FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 7: — Folgerung und Deduktion

Präsenzaufgabe 7.1

1. Beweisen Sie **zwei** der folgenden Behauptungen.

   (a) $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \wedge \mathsf{D} \wedge \mathsf{E} \models \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \vee \mathsf{C}$

   (b) $\mathsf{A} \vee \mathsf{B} \vee \mathsf{C} \vee \mathsf{D} \not\models \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \wedge \mathsf{D}$

   (c) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow \mathsf{C} \models (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$

   Hinweis: Falls Sie Wahrheitstafeln benutzen, geben Sie an, wie Sie das Ergebnis ablesen. Nur die Wahrheitstafel reicht als Beweis nicht.

2. Beweisen Sie **Satz 5.10**: Sei $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}$ eine Formelmenge und $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ eine Formel. F folgt genau dann aus $\mathbf{M}$, wenn $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ unerfüllbar ist.
   ($\mathbf{M} \models \mathsf{F}$ gdw. $\mathbf{M} \cup \{\neg\mathsf{F}\}$ unerfüllbar.)

Präsenzaufgabe 7.2

1. Gegeben sei die Substitution sub_1, für die gilt:
   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{A}) = (\mathsf{C} \wedge \mathsf{D})$,
   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{B}) = (\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B})$,
   $\mathsf{sub}_1(\mathsf{C}) = \mathsf{A}$,
   für alle anderen Aussagensymbole A_i sei $\mathsf{sub}_1(\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_i$.

   Bestimmen Sie $\mathsf{sub}_1(\mathsf{F})$ für $\mathsf{F} = (\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})$.

2. Bestimmen Sie alle mit den Regeln MP und MT aus der Formelmenge $\mathbf{M}$ ableitbaren Formeln.

   $$\text{Modus Ponens: } \mathsf{MP} = \frac{\mathsf{A}, \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}{\mathsf{B}} \qquad \text{Modus Tollens: } \mathsf{MT} = \frac{\neg\mathsf{B}, \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}{\neg\mathsf{A}}$$

   $\mathbf{M} = \{\mathsf{B}, (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}), ((\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \vee \neg\mathsf{D})), \neg\mathsf{C}\}$

3. Beweisen Sie: Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{L}_{AL}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$ ein Kalkül der Aussagenlogik (Def. 6.9), $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}, \mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ und sub_3 eine Substitution. Wenn F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}$ ableitbar ist, dann ist $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$ mit $\mathcal{C}$ aus $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M})$ ableitbar, indem Sie aus der Ableitung von F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}$ eine Ableitung von $\mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$ mit $\mathcal{C}$ aus $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M})$ konstruieren (und zeigen, dass die konstruierte Ableitung die Anforderungen der Def. 6.10 erfüllt). (Symbolisch: Wenn $\mathbf{M} \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{F}$, dann $\mathsf{sub}_3(\mathbf{M}) \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{sub}_3(\mathsf{F})$.)

   Tipp: Sie dürfen hier Folgendes verwenden: Die Hintereinanderausführungen zweier Substitutionen ist wieder eine Substitution.

   Praktischer Nutzen dieses Satzes: Man kann sich doppelte Arbeit sparen. Hat man einmal eine Ableitung (korrekt) erstellt, dann kann man sich die Arbeit für Varianten der Formel, die durch Substitution entstehen, sparen (insbesondere für den Fall $\mathbf{M} = \emptyset$ ist das sehr nützlich).

von
6

Übungsaufgabe 7.3

1. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

   (a) $\{((\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{C} \vee \mathsf{D})), ((\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \wedge \mathsf{F}))\} \models ((\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{D} \wedge \mathsf{F}))$

   (b) $\{((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \Rightarrow (\mathsf{C} \vee \mathsf{D})), ((\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{E} \wedge \mathsf{F}))\} \not\models ((\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{D} \wedge \mathsf{F}))$

   Hinweis: Falls Sie Wahrheitstafeln benutzen, geben Sie an, wie Sie das Ergebnis ablesen. Nur die Wahrheitstafel reicht als Beweis nicht.

2. Beweisen Sie: Sei $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{L}_{AL}$ eine Formelmenge und seien $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln. Wenn G eine Tautologie ist, dann folgt F genau dann aus $\mathbf{M} \setminus \{\mathsf{G}\}$, wenn F aus $\mathbf{M} \cup \{\mathsf{G}\}$ folgt.
   (Wenn $\models \mathsf{G}$, dann $\mathbf{M} \setminus \{\mathsf{G}\} \models \mathsf{F}$ gdw. $\mathbf{M} \cup \{\mathsf{G}\} \models \mathsf{F}$.)
   Das Hinzufügen einer Tautologie zu einer Formelmenge ergibt keine neuen Folgerungen, das Löschen reduziert nicht die Folgerungen.

3. Beweisen Sie: Es seien $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2 \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln. Sind F_1 und F_2 äquivalent und auch G_1 und G_2 äquivalent, dann folgt G_1 aus F_1 genau dann, wenn G_2 aus F_2 folgt. (Wenn $\mathsf{F}_1 \equiv \mathsf{F}_2$ und $\mathsf{G}_1 \equiv \mathsf{G}_2$, dann $\mathsf{F}_1 \models \mathsf{G}_1$ gdw. $\mathsf{F}_2 \models \mathsf{G}_2$.)

von
6

Übungsaufgabe 7.4

1. Bestimmen Sie eine Substitution sub_1, so dass $\mathsf{sub}_1(\mathsf{F}) = \mathsf{G}$ oder $\mathsf{F} = \mathsf{sub}_1(\mathsf{G})$ mit: $\mathsf{F} = ((\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{B}) \Rightarrow \neg(\mathsf{C} \vee \mathsf{B}))$, $\quad \mathsf{G} = ((\mathsf{C} \wedge \mathsf{D}) \Rightarrow \neg\mathsf{E})$.

2. Prüfen Sie folgende Inferenzregeln auf Korrektheit.

   $$\text{(a) } \mathsf{R}_a = \frac{\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}}{\mathsf{A}} \qquad \text{(b) } \mathsf{R}_b = \frac{\neg\mathsf{A}, \neg\mathsf{B}}{\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}} \qquad \text{(c) } \mathsf{R}_c = \frac{\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B}, \mathsf{B} \vee \mathsf{C}}{\mathsf{A} \vee \mathsf{C}}$$

3. Beweisen Sie: Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{L}_{AL}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$ ein Kalkül der Aussagenlogik (Def. 6.9), $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subseteq \mathcal{L}_{AL}, \mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$. Wenn F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_1$ ableitbar ist und G mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_2 \cup \{\mathsf{F}\}$ ableitbar ist, dann ist G mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ ableitbar, indem Sie aus den Ableitungen von F mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_1$ und von G mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_2 \cup \{\mathsf{F}\}$ eine Ableitung von G mit $\mathcal{C}$ aus $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ konstruieren (und zeigen, dass die konstruierte Ableitung die Anforderungen der Def. 6.10 erfüllt).

   (Symbolisch: $\mathbf{M}_1 \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{F}$ und $\mathbf{M}_2 \cup \{\mathsf{F}\} \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}$, dann $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{G}$).

   Praktischer Nutzen dieses Satzes: Man kann sich doppelte Arbeit sparen. Hat man einmal eine Ableitung (korrekt) erstellt, dann kann man die abgeleitete Formel in anderen Ableitungen als Annahme einsetzen (insbesondere für den Fall $\mathbf{M}_1 = \emptyset$ ist das sehr nützlich).

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/teaching/vorlesungen/FGI1_SoSe12