FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

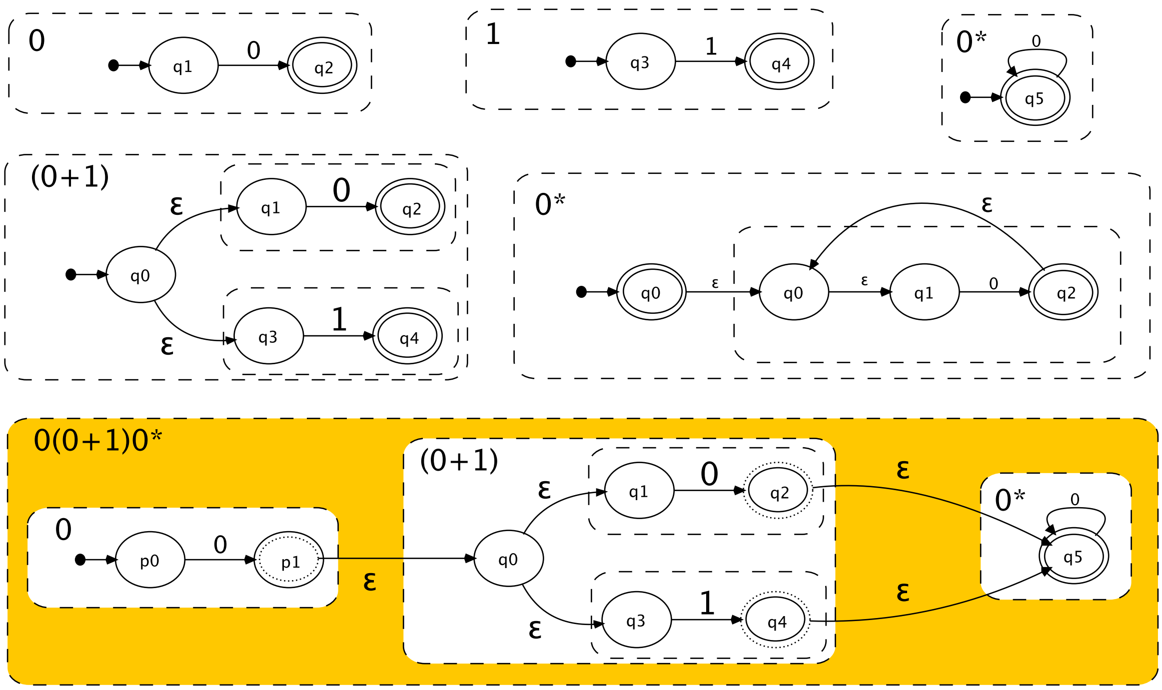
Aufgabenblatt 3 : Reguläre Ausdrücke und Satz von Kleene

Präsenzaufgabe 3.1: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie *nach der in der Vorlesung behandelten Konstruktionsvorschrift (i.w. Satz 14.2 und Folie 119)* zu dem regulären Ausdruck

$$E = 0(0 + 1)0^*$$

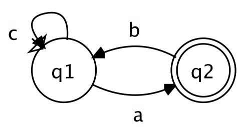
einen ϵ-FA A, so dass $M_E = L(A)$ gilt.

Lösung: Wir konstruieren zu allen Teilausdrücken Automaten. Beachte: Wir haben einige Zustände umbenannt, um Eindeutigkeit zu erhalten. Für den Teilausdruck 0^* haben wir die Kurzform gewählt. Die etwas längere Variante ist als Alternative auch angegeben.



Präsenzaufgabe 3.2:

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Kleene-Verfahrens aus folgendem NFA A einen regulären Ausdruck. Nutzen Sie dabei Vereinfachungen wie $\emptyset \cdot M = \emptyset$, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$, $AA^* = A^+$, $A \cup AB^+ = AB^*$ etc.



Lösung: Wir lesen am Automaten ab: $R^0_{1,1} = \{\epsilon, c\}$, $R^0_{1,2} = \{a\}$, $R^0_{2,1} = \{b\}$ und $R^0_{2,2} = \{\epsilon\}$. Die Sprache ergibt sich als $L(A) = R^2_{1,2}$.

$$\begin{array}{rcl} R^2_{1,2} & = & R^1_{1,2} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} = R^1_{1,2} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^+ = R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* \\ & = & (\{c\}^*\{a\})(\{\epsilon\} \cup \{b\}\{c\}^*\{a\})^* \\ & = & \{c\}^*\{a\}(\{b\}\{c\}^*\{a\})^* \\ & \simeq & (c^*a)(bc^*a)^* \end{array}$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\begin{array}{rcl} R^1_{1,2} & = & R^0_{1,2} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} = (R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\ & = & \{\epsilon, c\}^*\{a\} = \{c\}^*\{a\} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} R^1_{2,2} & = & R^0_{2,2} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} \\ & = & \{\epsilon\} \cup \{b\}\{c\}^*\{a\} \end{array}$$

2. Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Beweisen Sie $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$.

Lösung: Es ist $M^* := \bigcup_{i \geq 0} M^i$. Wir zeigen zwei Inklusionen:

(a) Dass $A^i \subseteq (\{\epsilon\} \cup A)^i$ gilt, ist offensichtlich. Daraus folgt dann $\bigcup_{i \geq 0} A^i \subseteq \bigcup_{i \geq 0}(\{\epsilon\} \cup A)^i$.

(b) Wir zeigen, dass $\bigcup_{i=0}^n(\{\epsilon\} \cup A)^i \subseteq \bigcup_{i=0}^n A^i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, woraus dann $\bigcup_{i \geq 0}(\{\epsilon\} \cup A)^i \subseteq \bigcup_{i \geq 0} A^i$ folgt. Induktion über n.

- Ind.Anfang für $n = 0$: Es ist $(\{\epsilon\} \cup A)^0 = \{\epsilon\}$ und $A^0 = \{\epsilon\}$. Also gilt die Behauptung für $n = 0$.
- Ind.Annahme: Die Behauptung gelte für alle Werte bis zu einem festen n.
- Ind.Schritt von n nach $n + 1$: Wir verwenden die Abkürzung $B := (\{\epsilon\} \cup A)$.

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{i=0}^{n+1}(\{\epsilon\} \cup A)^i & = & \bigcup_{i=0}^n B^i \cup B^{n+1} \\ & = & \bigcup_{i=0}^n B^i \cup B^n B \text{ nach IA} \\ & \subseteq & \bigcup_{i=0}^n A^i \cup B^n B \text{ nach IA} \\ & \subseteq & \bigcup_{i=0}^n A^i \cup (\bigcup_{i=0}^n A^i)B \\ & = & \bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^i(\{\epsilon\} \cup A) \\ & = & \bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^i\{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=0}^n A^i A \\ & = & \bigcup_{i=0}^n A^i \cup \bigcup_{i=0}^n A^{i+1} \\ & = & \bigcup_{i=0}^{n+1} A^i \end{array}$$

Also gilt die Ind.Behauptung für alle n.

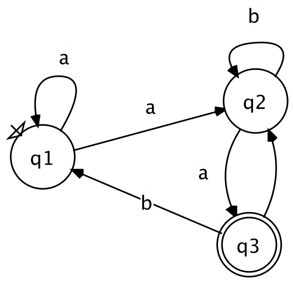
Übungsaufgabe 3.3: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie *nach der in der Vorlesung behandelten Konstruktionsvorschrift (i.w. Satz 14.2 und Folie 119)* zu folgenden regulären Ausdrücken E jeweils einen ϵ-FA A, so dass $M_E = L(A)$ gilt.

von 4

1. $E = 010$
2. $E = 0^*(0 + 1)^*0$
3. $E = 0^*(1(0 + 1)^*0)^*$

Übungsaufgabe 3.4: Konstruieren Sie mit Hilfe des Kleene-Verfahrens aus folgendem NFA A einen äquivalenten regulären Ausruck. Nutzen Sie dabei Vereinfachungen wie $\emptyset \cdot M = \emptyset$, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $AA^* = A^+$, $A \cup AB^+ = AB^*$, $(\{\epsilon\} \cup A)^* = A^*$ etc.

von 4



Übungsaufgabe 3.5: Die Menge der *erweiterten regulären Ausdrücke (ERA)* über Σ ist folgendermaßen definiert:

von 4

1. Die Konstante $\emptyset$ ist ein erweiterter regulärer Ausdruck. Er steht für die Menge $M_\emptyset := \emptyset$.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein erweiterter regulärer Ausdruck. Er steht für die Menge $M_a := \{a\}$.
3. Wenn E_1 und E_2 erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(E_1 \cdot E_2)$. Er steht für die Menge $M_{(E_1 \cdot E_2)} := M_{E_1} \cdot M_{E_2}$.
4. Wenn E ein erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann auch E^*. Er steht für die Menge $M_{E^*} := (M_E)^*$.
5. Wenn E ein erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann auch $(-E)$. Er steht für die Menge $M_{(-E)} := \Sigma^* \setminus M_E$.
6. Wenn E_1 und E_2 erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(E_1 \otimes E_2)$ einer. Er beschreibt die Menge $M_{(E_1 \otimes E_2)} := M_{E_1} \cap M_{E_2}$.

1. Zeigen Sie: Jeder erweiterte reguläre Ausdruck E beschreibt eine reguläre Menge.
2. Zeigen Sie: Zu jedem erweiterten regulären Ausdruck E existiert ein regulärer Ausdruck E', der die gleiche Menge beschreibt.