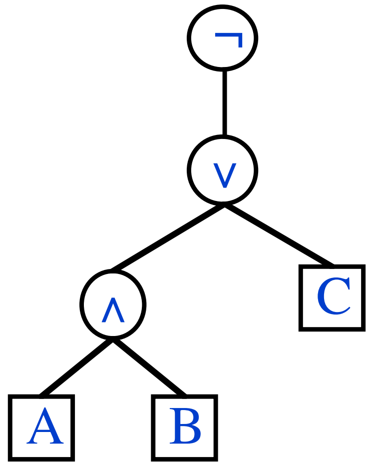
F	G	(F ∧ G)	(F ∨ G)	¬F
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**0**

$\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_1(B) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_1(C) = \mathbf{0}$

$\mathcal{A}_1((A \wedge B)) = \mathbf{0}$

$\mathcal{A}_1(((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{0}$

$\mathcal{A}_1(\neg((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{1}$



Beispiel: $\mathcal{A}_2(\neg((A \wedge B) \vee C))$

Es sei $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}$ eine Belegung, für die gilt: $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}(C) = \mathbf{1}$
Dann gilt für die Funktion $\mathcal{A}_2$ (als rekursive Fortsetzung von $\mathcal{A}_{\mathcal{A}s2}$)

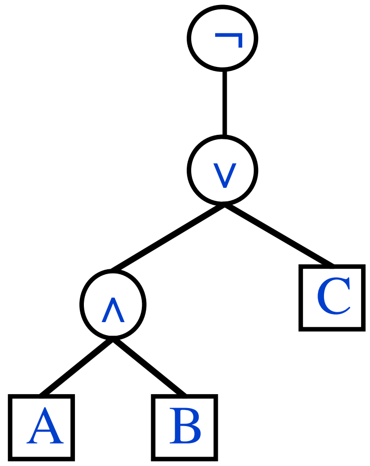
F	G	(F ∧ G)	(F ∨ G)	¬F
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**0**

$\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_2(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_2(C) = \mathbf{1}$

$\mathcal{A}_2((A \wedge B)) = \mathbf{0}$

$\mathcal{A}_2(((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{1}$

$\mathcal{A}_2(\neg((A \wedge B) \vee C)) = \mathbf{0}$



Beobachtungen zu Definition 3.1

Beobachtung 3.1.1

Es sei $\mathcal{A}_{\mathcal{A}S}$ eine Belegung.

- Dann weist $\mathcal{A}$ der Formel F einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert zu.
  - ➔ Die Funktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{A}S}$ stimmen auf den Aussagensymbolen überein.
  - ➔ $\mathcal{A}$ ist eine eindeutige Erweiterung von $\mathcal{A}_{\mathcal{A}S}$. (Prinzip der strukturellen Rekursion)
  - ➔ Im weiteren keine typographische Unterscheidung zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{A}S}$.

Beobachtung 3.1.2

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei Belegungen.

- Wenn für alle Aussagensymbole A_1 von F: $\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}'(A_1)$, dann auch $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$
  - ➔ Für den Wahrheitswert einer Formel F unter einer Belegung spielt die Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagensymbolen, die nicht in F vorkommen, keine Rolle.
  - ➔ Wer mag, sollte ruhig einmal versuchen, diese Beobachtung zu beweisen. Mit dem Prinzip der strukturellen Rekursion geht das ganz einfach.

Zum Selbststudium

Bei Schöning

- werden Belegungen als partielle Funktionen definiert, die also nicht allen Aussagesymbolen einen Wert zuordnen müssen.
- Das macht Beweise viel komplizierter als erforderlich, ohne je richtig zu nützen.
- Deshalb nutzen wir nur Belegungen, die wirklich jedes Aussagensymbol bewerten.
- Daher ist zu bedenken, dass Belegungen, die in Beispielen auftauchen (z.B. auf der nächsten Seite), in der Regel nur unvollständig spezifiziert sind.

Zum Selbststudium: Mögliche Welten und Zustandsbeschreibungen (Spies)

Mögliche Welt (Spies Abs. 1.5 nennt Belegungen ‚Mögliche Welten')
Eine aussagenlogische mögliche Welt zu einer Liste atomarer Aussagen gibt zu jeder Aussage der Liste genau einen Wahrheitswert an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	…
	0	0	0	0	0	0	0	0	…
	1	0	0	0	0	0	0	0	…
	0	1	0	0	0	0	0	0	…
	1	1	0	0	0	0	0	0	…
	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Anmerkungen

Jede Zeile beschreibt eine Konstellation von Wahrheitswertzuordnungen (Belegungen), d.h. einen (prinzipiell) möglichen Zustand der Welt („Mögliche Welt“).
Werden n atomare Aussagen betrachtet, so existieren 2^n verschiedene Wahrheitswertzuordnungen zu diesen atomaren Aussagen, d.h. 2^n mögliche Welten.

Zum Selbststudium: Natürliche Sprache und Junktoren

Die Verknüpfungstafeln der Junktoren

- legen die Bedeutung der aussagenlogischen Junktoren fest
- bestimmen, welche natürlich-sprachlichen Elemente durch die Junktoren symbolisiert werden können

Beispiel: ‚und'

- Der Satz ‚Peter trägt eine Kiste und Paul trägt eine Kiste' ist falsch, wenn ‚Peter trägt eine Kiste' falsch ist oder wenn ‚Paul trägt eine Kiste' falsch ist. Sonst ist der Satz wahr.
  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann durch $\wedge$ symbolisiert werden.
- Der Satz ‚Peter und Paul tragen eine Kiste' beschreiben eine Gemeinschaftsaktion.
  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann nicht einfach durch $\wedge$ symbolisiert werden.
- Der Satz ‚Peter ist gefallen und hat sich verletzt' ist falsch, wenn ‚Peter ist gefallen' falsch ist oder wenn ‚Peter hat sich verletzt' falsch ist. Sonst ist der Satz wahr.
  ➔ Diese Verwendung von ‚und' kann durch $\wedge$ symbolisiert werden.
  Mit $\wedge$ wird aber kein zeitlicher oder kausaler Zusammenhang ausgedrückt.

Die zweistelligen Junktoren

- Eine Formel mit n Aussagensymbolen hat 2^n bzgl. der Aussagensymbole unterscheidbare Belegungen.
- Es gibt 2^{2^n} Möglichkeiten, n Formeln mit n-stelligen (wahrheitsfunktionalen) Junktoren zu verknüpfen. ➔ Es gibt 16 zweistellige Junktoren.
- *Wahrheitsfunktional*: Wahrheitswert der Formel ergibt sich eindeutig aus den Wahrheitswerten der Teilformeln.

	F	G	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{A}_3$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
				$\wedge$						$\vee$		$\Leftrightarrow$				$\Rightarrow$		
					$\not\Rightarrow$		$\not\Leftarrow$		$\not\Leftrightarrow$		$\downarrow$			$\Leftarrow$			$\uparrow$	

$\downarrow$ Peirce-Pfeil (NOR) $\uparrow$ Sheffer-Strich (NAND)

Zum Selbststudium

Triviale und fast-triviale Wahrheitswertfunktionen

- Trivial: Die Wahrheitswertverläufe in den Spalten (1) und (16) sind konstant, also ignorieren die Eingabewerte völlig. Entsprechend macht es keinen Sinn, einen Junktor zu definieren, der eine dieser Funktionen als semantischen Wert hat.
- Fast Trivial: Die Wahrheitswertverläufe in den Spalten (4) und (6) stimmen genau mit einem der Eingabewerte überein, der zweite Eingabewert wird ignoriert. Entsprechend macht es keinen Sinn, einen zweistelligen Junktor zu definieren, der eine dieser Funktionen als semantischen Wert hat.
- Fast Trivial: Die Wahrheitswertverläufe in den Spalten (11) und (13) stimmen genau mit der Negation von einem der Eingabewerte überein, der zweite Eingabewert wird wieder ignoriert. Auch hier macht es keinen Sinn, einen zweistelligen Junktor zu definieren, der eine dieser Funktionen als semantischen Wert hat. Dafür haben wir schließlich die (einstellige) Negation $\neg$.
- Bei den anderen Wahrheitswertverläufen kann man anfangen, darüber zu diskutieren, welchen Nutzen sie haben. Entsprechend gibt es Standard-Symbole und Namen, wie in obiger Tabelle aufgelistet. Wir verwenden die 4 Symbole in der ersten Zeile, könnten aber durchaus auch die anderen in unsere Sprache aufnehmen.

Wahrheitstafeln: Verallgemeinerung der Verknüpfungstafeln

Das Prinzip: Gegeben sei eine Formel F mit n (verschiedenen) Aussagensymbolen.
Tafel mit 2^n Zeilen, die ersten n Spalten mit den Aussagensymbolen beschriftet.
Für jede komplexe Teilformel von F eine weitere Spalte.
In jeder Zeile steht eine Belegung. Belegungen in verschiedenen Zeilen unterscheiden sich bei mindestens einem der interessierenden Aussagensymbole.
Die Berechnung erfolgt von den Teilformeln zu den komplexeren Formeln.

Beispiel: F := (A ∧ B) ⇒ (A ∨ ¬C)

	A	B	C	(A ∧ B)	¬C	(A ∨ ¬C)	(A ∧ B) ⇒ (A ∨ ¬C)
$\mathcal{A}_1$	0	0	0				
$\mathcal{A}_2$	0	0	1				
$\mathcal{A}_3$	0	1	0				
$\mathcal{A}_4$	0	1	1				
$\mathcal{A}_5$	1	0	0				
$\mathcal{A}_6$	1	0	1				
$\mathcal{A}_7$	1	1	0				
$\mathcal{A}_8$	1	1	1				

Wahrheitstafeln zur Berechnung von Wahrheitswertverläufen

für komplexe Formeln

- Mehrere komplexe Formeln (und ihre Teilformeln) können in eine Tafel eingetragen werden.

Beispiel

	A	B	¬A	(¬A ∨ B)	(A ⇒ B)
$\mathcal{A}_1$	0	0	1	1	1
$\mathcal{A}_2$	0	1	1	1	1
$\mathcal{A}_3$	1	0	0	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	1	1

Definition 3.2

Eine Spalte der Wahrheitstafel bezeichnen wir auch als den *Wahrheitswertverlauf* der zugehörigen Formel.

➔ Die Formeln (¬A ∨ B) und (A ⇒ B) haben denselben Wahrheitswertverlauf.

Zum Selbststudium: Formeln vs. Wahrheitswerte

- Formeln sind Zeichenketten.
- Wahrheitswerte sind keine Zeichenketten.
- Aus diesem Grund können eine Formel und ein Wahrheitswert auch nicht identisch sein. Gemäß unserer Farbkodierung gilt: blaue Objekte und grüne Objekte können nicht gleichgesetzt werden.
- Trotzdem finden sich Gleichsetzungen der Art $A = \mathbf{1}$, die ausdrücken sollen, dass A unter einer (ungenannten) Belegung wahr ist, also als Kurzform für $\mathcal{A}(A) = \mathbf{1}$. Wahrheitswertverläufe, an denen wir hier primär interessiert sind, werden durch die Kurzschreibweise nicht gut erfasst. Gewöhnen Sie sich deshalb lieber Schreibweisen an, die die jeweils gemeinte Belegung explizit machen.
- Manche Autoren verwenden auch 0 und 1 als logische Konstanten, die Kontradiktionen oder Tautologien sind. Für diese Konstanten gilt dann also für jede Belegung $\mathcal{A}(0) = \mathbf{0}$ bzw. $\mathcal{A}(1) = \mathbf{1}$. Diese Konstanten sind dann aber keine Wahrheitswerte sondern Formeln, wir haben gemäß unserer Farbdarstellung also blaue und grüne 0-en und 1-en. Wir werden in Kürze die Zeichen $\perp$ (bottom) und $\top$ (top) als entsprechende logische Konstanten einsetzen.

Modelle

Definition 3.3

- Eine Belegung $\mathcal{A}$ heißt genau dann *Modell* für eine Formel F, wenn $\mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$
  ➔ Um festzustellen ob $\mathcal{A}$ Modell von F ist, berücksichtigt man genau die Zelle der Wahrheitstafel, die durch $\mathcal{A}$ und F festgelegt wird.
- Weitere Sprechweisen / Schreibweisen für „$\mathcal{A}$ ist Modell für F“
  - $\mathcal{A}$ macht F wahr, $\mathcal{A}$ erfüllt F
  - F gilt unter der Belegung $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A} \models F$
- Falls $\mathcal{A}$ kein Modell für F ist ($\mathcal{A}(F) = \mathbf{0}$), dann sagen wir auch
  - $\mathcal{A}$ macht F falsch, $\mathcal{A}$ falsifiziert F
  - F gilt nicht unter der Belegung $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{A} \not\models F$
- Wenn **M** eine Formelmenge ist, dann heißt eine Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für jede Formel aus **M** ist, *Modell* für **M**.

Beispiel: Modelle von Formelmengen

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0
$\mathcal{A}_2$	1	0	0	0
$\mathcal{A}_3$	0	1	0	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	0
$\mathcal{A}_5$	0	0	1	0
$\mathcal{A}_6$	1	0	1	0
$\mathcal{A}_7$	0	1	1	0
$\mathcal{A}_8$	1	1	1	0

	HP7_e	HP7_d	K23_e	K23_d
$\mathcal{A}_9$	0	0	0	1
$\mathcal{A}_{10}$	1	0	0	1
$\mathcal{A}_{11}$	0	1	0	1
$\mathcal{A}_{12}$	1	1	0	1
$\mathcal{A}_{13}$	0	0	1	1
$\mathcal{A}_{14}$	1	0	1	1
$\mathcal{A}_{15}$	0	1	1	1
$\mathcal{A}_{16}$	1	1	1	1

Die Formelmenge {HP7_e, HP7_d, K23_d , ¬K23_e} hat hier ein Modell: $\mathcal{A}_{12}$

Die Formelmenge {HP7_e, HP7_d, K23_d} hat hier zwei Modelle: $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{16}$

{(HP7_e ∨ HP7_d), (K23_d ∧ ¬K23_e)} hat hier drei Modelle: $\mathcal{A}_{10}$, $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{12}$

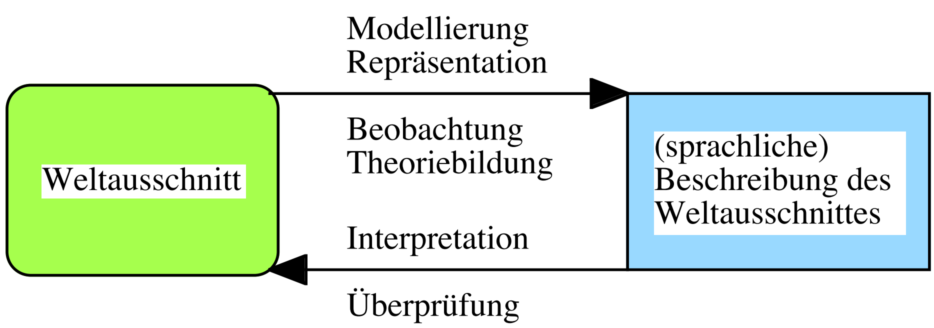
Begriffe der Metasprache: Semantik (1)

Belegung

- Wahrheitswertzuordnung zu Formeln ➔ eine Zeile der Wahrheitstafel

Modell einer Formel

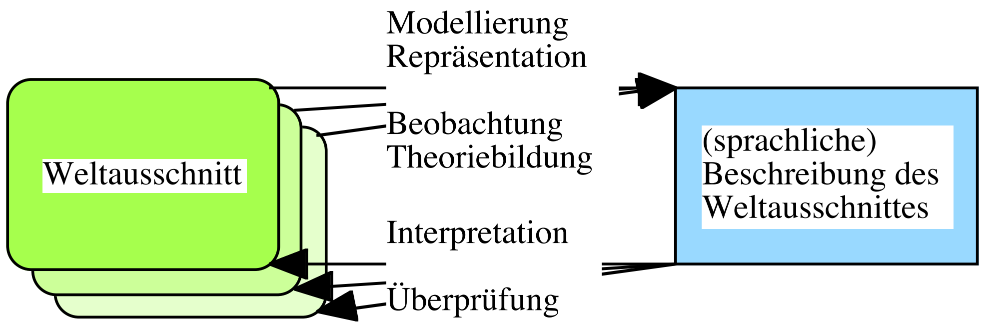
- Belegung, die die Formel wahr macht ➔ eine Zelle der Wahrheitstafel



Beschreibungen können unvollständig sein

Wahrheitswertverlauf einer Formel

- Die Wahrheitswerte der Belegungen ➔ eine Spalte der Wahrheitstafel



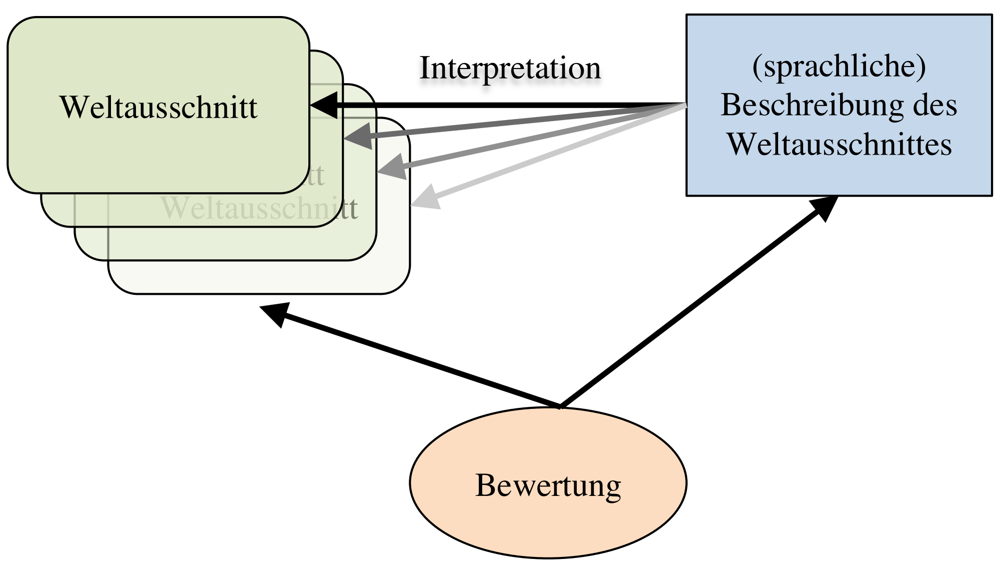
- Formeln und Formelmengen können verschiedene Modelle haben.

- Mathematische Abstraktion: Interpretation in einem Weltausschnitt als Belegung von Aussagensymbolen.

Begriffe der Metasprache: Semantik (2)

Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit – Gültigkeit – Kontingenz

- Eigenschaften von Formeln, die über ihre Wahrheitswertverlauf definiert sind.
- Klassifikation einer Formel gemäß der zugehörigen Spalte in der Wahrheitstafel.



Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit

Verhalten von Formeln (Formelmengen) unter beliebigen Belegungen

Definition 3.4

- Eine Formel F heißt genau dann *erfüllbar*, falls ein Modell für F existiert, anderenfalls heißt F *unerfüllbar* (*Kontradiktion*)
- Eine Formel F heißt genau dann *falsifizierbar*, falls eine falsifizierende Belegung für F existiert.
- Eine Formelmenge **M** heißt genau dann *erfüllbar*, falls ein Modell für **M** existiert, andernfalls heißt sie *unerfüllbar*.

Beispiele 3.4.1

- Jedes Aussagensymbol ist erfüllbar und falsifizierbar. z.B. $\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{0}$
- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg C)$ ist erfüllbar. z.B. $\mathcal{A}_1(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_1(B) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_1(C) = \mathbf{0}$
- $A \wedge \neg A$ ist unerfüllbar.
- $\{A \vee B, A \wedge B\}$ ist erfüllbar. z.B. $\mathcal{A}_3(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_3(B) = \mathbf{1}$
- $\{A, \neg A\}$ ist unerfüllbar, obwohl die Formeln A und ¬A erfüllbar sind.

Zum Selbststudium

Die leere (Formel-)Menge

- Es hat sich eingebürgert, die Definitionen, die über Formelmengen reden, wie folgt auf die leere (Formel-)Menge anzuwenden:
  - Jede Belegung ist Modell der leeren Menge.
  - Die leere Menge ist *erfüllbar*.

Unerfüllbare und allgemeingültige Formel(menge)n

- Eine unerfüllbare Formel(menge) kann keinen Weltausschnitt korrekt beschreiben.
- Eine allgemeingültige Formel beschreibt jeden Weltausschnitt unter jeder Interpretation korrekt.
  - ➔ Unerfüllbare und allgemeingültige Formeln können nicht dazu dienen einen Weltausschnitt oder eine Interpretation von dem/der anderen zu unterscheiden.

Allgemeingültigkeit – Kontingenz

Definitionen 3.5

- Eine Formel F heißt genau dann *allgemeingültig*, falls jede Belegung $\mathcal{A}$ ein Modell für F ist.
- Weitere Sprechweisen / Schreibweisen für „F ist allgemeingültig“:
  - F ist *gültig*
  - F ist eine *Tautologie*
  - $\models$ F
- Eine Formel F heißt genau dann *kontingent*, wenn sie erfüllbar und falsifizierbar ist (d.h. falls F ein Modell $\mathcal{A}$ hat, aber es auch Belegung $\mathcal{A}'$ gibt, die kein Modell für F ist).

Beispiele

- Aussagensymbole sind kontingente Formeln
- $A \lor \neg B$ ist kontingent $\mathcal{A}_3(A) = \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_3(B) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}_3(A \lor \neg B) = \mathbf{1}$
  $\mathcal{A}_2(A) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}_2(B) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}_2(A \lor \neg B) = \mathbf{0}$
- $A \lor \neg A$ ist allgemeingültig

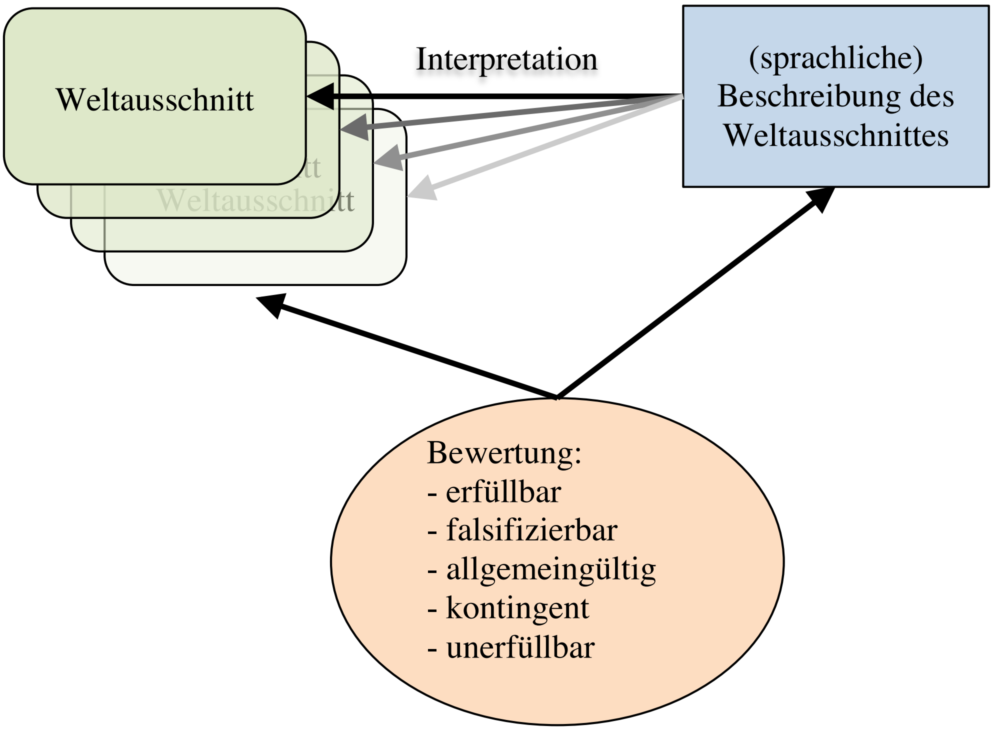
Allgemeingültigkeit – Kontingenz – Unerfüllbarkeit

(Aussagen-)Logische Formeln

<table>
<tr><td colspan="2">erfüllbare Formeln</td><td rowspan="2">unerfüllbare Formeln
Kontradiktionen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(allgemein-) gültige Formeln
Tautologien</td><td>kontingente Formeln</td></tr>
<tr><td colspan="2">falsifizierbare Formeln</td></tr>
<tr><td>wahr unter allen Belegungen
Wahrheitswertverlauf konstant 1
jede Belegung ist ein Modell</td><td>wahr / falsch unter manchen Belegungen
Wahrheitswertverlauf nicht konstant
es gibt ein Modell und eine falsifizierende Belegung</td><td>falsch unter allen Belegungen
Wahrheitswertverlauf konstant 0
es existiert kein Modell</td></tr>
</table>

- Die allgemeingültigen und die unerfüllbaren Formeln sind *logisch interessant*, da sie sich unter jeder beliebigen Belegung gleich verhalten.
- Die kontingenten Formeln sind *epistemisch interessant*, da sie Aussagen über die Welt machen.

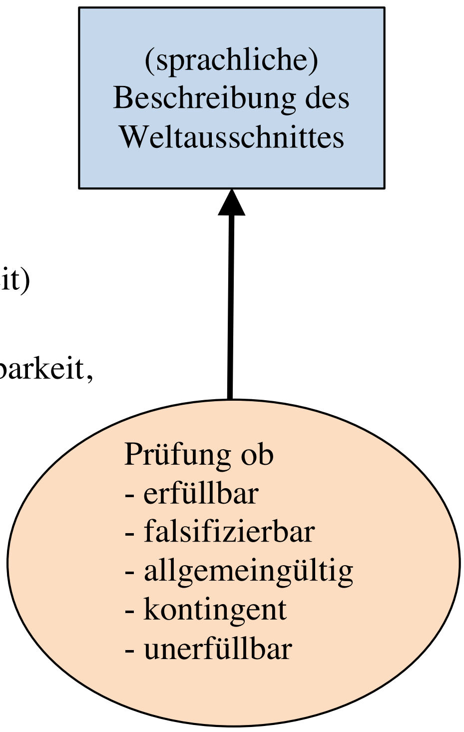
Allgemeingültigkeit – Kontingenz – Unerfüllbarkeit



Verfahren zur Klassifikation von Formeln

Wie kann man beliebige Formeln oder Fomelmengen automatisch semantisch bewerten (klassifizieren)

- Wie laufen die Verfahren?
- Können wir uns auf das Ergebnis verlassen? (Korrektheit)
- Wie viele Verfahren benötigen wir? (Reduzierbarkeit)
- Wie aufwendig ist die Prüfung mit den Verfahren?
- Wie aufwendig ist das beste Verfahren? (Entscheidbarkeit, Komplexität)



Prüfung auf Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit

- Für eine Formel F mit n Aussagensymbolen kann eine komplette Wahrheitstafel berechnet werden.
  - F ist *erfüllbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert **1** für F ergibt.
  - F ist *allgemeingültig*, falls alle Belegungen den Wahrheitswert **1** für F ergeben.
  - F ist *falsifizierbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert **0** für F ergibt.
  - F ist *unerfüllbar*, falls keine Belegung den Wahrheitswert **1** für F ergibt.

Ein einfaches Verfahren

- zur Prüfung dieser Eigenschaften basiert also auf der Erstellung und Auswertung von Wahrheitstafeln
- Die Tafeln können aber sehr groß werden.

Verallgemeinerbarkeit ist aber beschränkt

- nicht direkt anwendbar für
  - (Un)erfüllbarkeitsprüfung von (unendlichen) Formelmengen
  - kompliziertere Logiken (Prädikatenlogik)

Zur Erinnerung: Ein erster Algorithmus-Begriff SE1 - Level 1 Folie 76

- Wir verstehen unter einem Algorithmus einen **endlichen Text**, in dem ein für einen Prozessor (Interpreter) eindeutiges allgemeines und schrittweises **Problemlösungsverfahren** aus **Aktionen**, die auf **sprachlichen Einheiten** arbeiten, beschrieben ist.
- Ein Algorithmus terminiert, wenn er nicht nur in einer endlichen Vorschrift beschrieben ist, sondern auch nach endlich vielen Schritten seine Bearbeitung beendet.

[Formulierung und Hervorhebung: SE1 - Level 1 Folie 76]

Zwei ergänzende Anmerkungen zur Termination:

- Es ist wichtig, dass ein Algorithmus für jede Eingabe (für die der Algorithmus konzipiert ist) nach endlich vielen Verarbeitungsschritten stoppt.
- Die Eigenschaft eines Berechnungsverfahrens zu terminieren, sollte bewiesen werden.

Informelle Beschreibung des Begriffs "Algorithmus"

(1) Ein Algorithmus wird durch eine endliche Menge von Instruktionen endlicher Größe gegeben.
(2) Es existiert ein berechnender Agent (Mensch oder Maschine), der auf der Grundlage Instruktionen die Berechnungen durchführen kann.
(3) Es existieren Einrichtungen (Komponenten) für die Durchführung, Speicherung und den Wiederabruf von Berechnungsschritten.
(4) Sei *ALG* ein Algorithmus entsprechend (1) und *AG* ein berechnender Agent im Sinne von (2). Dann führt *AG* die Berechnungen auf der Grundlage von *ALG* so durch, dass für jede gegebene Eingabe (Aufgabenstellung) die Berechnung in diskreten Berechnungsschritten, d.h. ohne die Methode von kontinuierlichen Methoden oder analogen Verfahren, erfolgt.
(5) *AG* führt die Berechnungen auf der Grundlage von *ALG* deterministisch durch, d.h. ohne Verwendung von Zufallsmethoden oder –hilfsmitteln (etwa einem Würfel, etc.).

[Charakterisierung folgt: Rogers 1987]

Entscheidungsprozeduren

Definition

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Formeln, d.h. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$. Ein Algorithmus A_{EP} ist eine Entscheidungsprozedur für $\mathcal{P}$, falls für jede Formel $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$ gilt:

- der Algorithmus A_{EP} terminiert,
- A_{EP} liefert die Antwort 'JA' nur wenn $\mathsf{F} \in \mathcal{P}$ (Korrektheit),
- A_{EP} liefert die Antwort 'JA' immer wenn $\mathsf{F} \in \mathcal{P}$ (Vollständigkeit)
- A_{EP} liefert die Antwort 'NEIN' sonst, also wenn $\mathsf{F} \notin \mathcal{P}$.

Anmerkungen:

- der Algorithmus A_{EP} liefert für jede Formel eine Antwort, er "entscheidet" zwischen den $\mathcal{P}$-Fällen und den Nicht-$\mathcal{P}$-Fällen.
- Entsprechend zur obigen Definition kann auch für andere Wortmengen, d.h. andere Sprachen, die Frage der Entscheidbarkeit gestellt werden.
- Das Thema "Entscheidbarkeit" betrifft insbesondere die Frage, welche Probleme *entscheidbar* und welche *unentscheidbar* sind. [Unentscheidbare Probleme sind solche, für die es keine Entscheidungsprozeduren gibt.]

Zum Selbststudiumg: Literaturhinweise zu *Algorithmen & Entscheidbarkeit*

- Auf die folgenden Bücher, die in Veranstaltungen des Master-Studiums für Sie interessant werden können, wurde in den letzten Folien Bezug genommen:
  - Rogers, Hartley (1987). *Theory of recursive functions and effective computability*. Cambridge, MA: MIT-Press.
  - Ben-Ari, Mordechai (2001). *Mathematical logic for computer science*. London: Springer-Verlag. (second edition).

- Das Thema "Entscheidbarkeit" wird im weiteren Verlauf von FGI-1 noch vertieft behandelt werden.

Allgemeingültigkeit – Unerfüllbarkeit

Satz 3.1: Eine Formel F ist genau dann eine Tautologie, wenn ¬F unerfüllbar ist.
Voraussetzungen: Definitionen 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, F sei eine Formel.
Bew.: F ist eine Tautologie
GDW. jede Belegung $\mathcal{A}$ Modell für F ist, d.h. $\mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$ [Def. Tautologie]
GDW. jede Belegung $\mathcal{A}$ ¬F falsch macht, d.h. $\mathcal{A}(\neg F) = \mathbf{0}$ [Def. 3.1]
GDW. ¬F besitzt kein Modell [Def. Modell]
GDW. ¬F ist unerfüllbar [Def. unerfüllbar]

Satz 3.2: Eine Formel F ist genau dann unerfüllbar, wenn ¬F eine Tautologie ist.
Voraussetzungen und Bew.: Analog zum vorherigen.

➔ Zu jeder allgemeingültigen Formel existiert eine korrespondierende unerfüllbare Formel und umgekehrt.

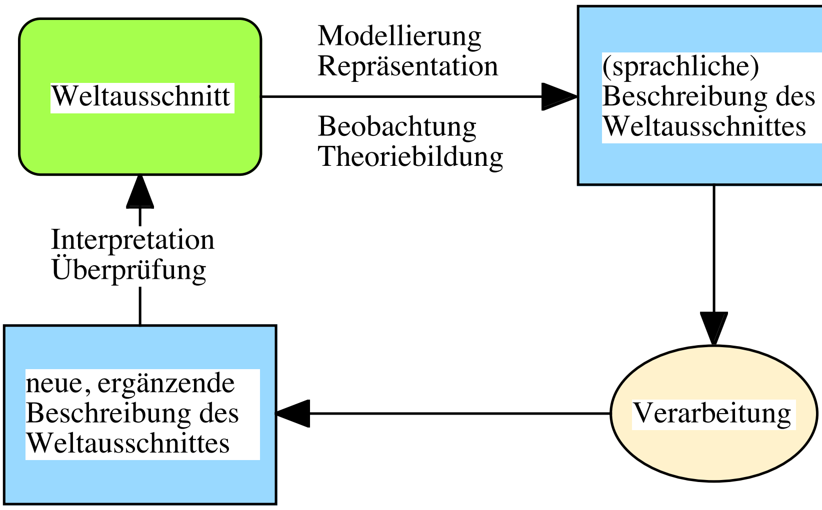
allgemeingültig		**unerfüllbar**
$A \vee \neg A$	$\rightarrow$	$\neg(A \vee \neg A)$
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\leftarrow$	$A \wedge \neg A$

➔ Jedes Verfahren, das Allgemeingültigkeit einer Formel prüfen kann, kann ich mit geringem Zusatzaufwand verwenden, um Unerfüllbarkeit einer Formel zu prüfen, und umgekehrt.

So geht es weiter: Begriffe der Metasprache: Semantik (3)

Äquivalenz – Folgerung

- Beziehungen zwischen Formeln, die über ihre Wahrheitswertverläufe definiert sind
- Vergleich zweier Spalten in der Wahrheitstafel.



Erfüllbarkeit – Unerfüllbarkeit – Folgerung

- Auch für unendliche Formelmengen definiert.

Wichtige Konzepte in diesem Foliensatz

- Wahrheitswert, Belegung, Wahrheitstafel
- Wahrheitswertverlauf
- Modell
- Erfüllbarkeit, Falsifizierbarkeit, Kontingenz
- Unerfüllbarkeit / Kontradiktion, Allgemeingültigkeit / Tautologie
- Entscheidungsverfahren