FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 5 : Aussagenlogik: Syntax, Rekursive Funktionen, Strukturelle Induktion

Schema für Induktionsbeweise

Behauptung
Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit F].
Induktionsanfang
Teilbeweis für die auf atomare Formeln eingeschränkte Behauptung: Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt: [Behauptung formuliert mit A].
Induktionsannahme
Es seien F und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt: [Behauptung formuliert mit F] und [Behauptung formuliert mit G].
Induktionsschritt
Fall: $\neg\mathsf{F}$
Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $\neg\mathsf{F}$].
(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen.)
Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$].
(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen. Dabei kann es sein, dass man alle Operatoren gleich behandeln kann, oder man muss eine Fallunterscheidung nach Operator machen. Dann kann es hier bis zu 4 Teilbeweise geben.)
Ressumee
Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit F].

Beispiel für eine rekursive Definition

Tiefe einer Formel: $\mathsf{tiefe} : \mathcal{L}_{AL} \to I\!N$
$\mathsf{tiefe}(\mathsf{A}) = 0$, für $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$
$\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) = \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) + 1$, für $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$
$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{max}(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G})) + 1$, für $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}, \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Präsenzaufgabe 5.1

1. Geben Sie für folgende Formel den Ableitungsbaum (Grammatik Folie 2-14) und den Strukturbaum an:

   $((\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg\mathsf{B}) \wedge \neg((\mathsf{C} \vee \mathsf{D}) \vee \neg\mathsf{A}))$

2. Geben Sie eine rekursive Definition für die Funktion $\mathtt{Tf} : \mathcal{L}_{AL} \to 2^{\mathcal{L}_{AL}}$ ($\mathtt{Tf}$: Teilformeln) an, die eine aussagenlogische Formel auf die Menge ihrer Teilformeln abbildet. (Dabei soll jede Formel als ihre eigene Teilformel gelten, also für alle F soll gelten: $\mathsf{F} \in \mathtt{Tf}(\mathsf{F})$.)

   Tipp: Testen Sie Ihre Definition an der Formel aus der ersten Teilaufgabe.

3. Beweisen Sie mit struktureller Induktion (und natürlich mit Rückgriff auf die rekursive Funktionsdefinition), dass alle echten Teilformeln einer Formel kürzer als die Formel sind. Formell:
   Für alle Formeln F der Aussagenlogik gilt:
   Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathtt{Tf}(\mathsf{F})$ gilt: wenn $\mathsf{H} \neq \mathsf{F}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{F}|$.

   (*Zur Erinnerung:* Bei Zeichenketten w, zu denen ja auch die Formeln gehören, schreiben wir $|w|$ für die Länge von w.)

Übungsaufgabe 5.2

von
4

Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass die Tiefe einer Formel echt kleiner als ihre Länge ist. Formell:

Für alle Formeln F der Aussagenlogik (gemäß Def. 2.2 Folie 2-12) gilt:

$1 + \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) \leq |\mathsf{F}|$

Übungsaufgabe 5.3

von
4

Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass die Länge jeder Formel F nach oben durch $2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$ beschränkt ist. Formell:

Für alle Formeln F der Aussagenlogik (gemäß Def. 2.2 Folie 2-12) gilt:

$|\mathsf{F}| \leq 2^{\mathsf{tiefe}(\mathsf{F})+2} - 3$

Übungsaufgabe 5.4

von
4

1. Geben Sie ein Schema an, nach dem man für jedes n eine Formel $\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{a}}$ bilden kann, so dass $\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{a}}) = n$ und $1 + n = |\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{a}}|$

2. Geben Sie ein Schema an, nach dem man für jedes n eine Formel $\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{b}}$ bilden kann, so dass $\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{b}}) = n$ und $|\mathsf{F}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{b}}| = 2^{n+2} - 3$

Wenn Sie diese Schemata gefunden haben, dann haben Sie damit auch schon gezeigt, dass die bewiesenen Abschätzungen genau sind (also nicht verbessert werden können).
Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/teaching/vorlesungen/FGI1_SoSe12