# FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 5 : Aussagenlogik: Syntax, Rekursive Funktionen, Strukturelle Induktion

**Schema für Induktionsbeweise**

*Behauptung*

Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit $\mathsf{F}$].

*Induktionsanfang*

Teilbeweis für die auf atomare Formeln eingeschränkte Behauptung: Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt: [Behauptung formuliert mit $\mathsf{A}$].

*Induktionsannahme*

Es seien $\mathsf{F}$ und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt: [Behauptung formuliert mit $\mathsf{F}$] und [Behauptung formuliert mit $\mathsf{G}$].

*Induktionsschritt*

Fall: $\neg\mathsf{F}$

Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $\neg\mathsf{F}$].

(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen.)

Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$].

(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen. Dabei kann es sein, dass man alle Operatoren gleich behandeln kann, oder man muss eine Fallunterscheidung nach Operator machen. Dann kann es hier bis zu 4 Teilbeweise geben.)

*Ressumee*

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit $\mathsf{F}$].

**Beispiel für eine rekursive Definition**

Tiefe einer Formel: $\mathsf{tiefe} : \mathcal{L}_{AL} \to \mathbb{N}$

$\mathsf{tiefe}(\mathsf{A}) = 0$, für $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$

$\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) = \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) + 1$, für $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$

$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{max}(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G})) + 1$, für $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}, \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

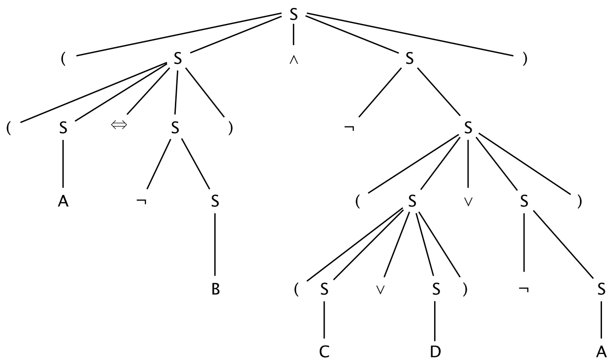
## Präsenzaufgabe 5.1

1. Geben Sie für folgende Formel den Ableitungsbaum (Grammatik Folie 2-14) und den Strukturbaum an:

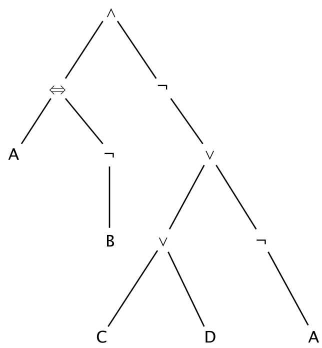
   $((\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg\mathsf{B}) \wedge \neg((\mathsf{C} \vee \mathsf{D}) \vee \neg\mathsf{A}))$

   **Lösung**

   Ableitungsbaum

   Strukturbaum

2. Geben Sie eine rekursive Definition für die Funktion $\mathsf{Tf} : \mathcal{L}_{AL} \rightarrow 2^{\mathcal{L}_{AL}}$ ($\mathsf{Tf}$: Teilformeln) an, die eine aussagenlogische Formel auf die Menge ihrer Teilformeln abbildet. (Dabei soll jede Formel als ihre eigene Teilformel gelten, also für alle $\mathsf{F}$ soll gelten: $\mathsf{F} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$.)

   *Tipp:* Testen Sie Ihre Definition an der Formel aus der ersten Teilaufgabe.

   **Lösung** $\mathsf{Tf}(\mathsf{A}) = \{\mathsf{A}\}$, für $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$

   $\mathsf{Tf}(\neg\mathsf{F}) = \mathsf{Tf}(\mathsf{F}) \cup \{\neg\mathsf{F}\}$, für $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$

   $\mathsf{Tf}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{Tf}(\mathsf{F}) \cup \mathsf{Tf}(\mathsf{G}) \cup \{(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})\}$, für $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}, \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

3. Beweisen Sie mit struktureller Induktion (und natürlich mit Rückgriff auf die rekursive Funktionsdefinition), dass alle echten Teilformeln einer Formel kürzer als die Formel sind. Formell:
   Für alle Formeln $\mathsf{F}$ der Aussagenlogik gilt:
   Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$ gilt: wenn $\mathsf{H} \neq \mathsf{F}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{F}|$.

   (*Zur Erinnerung:* Bei Zeichenketten $w$, zu denen ja auch die Formeln gehören, schreiben wir $|w|$ für die Länge von $w$.)

   **Lösung** Induktionsbeweis

*Induktionsanfang*

Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt:

Ist Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{A}) = \{\mathsf{A}\}$, dann ist $\mathsf{H} = \mathsf{A}$, also gilt auch:

Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{A})$ gilt: wenn $\mathsf{H} \neq \mathsf{A}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{A}|$. (... da es kein Gegenbeispiel gibt.)

*Induktionsannahme*

Es seien $F$ und $G \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt:

Für jede Formel $H \in \mathrm{Tf}(F)$ gilt: wenn $H \neq F$, dann ist $|H| < |F|$.

Für jede Formel $H \in \mathrm{Tf}(G)$ gilt: wenn $H \neq G$, dann ist $|H| < |G|$.

Beobachtung / Randnotiz: Damit gilt dann auch (und nur das werden wir gleich brauchen):

Für jede Formel $H \in \mathrm{Tf}(F)$ gilt $|H| \leq |F|$.

Für jede Formel $H \in \mathrm{Tf}(G)$ gilt $|H| \leq |G|$.

*Induktionsschritt*

Fall: $\neg F$

Nach Definition von $\mathrm{Tf}$ gilt $\mathrm{Tf}(\neg F) = \mathrm{Tf}(F) \cup \{\neg F\}$.

Ist also $H \in \mathrm{Tf}(\neg F)$ und $H \neq \neg F$, dann ist $H \in \mathrm{Tf}(F)$. Nach Induktionsannahme ist damit $|H| \leq |F| < |\neg F|$.

Damit ergibt sich:

Ist $H \in \mathrm{Tf}(\neg F)$ und $H \neq \neg F$, dann ist $|H| < |\neg F|$.

Fall: $(F \circ G)$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Nach Definition von $\mathrm{Tf}$ gilt: $\mathrm{Tf}((F \circ G)) = \mathrm{Tf}(F) \cup \mathrm{Tf}(G) \cup \{(F \circ G)\}$.

Ist $H \in \mathrm{Tf}((F \circ G))$ und $H \neq (F \circ G)$, dann ist $H \in \mathrm{Tf}(F)$ oder $H \in \mathrm{Tf}(G)$. Nach Induktionsannahme ist damit $|H| \leq |F| < |(F \circ G)| = 3 + |F| + |G|$ oder $|H| \leq |G| < |(F \circ G)| = 3 + |F| + |G|$.

Damit ergibt sich:

Ist $H \in \mathrm{Tf}((F \circ G))$ und $H \neq (F \circ G)$, dann ist $|H| < |(F \circ G)|$.

*Ressumee*

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $F, H$ der Aussagenlogik gilt: Ist $H \in \mathrm{Tf}(F)$ und $H \neq F$, dann ist $|H| < |F|$.

## Übungsaufgabe 5.2

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass die Tiefe einer Formel echt kleiner als ihre Länge ist. Formell:

Für alle Formeln $F$ der Aussagenlogik (gemäß Def. 2.2 Folie 2-12) gilt:

$1 + \mathrm{tiefe}(F) \leq |F|$

**Lösung**

Induktionsbeweis

*Behauptung*

Für alle Formeln $F \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, $1 + \mathrm{tiefe}(F) \leq |F|$.

*Induktionsanfang*

Für jedes Aussagensymbol $A \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt: $\mathrm{tiefe}(A) = 0$ und $|A| = 1$, also gilt auch $1 + \mathrm{tiefe}(A) \leq |A|$.

*Induktionsannahme*

Es seien $\mathsf{F}$ und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt: $1+\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) \leq |\mathsf{F}|$ und $1+\mathsf{tiefe}(\mathsf{G}) \leq |\mathsf{G}|$.

*Induktionsschritt*

Fall: $\neg\mathsf{F}$

Nach Definition von $\mathsf{tiefe}$ gilt: $\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) = 1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F})$ also ist $1 + 1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) = 1 + \mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})$ und $|\mathsf{F}| + 1 = |\neg\mathsf{F}|$ und damit

$1 + \mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) \leq |\neg\mathsf{F}|$.

Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Nach Definition von $\mathsf{tiefe}$ gilt:

$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \max(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G})) + 1$

Nehmen wir oBdA an, dass $\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) = \max(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G}))$ (also $\mathsf{F}$ ist mindestens so tief wie $\mathsf{G}$).[1]

Dann ist $|(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| > |\mathsf{F}| + 1$ und nach Induktionsannahme

$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = 1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) \leq |\mathsf{F}|$

Insgesamt gilt also

$1 + \mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) \leq |(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})|$.

*Ressumee*

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, $1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) \leq |\mathsf{F}|$.

## Übungsaufgabe 5.3

von
4

Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass die Länge jeder Formel $\mathsf{F}$ nach oben durch $2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$ beschränkt ist. Formell:

Für alle Formeln $\mathsf{F}$ der Aussagenlogik (gemäß Def. 2.2 Folie 2-12) gilt:

$|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$

**Lösung** Induktionsbeweis

*Behauptung*

Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, $|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$.

*Induktionsanfang*

Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt: $\mathsf{tiefe}(\mathsf{A}) = 0$ und $|\mathsf{A}| = 1$, also gilt auch

$|\mathsf{A}| = 1 = 2^{0+2} - 3 = 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{A})+2} - 3$.

*Induktionsannahme*

Es seien $\mathsf{F}$ und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt: $|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$ und $|\mathsf{G}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{G})+2} - 3$.

*Induktionsschritt*

[1] oBdA: ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Das heißt, dass sich der alternative Fall $\mathsf{tiefe}(\mathsf{G}) = \max(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G}))$ genauso behandeln läßt, da $|(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| > |\mathsf{G}| + 1$ und damit $\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = 1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{G}) \leq |\mathsf{G}|$.

Fall: $\neg \mathsf{F}$

Nach Definition von $\mathsf{tiefe}$ und $\mathsf{Tf}$ gilt: $\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) = 1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F})$ und $|\neg\mathsf{F}| = 1 + |\mathsf{F}|$

also ist nach Induktionsvoraussetzung $|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3 = 2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+1} - 3$

und, da $1 < 2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+1}$, auch $2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+1} - 3 + 1 < 2 * 2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+1} - 3 = 2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+2} - 3$

und damit $|\neg\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F})+2} - 3$.

Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Nach Definition von $\mathsf{tiefe}$ gilt:

$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{max}(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G})) + 1$

Dann ist

$|(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| = |\mathsf{F}| + |\mathsf{G}| + 3$

Also entsprechend der Induktionsannahme

$|\mathsf{F}| + |\mathsf{G}| + 3 \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3 + 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{G})+2} - 3 + 3$

Weiterhin gilt

$2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} + 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{G})+2} \leq 2 * 2^{\mathsf{max}(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}),\mathsf{tiefe}(\mathsf{G}))+2} = 2 * 2^{\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G}))+1} = 2^{\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G}))+2}$

Zusammen genommen ergibt sich

$|(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| \leq 2^{\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G}))+2} - 3$

*Ressumee*

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, $|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$.

### Übungsaufgabe 5.4

von 4

1. Geben Sie ein Schema an, nach dem man für jedes $n$ eine Formel $\mathsf{F}_\mathsf{a}^\mathsf{n}$ bilden kann, so dass $\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}_\mathsf{a}^\mathsf{n}) = n$ und $1 + n = |\mathsf{F}_\mathsf{a}^\mathsf{n}|$

2. Geben Sie ein Schema an, nach dem man für jedes $n$ eine Formel $\mathsf{F}_\mathsf{b}^\mathsf{n}$ bilden kann, so dass $\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}_\mathsf{b}^\mathsf{n}) = n$ und $|\mathsf{F}_\mathsf{b}^\mathsf{n}| = 2^{n+2} - 3$

Wenn Sie diese Schemata gefunden haben, dann haben Sie damit auch schon gezeigt, dass die bewiesenen Abschätzungen genau sind (also nicht verbessert werden können).

**Lösung**

1. Wir definieren (rekursiv) eine Funktion $F_a : I\!N \to \mathcal{L}_{AL}$, so dass für alle $n \in I\!N$ gilt: $\mathsf{tiefe}(F_a(n)) = n$ und $1 + n = |F_a(n)|$ . Dazu sei $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ ein Aussagensymbol.

   $F_a(0) = \mathsf{A}$

   $F_a(n + 1) = \neg F_a(n)$

   Der Beweis, dass die definierte Funktion die Anforderungen erfüllt, ergibt sich aus dem Fall $\neg\mathsf{F}$ aus obigem Beweis (Teilaufgabe 1).

2. Ziel ist, eine Schema für möglicht lange Formeln mit einer gegebenen Tiefe zu finden. Auch hier soll die Tiefe ein Parameter der Funktion sein.

   Sei $F_b : I\!N \to \mathcal{A}s_{AL}$ die rekursiv definierte Funktion:

$F_b(0) = \mathsf{A}$

$F_b(n+1) = (F_b(n) \wedge F_b(n))$

Der Beweis, dass die definierte Funktion die Anforderungen erfüllt, ergibt sich aus dem Fall $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ aus obigem Beweis (Teilaufgabe 2).