FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 5 : Aussagenlogik: Syntax, Rekursive Funktionen, Strukturelle Induktion

Schema für Induktionsbeweise

Behauptung

Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit F].

Induktionsanfang

Teilbeweis für die auf atomare Formeln eingeschränkte Behauptung: Für jedes Aussagensymbol $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt: [Behauptung formuliert mit A].

Induktionsannahme

Es seien F und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt: [Behauptung formuliert mit F] und [Behauptung formuliert mit G].

Induktionsschritt

Fall: $\neg\mathsf{F}$

Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $\neg\mathsf{F}$].

(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen.)

Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Teilbeweis für [Behauptung formuliert mit $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$].

(Dieser Teilbeweis darf auf die Induktionsannahme zurückgreifen. Dabei kann es sein, dass man alle Operatoren gleich behandeln kann, oder man muss eine Fallunterscheidung nach Operator machen. Dann kann es hier bis zu 4 Teilbeweise geben.)

Ressumee

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$ gilt, [Behauptung formuliert mit F].

Beispiel für eine rekursive Definition

Tiefe einer Formel: $\mathsf{tiefe} : \mathcal{L}_{AL} \to I\!N$

$\mathsf{tiefe}(\mathsf{A}) = 0$, für $\mathsf{A} \in \mathcal{A}s_{AL}$

$\mathsf{tiefe}(\neg\mathsf{F}) = \mathsf{tiefe}(\mathsf{F}) + 1$, für $\mathsf{F} \in \mathcal{L}_{AL}$

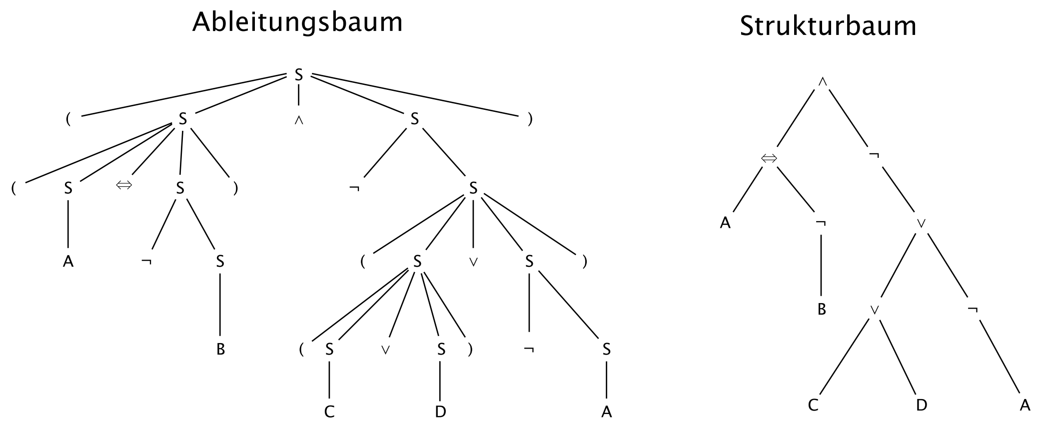
$\mathsf{tiefe}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{max}(\mathsf{tiefe}(\mathsf{F}), \mathsf{tiefe}(\mathsf{G})) + 1$, für $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}, \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Präsenzaufgabe 5.1

1. Geben Sie für folgende Formel den Ableitungsbaum (Grammatik Folie 2-14) und den Strukturbaum an:

   $((A \Leftrightarrow \neg B) \wedge \neg((C \vee D) \vee \neg A))$

   Lösung



2. Geben Sie eine rekursive Definition für die Funktion $\mathsf{Tf} : \mathcal{L}_{AL} \to 2^{\mathcal{L}_{AL}}$ (Tf: Teilformeln) an, die eine aussagenlogische Formel auf die Menge ihrer Teilformeln abbildet. (Dabei soll jede Formel als ihre eigene Teilformel gelten, also für alle F soll gelten: $F \in \mathsf{Tf}(F)$.)

   Tipp: Testen Sie Ihre Definition an der Formel aus der ersten Teilaufgabe.

   Lösung $\mathsf{Tf}(A) = \{A\}$, für $A \in \mathcal{A}s_{AL}$

   $\mathsf{Tf}(\neg F) = \mathsf{Tf}(F) \cup \{\neg F\}$, für $F \in \mathcal{L}_{AL}$

   $\mathsf{Tf}((F \circ G)) = \mathsf{Tf}(F) \cup \mathsf{Tf}(G) \cup \{(F \circ G)\}$, für $F, G \in \mathcal{L}_{AL}, \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

3. Beweisen Sie mit struktureller Induktion (und natürlich mit Rückgriff auf die rekursive Funktionsdefinition), dass alle echten Teilformeln einer Formel kürzer als die Formel sind. Formell:
   Für alle Formeln F der Aussagenlogik gilt:
   Für jede Formel $H \in \mathsf{Tf}(F)$ gilt: wenn $H \neq F$, dann ist $|H| < |F|$.

   (*Zur Erinnerung:* Bei Zeichenketten w, zu denen ja auch die Formeln gehören, schreiben wir $|w|$ für die Länge von w.)

   Lösung Induktionsbeweis

Induktionsanfang

Für jedes Aussagensymbol $A \in \mathcal{A}s_{AL}$ gilt:

Ist Formel $H \in \mathsf{Tf}(A) = \{A\}$, dann ist $H = A$, also gilt auch:

Für jede Formel $H \in \mathsf{Tf}(A)$ gilt: wenn $H \neq A$, dann ist $|H| < |A|$. (... da es kein Gegenbeispiel gibt.)

Induktionsannahme

Es seien F und $\mathsf{G} \in \mathcal{L}_{AL}$ Formeln, für die gilt:

Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$ gilt: wenn $\mathsf{H} \neq \mathsf{F}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{F}|$.

Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{G})$ gilt: wenn $\mathsf{H} \neq \mathsf{G}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{G}|$.

Beobachtung / Randnotiz: Damit gilt dann auch (und nur das werden wir gleich brauchen):

Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$ gilt $|\mathsf{H}| \leq |\mathsf{F}|$.

Für jede Formel $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{G})$ gilt $|\mathsf{H}| \leq |\mathsf{G}|$.

Induktionsschritt

Fall: $\neg\mathsf{F}$

Nach Definition von Tf gilt $\mathsf{Tf}(\neg\mathsf{F}) = \mathsf{Tf}(\mathsf{F}) \cup \{\neg\mathsf{F}\}$.

Ist also $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\neg\mathsf{F})$ und $\mathsf{H} \neq \neg\mathsf{F}$, dann ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$. Nach Induktionsannahme ist damit $|\mathsf{H}| \leq |\mathsf{F}| < |\neg\mathsf{F}|$.

Damit ergibt sich:

Ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\neg\mathsf{F})$ und $\mathsf{H} \neq \neg\mathsf{F}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\neg\mathsf{F}|$.

Fall: $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$ für $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Nach Definition von Tf gilt: $\mathsf{Tf}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G})) = \mathsf{Tf}(\mathsf{F}) \cup \mathsf{Tf}(\mathsf{G}) \cup \{(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})\}$.

Ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G}))$ und $\mathsf{H} \neq (\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$, dann ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$ oder $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{G})$. Nach Induktionsannahme ist damit $|\mathsf{H}| \leq |\mathsf{F}| < |(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| = 3 + |\mathsf{F}| + |\mathsf{G}|$ oder $|\mathsf{H}| \leq |\mathsf{G}| < |(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})| = 3 + |\mathsf{F}| + |\mathsf{G}|$.

Damit ergibt sich:

Ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}((\mathsf{F} \circ \mathsf{G}))$ und $\mathsf{H} \neq (\mathsf{F} \circ \mathsf{G})$, dann ist $|\mathsf{H}| < |(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})|$.

Ressumee

Nach dem Prinzip der strukturellen Induktion ergibt sich damit: Für alle Formeln F, H der Aussagenlogik gilt: Ist $\mathsf{H} \in \mathsf{Tf}(\mathsf{F})$ und $\mathsf{H} \neq \mathsf{F}$, dann ist $|\mathsf{H}| < |\mathsf{F}|$.