FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 9 : — Prädikatenlogik: Syntax und Semantik

Präsenzaufgabe 9.1

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 20 Minuten abgeschlossen sein.

1. Gehen Sie davon aus, dass F_{11} eine prädikatenlogische Formel ist, die aber ohne Berücksichtigung von Benennungskonventionen geschrieben wurde. Geben Sie für die verwendeten Symbole an, welcher syntaktischen Kategorie sie angehören (Variable, Konstante, Funktionssymbol, Prädikatensymbol) und geben Sie für Funktionssymbole und Prädikatensymbole an, in welcher Stelligkeit sie verwendet werden. Für welche Symbole gibt es alternative Lösungen / Mehrdeutigkeiten?

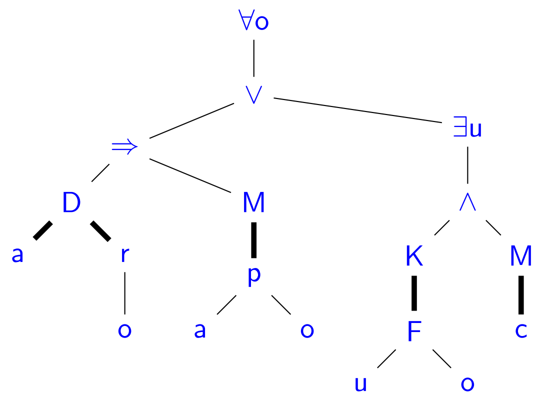
$$\mathsf{F}_{11} = \forall \mathsf{o}\ ((\mathsf{D}(\mathsf{a}, \mathsf{r}(\mathsf{o})) \Rightarrow \mathsf{M}(\mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{o}))) \vee \exists \mathsf{u}\ (\mathsf{K}(\mathsf{F}(\mathsf{u}, \mathsf{o})) \wedge \mathsf{M}(\mathsf{c})))$$

   Lösung

   - o und u müssen Variablen sein, da sie direkt hinter Quantoren auftreten.
   - $\mathsf{D}(\mathsf{a}, \mathsf{r}(\mathsf{o})), \mathsf{M}(\mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{o})), \mathsf{K}(\mathsf{F}(\mathsf{u}, \mathsf{o})), \mathsf{M}(\mathsf{c})$ müssen Formeln sein, da sie mit Junktoren verknüpft werden.
   - Entsprechend müssen $\mathsf{D}, \mathsf{M}, \mathsf{K}$ Prädikatensymbole sein und $\mathsf{a}, \mathsf{r}(\mathsf{o}), \mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{o}), \mathsf{F}(\mathsf{u}, \mathsf{o}), \mathsf{c}$ Terme. D ist zweistellig und M, K sind einstellig.
   - a und c könnten Variablen oder Konstanten sein, denn es sind atomare Terme.
   - $\mathsf{r}, \mathsf{p}, \mathsf{F}$ sind Funktionssymbole. r ist einstellig, p, F sind zweistellig.

2. Geben Sie für die Formel aus Teilaufgabe 1 den Strukturbaum an.

   Lösung



3. Es seien x, y und z Variablen. Bestimmen Sie für **eine** der beiden Formeln, welche Variable in welcher Position durch welchen Quantor gebunden wird. (Anders gesagt: Bestimmen Sie, welches Variablenvorkommen durch welchen Quantor gebunden wird.) Welche Variablen kommen in der betrachteten Formel (in welcher Position) frei vor?

(a) $F_{12} = \forall x\,(P(x) \Rightarrow \exists y\,(\exists x\,(Q(x,y) \vee R(z)) \wedge M(x,y,z)))$

Lösung Das x in $P(x)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das x in $Q(x,y)$ wird durch $\exists x$ gebunden.
Das y in $Q(x,y)$ wird durch $\exists y$ gebunden.
Das x in $M(x,y,z)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das y in $M(x,y,z)$ wird durch $\exists y$ gebunden.
Beide Vorkommen von z sind frei.

(b) $F_{13} = \exists y\,(Q(y,x) \wedge \forall x\,(\exists x\,Q(x,y) \Rightarrow (R(x) \vee M(x,y))))$

Lösung Das x in $Q(y,x)$ ist frei.
Das x in $Q(x,y)$ wird durch $\exists x$ gebunden.
Das x in $R(x)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das x in $M(x,y)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Alle Vorkommen von y werden durch $\exists y$ gebunden.

Präsenzaufgabe 9.2

1. Es seien folgende Symbole in der Prädikatenlogik verfügbar:

   - Es seien a, b Konstanten.
   - Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol.
   - Es sei P ein einstelliges Prädikatensymbol.
   - Es sei Q ein zweistelliges Prädikatensymbol.
   - Es seien x, y, z Variablen.

   Weiterhin sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, wobei $U = \{3, 6, 9\}$ und I folgende Abbildungen vornimmt:

	a	b	f	P	Q	x	y	z
I	3	6	$3 \mapsto 6$ $6 \mapsto 9$ $9 \mapsto 9$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	3	9

   Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Formeln F_{21} und F_{22} mit Hilfe der Struktur $\mathcal{A}$.

   (a) $F_{21} = Q(a,b) \Leftrightarrow Q(f(a), f(b))$

   Lösung

	a	b	f	Q	$f(a)$	$f(b)$	$Q(a,b)$	$Q(f(a),f(b))$	F_{21}
$\mathcal{A}$	3	6	$3 \mapsto 6$ $6 \mapsto 9$ $9 \mapsto 9$	$\{(3,6),(6,9)\}$	6	9	1	1	1

   Da kein Quantor auftaucht, müssen wir auch keine Varianten betrachten.

   (b) $F_{22} = \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x,z))$

   Lösung

	P	Q	x	z	$P(x)$	$Q(x,z)$	$P(x) \Rightarrow Q(x,z)$	F_{22}
$\mathcal{A}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	9				0
$\mathcal{A}_{[x/3]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	3	9	0	0	1	
$\mathcal{A}_{[x/6]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	6	9	1	1	1	
$\mathcal{A}_{[x/9]}$	$\{6,9\}$	$\{(3,6),(6,9)\}$	9	9	1	0	0	

Hier gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[x/3]}$. Diese Struktur wird aber zweimal genannt, um die Auswertung übersichtlicher zu gestalten. Unter den drei x-Varianten von $\mathcal{A}$ hat $\mathcal{A}$ keinen Sonderstatus. Der Wert von $\mathcal{A}(F_{21})$ bestimmt sich aus den Werten, die die x-Varianten der Formel $P(x) \Rightarrow Q(x, z)$ zuordnen. In diesem Fall hätte es sogar gereicht, nur die Variante $\mathcal{A}_{[x/9]}$ zu betrachten, da der hier auftretende Wert 0 den Wert von $\mathcal{A}(F_{21})$ bestimmt. Da die Variable z frei in F_{22} vorkommt, wird sie wie eine Konstante behandelt und bei der Evaluation nicht variiert. Fehlende oder leere Zellen in der Tabelle werden für die Bestimmung von $\mathcal{A}(F_{21})$ nicht benötigt.

2. Zeigen Sie, dass F_{21} und F_{22} kontingent sind, indem Sie Strukturen $\mathcal{A}_a$ und $\mathcal{A}_b$ angeben, so dass gilt: $\mathcal{A}_a(F_{21}) \neq \mathcal{A}(F_{21})$ und $\mathcal{A}_b(F_{22}) \neq \mathcal{A}(F_{22})$. Begründen Sie, dass die angegebene Struktur das Gewünschte leistet.

   Tipp: Modifizieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$ geeignet aber möglichst wenig. Dann können Sie die Begründung ggf. auch angeben, ohne die komplette Tabelle aufzuschreiben.
   Lösung

   (a) Wir wählen $\mathcal{A}_a(Q) = \{(3, 6)\}$. Ansonsten übernehmen wir die Werte von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}_a(Q(f(a), f(b))) = 0$ und $\mathcal{A}_a(Q(a, b)) = 1$, und damit $\mathcal{A}_a(F_{21}) = 0$.

   (b) Wir wählen $\mathcal{A}_b(P) = \{\}$. Ansonsten übernehmen wir die Werte von $\mathcal{A}$. Dann sind $\mathcal{A}_{b[x/3]}(P(x)) = 0$, $\mathcal{A}_{b[x/6]}(P(x)) = 0$, $\mathcal{A}_{b[x/9]}(P(x)) = 0$. Damit sind dann auch $\mathcal{A}_{b[x/3]}(P(x) \Rightarrow Q(x, z)) = 1$, $\mathcal{A}_{b[x/6]}(P(x) \Rightarrow Q(x, z)) = 1$, $\mathcal{A}_{b[x/9]}(P(x) \Rightarrow Q(x, z)) = 1$, woraus sich $\mathcal{A}_b(F_{22}) = 1$ ergibt.

Übungsaufgabe 9.3

von
4

1. Norbert Namenlos hat nach erfolgreichem Abschluss einer Logikeinführung die Formel F_{32} als Ausgangspunkt der Formalisierung für einen Datenbankentwurf im Rahmen seiner Bachelorarbeit aufgeschrieben. Auch er verzichtet gerne auf die Berücksichtigung von Benennungskonventionen. Bestimmen Sie auch hier die syntaktischen Kategorien der verwendeten Symbole und erläutern Sie, welche Probleme diese Formalisierung aufweist.

$$F_{32} = \forall f\ \exists x\ (R(f, x) \Leftrightarrow (P(f(x)) \wedge P(R, x)))$$

   Lösung

   - f und x müssen Variablen sein, da sie direkt hinter Quantoren auftreten.
   - $R(f, x)$, $P(f(x))$ und $P(R, x)$ müssen Formeln sein, da sie mit Junktoren verknüpft werden.
   - Entsprechend müssen R und P Prädikatensymbole sein. R ist in $R(f, x)$ ein zweistelliges Prädikatensymbol, aber P ist in $P(f(x))$ einstellig und in $P(R, x)$ zweistellig.
   - Weiterhin müssen $f(x)$ und R Terme sein. Also müsste f ein einstelliges Funktionssymbol sein, aber f hatten wir ja schon als Variable klassifiziert. Ebenso müsste R eine Konstante oder eine Variable sein, aber wir hatten R bereits als zweistelliges Prädikatensymbol identifiziert.

Der Logik-Dialekt, den wir eingeführt haben, lässt es nicht zu, dass dasselbe Symbol als Prädikatensymbole mit variierender Stelligkeit verwendet wird (Def 9.1). Bei Logik-Dialekte, die solche Mehrfachverwendungen zulassen, gilt allerdings, dass dann die einstellige Variante und die zweistellige Variante in der Semantik völlig unabhängig voneinander behandelt werden. Damit suggeriert die Formel von Norbert einen Zusammenhang, der in der Semantik nicht besteht. Entsprechend sollte man auch in Dialekten, die die Doppelverwendung zulassen, besser darauf verzichten.

Für die Doppelverwendung eines Symbols als Variable und als Funktionssymbol gilt Entsprechendes. Auch wenn die Formulierung von Def. 9.1 vielleicht nicht ganz klar macht, dass solche Doppelverwendungen verboten sind, sind sie in der Regel auf jeden Fall irreführend.

Es gibt allerdings auch Logiken, in denen Variablen auftreten, die für Funktionen oder Relationen stehen (Logiken höheren Ordnung). Da Norbert aber erst eine Logikeinführung besucht hat, ist nicht anzunehmen, dass er so komplizierte Formalismen schon korrekt anwenden kann. (Allerdings könnte er im Rahmen der funktionalen Programmierung schon mit entsprechenden Konzepten in Berührung gekommen sein.)

2. Es seien x, y und z Variablen. Bestimmen Sie, welches Variablenvorkommen durch welchen Quantor gebunden wird. Welche Variablen kommen in der betrachteten Formel (in welcher Position) frei vor?

$$F_{33} = \forall x\ (\exists y\ R(x, f(y)) \land R(x, y)) \lor \exists z\ (\forall y\ M(x, y, z) \lor \forall z\ P(z))$$

Lösung Das x in $R(x, f(y))$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das y in $R(x, f(y))$ wird durch $\exists y$ gebunden.
Das x in $R(x, y)$ wird durch $\forall x$ gebunden.
Das y in $R(x, y)$ ist frei.
Das x in $M(x, y, z)$ ist frei.
Das y in $M(x, y, z)$ wird durch $\forall y$ gebunden.
Das z in $M(x, y, z)$ wird durch $\exists z$ gebunden.
Das z in $P(z)$ wird durch $\forall z$ gebunden.

3. Wählen Sie für die in den folgenden Formeln auftretenden Konstanten (a_i) und Prädikatensymbolen (P_i, Q_i, R_i, S_i, T_i) geeignete Übersetzungsschlüssel und übersetzen Sie die Formeln ins Deutsche. Geben Sie ruhig auch Formulierungsalternativen an. Welche Formeln lassen sich nicht gut übertragen? Warum?

Beispiel: $P_0(a_0) \Rightarrow \exists y\ (R_0(y) \land Q_0(a_0, y))$ kann man übertragen als: Wenn Peter (a_0) ein Student (P_0) ist, dann gibt es eine Vorlesung (R_0), die Peter (a_0) besucht (Q_0). oder auch als: Wenn Peter (a_0) Student (P_0) ist, dann besucht (Q_0) er (a_0) eine Vorlesung (R_0).

(a) $\neg\exists x\ (P_1(x) \land R_1(x))$

(b) $\neg\forall x\ (P_2(x) \Rightarrow R_2(x))$

(c) $P_3(a_3) \Rightarrow \exists y\ (R_3(y) \land Q_3(a_3, y))$

(d) $P_4(a_4) \land \forall y\, (R_4(y) \Rightarrow Q_4(a_4, y))$

(e) $P_5(a_5) \Rightarrow \forall y\, (R_5(y) \land Q_5(a_5, y))$

(f) $\forall x\, ((P_6(x) \land \exists y\, (R_6(y) \land Q_6(x, y))) \Rightarrow \exists z\, (S_6(z) \land T_6(x, z)))$

(g) $\forall x\, (P_7(x) \Leftrightarrow (S_7(x) \land \forall y\, (R_7(y) \Rightarrow Q_7(x, y))))$

(h) $\forall x\, (P_8(x) \Leftrightarrow (S_8(x) \land \exists y\, (R_8(y) \land Q_8(x, y))))$

Lösung

(a) Kein Superstar (P_1) ist arm ((R_1)).
Keine Kontradiktion (P_1) ist erfüllbar ((R_1)).

(b) Nicht jeder Superstar (P_2) ist reich (R_2).
Nicht jeder Tautologie (P_2) ist kurz (R_2).

(c) Wenn Hans (a_3) ein Superstar (P_3) ist, dann findet ein Teenie (R_3) Hans cool (cool finden: Q_3).

(d) Hans (a_4) ist ein Superstar (P_4), den alle Teenies (R_4) cool findet (Q_4).

(e) Wenn Hans (a_5) ein Superstar (P_5) ist, dann gibt es nur noch Teenies (R_5) und alle finden Hans cool (Q_5).
(Das ist ziemlicher Unsinn, aber so steht es in der Formel.)

(f) Jeder Superstar (P_6), den ein Teenie (R_6) cool findet (Q_6), hat einen jungen (S_6) Berater (hat Berater: T_6).

(g) Tautologien (P_7) sind genau die Formeln (S_7), die durch alle Belegungen (R_7) wahr gemacht werden (Q_7).
Superstars (P_7) sind (genau) die Menschen (S_7), die alle Teenies (R_7) cool finden (Q_7).

(h) Erfüllbar (P_8) sind genau die Formeln (S_8), die durch eine Belegung (R_8) wahr gemacht werden (Q_8).
Superstars (P_8) sind (genau) die Menschen (S_8), die ein Teenie (R_8) cool findet (Q_8).

Wir man sieht: Der Satz 'Teenies finden Superstars cool' kann prädikatenlogisch sehr unterschiedlich präzisiert werden. Mit natürlicher Sprache ist eine entsprechende Präzision aber auch möglich.

Übungsaufgabe 9.4

von
8

Es seien folgende Symbole in der Prädikatenlogik verfügbar:

- Es seien P, R einstellige Prädikatensymbole.
- Es sei Q ein zweistelliges Prädikatensymbol.
- Es sei x eine Variable.
- Es sei a eine Konstante.

1. Weiterhin sei $\mathcal{A}_1 = (U_1, I_1)$ eine Struktur, wobei $U_1 = \{3, 6, 9\}$ und I_1 folgende Abbildungen vornimmt:

	P	Q	x
I_1	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	9

Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Formel F_{41} mit Hilfe der Struktur $\mathcal{A}_1$.

$F_{41} = \exists x\, P(x) \vee \forall x\, (Q(x,x) \Rightarrow P(x))$

Lösung

	P	Q	x	P(x)	Q(x,x)	Q(x,x) ⇒ P(x)	∃x P(x)	∀x (Q(x,x) ⇒ P(x))	F_{41}
$\mathcal{A}_1$	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	9				0	0	0
$\mathcal{A}_{1[x/3]}$	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	3	0	0	1			
$\mathcal{A}_{1[x/6]}$	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	6	0	1	0			
$\mathcal{A}_{1[x/9]}$	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	9	0	0	1			

2. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Struktur, dass Formel F_{42} keine Kontradiktion ist.

   $F_{42} = \exists x\, (Q(x,a) \wedge \neg Q(a,x))$

   Lösung Es sei $\mathcal{A}_2 = (U_2, I_2)$ eine Struktur, wobei $U_2 = \{3,6\}$ und I_2 folgende Abbildungen vornimmt:

	a	Q	x
I_2	6	$\{(3,6)\}$	3

   Dann ergibt sich $\mathcal{A}_2(\exists x\, (Q(x,a) \wedge \neg Q(a,x))) = 0$ wie folgt:

	a	Q	x	Q(x,a)	Q(a,x)	¬Q(a,x)	Q(x,a) ∧ ¬Q(a,x)	F_{42}
$\mathcal{A}_2$	6	$\{(3,6)\}$	3					1
$\mathcal{A}_{2[x/3]}$	6	$\{(3,6)\}$	3	1	0	1	1	
$\mathcal{A}_{2[x/6]}$	6	$\{(3,6)\}$	6	0	1	0	0	

3. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Struktur, dass die Formeln F_{43} und F_{44} nicht äquivalent sind.

   - $F_{43} = \exists x\, (P(x) \Rightarrow R(a))$
   - $F_{44} = \exists x\, P(x) \Rightarrow R(a)$

   Lösung Es sei $\mathcal{A}_3 = (U_3, I_3)$ mit $U_3 = \{3,6\}$ und I_3 entsprechend der Tabelle. Dann ergibt sich $\mathcal{A}_3(F_{43}) \neq \mathcal{A}_3(F_{44})$ wie folgt:

	a	P	R	x	P(x)	R(a)	P(x) ⇒ R(a)	∃x P(x)	F_{43}	F_{44}
$\mathcal{A}_3$	3	$\{3\}$	$\{\}$			0		1	1	0
$\mathcal{A}_{3[x/3]}$	3	$\{3\}$	$\{\}$	3	1	0	0			
$\mathcal{A}_{3[x/6]}$	3	$\{3\}$	$\{\}$	6	0	0	1			

4. Zeigen Sie, dass für beliebige prädikatenlogische Formeln F und G die Formeln F_{45} und F_{46} äquivalent sind.

   - $F_{45} = \exists x\, F \vee \exists x\, G$
   - $F_{46} = \exists x\, (F \vee G)$

   Lösung Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur.

Erste Richtung: (Alle Modelle von F_{45} sind Modelle von F_{46})
Wenn $\mathcal{A}(\exists x\, F \vee \exists x\, G) = 1$, dann sind auch $\mathcal{A}(\exists x\, F) = 1$ oder $\mathcal{A}(\exists x\, G) = 1$ (Auswertung der Disjunktion). Dann gilt auch für ein $d \in U$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1$ (Auswertung der Existenzquantoren). Daraus ergibt sich dann ebenso für ein $d \in U$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \vee G) = 1$ (Auswertung der Disjunktion), also auch $\mathcal{A}(\exists x\, F \vee \exists x\, G) = 1$ (Auswertung des Existenzquantors).

Zweite Richtung: (Alle Modelle von F_{46} sind Modelle von F_{45})
Wenn $\mathcal{A}(\exists x\, (F \vee G)) = 1$ ist, dann ist für ein $d \in U$, auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \vee G) = 1$ (Auswertung des Existenzquantors). Damit gilt dann für ein $d \in U$, dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1$ (Auswertung der Disjunktion). Also ist auch $\mathcal{A}(\exists x\, F) = 1$ oder $\mathcal{A}(\exists x\, G) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x\, F \vee \exists x\, G) = 1$ (Auswertung des Existenzquantors).