FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 1 : Formale Sprachen und Endliche Automaten

Präsenzaufgabe 1.1: Wir betrachten den Monoid $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Betrachte die Teilmengen $X, Y \subseteq \Sigma^*$ mit $X = \{a, ab, \epsilon\}$ und $Y = \{c, bc, ac\}$.

1. Bestimmen Sie Σ^2.

   Lösung: Die Notation ist nicht ganz eindeutig, da wir sie sowohl für das kartesische Produkt $\Sigma \times \Sigma$ als auch für das Komplexprodukt $\Sigma \cdot \Sigma$ verwenden.

   Im Kontext eines Alphabetes Σ ist typischerweise das Komplexprodukt $\Sigma \cdot \Sigma$ gemeint.

   $\Sigma \cdot \Sigma = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

   Das kartesische Produkt ergibt sich zu $\Sigma \times \Sigma = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

   Wir erkennen, dass beide Produktmengen isomorph sind. Das dies nicht mehr gilt, wenn wir von Alphabeten zu beliebigen Mengen übergehen, zeigen die beiden folgenden Teilaufgaben.

2. Bestimmen Sie $X \times Y$ und $|X \times Y|$.

   Lösung: $X \times Y = \{(a, c), (a, bc), (a, ac), (ab, c), (ab, bc), (ab, ac), (\epsilon, c), (\epsilon, bc), (\epsilon, ac)\}$

   $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = 3 \cdot 3 = 9.$

3. Bestimmen Sie $X \cdot Y$ und $|X \cdot Y|$.

   Lösung: $X \cdot Y = \{ac, abc, aac, \underline{abc}, abbc, abac, c, bc, \underline{ac}\} = \{ac, abc, aac, abbc, abac, c, bc\}$
   Doppelte Einträge sind unterstrichen.

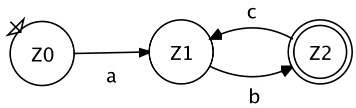
   $|X \cdot Y| = 7$

4. Bestimmen Sie X^+ und X^*.

   Lösung: $X^+ = \{w \mid w = a...a(ab)a...a(ab)a...a \cdots a...a(ab)a...a\} = (\{a\}^*\{ab\})^*\{a\}^* = \{a\}^*(\{ab\}\{a\}^*)^*\{a\}^*$
   $X^+ = X^+ \cup \{\epsilon\} = X^*$

Präsenzaufgabe 1.2:

1. Geben Sie die formale Notation des folgenden DFA A_1 an und bestimmen Sie $L(A_1)$.



A_1:

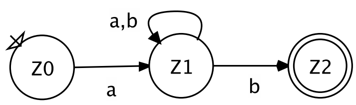
Lösung: $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, z_0, F)$ mit $Q = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{z_2\}$ und $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist definiert durch $(z_0, a) \mapsto z_1$, $(z_1, b) \mapsto z_2$ und $(z_2, c) \mapsto z_1$ (für alle anderen Argumente ist δ undefiniert).

Akzeptierte Sprache:

$$L(A_1) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : w = ab(cb)^n\} = \{ab\}\{cb\}^* = \{a\}\{bc\}^*\{b\}$$

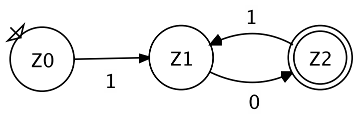
2. Sei $M_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und endet mit } b\}$.
Konstruieren Sie einen NFA A, so dass $L(A) = M_1$ gilt.

Lösung: Der NFA A_3 aus Teilaufgabe (4) akzeptiert diese Sprache.



A_3:

3. Gegeben ist der folgende DFA A_2. Sei $M_2 = \{10\}\{10\}^*$. Beweisen Sie $L(A_2) = M_2$, indem Sie zwei Inklusionen beweisen.



A_2:

Lösung: Für den Beweis sind zwei Inklusionen zu zeigen: $L(A_2) \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq L(A_2)$.

(a) Behauptung: $L(A_2) \subseteq M_2$, d.h. jedes Wort, das A_2 akzeptiert, ist in M_2.
Induktion über die Länge $n = |w|$ des akzeptierten Wortes w.

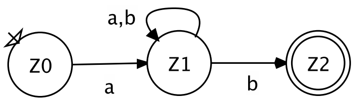
- Ind.Beginn für $n = 0$: Da A_2 kein Wort w der Länge 0 akzeptiert (der Start- ist kein Endzustand), ist nichts zu zeigen.
- Ind.Annahme: Die Behauptng gelte für alle Worte $|w| \leq n$.
- Ind.Schritt von n zu $n+1$: Wenn A_2 das Wort w mit $|w| = n+1$ akzeptiert, dann endet das Wort in z_2 und das letzte Zeichen war eine 0. Dann war das vorletzte Zeichen eine 1 und wir waren entweder im Startzustand z_0 oder in z_2. Im ersten Fall war das Wort $w = 10$ und dies ist in M_2; im zweiten Fall haben wir ein Wort der Form $w = w'10$ und w' wurde akzeptiert.
Da $|w'| = n - 1 \leq n$, ist die Ind.Annahme anwendbar und w' ist in M_2, und dann ist auch $w = w'10$ in M_2.

Also gilt die Ind.Behauptung für alle n, d.h. für alle akzeptierten Worte.

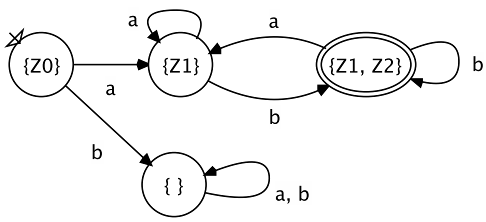
(b) $M_2 \subseteq L(A_2)$, d.h. jedes Wort aus M_2 führt in A_2 in einen Endzustand.
Sei $w = (10)(10)^n$. Nach dem Lesen von 10 befindet sich A_2 im Endzustand z_2. Ein weiteres 10 führt von z_2 wieder zu z_2. Also auch die n-fache Wiederholung. Also werden alle Worte aus M_2 akzeptiert.

4. Konstruieren Sie den Potenzautomaten (nach dem 2. Verfahren, das nur die initial Zusammenhangskomponente erzeugt) zu folgenden NFA A_3.

A_3:



Lösung: Die initiale Zusammenhangskomponente des Potenzautomaten ergibt sich wie folgt. Beachten Sie, dass der Potenzautomat stets vollständig ist.



von
4

Übungsaufgabe 1.3: Sei Σ ein Alphabet und $X, Y, Z \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Gleichungen, indem Sie zwei Inklusionsbeziehungen beweisen oder ein Gegenbeispiel angeben.

1. $(X \cup Y) \cdot Z = (X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z)$

   Lösung: Wir zeigen zwei Inklusionen:

   - Es gilt $(X \cup Y) \cdot Z \subseteq (X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z)$, denn wenn $w \in (X \cup Y) \cdot Z$, dann lässt sich w in uv zerlegen mit $u \in (X \cup Y)$ und $v \in Z$.
     Angenommen $u \in X$, dann ist $w = uv \in (X \cdot Z)$; gilt dagegen $u \in Y$, dann ist $w = uv \in (Y \cdot Z)$. Insgesamt also $w \in (X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z)$, was die Inklusion zeigt.
   - Es gilt $(X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z) \subseteq (X \cup Y) \cdot Z$, denn wenn $w \in (X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z)$, dann ist $w \in (X \cdot Z)$ oder $w \in (Y \cdot Z)$.
     Im ersten Fall lässt sich w in uv mit $u \in X$ und $v \in Z$ zerlegen. Dann ist aber erst recht $u \in X \cup Y$ und damit $w = uv \in (X \cup Y) \cdot Z$. Analog für $u \in Y$. Dies zeigt die Inklusion.

2. $(X \cdot Y) \cup Z = (X \cup Z) \cdot (Y \cup Z)$

   Lösung: Gilt nicht. Wähle $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, $Z = \{z\}$. Dann ist:

   $$(X \cdot Y) \cup Z = \{xy\} \cup \{z\} = \{xz, z\} \neq (X \cup Z) \cdot (Y \cup Z) = \{x, z\} \cdot \{y, z\} = \{xy, xz, zy, zz\}$$

3. $(X^*)^* = X^*$

   Lösung: Wir zeigen zwei Inklusionen:

   - $X^* \subseteq (X^*)^*$.
     Wenn $w \in X^*$, dann gibt es ein k und $u_1 \dots u_k \in X$, so dass $w = u_1 \cdots u_k$ gilt. Da $X = X^1$ gilt, ist jedes $u_i, i = 1..k$ in $X^1 \subseteq X^*$ und damit:

     $$w = u_1 \cdots u_k \in (X^1)^k \subseteq (X^*)^k \subseteq (X^*)^*$$

   - $(X^*)^* \subseteq X^*$.
     Wenn $w \in (X^*)^*$, dann gibt es ein n und $u_1 \dots u_n \in X^*$, so dass $w = u_1 \cdots u_n$ gilt. Zu jedem $u_i, i = 1..n$ existiert ein k_i, sodass $u_i \in X^{k_i}$. Also:

     $$w = u_1 \cdots u_k \in X^{k_1} \cdot \cdots \cdot X^{k_n} = X^{(k_1 + \cdots + k_n)} \subseteq X^*$$

4. $(X \cup Y)^* = X^* \cup Y^*$

   Lösung: Gilt nicht. Wähle $X = \{x\}$ und $Y = \{y\}$. Dann ist:

   $$(X \cup Y)^* = \{x, y\}^* = \{\epsilon, x, y, xx, xy, \dots\}^* \supsetneq X^* \cup Y^* = \{x\}^* \cup \{y\}^* = \{\epsilon, x, xx, \dots\}^* \cup \{\epsilon, y, y, \dots\}^*$$

   Insbesondere ist z.B. $xyx \in (X \cup Y)^*$, aber $xyx \notin X^* \cdot Y^*$.

5. Als Bonusaufgabe (1 Extrapunkt): $(X \cdot Y)^* \cdot X = X \cdot (Y \cdot X)^*$

Lösung: Wir zeigen zwei Inklusionen:

- $(X \cdot Y)^* \cdot X \subseteq X \cdot (Y \cdot X)^*$:
  Wenn $w \in (X \cdot Y)^* X$, dann existiert ein n, so dass w die folgende Form hat:

$$w = (\alpha_1 \beta_1) \cdots (\alpha_n \beta_n) \cdot \alpha_{n+1}$$

  Hierbei ist jede $\alpha_i \in X, i = 1..n+1$ und jedes $\beta_j \in Y, j = 1..n$.
  Da die Konkatenation assoziativ ist, können wir die Klammern umgruppieren:

$$\begin{array}{rcl} w & = & (\alpha_1 \beta_1) \cdots (\alpha_n \beta_n) \cdot \alpha_{n+1} \\ & = & \alpha_1 (\beta_1 \alpha_2) \cdots (\beta_n \alpha_{n+1}) \\ & \in & X(YX)^n \subseteq X(YX)^* \end{array}$$

- $X \cdot (Y \cdot X)^* \subseteq (X \cdot Y)^* \cdot X$:
  Analog hat jedes $w \in X \cdot (Y \cdot X)^*$ eine Zerlegung:

$$\begin{array}{rcl} w & = & \alpha_0 (\beta_1 \alpha_1) \cdots (\beta_n \alpha_n) \\ & = & (\alpha_0 \beta_1) \cdots (\alpha_{n-1} \beta_n) \cdot \alpha_n \\ & \in & (XY)^n X \subseteq (XY)^* X \end{array}$$

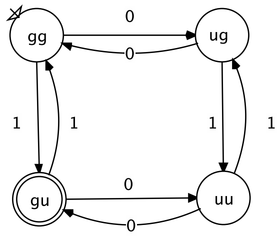
Übungsaufgabe 1.4:

von
4

1. Geben Sie einen NFA A_1 an, der die folgende Sprache akzeptiert:

   $L_1 := \{w \in \{0,1\}^* \mid\ w$ enthält eine gerade Anzahl von 0 und eine ungerade Anzahl von 1 $\}$

   Lösung: Die Zustandsmenge ist $\{u, g\}^2$, wobei das erste Element des Paares angibt, ob die Anzahl von 0 gerade (g) oder ungerade (u) ist. Das zweite Element des Paares gibt an, ob die Anzahl von 1 gerade (g) oder ungerade (u) ist. Durch den Zustand (u, g) wird z.B. kodiert, dass die 0 eine ungerade, die 1 eine gerade Anzahl an Auftreten hatte.



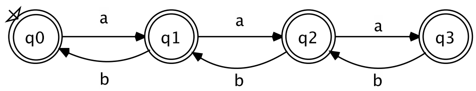
2. Geben Sie einen NFA A_2 an, der die folgende Sprache akzeptiert:

   $$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ in jedem Anfangsstück } u \text{ von } w \text{ gilt: } 0 \le |u|_a - |u|_b \le 3\}$$

   Hierbei bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl des Auftretens des Zeichens x in einem Wort w.

   Lösung: Kein Wort w der Sprache kann mit einem b beginnen, da sonst für das Präfix u, das nur das erste Symbol von w enthält, $|u|_a - |u|_b < 0$ gelten würde.

   Der folgende Automat zählt in seinen Zuständen die Differenz $|u|_a - |u|_b$. Der Automat befindet sich genau dann im Zustand q_i, wenn $|u|_a - |u|_b = i$ beim bisher gelesenen Präfix u gilt.

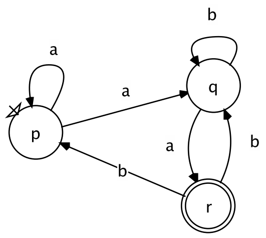


Geben Sie zu jedem Zustand q der Automaten eine inhaltliche Interpretation an, d.h. eine Eigenschaft, die gilt, wenn das bislang eingelesene Anfangsstück des Wortes nach q geführt hat.

von
4

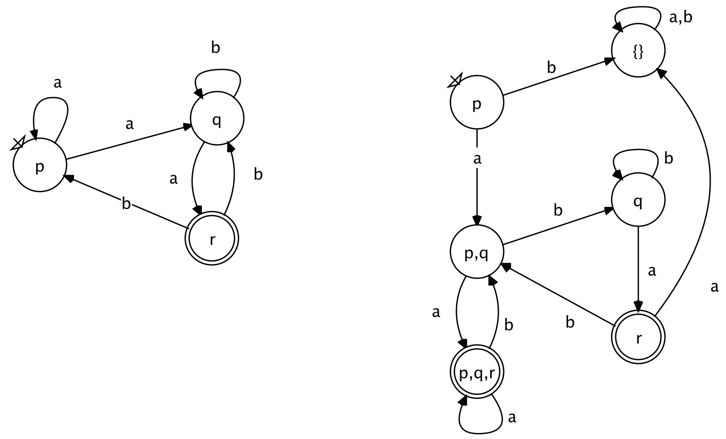
Übungsaufgabe 1.5:

1. Konstruieren Sie den Potenzautomaten zu folgendem NFA A.



A:

Lösung:



2. Sei δ die Überführungsfunktion eines vollständigen DFA und δ^* seine Erweiterung (vgl. Def. 13.2).
   Beweisen Sie für alle Zeichen $x \in \Sigma$, Worte $w \in \Sigma^*$ und alle Zustände $q \in Q$:

$$\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$$

   Hinweis: Verwenden Sie eine Induktion über $|w|$.

Lösung: Die Definition für δ^* lautet:

$$\delta^*(q, xw) = \delta^*(\delta(q, x), w) \quad (1)$$
$$\delta^*(q, \epsilon) = q \quad (2)$$

Beweis der Aussage per Induktion über $n = |w|$.

- Induktionsanfang für $|w| = 0$, d.h. $w = \epsilon$.
  Dann ist die linke Seite der Gleichung: $\delta^*(q, \epsilon x) = \delta^*(q, x)$, da $\epsilon x = x$.
  Für die rechte Seite gilt: $\delta(\delta^*(q, \epsilon), x) = \delta^*(q, x)$, da $\delta^*(q, \epsilon) = q$ nach Definition.
  Also gilt die Aussage für $|w| = 0$.
- Induktionsannahme (IA): Gelte die Aussage für alle Worte w bis zu einer festen Länge n.

- Induktionsschritt für $|w| = n + 1$, d.h. $w = yu$ mit $u \in \Sigma^*$ und $y \in \Sigma$. Nach Ind.Annahme gilt dann für jeden Zustand q (da $|u| = n$):

  $$\delta^*(q, ux) = \delta(\delta^*(q, u), x)$$

  Dann ist:

  $$\begin{array}{rll} & \delta^*(q, wx) & \text{da } w = yu \\ = & \delta^*(q, (yu)x) & \text{da} \cdot \text{assoziativ ist} \\ = & \delta^*(q, y(ux)) & \text{nach Def. ist } \delta^*(q, yw) = \delta^*(\delta(q, y), w) \\ = & \delta^*(\underbrace{\delta(q, y)}_{q' :=}, ux) & \\ = & \delta^*(q', ux) & \text{nach Ind.Annahme folgt} \\ = & \delta(\delta^*(q', u), x) & \\ = & \delta(\underline{\delta^*(\delta(q, y), u)}, x) & \text{nach Def. von } q' \\ = & \delta(\delta^*(q, yu), x) & \text{nach Definition für } \delta^* \\ = & \delta(\delta^*(q, w), x) & \end{array}$$

Da der Ind.Anfang und der Ind.Schritt gilt, ist die Behauptung für alle n und damit auch die Aussage bewiesen.