FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 10 : — Prädikatenlogik: Normalformen und Unifikation

Es seien auf diesem Übungsblatt a, b Konstanten, f ein einstelliges Funktionssymbol, g, h zweistellige Funktionssymbole, R ein einstelliges Prädikatensymbol, P, Q zweistellige Prädikatensymbole, S ein dreistelliges Prädikatensymbol und $u, v, w, x, y, z, x_1, y_1, x_2, y_2$ Variablen.

Präsenzaufgabe 10.1

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 10 Minuten abgeschlossen sein.

Es sei $\sigma = [x/h(a, y)]$ eine (Variablen-)Substitution und $F = \forall z\ (Q(z, x) \Rightarrow \exists x\ R(x))$.
Bestimmen Sie $\sigma(F)$ $(= F_\sigma)$.
Lösung $\sigma(F) = \forall z\ (Q(z, h(a, y)) \Rightarrow \exists x\ R(x))$

Präsenzaufgabe 10.2

1. Geben Sie zu der Formel F eine äquivalente, bereinigte Formel F_1 an. Welche Variablen müssen hierzu warum umbenannt werden? Welche Umbenennungen führen zu einer äquivalenten Formel (warum)? Welche Umbenennungen führen nicht zu einer äquivalenten Formel?

$$F = \forall x\ \exists y\ (S(x, f(y), z) \lor \neg\exists y\ \neg(\forall z\ R(z) \Rightarrow Q(y, x)))$$

   Lösung Eine prädikatenlogische Formeln heißt *bereinigt*, sofern es keine Variablen gibt, die in der Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommen, und sofern hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene Variablen stehen. Die Variable z kommt in F sowohl frei als auch gebunden vor. Die Variable y wird doppelt existenzquantifiziert. In beiden Fällen ist folglich eine Umbenennung von Nöten. Im Falle von z führt die Umbenennung der durch den Quantor gebundenen Variable zu einer äquivalenten Formel ('gebundene Umbenennung'). Die Ersetzung einer freien Variable durch eine andere führt nicht zu einer äquivalenten Formel, aber zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Formel. Bei y reicht es, eine Umbenennung bei einem Quantor (und der eingebetteten Teilformel) vorzunehmen und es ist völlig egal, welche man wählt. Wir benennen hier einfach alle gebundenen Variablen um, indem wir sie durchnumerieren. D.h. wir nehmen an, dass x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 Variablen sind und bilden:

$$F_1 = \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

2. Geben Sie zu F_1 eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel F_2 an.

   Lösung

   Die freie Variable z wird durch einen Existenzquantor mit maximalem Skopus gebunden (siehe Satz 10.12). Somit erhalten wir die erfüllbarkeitsäquivalente Formel

$$F_2 = \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

Alternative: Man könnte auch eine bislang noch ungenutzte Konstante a nehmen und z substituieren.

$$F_2' = \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), a) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

3. Formen Sie F_2 nun zu einer äquivalenten geschlossenen, bereinigten Pränexform (BPF) F_3 um. Benennen Sie bei jedem Umformungsschritt die entsprechende Regel.

   Lösung

$$
\begin{array}{rcll}
F_2 & = & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \forall y_2\ \neg\neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Dualität} \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \forall y_2\ (\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{doppelte Negation} \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor (\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \forall y_2 \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \exists z_1\ (R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \forall z_1 \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ \exists z_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor (R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \exists z_1 \\
& = & F_3 &
\end{array}
$$

4. Geben Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform F_4 zu F_3 an. Führen Sie die neu eingeführten Skolemkonstanten und -funktionen samt ihrer Stelligkeit und den jeweils für die Variable substituierten Term auf.

   Lösung Für Variable z setzen wir die Skolemkonstante a ein, für Variable y_1 nutzen wir die einstellige Skolemfunktion h und setzen den damit gebildeten Term $h(x_1)$ ein, für Variable z_1 nutzen wir die zweistellige Skolemfunktion i und setzen den damit gebildeten Term $i(x_1, y_2)$ ein. Insgesamt erhalten wir:

$$F_4 = \forall x_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(h(x_1)), a) \lor (R(i(x_1, y_2)) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

Präsenzaufgabe 10.3 Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf **eine** der folgenden Literalmengen $\mathbf{L_i}$ an und bilden Sie damit, wenn möglich, einen Unifikator σ, so dass $|\ \mathbf{L_i}\sigma\ | = 1$. Sind die Literale nicht unifizierbar, so erläutern Sie das Problem.

1. $\mathbf{L_1} = \{\ S(h(x, b), a, z)\ ,\ S(z, x, h(y, b))\ \}$

   Lösung

   $\sigma_0 = [\,]$
   1. $\mathbf{L_1}\sigma_0 = \mathbf{L_1} = \{\ S(h(x, b), a, z)\ ,\ S(z, x, h(y, b))\ \}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_0\ | = 2$
      $\sigma_1 = [z/h(x, b)]$
   2. $\mathbf{L_1}\sigma_1 = \{\ S(h(x, b), a, h(x, b))\ ,\ S(h(x, b), x, h(y, b))\ \}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_1\ | = 2$
      $\sigma_2 = \sigma_1[x/a] = [z/h(x, b)][x/a]$
   3. $\mathbf{L_1}\sigma_2 = \mathbf{L_1}\sigma_1[x/a] = \{\ S(h(a, b), a, h(a, b))\ ,\ S(h(a, b), a, h(y, b))\ \}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_2\ | = 2$
      $\sigma_3 = \sigma_2[y/a] = [z/h(x, b)][x/a][y/a]$
   4. $\mathbf{L_1}\sigma_3 = \mathbf{L_1}\sigma_2[y/a] = \{\ S(h(a, b), a, h(a, b))\ \}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_3\ | = 1$

   Es ergibt sich: $\mathbf{L_1}$ ist unifizierbar mit dem Unifikator $\sigma_3 = [z/h(x, b)][x/a][y/a]$.

2. $\mathbf{L_2} = \{ \mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x})) , \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{y}) \}$

Lösung

$\sigma_0 = [\,]$

1. $\mathbf{L_2}\sigma_0 = \mathbf{L_2} = \{ \mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{x})) , \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{y}) \}$
   $| \mathbf{L_2}\sigma_0 | = 2$
   $\sigma_1 = [\mathsf{x}/\mathsf{f}(\mathsf{y})]$
2. $\mathbf{L_2}\sigma_1 = \{ \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{y}))) , \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{y}) \}$
   $| \mathbf{L_2}\sigma_1 | = 2$

$\mathbf{L_2}$ ist nicht unifizierbar, da y nicht mit $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{y}))$ unifiziert werden kann.

Version vom 7. Juni 2012