Aussagenlogik: Resolution

Resolution

- ist Widerlegungsverfahren (speziell) für Klauselmengen
- basiert also auf Formeln in Konjunktiver Normalform
- ist nicht auf Hornformeln beschränkt aber für Hornformeln auch sehr effizient.

- *Resolventenbildung* – Anwendung der *Resolventenregel* (Inferenzregel)

Zur Erinnerung

- Klauseln sind Disjunktionen von Literalen.
- KNF-Formeln sind Konjunktionen von Klauseln.

- Bei der Resolution ist es angenehm
  - Klauseln als Mengen von Literalen und
  - KNF-Formeln als Mengen von Klauseln darzustellen.

Vorbemerkung zur Resolution

Korrekte Inferenzregeln in Klauseldarstellung

- Modus ponens (MP): $\dfrac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$ $\qquad$ $\dfrac{A,\ \neg A \vee B}{B}$
- Modus tollens (MT): $\dfrac{\neg B,\ A \Rightarrow B}{\neg A}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg B,\ \neg A \vee B}{\neg A}$
- Disjunktiver Syllogismus (DS): $\dfrac{\neg B,\ A \vee B}{A}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg B,\ A \vee B}{A}$
- Disjunktiver Syllogismus (DS): $\dfrac{\neg A,\ A \vee B}{B}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg A,\ A \vee B}{B}$
- Hypothetischer Syllogismus (HS): $\dfrac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg A \vee B,\ \neg B \vee C}{\neg A \vee C}$

➔ Resolution verallgemeinert diese Regeln (und viele mehr) unter Verwendung einer geeigneten Darstellung (Mengendarstellung)

➔ Resolution ist ein korrektes Ableitungsverfahren.

Struktur der Vorlesung

Resolutionsregel

- Definition der zugrunde liegenden Mengendarstellung
- Die Resolutionsregel
- Beispiele der Anwendung
- Korrektheit der Resolution
  - Resolutionslemma

Definition Resolutionsableitung

- (Widerlegungs-)Korrektheit
- (Widerlegungs-)Vollständigkeit

Resolutionsalgorithmus

Verfeinerungen des Verfahrens (Ein Ausblick)

- P- / N-Resolution
- lineare Resolution, Stützmengenresolution
- Einheitsresolution

Mengendarstellung von KNF und Klauseln (1)

Definition 8.0

Ist $K = (\bigvee_{i=1}^{m} L_i)$ eine Klausel, dann nennen wir

$\mathbf{K} = \{L_1,\ldots, L_m\}$ die *Mengendarstellung* von K.

Ist $F = (\bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{k=1}^{mi} L_{i,k}))$ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform, dann ist

$\mathbf{F} = \{\{L_{1,1},\ldots, L_{1,m1}\}, \ldots, \{L_{n,1},\ldots, L_{n,mn}\}\}$ die *Mengendarstellung* von F.

Die Mengendarstellung signalisieren wir durch Fettdruck der Variablen:

$\mathbf{K}, \mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}, \ldots, \mathbf{R}$: Klausel in Mengendarstellung

$\mathbf{F}$: KNF-Formel in Mengendarstellung

Wir passen die Wahrheitswertberechnung auf die Mengendarstellung an:

$\mathcal{A}(\mathbf{K}) = \text{Maximum}(\{\mathcal{A}(L) \mid L \in \mathbf{K}\})$ $\quad$ $\mathcal{A}(\mathbf{F}) = \text{Minimum}(\{\mathcal{A}(\mathbf{K}) \mid \mathbf{K} \in \mathbf{F}\})$

Wir passen den Äquivalenzbegriff auf die Mengendarstellung an:

$\mathbf{F_1} \equiv \mathbf{F_2}$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(\mathbf{F_1}) = \mathcal{A}(\mathbf{F_2})$ für alle Belegungen $\mathcal{A}$.

Tritt die leere Menge in der Rolle einer Klausel auf, dann wird sie als *leere Klausel* bezeichnet und durch $\square$ symbolisiert.

➔ Die leere Klausel $\square$ ist die Mengendarstellung zu $\perp$ (konstante Kontradiktion)
Entsprechend legen wir fest: $\mathcal{A}(\square) = \mathbf{0}$

Beispiel

Formel in KNF

$F = (\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge \neg E \wedge (\neg C \vee A) \wedge C \wedge B \wedge (\neg G \vee D) \wedge G$
$= K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 \wedge K_4 \wedge K_5 \wedge K_6 \wedge K_7$

Mengendarstellungen der Klauseln

➔ $K_1 = \{\neg A, \neg B, \neg D\}$ $K_2 = \{\neg E\}$ $K_3 = \{\neg C, A\}$
$K_4 = \{C\}$ $K_5 = \{B\}$ $K_6 = \{\neg G, D\}$ $K_7 = \{G\}$

Mengendarstellung der Formel

➔ $F = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7\}$
$= \{\{\neg A, \neg B, \neg D\}, \{\neg E\}, \{\neg C, A\}, \{C\}, \{B\}, \{\neg G, D\}, \{G\}\}$

➔ In der Mengendarstellung sind die Junktoren nicht mehr explizit.

Achtung: Leere Menge in der Mengendarstellung

Bislang

- haben wir Mengen nur als Mengen von Formeln benutzt, wobei wir eine implizite Konjunktion der enthaltenen Formeln als die Standardinterpretation gesetzt haben.
- Eine Formelmenge wird von einer Belegung nur dann nicht wahr gemacht, wenn mindestens eine Formel enthalten ist, die von der Belegung falsch gemacht wird. Entsprechend wird auch die leere Formelmenge von jeder Interpretation wahr gemacht

In der Mengendarstellung brauchen wir eigentlich 2 leere Mengen

- Die leere (Literal-)Menge als Klausel betrachtet wollen wir implizit disjunktiv interpretieren.
- Einen Literal-Menge als Klausel betrachtet wird von einer Belegung genau dann wahr gemacht, wenn mindestens ein enthaltenes Literal von ihr wahr gemacht wird. Entsprechend soll die leere Literal-Menge (leere Klausel) von allen Belegungen zu falsch ausgewertet werden.

Die Mengenlehre stellt aber nur eine leere Menge zur Verfügung.

- Der Kontext muss uns immer die Information geben, ob die leere Menge gerade für die leere Formelmenge oder für die leere Klausel steht.
- Deshalb haben wir das Symbol $\square$ eingeführt. Es steht immer für die leere Klausel !

Bemerkung zur Mengendarstellung

- Für jede Formel in KNF ist die Mengendarstellung eindeutig.
- Die Umkehrung gilt nicht: verschiedene KNF-Formeln können dieselbe Mengendarstellung haben.
- Die Zulässigkeit der Mengendarstellung beruht auf den Gesetzen der Assoziativität, Kommutativität, Idempotenz

Satz (ohne Nummer)

Klauseln bzw. Formeln mit derselben Mengendarstellung sind äquivalent.
(Beweis zur Übung.)

Resolutionsregel / Resolventenregel

Erinnerung: Schreibkonvention für *komplementäre Literale*: $\overline{L} = \begin{cases} A, & \text{falls } L = \neg A \\ \neg A, & \text{falls } L = A \end{cases}$

Definition 8.1 (Resolvente)

Seien K_1 und K_2 Klauseln in Mengendarstellung und sei L ein Literal mit $L \in K_1$ und $\overline{L} \in K_2$. Dann heißt die Literalmenge $R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\})$ *Resolvente* von K_1 und K_2 (bzgl. L).

- Darstellung als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[dl, dash] \\ & R & \end{tikzcd}$$

- Resolventenbildung als Ableitung: *Resolution* $\{K_1, K_2\} \vdash_{res} R$
- Falls $K_1 = \{L\}$ und $K_2 = \{\overline{L}\}$, so ist die Resolvente leer ($R = \emptyset$) also die *leere Klausel* $\square$.
- Darstellung als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \{L\} \arrow[dr, dash] & & \{\overline{L}\} \arrow[dl, dash] \\ & \square & \end{tikzcd}$$

Resolution: Beispiele (1)

Gegeben: Eine Formel in KNF

$A \wedge (\neg A \vee B)$ — ist KNF zu $A \wedge (A \Rightarrow B)$

Resolutionsableitung

als Baum von Klauseln in der Mengendarstellung:

$\{A\}$ $\{\neg A, B\}$

$\{B\}$

als Baum von Klauseln

A $(\neg A \vee B)$

B

Zur Erinnerung

$A \wedge (\neg A \vee B) \models B$

$\{A, (A \Rightarrow B)\} \vdash_{MP} B$

Resolution: Beispiele (2)

Gegeben:

$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

Resolutionsableitung

$\{A, B\}$ $\{\neg A, C\}$

$\{B, C\}$

Zur Erinnerung

$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \models (B \vee C)$

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$\{\neg A, B\}$ $\{\neg A, C\}$

kein Paar komplementärer Literale !

keine Resolventenbildung !

Resolutionslemma 8.2

Sei F eine Formel in KNF, dargestellt als Klauselmenge. Ferner sei R eine Resolvente zweier Klauseln K_1 und K_2 in F bezüglich des Literals L,

d.h. $R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\})$.

Dann sind F und $F \cup \{R\}$ äquivalent.

Voraussetzungen: Def. 3.1, 8.0, 8.1

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung. Zu zeigen: $\mathcal{A}(F) = 1$ GDW. $\mathcal{A}(F \cup \{R\}) = 1$

Falls $\mathcal{A}(F \cup \{R\}) = 1$, dann auch $\mathcal{A}(F) = 1$.

Es sei $\mathcal{A}(F) = 1$. Zu zeigen ist: $\mathcal{A}(F \cup \{R\}) = 1$ insbesondere $\mathcal{A}(R) = 1$

Für alle Klausel $K \in F$ gilt: $\mathcal{A}(K) = 1$, also auch für K_1 und K_2.

1. Fall: $\mathcal{A}(L) = 0$: Wegen $\mathcal{A}(K_1) = 1$ gilt: $\mathcal{A}(K_1 - \{L\}) = 1$. Also $\mathcal{A}(R) = 1$.

2. Fall: $\mathcal{A}(\overline{L}) = 0$: Wegen $\mathcal{A}(K_2) = 1$ gilt: $\mathcal{A}(K_2 - \{\overline{L}\}) = 1$. Also: $\mathcal{A}(R) = 1$.

Corollar 8.3

- Resolventenbildung ist *korrekt*, d.h., wenn $\mathbf{M} \vdash_{res} R$, dann $\mathbf{M} \models R$.

Definition 8.4 (Resolventenmengen)

Sei F eine Formel in KNF, dargestellt als Klauselmenge.

$\text{Res}(F) := F \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente zweier Klauseln in } F\}$

Dies wird induktiv fortgesetzt durch:

$$\text{Res}^0(F) := F$$
$$\text{Res}^{n+1}(F) := \text{Res}(\text{Res}^n(F)) \quad n \geq 0$$
$$\text{Res}^*(F) := \bigcup_{n\geq 0} \text{Res}^n(F)$$

Die Bildung von Resolventenmengen entspricht der Bildung von Mengen ableitbarer Formeln in Kalkülen der Aussagenlogik (vgl. Def. 6. 8).

Sei **M** eine Formelmenge und $\mathcal{C}$ ein Kalkül:

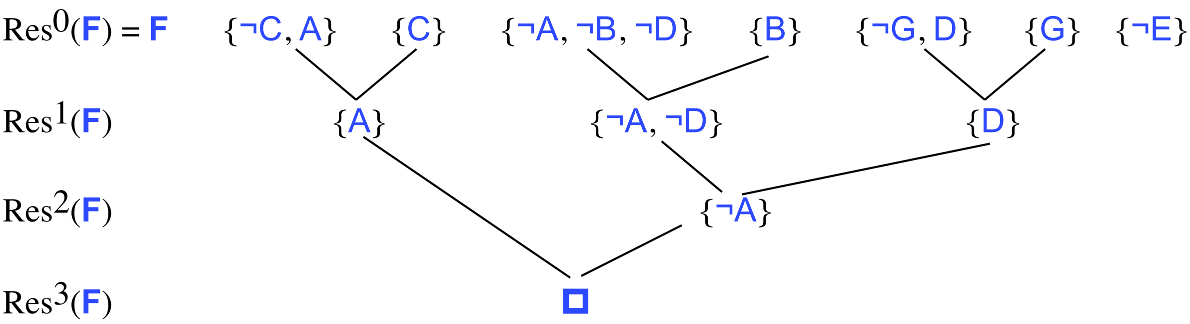
$\text{Abl}_{\mathcal{C}}(\mathbf{M}) := \mathbf{M} \cup \{F \mid \mathbf{M} \vdash_{\mathcal{C}} F\}$ in einem Schritt aus **M** ableitbare Formeln

$$\text{Abl}_{\mathcal{C}}^0(\mathbf{M}) := \mathbf{M}$$
$$\text{Abl}_{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathbf{M}) := \text{Abl}_{\mathcal{C}}(\text{Abl}_{\mathcal{C}}^n(\mathbf{M})) \quad n \geq 0$$
$$\text{Abl}_{\mathcal{C}}^*(\mathbf{M}) := \bigcup_{n\geq 0} \text{Abl}_{\mathcal{C}}^n(\mathbf{M})$$

Gegeben: Eine Formel in KNF

$(\neg C \vee A) \wedge C \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge B \wedge (\neg G \vee D) \wedge G \wedge \neg E$

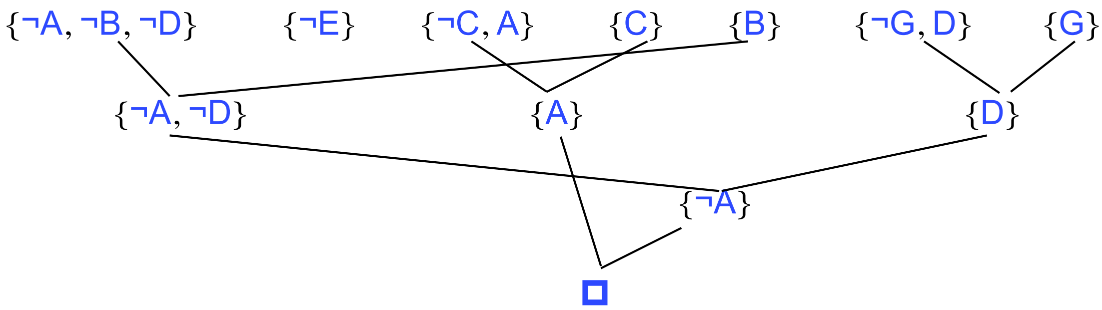
Resolutionsableitung (mehrschrittig)



Gegeben: Die gleiche Formel in anderer Anordnung der Klauseln

$(\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge \neg E \wedge (\neg C \vee A) \wedge C \wedge B \wedge (\neg G \vee D) \wedge G$

Resolutionsableitung (bei Beibehaltung der Reihenfolge aus der KNF):



➔ Die Anordnung der Klauseln in der Basiszeile, beeinflusst nicht das Ergebnis, aber die Übersichtlichkeit der Resolutionsableitung.

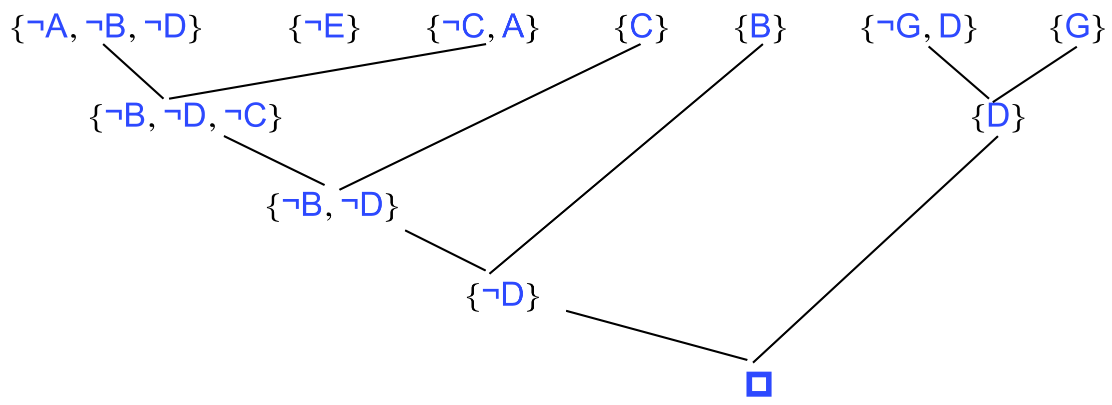
➔ Es müssen nicht alle Klauseln an der Ableitung beteiligt sein.

Resolution: Beispiel (5)

Gegeben: Die gleiche Formel in KNF

$(\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge \neg E \wedge (\neg C \vee A) \wedge C \wedge B \wedge (\neg G \vee D) \wedge G$

Eine andere Resolutionsableitung:



Resolventenmengen: Äquivalenz

Lemma 8.5 (Äquivalenz der Resolventenmengen)

Sei **F** eine Formel in KNF, dargestellt als Klauselmenge.

Dann gilt: $F \equiv \mathrm{Res}(F)$ und $F \equiv \mathrm{Res}^*(F)$

Beweis

F ist eine endliche Menge von Klauseln, daher gibt es eine endliche Menge von Klauselpaaren (mit einer endlichen Anzahl von Literalen), auf die die Resolventenregel angewendet werden kann.

Somit gibt es ein $n \geq 0$, so dass $R_1, \ldots, R_n$ eine Aufzählung aller Resolventen zweier Klauseln aus **F** ist.

Dann gilt: $\mathrm{Res}(F) = ((\ldots((F \cup \{R_1\}) \cup \{R_2\})\ldots) \cup \{R_n\})$

Aus dem Resolutionslemma 8.2 ergibt sich (mit vollständiger Induktion):

$$F \equiv F \cup \{R_1\} \equiv (F \cup \{R_1\}) \cup \{R_2\} \equiv \ldots \equiv \mathrm{Res}(F)$$

➔ Entsprechend lässt sich hieraus (mit vollständiger Induktion) zeigen:

$$F \equiv \mathrm{Res}^1(F) \equiv \mathrm{Res}^2(F) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Res}^*(F)$$

Zum Selbststudium

Lemma 8.5.1

Ist **F** eine Klauselmenge und **K** $\in$ Res*(**F**), dann gibt es eine endliche Teilmenge **G** $\subseteq$ **F**, so dass **K** $\in$ Res*(**G**).

Voraussetzungen: Def. 8.0, 8.4

Beweis

(Interessant ist natürlich nur der Fall, dass **F** selbst eine unendliche Menge ist.)

Es sei **F** eine Klauselmenge und **K** $\in$ Res*(**F**).

Nach Def. 8.4 gibt es dann ein n, so dass **K** $\in$ Res^n(**F**).

Zu zeigen ist also (mit vollständiger Induktion):

Für alle n und **K** $\in$ Res^n(**F**), gibt es eine endliche Teilmenge **G** $\subseteq$ **F**, so dass **K** $\in$ Res^n(**G**).

Induktionsanfang

Ist n = 0, dann ist **K** $\in$ Res^0(**F**) = **F** und mit **G** = {**K**} $\subseteq$ **F** haben wir die gesuchte Menge.

Induktionsannahme

Für alle i < n und **K** $\in$ Res^i(**F**), gibt es eine endliche Teilmenge **G** $\subseteq$ **F**, so dass **K** $\in$ Res^i(**G**).

Zum Selbststudium: Fortsetzung

Induktionsschritt

Es sei **K'** $\in$ Res^n(**F**) = Res (Res^{n-1}(**F**))

= Res^{n-1}(**F**) $\cup$ {**R** | **R** ist Resolvente zweier Klauseln in Res^{n-1}(**F**)} (Def. 8.4)

Fall 1: Ist **K'** $\in$ Res^{n-1}(**F**), dann ist die Induktionsannahme auf **K'** anwendbar.

Fall 2: Ist **K'** Resolvente zweier Klauseln (**K$_1$** und **K$_2$**) in Res^{n-1}(**F**), dann ist die Induktionsannahme auf **K$_1$** und **K$_2$** anwendbar.

Demnach gibt es zwei endliche Teilmengen **G$_1$**, **G$_2$** $\subseteq$ **F**, so dass **K$_1$** $\in$ Res^{n-1}(**G$_1$**) und **K$_2$** $\in$ Res^{n-1}(**G$_2$**).

Damit ist dann

K' $\in$ {**R** | **R** ist Resolvente zweier Klauseln in Res^{n-1}(**G$_1$** $\cup$ **G$_2$**)} $\subseteq$ Res^n(**G$_1$** $\cup$ **G$_2$**)

und **G$_1$** $\cup$ **G$_2$** ist endlich.

Resolution als Widerlegungsverfahren

Resolutionssatz 8.6

Eine Klauselmenge F ist genau dann unerfüllbar, wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$, d.h. $F \vdash_{res} \square$

Voraussetzungen: Def. 3.3, 3.4, 8.0, 8.4, Lemma 8.5, 8.5.1

Beweis (1. Teil: w-Korrektheit)

Sei $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$. Zu zeigen ist, dass F unerfüllbar ist.

Nach Lemma 8.5.1 gibt es eine endliche Teilmenge $G \subseteq F$, so dass $\square \in \mathrm{Res}^*(G)$.

Da $\square \in \mathrm{Res}^*(G)$ ist $\mathrm{Res}^*(G)$ unerfüllbar.

Nach Lemma 8.5 ist $G \equiv \mathrm{Res}^*(G)$, also ist auch G unerfüllbar
und mit $G \subseteq F$ ist F unerfüllbar.

Beweis (2. Teil: w-Vollständigkeit):

Sei F unerfüllbar. Zu zeigen: $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$.

Ist F unendlich und unerfüllbar, dann hat F eine endliche unerfüllbare Teilmenge (Endlichkeitssatz 5.18).
Daher reicht es, den Beweis für endliche Klauselmengen zu führen.

Beweis der Widerlegungsvollständigkeit (2)

Grundidee

- Die Klauseln aus F werden in zwei Teilmengen F_0^+ und F_1^+ sortiert, so dass gilt
  - $F_0^+ \cup F_1^+ \subseteq F$
  - In F_0^+ kommt A_{n+1} nur als positives Literal vor.
  - In F_1^+ kommt A_{n+1} nur als negatives Literal vor.
  - (Klauseln mit komplementären A_{n+1} aus F werden ignoriert.)
- und es wird gezeigt
  - $F_0^+ \vdash_{res} \square$ oder $F_0^+ \vdash_{res} A_{n+1}$
  - $F_1^+ \vdash_{res} \square$ oder $F_1^+ \vdash_{res} \neg A_{n+1}$
  - Und damit kann ggf. mit einem letzten Resolutionsschritt $F \vdash_{res} \square$ gezeigt werden.
- Auf dem Weg dorthin
  - werden F_0 und F_1 definiert (durch Streichung der A_{n+1}-Literale aus F_0^+ und F_1^+)
  - und es wird gezeigt, dass $F_0 \vdash_{res} \square$ und $F_1 \vdash_{res} \square$.
  - Die hierbei zugrundeliegenden Ableitungen werden dann zu den erforderlichen Ableitungen auf der Basis von F_0^+ und F_1^+ umgestaltet.

Beweis der Widerlegungsvollständigkeit (3)

Zu zeigen: Für jede endliche und unerfüllbare Klauselmenge $\mathbf{F}$ ist $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F})$.

Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über die Anzahl der Aussagensymbole in $\mathbf{F}$.
Induktionsanfang (n = 0):
Wenn es keine Aussagensymbole in $\mathbf{F}$ gibt und $\mathbf{F}$ unerfüllbar ist, dann ist $\mathbf{F} = \{\square\}$ also gilt auch $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F})$.
Induktionsannahme: Es sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für jede unerfüllbare Klauselmenge $\mathbf{G}$ über den Aussagensymbolen $A_1, \ldots, A_n$ gilt, $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{G})$.
Induktionsschritt
Sei nun $\mathbf{F}$ eine unerfüllbare Klauselmenge über den atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
Aus $\mathbf{F}$ werden zwei neue Klauselmengen $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_1$ gebildet, in denen A_{n+1} nicht vorkommt.

Wenn $\mathbf{K}$ in $\mathbf{F}$	Dann $\mathbf{K}_0$ in $\mathbf{F}_0$	Dann $\mathbf{K}_1$ in $\mathbf{F}_1$
$\mathbf{K}$ enthält nur Formeln aus $A_1, \ldots, A_n$	$\mathbf{K}_0 := \mathbf{K}$	$\mathbf{K}_1 := \mathbf{K}$
$\mathbf{K}$ enthält A_{n+1} und $\neg A_{n+1}$	—	—
$\mathbf{K}$ enthält A_{n+1}	$\mathbf{K}_0 := \mathbf{K} - \{A_{n+1}\}$	—
$\mathbf{K}$ enthält $\neg A_{n+1}$	—	$\mathbf{K}_1 := \mathbf{K} - \{\neg A_{n+1}\}$

Beispiel zur Konstruktion von $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_1$

Sei $\mathbf{F} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D\}, \{\neg C\}\}$ $\qquad A_4 = D$

Konstruktion von $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_1$:

Wenn $\mathbf{K}$ in $\mathbf{F}$		
	Dann in $\mathbf{F}_0$	
$\mathbf{K}$ enthält nur Formeln aus A, B, C	$\mathbf{K}$	$\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg C\}$
$\mathbf{K}$ enthält D	$\mathbf{K} - \{D\}$	$\{\neg A\}$
$\mathbf{K}$ enthält $\neg D$	—	
	Dann in $\mathbf{F}_1$	
$\mathbf{K}$ enthält nur Formeln aus A, B, C	$\mathbf{K}$	$\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg C\}$
$\mathbf{K}$ enthält D	—	
$\mathbf{K}$ enthält $\neg D$	$\mathbf{K} - \{\neg D\}$	$\square$

➔ $\mathbf{F}_0 = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C\}\}$
$\mathbf{F}_1 = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \square, \{\neg C\}\}$

Beweis der Widerlegungsvollständigkeit (4)

- Hilfssatz: Unter den gegebenen Voraussetzungen sind $\mathbf{F_0}$ und $\mathbf{F_1}$ beide unerfüllbar
- Beweis: Annahme: Es gibt eine Belegung $\mathcal{A}$ für $A_1, \ldots, A_n$, die $\mathbf{F_0}$ erfüllt.
  - Konstruktion einer Fortsetzung von $\mathcal{A}$ für $\mathbf{F}$:
  - $\mathcal{A}_0(B) = \begin{cases} \mathcal{A}(B) & \text{falls } B \in \{A_1, \ldots, A_n\} \\ \mathbf{0}, & \text{falls } B = A_{n+1} \end{cases}$
  - $\mathcal{A}_0$ wäre eine erfüllende Belegung für $\mathbf{F}$, im Widerspruch zu den Annahmen.
  - Analog ergibt sich, dass auch $\mathbf{F_1}$ unerfüllbar ist (unter Betrachtung der Fortsetzung $\mathcal{A}_1(A_{n+1}) = \mathbf{1}$ einer erfüllenden Belegung $\mathcal{A}$).

➔ Auf $\mathbf{F_0}$ und $\mathbf{F_1}$ trifft die Induktionsannahme zu, d.h. es gilt:
$\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F_0})$ und $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F_1})$

Als nächstes wird aus den entsprechenden Ableitungen eine Resolutionsableitung für $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathbf{F})$ konstruiert

Beispiel

$\mathbf{F_0} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C\}\}$

$\mathbf{F_1} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \square, \{\neg C\}\}$

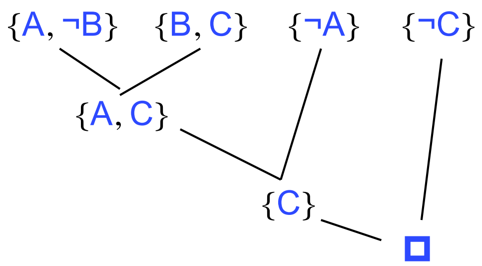
Beispiel Resolutionsableitung zu F_0 und F_1

$\mathbf{F} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D\}, \{\neg C\}\}$

$\mathbf{F_0} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C\}\}$

$\mathbf{F_1} = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \square, \{\neg C\}\}$

Resolutionsableitung für $\mathbf{F_0}$



$\mathbf{F_1}$ (hier ist nichts zu tun)

$\square$

Beweis der Widerlegungsvollständigkeit (5)

Wir konnten feststellen, dass $\square \in \mathrm{Res}^*(F_0)$.

- Das heißt, es gibt Klauseln $K_1, \ldots, K_m$, so dass $K_m = \square$ und für $1 \le i \le m$ gilt: $K_i \in F_0$ oder K_i ist Resolvente von Klauseln K_a, K_b mit $a, b < i$.
- Einige der K_i der ersten Sorte entstanden aus F durch Streichen von A_{n+1}. Für diese Klauseln wird die ursprüngliche Klausel wiederhergestellt:

(*) $K_i^+ = K_i \cup \{A_{n+1}\}$.

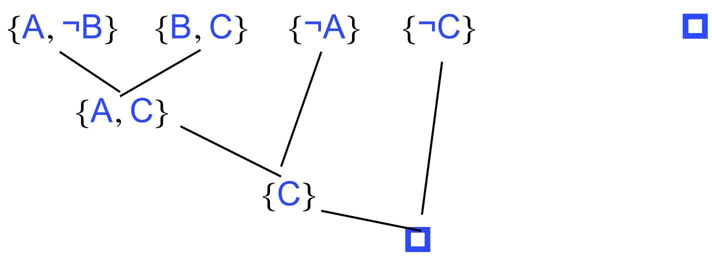
- Einige der K_i der zweiten Sorte sind Resolventen, die direkt oder indirekt auf Klauseln beruhen, die durch Streichen von A_{n+1} aus F erzeugt wurden.
- Für diese Klauseln wird eine neue Klausel entsprechend (*) definiert.
- Für alle anderen Klauseln wird $K_i^+ = K_i$ gesetzt.
- Für $1 \le i \le m$ gilt: $K_i^+ \in F$ oder K_i^+ ist Resolvente von Klauseln K_a^+, K_b^+ mit $a, b < i$. Insbesondere ist $K_m^+ \in \mathrm{Res}^*(F)$ und $K_m^+ = \{A_{n+1}\}$ oder $K_m^+ = \square$
- Entsprechend ergibt sich aus $\square \in \mathrm{Res}^*(F_1)$: $\{\neg A_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(F)$ oder $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$
- Also haben wir schon $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$ oder es ergibt sich durch einen weiteren Resolutionsschritt: $\{\{A_{n+1}\}, \{\neg A_{n+1}\}\} \vdash_{res} \square$, also $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$

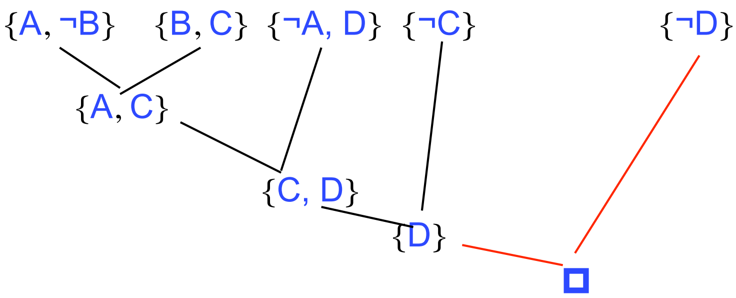
Beispiel: Rekonstruktion der Resolutionsableitung von F

$F = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A, D\}, \{\neg D\}, \{\neg C\}\}$

$F_0 = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C\}\}$ $F_1 = \{\{A, \neg B\}, \{B, C\}, \square, \{\neg C\}\}$

Resolutionsableitung für F_0 F_1





Resolutionsalgorithmus

Eingabe: Eine Formel **F** in KNF (als Klauselmenge), d.h. eine **endliche** Klauselmenge !

REPEAT
    G := **F**;
    F := Res(**F**);
    UNTIL ($\square \in$ **F**) OR (**F** = **G**)
IF $\square \in$ **F** THEN „**F** ist unerfüllbar“
    ELSE „**F** ist erfüllbar“

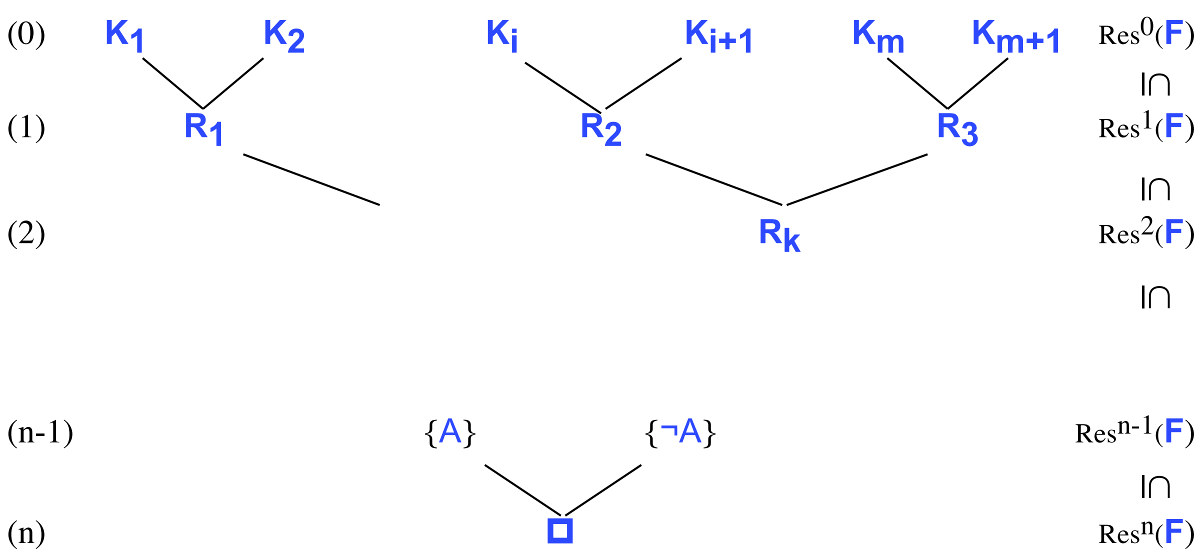
- Bei n Aussagensymbolen gibt es maximal 4^n Klauseln.
- **F** = **G** Prüfung sichert den Abbruch, wenn keine neuen Resolventen mehr gefunden werden.
- Aufwand des Resolutionsalgorithmus' ist exponentiell.

  ➔ Entwicklung effizienterer Resolutionsalgorithmen, die jedoch nicht vollständig sind.

- Wenn (Un)Erfüllbarkeit einer unendlichen Klauselmenge **M** zu prüfen ist, wird der Resolutionsalgorithmus auf Folgen endlicher Teilmengen angewendet. Wenn **M** erfüllbar ist, dann bricht dieses Verfahren nie ab !

Struktur von Resolutionsableitungen zu $\square$

$\{K_1, \ldots, K_{m+1}\} \vdash_{res} \square$



Verfeinerung der Resolution

Resolution – Komplexitätsprobleme

- „Kombinatorische Explosion“ bei der Erzeugung aller Resolventen
- Keine Sicherstellung der Terminierung bei nicht-endlichen Klauselmengen (→ Resolution in der Prädikatenlogik)

Lösungsansätze

Auswahlstrategien

- Heuristische Regeln für Auswahl zu resolvierender Klauseln, wobei aber (notfalls) alle Resolventen gebildet werden können.
- Theoretisch unklar, in welchem Maße derartige Strategien wirkungsvoll sind.

Auswahlrestriktionen

- Einschränkung der Resolutionsmöglichkeiten, d.h. gewisse Resolutionsschritte werden ausgeschlossen.
  → Die w-Vollständigkeit eines derartig modifizierten Kalküls muss untersucht werden. (Vgl. Schöning Kap. 2.6)
- Korrektheit ist bei allen Ansätzen sichergestellt, da die Resolventenbildung korrekt ist.

Auswahlstrategie bei der Resolution

Beispiel: Präferenz für kleine Klauseln

Erzeuge möglichst kleine Klauseln, wähle Klauseln mit möglichst wenig Elementen.

→ Immer sinnvoll, wenn der Mensch resolvieren soll.
→ Geeignet, den Resolutionsaufwand zu verringern, da die Zielklausel keine Elemente enthält.

- Aber in schwierigen Fällen kann es nötig sein, auch sehr große Klauseln zu erzeugen, bevor man zur leeren Klausel kommt.

Restriktionen: P-Resolution / N-Resolution

Definition 8.7

- Im P-Resolutionskalkül darf nur dann die Resolvente aus K_1 und K_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln ausschließlich positive Literale enthält.
- Im N-Resolutionskalkül darf nur dann die Resolvente aus K_1 und K_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln ausschließlich negative Literale enthält

➔ P-Resolution und N-Resolution sind w-vollständig.

- Bei der P-Resolution entstehende Resolventen haben ein negatives Literal weniger als jede der eingehenden Formeln.
- Entsprechend reduziert N-Resolution positive Literale.

Zur Übung zu beweisen

- Enthalten alle Klauseln der Klauselmenge **F** mindestens ein negatives Literal, dann ist **F** erfüllbar.
- Enthalten alle Klauseln der Klauselmenge **F** mindestens ein positives Literal, dann ist **F** erfüllbar.

P-Resolution / N-Resolution – Beispiel

Sei **F** = {{¬A, B, C}, {¬A, B, D}, {¬C, E}, {¬E, ¬B}{E}, {A}, {¬E, ¬D}}

Systematische Bildung einer Teilmenge von Res(**F**):

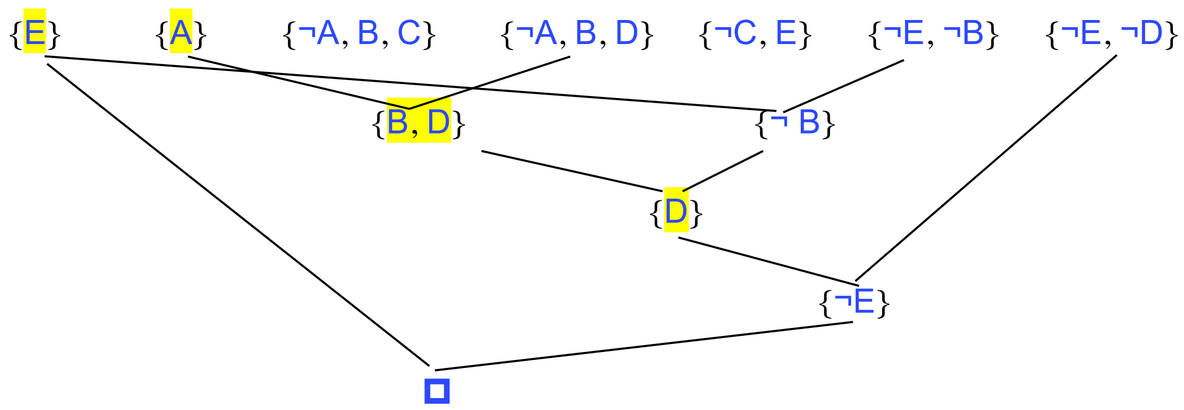
K_1	K_2	R	Typ von **R**
{¬A, B, C}	{¬C, E}	{¬A, B, E}	
{¬A, B, C}	{¬E, ¬B}	{¬A, ¬E, C}	
{¬A, B, C}	{A}	{B, C}	P
{¬A, B, D}	{¬E, ¬B}	{¬A, ¬E, D}	
{¬A, B, D}	{A}	{B, D}	P
{¬A, B, D}	{¬E, ¬D}	{¬A, B, ¬E}	
{¬C, E}	{¬E, ¬B}	{¬C, ¬B}	N
{¬C, E}	{¬E, ¬D}	{¬C, ¬D}	N
{¬E, ¬B}	{E}	{¬B}	N
{E}	{¬E, ¬D}	{¬D}	N

➔ Anzahl der Resolutionsmöglichkeiten der ersten Stufe: 10
bei P-Resolution 4
bei N-Resolution 7

P-Resolution – Beispiel

F = {{¬A, B, C}, {¬A, B, D}, {¬C, E}, {¬E, ¬B}, {E}, {A}, {¬E, ¬D}}

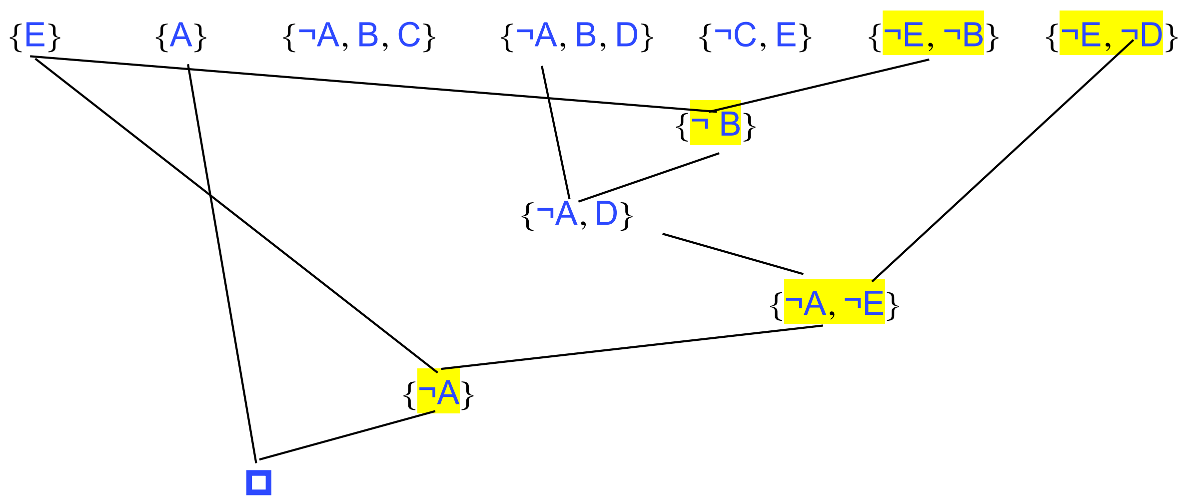
P-Resolution



N-Resolution – Beispiel

F = {{¬A, B, C}, {¬A, B, D}, {¬C, E}, {¬E, ¬B}, {E}, {A}, {¬E, ¬D}}

N-Resolution



Restriktion: Lineare Resolution

Definition 8.8

Eine Resolutionsableitung $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ist *linear basierend auf der Klausel* $K \in F$, falls gilt:

$K_1 = K$

Für i > 1 gilt: K_i ist die Resolvente aus K_{i-1} und einer Klausel B_{i-1}, wobei B_{i-1} entweder Element von F oder $B_{i-1} = K_j$, mit $j < i$.

(B_{i-1} wird *Seitenklausel* genannt)

Eine Klauselmenge F ist *linear resolvierbar basierend auf der Klausel* K, falls eine lineare Resolutionsableitung basierend auf K zur leeren Klausel existiert.

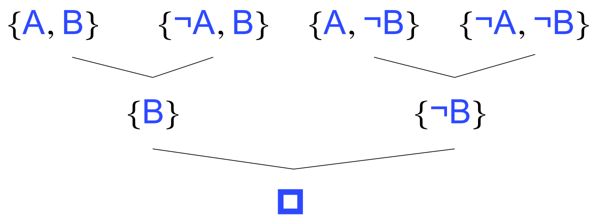
Lineare Resolution

- führt gegebenenfalls zu längeren Ableitungen
- reduziert jedoch die Möglichkeiten der Resolutionsbildung.

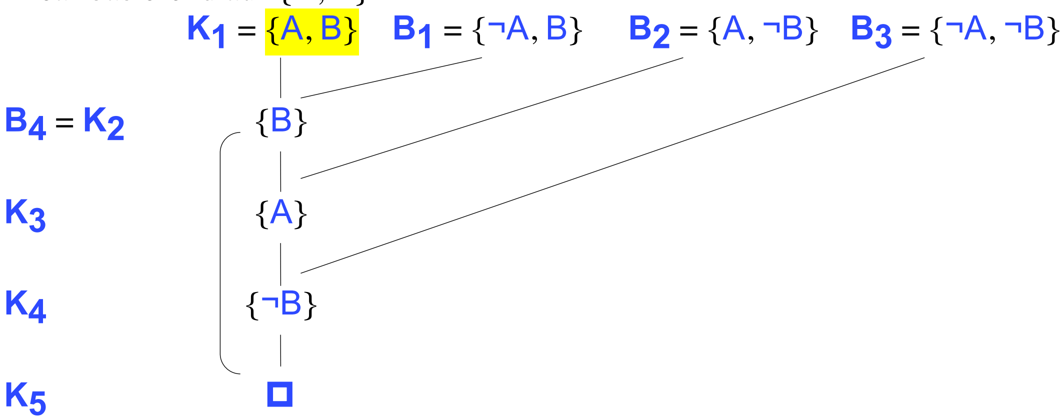
➔ Lineare Resolution ist w-vollständig, jedoch hängt der Erfolg von der Wahl von K ab.

Lineare Resolution – Beispiel

nicht linear



linear basierend auf {A, B}



Stützmengenrestriktion (Set of support)

Ausgangssituation

- Gegeben eine Klauselmenge **F** und eine Teilmenge **T** ⊆ **F**, so dass **F** – **T** erfüllbar ist.
- Eine *Resolutionsableitung bzgl. der Stützmenge* **T** ist eine Resolutionsableitung, bei der niemals zwei Klauseln aus **F** – **T** miteinander resolviert werden, d.h. bei jeder Resolution ist eine Klausel aus **T** direkt oder indirekt beteiligt.
- Stützmengenresolution ist linear, wenn | **T** | = 1.
- Stützmengenresolution ist besonders vorteilhaft, wenn | **T** | klein und somit | **F** – **T** | groß ist.

➔ Stützmengenresolution ist w-vollständig (wenn **F** – **T** erfüllbar ist).

Anwendungsfall

- Gegeben eine konsistente Wissensbasis / Datenbank in KNF: **F'**.
- Aufgabe: Eine Datenbankanfrage G. Zu prüfen ist **F'** ⊨ G
- Sei **G'** eine Mengendarstellung zu ¬G. Zu prüfen ist, ob **F** = **F'** ∪ **G'** erfüllbar ist.
- Stützmengenrestriktion mit **T** = **G'** , **F** = **F'** ∪ **G'** und **F'** = **F** – **T** ist gesteuert durch die Anfrage und sucht nicht nach Widersprüchen in der Datenbank.

Einheitsresolution (Unit resolution)

Definition 8.9

Bei der Resolventenbildung im Kalkül der *Einheitsresolution* muss mindestens eine der Elternklauseln einelementig sein.

- Idee der Einheitsresolution: Die Anzahl der Literale verringert sich bei der Resolventenbildung.
- Einheitsresolution ist *nicht* w-vollständig.

  {A, B} {¬A, B} {A, ¬B} {¬A, ¬B}

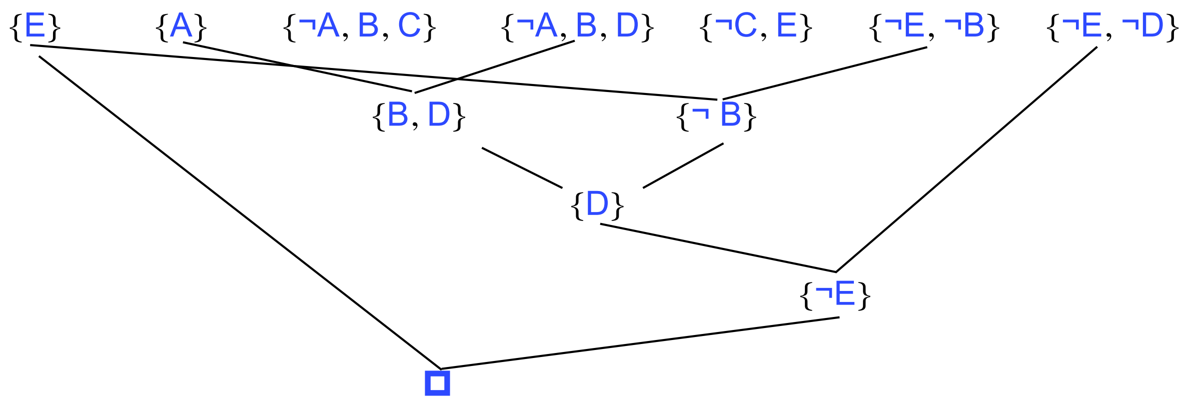
  kann nicht durch Einheitsresolution behandelt werden.

- Einheitsresolution ist w-vollständig, falls eine **Hornformel** auf Erfüllbarkeit zu prüfen ist.

Einheitsresolution – Beispiel

$\mathbf{F} = \{\{\neg A, B, C\}, \{\neg A, B, D\}, \{\neg C, E\}, \{\neg E, \neg B\}, \{E\}, \{A\}, \{\neg E, \neg D\}\}$

Einheitsresolution



Übersicht: Resolution

Aussagenlogische Resolution

Prädikatenlogische Resolution

- aussagenlogische Resolution + Abbildung von prädikatenlogischen Formeln auf aussagenlogische Formelmenge (Bildung von Grundinstanzen)
- oder Allgemeine Resolution mit Unifikation
- w-Vollständigkeit der aussagenlogischen und der prädikatenlogischen Resolution

Restriktionen – alle auch für den aussagenlogischen Fall

- w-Vollständigkeit muss bewiesen werden (Modifikation des Resolutionssatzes)
- Einige w-vollständige Kalküle
  - P-Resolution / N-Resolution: Systematische Reduktion negativer bzw. positiver Literale
  - Lineare Resolution / Stützmengenresolution:
    - gezieltes Bearbeiten – für die Widerlegung – aussichtsreicher Klauseln
    - nur w-vollständig bei geeigneter Wahl der Stützmenge

Wichtige Konzepte dieser Vorlesung

- Mengendarstellung für konjunktive Normalformen (Mengen von Mengen von Literalen)
- Leere Klausel ($\square$)
- Resolutionsregel, Korrektheit, Resolventenmengen von Formeln
- Resolution als Widerlegungsverfahren (w-Korrektheit und w-Vollständigkeit)
- Resolutionsalgorithmus
- Auswahlstrategien: P-Resolution, N-Resolution, (lineare Resolution, Stützmengenresolution, Einheitsresolution)