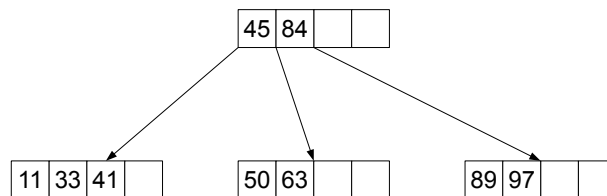
	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013

Aufgabe 1: Einfügen und Löschen in B-Bäumen

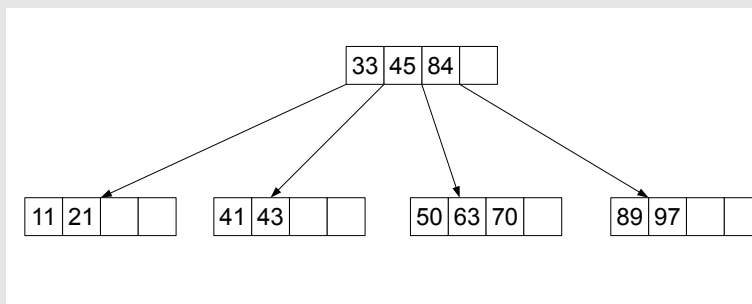
(16 Punkte)

- a) Gegeben ist der unten vereinfacht dargestellte **B-Baum** der Klasse $\tau(2, h)$. Fügen Sie die (Datensätze mit den) Schlüsselwerte(n) **43, 70, 21, 9, 26, 74, 14, 29, 65, 31, 55, 49 und 64** in der gegebenen Reihenfolge ein. Geben Sie in jedem Einfügeschritt die verwendete Maßnahme (einfaches Einfügen in einen Knoten, Splitten) an und zeichnen Sie den Baum nach jedem Knotensplit neu. Als Splitfaktor wird dabei $m = 1$ gewählt. (7 Punkte)




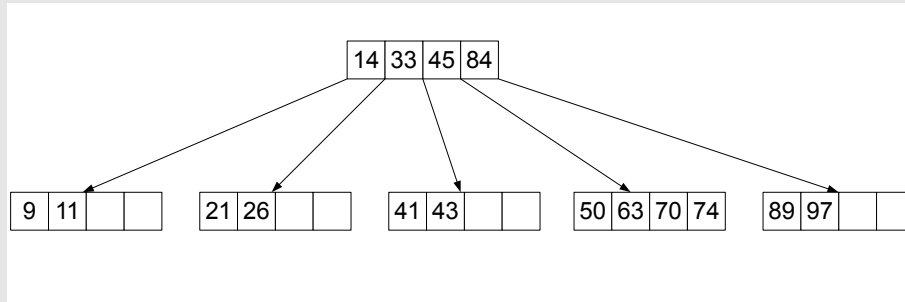
Lösungsvorschlag:

Schlüsselwert 43 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 70 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 21 (Splitten)

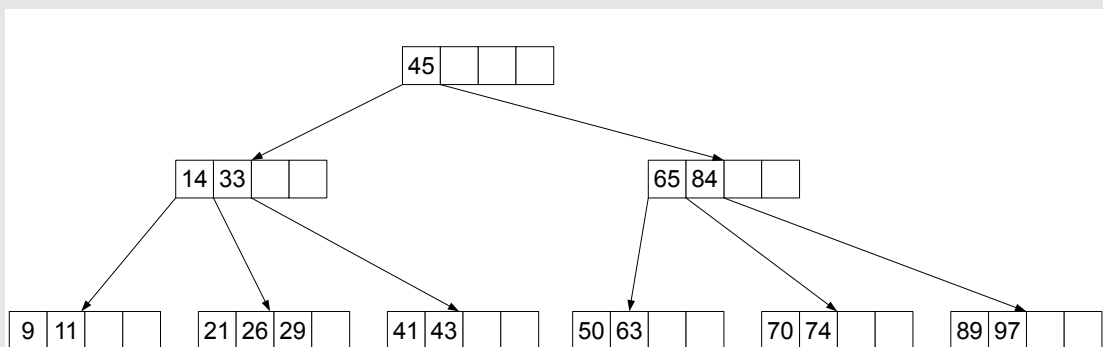


Schlüsselwert 9 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 26 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 74 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 14 (Splitten)

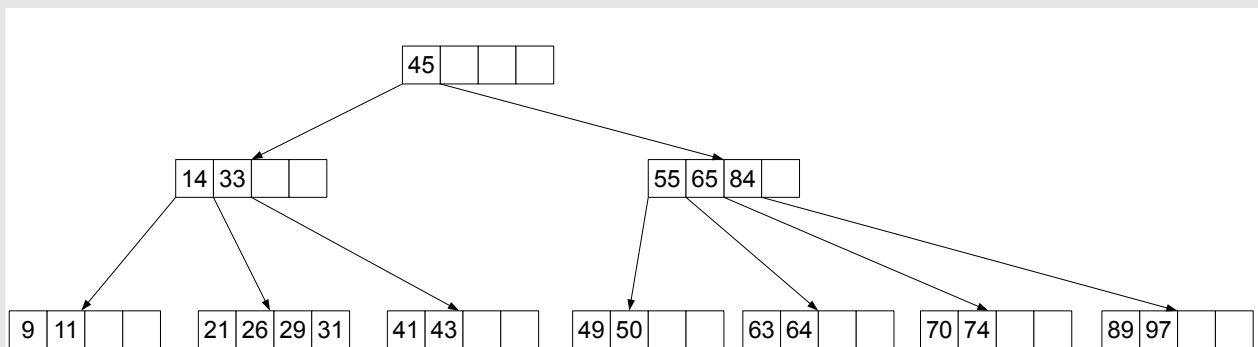
	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013




Schlüsselwert 29 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 65 (Splitten)

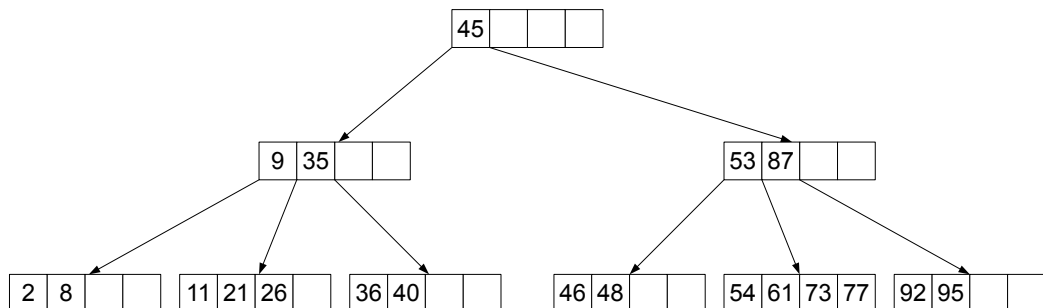


Schlüsselwert 31 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 55 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 49 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 64 (Splitten)



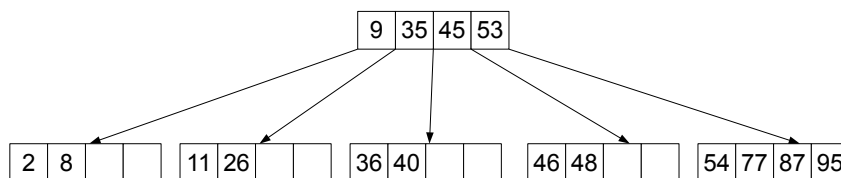
	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013

- b) Gegeben ist der unten dargestellte **B-Baum** der Klasse $\tau(2, h)$. Löschen Sie die (Datensätze mit den Schlüsselwerte(n) **21, 61, 73, 92, 48, 87, 77, 53 und 36** in der gegebenen Reihenfolge. Geben Sie in jedem Löschschritt die verwendete Maßnahme (einfaches Löschen, Mischen, Ausgleichen) an und zeichnen Sie den Baum nach jeder Veränderung der Knotenstruktur (Mischen, Ausgleichen) neu. Für Ausgleichsoperationen sollen nur unmittelbare Nachbarknoten herangezogen werden. (5 Punkte)




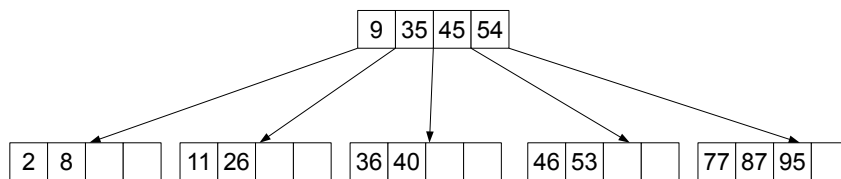
Lösungsvorschlag:

Schlüsselwert 21 (einfaches Löschen)
 Schlüsselwert 61 (einfaches Löschen)
 Schlüsselwert 73 (einfaches Löschen)
 Schlüsselwert 92 (Mischen)

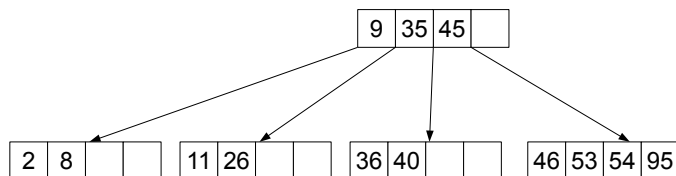


Schlüsselwert 48 (Ausgleichen)

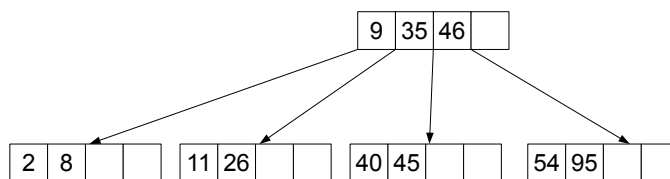
	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013




Schlüsselwert 87 (einfaches Löschen)
 Schlüsselwert 77 (Mischen)



Schlüsselwert 53 (einfaches Löschen)
 Schlüsselwert 36 (Ausgleichen)



	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

- c) Fügen Sie folgende Schlüssel in der angegebenen Reihenfolge in einen zu Beginn leeren **B-Baum** der Klasse $\tau(2, h)$ mit einem Splitfaktor $m=2$ ein:

33, 6, 45, 69, 42, 4, 40, 72, 37, 79, 50 und 80

Zeichnen Sie den Baum nach jeder Umordnung von Elementen in andere Knoten und nach jedem erforderlichen Splitvorgang. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Schlüsselwert 33 (einfaches Einfügen)

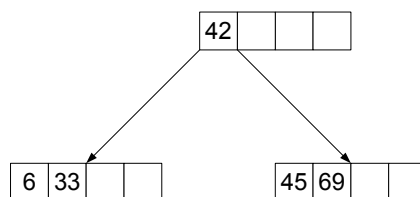
Schlüsselwert 6 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 45 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 69 (einfaches Einfügen)

6	33	45	69
---	----	----	----

Schlüsselwert 42 (Splitten)




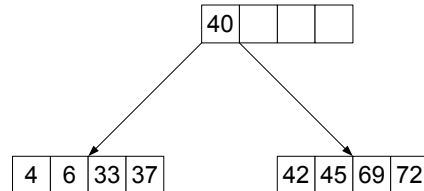
Schlüsselwert 4 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 40 (einfaches Einfügen)

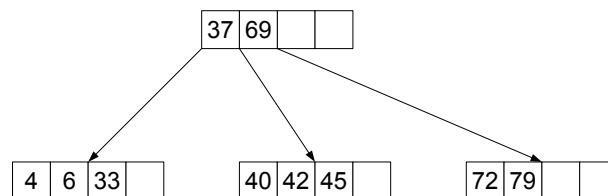
Schlüsselwert 72 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 37 (Ausgleichen)

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013

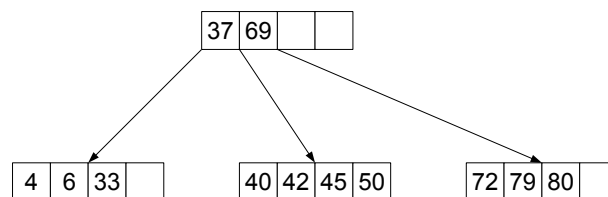


Schlüsselwert 79 (Splitten)



Schlüsselwert 50 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 80 (einfaches Einfügen)




Aufgabe 2: Berechnungen in B-Bäumen

(6 Punkte)

a) Gegeben ist ein **B-Baum** der Klasse $\tau(4, h)$.

Wie groß muss h mindestens sein, wenn der Baum 512 Einträge (Datensätze) enthält? Begründen Sie Ihre Entscheidung und zeigen Sie zugehörige Rechenwege auf.

(2 Punkte)

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

Lösungsvorschlag:

i) maximale Füllmenge für $h = 1$:

1 Wurzel: 8 Einträge

\Rightarrow maximal $1 \cdot 8 = 8$ Einträge
 $\Rightarrow h > 1$

maximale Füllmenge für $h = 2$:

1 Wurzel: 8 Einträge
 9 Blattknoten: $9 \cdot 8$ Einträge

\Rightarrow maximal $10 \cdot 8 = 80$ Einträge
 $\Rightarrow h > 2$

maximale Füllmenge für $h = 3$:

1 Wurzel: 8 Einträge
 9 Knoten der 1. innerer Ebene: $9 \cdot 8$ Einträge
 81 Blattknoten: $81 \cdot 8$ Einträge


\Rightarrow maximal $91 \cdot 8 = 728$ Einträge
 $\Rightarrow h \geq 3$

ii) Bei einem B-Baum der Klasse $\tau(k, h)$ mit n Schlüsseln gilt für seine Höhe $\log_{2k+1}(n+1) \leq h$ (Skript Kapitel 7, Folie 22):

$$h \geq \log_9(513) = 2,84007$$

Das bedeutet in unserem Fall $h \geq 3$.

b) Gegeben sei ein vollständiger **B-Baum** der Klasse $\tau(5, 3)$. Wieviele Knoten (Seiten) müssen im Durch-

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

schnitt gelesen werden, um einen Datensatz zu finden?

(2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- i) Die Wurzel besitzt 10 Einträge.
 \Rightarrow 11 innere Knoten (je 10 Einträge)
 \Rightarrow 121 Blatt-Knoten

$$\Rightarrow (1 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 121 \cdot 3) / 133 = 386 / 133 = 2,902$$

- ii) Der Baum ist vollständig belegt, also gilt für $f_{avg}(max)$ (Skript Kapitel 7, Folie 30):

$$\begin{aligned}
 f_{avg}(max) &= h - \frac{1}{2k} + \frac{h}{(2k+1)^h - 1} \\
 &= 3 - \frac{1}{10} + \frac{3}{(11)^3 - 1} \\
 &= 2,902
 \end{aligned}$$

- c) Gegeben ist ein **B-Baum** der Klasse $\tau(k, 5)$.

Wie groß muss k mindestens sein, wenn der Baum 3014 Einträge (Datensätze) enthält? Begründen Sie Ihre Entscheidung und zeigen Sie zugehörige Rechenwege auf. (2 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie die maximale Füllmenge des Baumes für unterschiedliche Ausprägungen von k (z. B. $k = 1, 2, 3, 4, \dots$).


Lösungsvorschlag:

- i) maximale Füllmenge für $k = 1$:

1 Wurzel:	2 Einträge
3 Knoten der 1. innerer Ebene:	$3 \cdot 2$ Einträge
9 Knoten der 2. innerer Ebene:	$9 \cdot 2$ Einträge
81 Knoten der 3. innerer Ebene:	$81 \cdot 2$ Einträge
243 Blattknoten:	$243 \cdot 2$ Einträge

$$\Rightarrow \text{maximal } 337 \cdot 2 = 674 \text{ Einträge}$$

$$\Rightarrow k > 1$$

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

maximale Füllmenge für $k = 2$:

1 Wurzel:	4 Einträge
5 Knoten der 1. inneren Ebene:	$5 \cdot 4$ Einträge
25 Knoten der 2. inneren Ebene:	$25 \cdot 4$ Einträge
125 Knoten der 3. inneren Ebene:	$125 \cdot 4$ Einträge
625 Blattknoten:	$625 \cdot 4$ Einträge

\Rightarrow maximal $781 \cdot 4 = 3124$ Einträge

$\Rightarrow k \geq 2$

- ii) Bei einem B-Baum der Klasse $\tau(k, h)$ mit n Schlüsseln gilt für seine Höhe $\log_{2k+1}(n+1) \leq h$ (Skript Kapitel 7, Folie 22).

Für $k = 1$ ergibt sich: $\log_3(3015) = 7.292 > 5$.

Für $k = 2$ ergibt sich: $\log_5(3015) = 4.978 < 5 \Rightarrow k \geq 2$


- iii) Der Baum ist vollständig belegt, also gilt für die maximale Anzahl an Knoten (Zusatzmaterial Härder, Seite 9):

$$N_{max}(k, h) = \frac{(2k+1)^h - 1}{2k}$$

Jeder dieser Knoten besitzt $2k$ Datensätze. Daraus ergibt sich folgende Gesamtanzahl an im Baum enthaltenen Datensätzen:

$$\begin{aligned}
 n_{max} &= (2k+1)^h - 1 \\
 \Rightarrow k &= \frac{1}{2}((n_{max} + 1)^{1/h} - 1) \\
 \Rightarrow k &= \frac{1}{2}((3014 + 1)^{1/5} - 1) \\
 \Rightarrow k &= 1,982
 \end{aligned}$$

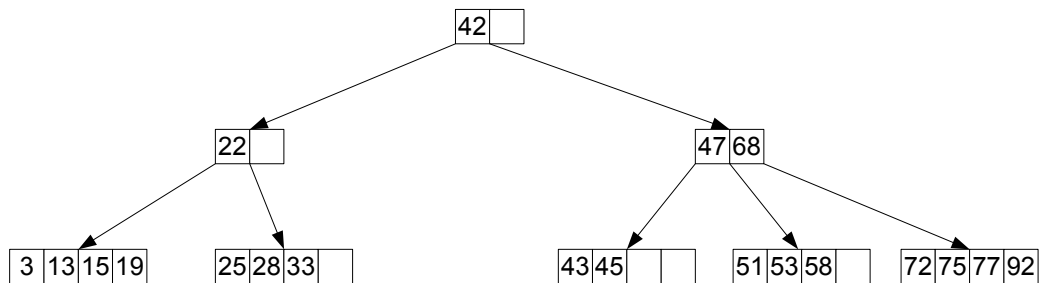
Das bedeutet in unserem Fall $k \geq 2$.

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken		WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013

Aufgabe 3: Einfügen und Löschen in B*-Bäumen

(11 Punkte)

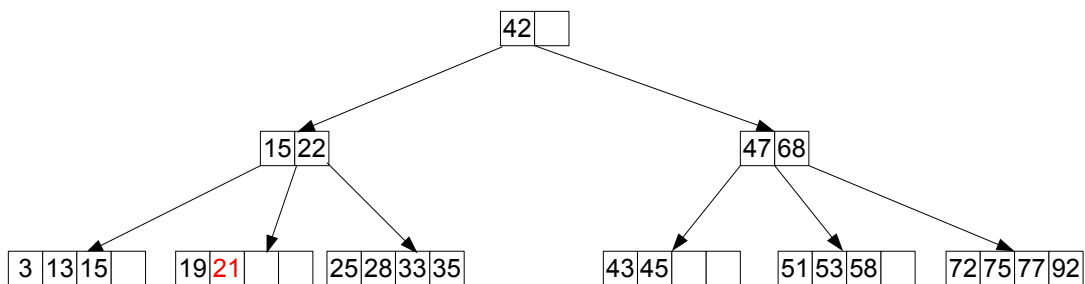
- a) Nehmen Sie einen Split-Faktor von 1 (Normalfall) an und fügen Sie in den nachfolgend vereinfacht dargestellten **B*-Baum** der Klasse $\tau(1, 2, h^*)$ die Schlüsselwerte **35, 21, 61, 46, 55, 1, 2, 65 und 81** in dieser Reihenfolge ein. Für die Verzweigungen an den Werten der inneren Knoten werden die Vergleichsoperatoren \leq und $>$ für links bzw. rechts verwendet. Geben Sie in jedem Einfügeschritt die verwendete Maßnahme (einfaches Einfügen in einen Knoten, Splitten) an und zeichnen Sie den Baum nach jedem Knotensplit neu. (6 Punkte)



Lösungsvorschlag:

Schlüsselwert 35 (einfaches Einfügen)


Schlüsselwert 21 (Splitten)

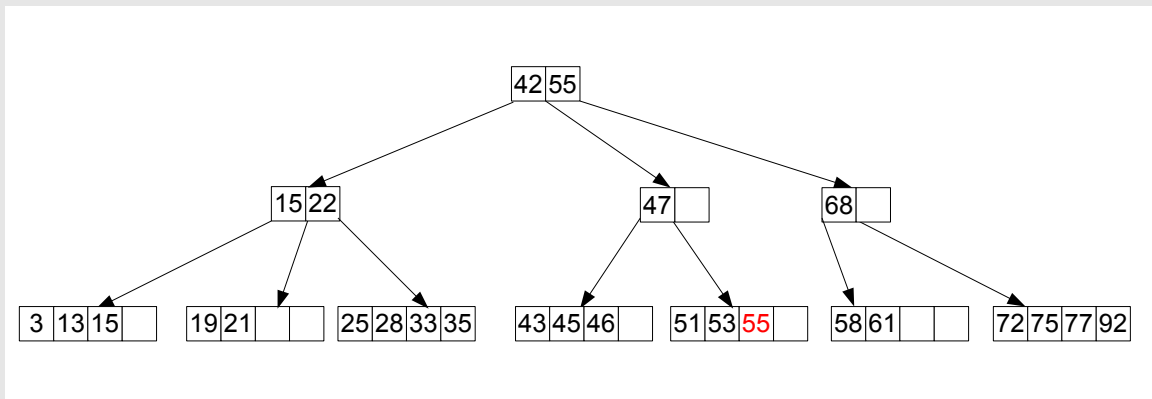


Schlüsselwert 61 (einfaches Einfügen)

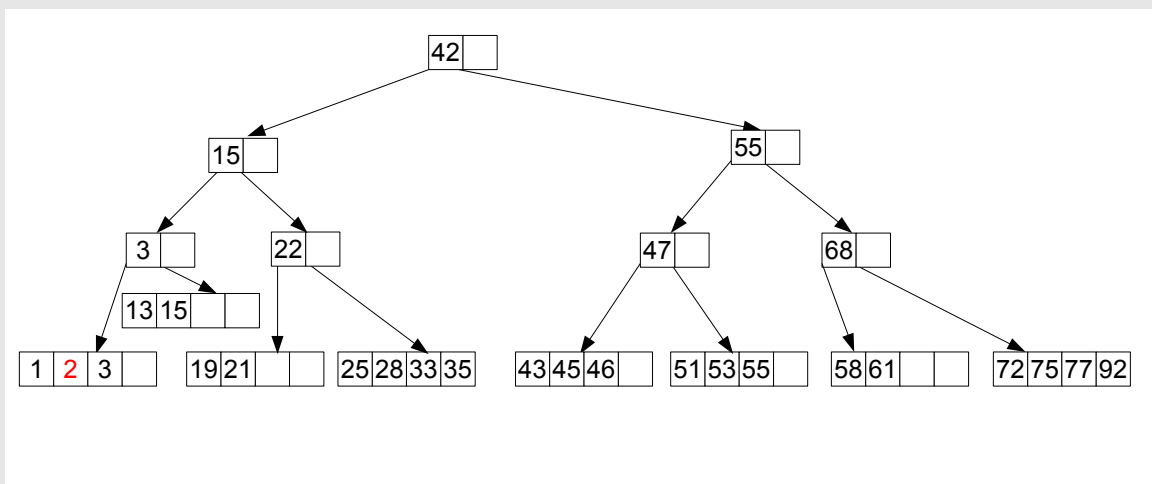
Schlüsselwert 46 (einfaches Einfügen)

Schlüsselwert 55 (Splitten)


	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

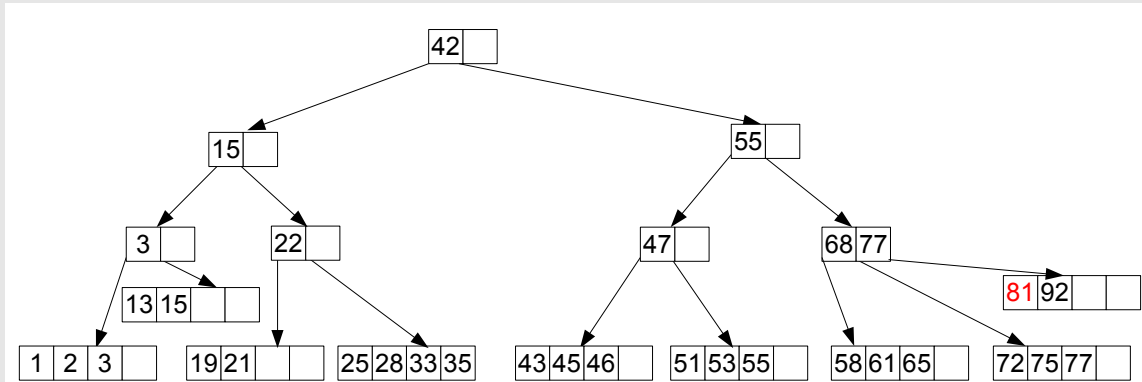



Schlüsselwert 1 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 2 (Splitten)



Schlüsselwert 65 (einfaches Einfügen)
 Schlüsselwert 81 (Splitten)

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	



	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

- b) Nehmen Sie einen Split-Faktor von 1 (Normalfall) an und löschen Sie aus dem in Aufgabenteil a) vereinfacht dargestellten **B*-Baum** die Schlüsselwerte **19, 92, 45, 33, 13 und 15** in dieser Reihenfolge. Für die Verzweigungen an den Werten der inneren Knoten werden die Vergleichsoperatoren \leq und $>$ für links bzw. rechts verwendet. Geben Sie in jedem Löschschritt die verwendete Maßnahme (einfaches Löschen, Mischen, Ausgleichen) an und zeichnen Sie den Baum nach jedem Misch- und Ausgleichsvorgang neu. Für Ausgleichsoperationen sollen nur unmittelbare Nachbarknoten herangezogen werden.

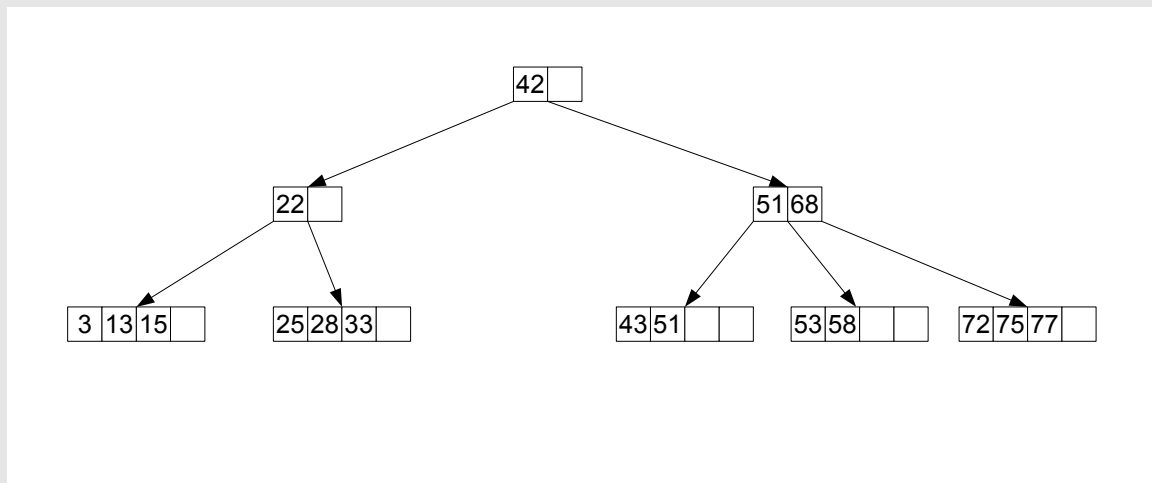
(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Schlüsselwert 19 (einfaches Löschen)

Schlüsselwert 92 (einfaches Löschen)


Schlüsselwert 45 (Ausgleichen)

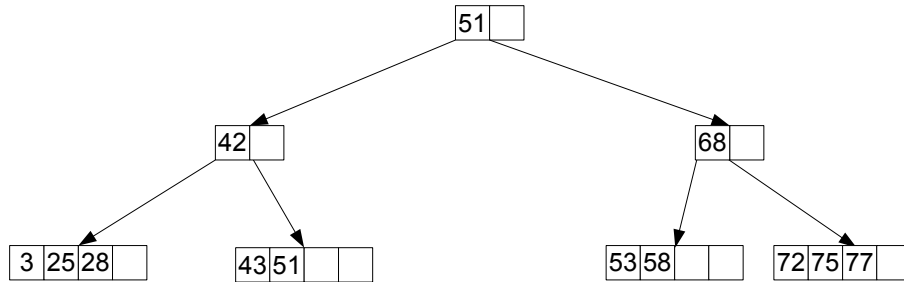



Schlüsselwert 33 (einfaches Löschen)

Schlüsselwert 13 (einfaches Löschen)

Schlüsselwert 15 (Mischen, Ausgleichen)

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	



	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken			WS 2011/12
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)			
	Gesamtpunktzahl	40			
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013	

Aufgabe 4: Berechnungen von B*-Bäumen

(7 Punkte)

Geben Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils das Ergebnis und den dazugehörigen Berechnungsweg an.

a) Gegeben sei ein vollständig gefüllter B*-Baum der Klasse $\tau(2, 4, 4)$.

- (1) Wieviele Knoten (Seiten) müssen im Durchschnitt gelesen werden, um einen Datensatz zu finden?
(1 Punkt)

Lösungsvorschlag:

Da nur die Blatt-Knoten Datensätze enthalten, müssen immer genau 4 Knoten gelesen werden.

- (2) Wieviele Knoten (Seiten) müssen gelesen werden, um alle Datensätze in dem B*-Baum aufzufinden?
(2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Eine vollständig gefüllte Wurzel (4 Einträge)

⇒ 5 innere Knoten auf der 1. inneren Ebene (jeweils 4 Einträge)

⇒ 25 innere Knoten auf der 2. inneren Ebene (jeweils 4 Einträge)

⇒ 125 Blatt-Knoten (jeweils 8 Einträge)

Da die einzelnen Blatt-Knoten durch Zeiger verbunden sind, reicht es aus, den Baum einmal von der Wurzel aus zu einem der äußeren Blätter zu durchlaufen und dann alle Blatt-Knoten zu lesen. ⇒ 1 Wurzel + 2 innere Knoten + 125 Blatt-Knoten = 128 Knoten

b) Gegeben sei ein B*-Baum der Klasse $\tau(3, 4, h^*)$ mit 183 voll besetzte Blattknoten.

- (1) Wieviele Knoten muss der Baum insgesamt mindestens besitzen? (2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

$k=3 \Rightarrow$ ein innerer Knoten hat maximal 6 Einträge und 7 Sohnknoten

⇒ es sind $27 = \lceil 183 / (2 \cdot 3 + 1) \rceil$ innere Knoten auf der den Blättern nächstoberen Ebene nötig

⇒ es sind $4 = \lceil 27 / (2 \cdot 3 + 1) \rceil$ innere Knoten auf der danach folgenden Ebene nötig


⇒ es ist eine Wurzel nötig

⇒ $183 + 27 + 4 + 1 = 215$ Knoten

- (2) Wieviele Datensätze beinhaltet der Baum aus Teilfrage (1)? (2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Da sich die Datensätze lediglich in den Blättern befinden und diese voll besetzt sind, bedeutet

	Lehrveranstaltung	Grundlagen von Datenbanken WS 2011/12		
	Aufgabenzettel	6 (Lösungsvorschläge)		
	Gesamtpunktzahl	40		
	Ausgabe	Do. 21.12.2012	Abgabe	Do. 17.01.2013

dies, dass 183 Blattknoten jeweils $2 \cdot k^* = 8$ Datensätze beinhalten.
 Insgesamt beinhaltet der Baum demnach $183 \cdot 8 = 1464$ Datensätze.