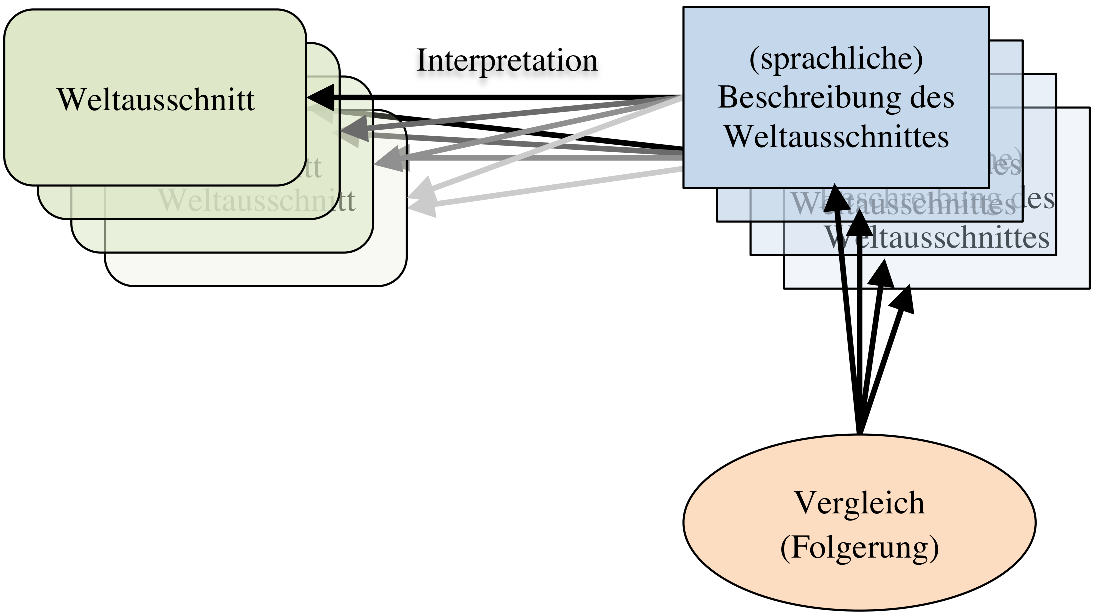
Folgerung – Folgerbarkeit

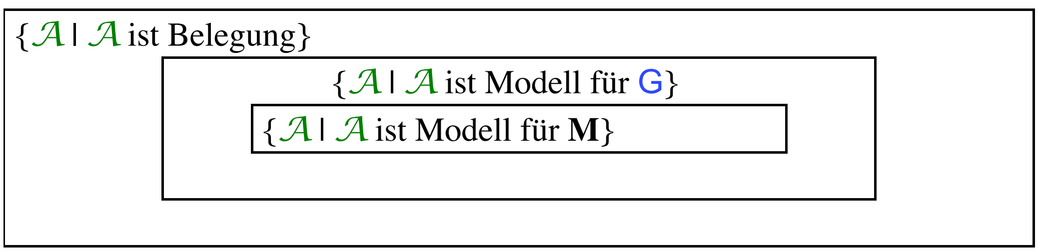


Definition: Folgerung

Definition 5.1

- Eine Formel G *folgt* genau dann *(logisch)* aus einer Formelmenge **M**, falls für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt:
  Wenn $\mathcal{A}$ ein Modell für **M** ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für G.
- Weitere Sprechweisen / Schreibweisen für „G folgt aus **M**"
  - G ist folgerbar aus **M**
  - G ist eine Folgerung der Formeln aus **M**
  - **M** $\vDash$ G
  - Statt {F} $\vDash$ G wird F $\vDash$ G geschrieben. „G folgt aus der Formel F."

➔ WICHTIG: $\vDash$ ist kein Junktor, sondern eine Relation zwischen Formelmengen und Formeln.



Beispiel: Folgerung

$(A \wedge B) \models (A \vee B)$

	A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$
$\mathcal{A}_1$	0	0	0	0
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	1
$\mathcal{A}_3$	1	0	0	1
$\mathcal{A}_4$	1	1	1	1

Alle Belegungen, die Modell von $(A \wedge B)$ sind, sind Modell von $(A \vee B)$

$\{(A \vee B), \neg B\} \models A$

	A	B	$\neg B$	$(A \vee B)$
$\mathcal{A}_1$	0	0	1	0
$\mathcal{A}_2$	0	1	0	1
$\mathcal{A}_3$	1	0	1	1
$\mathcal{A}_4$	1	1	0	1

Alle Belegungen, die Modell von $(A \vee B)$ und von $\neg B$ sind, sind Modell von A

Belegungen und Folgerung

Das sprachliche Inventar einer Daten- / Wissensbasis (DB/WB)

- HP7_e ≈ Harry Potter 7 ist auf englisch erschienen.
- HP7_d ≈ Harry Potter 7 ist auf deutsch erschienen.

DB / WB

- $\mathbf{WB_3}$ = { HP7_d ⇒ HP7_e, HP7_d }

Belegungen über dem Inventar { HP7_e, HP7_d }

	HP7_e	HP7_d	HP7_d ⇒ HP7_e
$\mathcal{A}_1$	0	0	1
$\mathcal{A}_2$	1	0	1
$\mathcal{A}_3$	0	1	0
$\mathcal{A}_4$	1	1	1

$\mathcal{A}_4$ ist ein Modell für HP7_e, d.h. alle Modelle von $\mathbf{WB_3}$ sind auch Modelle von HP7_e.

➔ $\mathbf{WB_3} \models$ HP7_e

Folgerung: indirekte Kodierung von Fakten

Modellierung mit logischen Formeln

- Sammeln von Fakten, die (in dem zu modellierendem Weltausschnitt) wahr sind.
  - Darunter können sein

    ⇒ atomare Aussagen („Harry Potter 7 ist auf deutsch erschienen.“)

    ⇒ komplexe Aussagen („Wenn Harry Potter 7 auf deutsch erschienen ist, dann ist Harry Potter 7 (auch schon) auf englisch erschienen.“)

    ⇒ Tautologien (die sind aber wenig nützlich)

    ⇒ keine Kontradiktionen
- Bestimmung eines Übersetzungsschlüssels
- Kodierung der Fakten mit dem Übersetzungsschlüssel (direkte Kodierung).

  ⇒ { HP7_d, HP7_d ⇒ HP7_e }
- Die Faktenmenge
  - ist erfüllbar (es gibt ein Modell, das dem modellierten Weltausschnitt entspricht).
  - beschreibt den modellierten Weltausschnitt in der Regel unvollständig.
  - kodiert indirekt weitere Aussagen, die in allen Modellen der Faktenbasis wahr sind, und damit auch im modellierten Weltausschnitt (HP7_e, (HP7_e ∧ HP7_d)).

➔ Folgerungen sind indirekt kodierte Aussagen.

Das Symbol ⊨

hat verschiedene Verwendungen

$\mathcal{A} \models$ F	$\mathcal{A}$ ist Modell für F.	
⊨ F	F ist allgemeingültig.	Alle Belegungen sind Modelle für F.
M ⊨ F	F folgt aus **M**.	Alle Modelle von **M** sind Modelle von F.
G ⊨ F	F folgt aus G.	Alle Modelle von G sind Modelle von F.

- Woran können Sie jeweils erkennen, welche Verwendung Sie vor sich haben?
- Überlegen Sie, welche Motive die Logiker gehabt haben könnten, gerade für diese Bedingungen das einheitliche Symbol ⊨ einzusetzen.

Anderenorts findet man auch noch folgende Verwendungen

M ⊨	**M** ist unerfüllbar.	Es gibt keine Modelle für **M**.
G ⊨	G ist unerfüllbar.	Es gibt keine Modelle für G.

- Erkennen Sie auch die Motivation für diese Verwendung?

Satz 5.2: Folgerbarkeit von allgemeingültigen Formeln

Jede allgemeingültige Formel F ist aus jeder Formelmenge **M** folgerbar.

$\models$ F dann auch **M** $\models$ F

Vor.: Def. 3.3, 3.5, 5.1

Bew.: Ist F eine Tautologie, dann macht jede Belegung F wahr, also auch die Modelle von **M.** D.h. F folgt aus **M**.

Satz 5.3: Folgerbarkeit aus allgemeingültigen Formeln

Wenn F aus einer Menge von Tautologien **M** folgt, dann ist F eine Tautologie.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.5, 5.1

Bew.: Es sei **M** eine Menge von Tautologien und F folge aus **M**.
Es sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung.
Da alle Elemente von **M** allgemeingültig sind, ist $\mathcal{A}$ ein Modell von **M**.
Da F aus **M** folgt, ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell von F.
Damit zeigt sich, dass jede Belegung ein Modell von F ist.

➔ Wenn Folgerungen bestimmbar sind, dann brauchen wir Tautologien nicht in die Beschreibung eines Weltausschnittes aufzunehmen.

Satz 5.4: Folgerbarkeit aus der leeren Menge

Wenn F aus der leeren Menge folgt, dann ist F eine Tautologie.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.5, 5.1

Bew.: Es sei F eine Formel, die aus der leeren Menge folgt.
Es sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung.
$\mathcal{A}$ ist Modell der leeren Menge (*kein Gegenbeispiel*, nützliche Konvention).
Da F aus der leeren Menge folgt, ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell von F.
Da die Wahl von $\mathcal{A}$ beliebig war, ist F eine Tautologie.

- Satz 5.4 zeigt, dass es für die Prüfung von Allgemeingültigkeit ausreichend ist, ein Verfahren zu haben, mit dem man Folgerung von Formeln aus Formelmengen prüfen kann.
- Nach den oben vorgestellten Ergebnissen kann man dann entsprechend Unerfüllbarkeit einer Formel und Äquivalenz prüfen.
- Die Umkehrung ist nicht immer so einfach.

Zum Selbststudium: Folgerbarkeit – Unerfüllbarkeit

Satz 5.5: Folgerbarkeit aus unerfüllbaren Formelmengen

Aus jeder unerfüllbaren Formelmenge **M** ist jede beliebige Formel F folgerbar.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.4, 5.1

Bew.: Es sei **M** eine unerfüllbare Formelmenge und F eine Formel.
Keine Belegung ist Modell für **M**.
Also macht jede Belegung, die Modell für **M** ist, F wahr.
(Es ist *kein Gegenbeispiel* konstruierbar.)
Das heißt, dass F aus **M** folgt.

Satz 5.6: Folgerbarkeit von Kontradiktionen

Folgt eine Kontradiktion F aus einer Formelmenge **M**, dann ist **M** unerfüllbar.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.4, 5.1

Bew.: Es sei F eine Kontradiktion, die aus der Formelmenge **M** folgt.
Es sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung.
Da F unerfüllbar ist macht $\mathcal{A}$ F falsch
Da F aus **M** folgt, kann $\mathcal{A}$ kein Modell von **M** sein.
Also hat **M** kein Modell und ist unerfüllbar.

➔ Folgerbarkeit ist besonders interessant für kontingente Formeln, d.h. sie ist eine *logisch* interessante Beziehung zwischen *epistemisch* interessanten Aussagen.

Logische Äquivalenz und Folgerung

Satz 5.7: $F \equiv G$ GDW. $F \vDash G$ und $G \vDash F$.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 4.1, 5.1

Bew.: $F \equiv G$
GDW. für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$
GDW. jedes Modell für F, auch Modell für G ist,
und jedes Modell für G auch Modell für F ist,
GDW. $F \vDash G$ und $G \vDash F$

{$\mathcal{A}$ | $\mathcal{A}$ ist eine Belegung}
{$\mathcal{A}$ | $\mathcal{A}$ ist Modell für G} = {$\mathcal{A}$ | $\mathcal{A}$ ist Modell für F}

Noch ein wichtiger Zusammenhang

- Wenn F_1 und F_2 äquivalent sind, sowie G_1 und G_2 äquivalent sind, dann folgt G_1 genau dann aus F_1, wenn G_2 aus F_2 folgt.
(Wenn $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$, dann $F_1 \vDash G_1$ GDW. $F_2 \vDash G_2$)

Folgerung und Implikation

Das Folgerungssymbol $\vDash$ ist kein Junktor, aber dennoch eng mit der Implikation verwandt.

Satz 5.8: $(F \Rightarrow G)$ ist allgemeingültig GDW. G aus F folgt.
($\vDash (F \Rightarrow G)$ GDW. $F \vDash G$).

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.5, 5.1

Bew.: $(F \Rightarrow G)$ ist allgemeingültig, d.h. $\vDash (F \Rightarrow G)$
GDW. alle Belegungen $\mathcal{A}$ Modelle von $(F \Rightarrow G)$ sind, [Def. 3.5]
d.h. $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ [Def. 3.3]
GDW. Für alle Belegungen $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$ [Def. 3.1]
GDW. Für alle Belegungen $\mathcal{A}$ gilt: Wenn $\mathcal{A}$ Modell für F ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell für G (d.h. Wenn $\mathcal{A}(F) = 1$, dann $\mathcal{A}(G) = 1$) [Def. 3.3]
GDW. G folgt aus F, d.h. $F \vDash G$ [Def. 5.1]

- Satz 5.8 reduziert die Frage der Folgerung *zwischen Formeln* auf die Frage der Allgemeingültigkeit.

Zum Selbststudium: Folgerung und Implikation

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des vorherigen.

Satz 5.8x: G folgt aus $M \cup \{F\}$ GDW. $(F \Rightarrow G)$ aus M folgt.
($M \cup \{F\} \vDash G$ GDW. $M \vDash (F \Rightarrow G)$).

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 5.1

Bew.: Es sei **M** eine Formelmenge und F und G Formeln.
$(F \Rightarrow G)$ folgt aus **M**, d.h. $\mathbf{M} \vDash (F \Rightarrow G)$
GDW. alle Belegungen $\mathcal{A}$, die Modelle von **M** sind,
Modelle von $(F \Rightarrow G)$ sind, [Def. 5.1]
GDW. für alle Modelle $\mathcal{A}$ von **M** gilt: $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$ [Def. 3.1, 3.3]
GDW. alle Belegungen $\mathcal{A}$, die Modelle von $\mathbf{M} \cup \{F\}$ sind,
Modelle für G sind [Def. 3.3]
GDW. G folgt aus $\mathbf{M} \cup \{F\}$, d.h. $\mathbf{M} \cup \{F\} \vDash G$ [Def. 5.1]

Folgerung und Unerfüllbarkeit

Satz 5.9: $F \models G$ GDW. $(F \wedge \neg G)$ unerfüllbar ist.

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 3.4, 5.1

Bew.1: $F \models G$ GDW. $\models (F \Rightarrow G)$ [Satz 5.8]

GDW. $\neg(F \Rightarrow G)$ unerfüllbar ist [Satz 3.1]

GDW. $\neg(\neg F \vee G)$ unerfüllbar ist [Satz 4.7 Elimination $\Rightarrow$, Ersetzungstheorem]

GDW. $(\neg\neg F \wedge \neg G)$ unerfüllbar ist [Satz 4.7 de Morgan]

GDW. $(F \wedge \neg G)$ unerfüllbar ist [Satz 4.7 doppelte Negation, Ersetzungstheorem]

Bew.2: $F \models G$ GDW. Alle Modelle $\mathcal{A}$ von F auch Modelle von G sind

(Wenn $\mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}(G) = \mathbf{1}$) [Def. 5.1]

GDW. Alle Modelle $\mathcal{A}$ von F keine Modelle von $\neg G$ sind

(Wenn $\mathcal{A}(F) = \mathbf{1}$, dann $\mathcal{A}(\neg G) = \mathbf{0}$) [Def. 3.1, 3.3]

GDW. Alle Belegungen $\mathcal{A}$ $(F \wedge \neg G)$ falsch machen ($\mathcal{A}((F \wedge \neg G)) = \mathbf{0}$)[Def. 3.1]

GDW. $(F \wedge \neg G)$ unerfüllbar ist [Def. 3.4]

Satz 5.10: $M \models G$ GDW. $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Bew.: Ganz entsprechend.

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Äquivalenz, Folgerbarkeit

Prüfung auf Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit

- Für eine Formel F mit n Aussagensymbolen kann eine komplette Wahrheitstafel mit 2^n unterschiedlichen Belegungen berechnet werden.
  - F ist *erfüllbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert $\mathbf{1}$ für F ergibt.
  - F ist *allgemeingültig*, falls alle Belegungen den Wahrheitswert $\mathbf{1}$ für F ergeben.
  - F ist *unerfüllbar*, falls keine Belegung den Wahrheitswert $\mathbf{1}$ für F ergibt.

Prüfung auf Äquivalenz und Folgerbarkeit

- Für eine Formel F und eine Formel G mit insgesamt n Aussagensymbolen kann eine komplette Wahrheitstafel mit 2^n unterschiedlichen Belegungen berechnet werden.
  - F und G *sind äquivalent*, falls F und G denselben Wahrheitswertverlauf haben.
  - G *folgt aus* F, falls alle Belegungen, die für F den Wahrheitswert $\mathbf{1}$ liefern, auch für G den Wahrheitswert $\mathbf{1}$ ergeben.

➔ algorithmische Verfahren durch Aufstellung der kompletten Wahrheitstafel erfordern exponentieller Aufwand: im ungünstigen Fall sehr aufwendig.

Formelmengen: Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Folgerbarkeit

Formelmenge M

- **M** ist *erfüllbar*, falls mindestens eine Belegung den Wahrheitswert **1** für alle Elemente von **M** ergibt.
- **M** ist *unerfüllbar*, falls jede Belegung den Wahrheitswert **0** für mindestens ein Element von **M** ergibt.
- eine Formel F *folgt aus* **M**, falls alle Belegungen, die für die Formeln aus **M** den Wahrheitswert **1** liefern, auch für F den Wahrheitswert **1** ergeben.

➔ Was ist los, wenn **M** unendlich viele Formeln (mit unendlich vielen Aussagensymbolen) enthält?
Zur Erinnerung: Die Menge der Aussagensymbole, $\mathcal{As}_{\mathrm{AL}}$, und die Menge der wohlgeformten Formeln, $\mathcal{L}_{\mathrm{AL}}$, sind abzählbar.

➔ Die Wahrheitstafelmethode ist dann nicht mehr anwendbar.

➔ Unendliche Formelmengen zur Weltbeschreibung können mit endlichen Mitteln erzeugt werden. (➔ Prädikatenlogik)

Folgerung aus Formelmengen – Folgerung aus Konjunktionen

- Zur Erinnerung: Es sei **M** eine Formelmenge und G eine Formel.
  M ⊨ G GDW. jedes Modell von **M** auch Modell von G ist.

Satz 5.11: $\{F1, F2\} \cup \mathbf{M} \models G$ GDW. $\{(F1 \wedge F2)\} \cup \mathbf{M} \models G$

Vor.: Def. 3.1, 3.3, 5.1

Bew.: Entsprechend der Wahrheitstafel von $\wedge$ sind die Modelle von $(F1 \wedge F2)$ mit den Modellen von $\{F1, F2\}$ identisch.
Damit gilt auch: die Modelle von $\{F1, F2\} \cup \mathbf{M}$ und die Modelle von $\{(F1 \wedge F2)\} \cup \mathbf{M}$ sind dieselben.

Satz 5.12: $\{F1, F2\} \cup \mathbf{M}$ ist unerfüllbar GDW. $\{(F1 \wedge F2)\} \cup \mathbf{M}$ unerfüllbar ist.

Bew.: Analog zum vorherigen.

➔ Die Bildung einer Formelmenge entspricht hier einer impliziten Konjunktion.

➔ Formeln sind aber stets endlich, Formelmengen können unendlich sein.

Folgerung aus endlichen Formelmengen – Folgerung aus Formeln

Abkürzende Schreibweisen (vgl. 4-20)

Konjunktionen		Disjunktionen	
$(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i)$	$((\ldots(F_1 \wedge F_2) \wedge \ldots) \wedge F_n)$	$(\bigvee_{i=1}^{n} F_i)$	$((\ldots(F_1 \vee F_2) \vee \ldots) \vee F_n)$
$(\bigwedge_{i=1}^{3} F_i)$	$((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3)$	$(\bigvee_{i=1}^{3} F_i)$	$((F_1 \vee F_2) \vee F_3)$
$(\bigwedge_{i=1}^{2} F_i)$	$(F_1 \wedge F_2)$	$(\bigvee_{i=1}^{2} F_i)$	$(F_1 \vee F_2)$
$(\bigwedge_{i=1}^{1} F_i)$	F_1	$(\bigvee_{i=1}^{1} F_i)$	F_1

Satz 5.13: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G$ GDW. $(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i) \models G$

Bew.: Vollständige Induktion über n und Verwendung des Satzes 5.11.
WICHTIG: Dieser Satz ist nur auf endliche Formelmengen anwendbar !

Formelmengen: Modelle, Erfüllbarkeit, Folgerung

Beobachtung 5.14

Es seien **M** und **M'** Formelmengen und **M** ⊆ **M'**.

- Alle Modelle von **M'** sind auch Modelle von **M**. (Def. 3.3)
- Wenn **M** unerfüllbar ist, dann ist auch **M'** unerfüllbar. (Def. 3.4)
- (Wenn **M'** erfüllbar ist, dann ist auch **M** erfüllbar.)
- Wenn eine Formel F aus **M** folgt, dann folgt F auch aus **M'** (Def. 5.1). (Monotonie der Folgerung.)

→ Die Umkehrungen müssen nicht gelten.

Beobachtung 5.15

Es sei **M** eine Formelmenge, G eine Formel, die aus **M** folgt (**M** $\models G$).

- Die Modelle von **M** ∪ $\{G\}$ sind genau die Modelle von **M**. (Def. 3.3, 5.1)
- **M** ist genau dann unerfüllbar, wenn **M** ∪ $\{G\}$ unerfüllbar ist. (Def. 3.4, 5.1)
- (**M** ist genau dann erfüllbar, wenn **M** ∪ $\{G\}$ erfüllbar ist.)
- Eine Formel F folgt genau dann aus **M**, wenn F aus **M** ∪ $\{G\}$ folgt. (Def. 5.1)

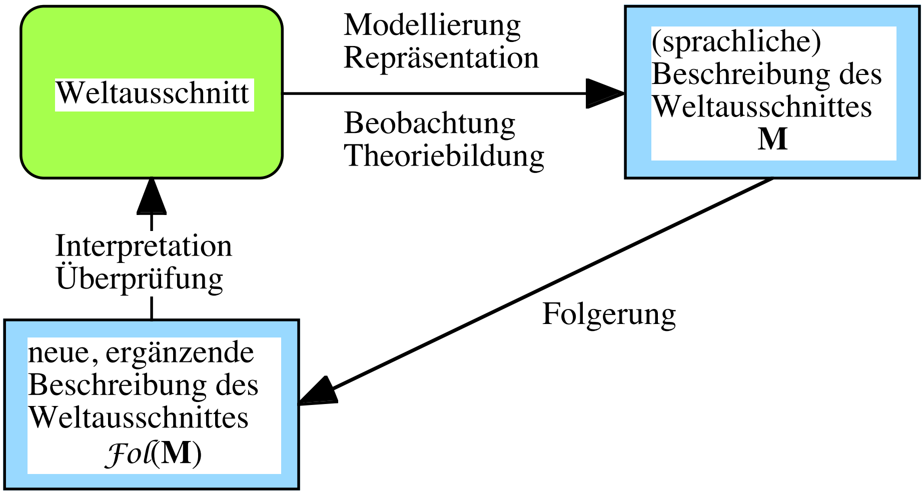
→ Die Umkehrungen gelten alle.

→ Die Ergänzung oder Reduktion um folgerbare Formeln verändert die semantischen Eigenschaften einer Formelmenge nicht.

Definition 5.16

Für jede (aussagenlogische) Formelmenge **M** sei $\mathcal{Fol}(\mathbf{M})$ die Menge aller aus **M** folgerbaren Formeln ($\mathcal{Fol}(\mathbf{M}) := \{ F \in \mathcal{L}_{AL} \mid \mathbf{M} \models F \}$) .

$\mathcal{Taut}_{AL}$ sei die Menge aller aussagenlogischen Tautologien ($\mathcal{Taut}_{AL} = \{ F \in \mathcal{L}_{AL} \mid \models F \}$).



Beobachtungen 5.17

- Für zwei Formelmengen $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M'}$ gilt:
  - $\mathcal{Fol}(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{Fol}(\mathbf{M'})$

- $\mathcal{Taut}_{AL} = \mathcal{Fol}(\{ \}) = \mathcal{Fol}(\mathcal{Taut}_{AL})$
  - Die Menge der Tautologien ist unter Folgerung abgeschlossen.
  - Die Menge der Tautologien ist die kleinste unter Folgerung abgeschlossene Formelmenge.

- Für jede Formelmenge **M** gilt:
  - $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{Fol}(\mathbf{M})$
  - $\mathcal{Taut}_{AL} \subseteq \mathcal{Fol}(\mathbf{M})$
  - $\mathcal{Fol}(\mathbf{M}) = \mathcal{Fol}(\mathcal{Fol}(\mathbf{M}))$
  - $\mathcal{Fol}(\mathbf{M}) = \mathcal{Fol}(\mathbf{M} \cup \mathcal{Taut}_{AL})$
  - **M** ist genau dann unerfüllbar, wenn gilt: $\mathcal{Fol}(\mathbf{M}) = \mathcal{L}_{AL}$

Endlichkeitssatz

Satz 5.18 (Endlichkeitssatz, Kompaktheitstheorem):

Eine Formelmenge **M** ist genau dann erfüllbar,
wenn jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar ist.

Bedeutung des Endlichkeitssatzes in der Informatik

- Aus Eigenschaften der endlichen Teilmengen kann auf eine unendliche Formelmenge geschlossen werden.

➔ Wenn **M** unerfüllbar ist,
dann existiert auch eine endliche Teilmenge **M*** von **M**, die unerfüllbar ist.

  - Von einer unendliche Gesamtmenge kann auf die Existenz einer spezifischen endlichen Teilmenge geschlossen werden.

- Der Endlichkeitssatz sagt, dass bei dem Übergang von endlichen zu unendlichen Formelmengen eigentlich nichts Neues passiert.

➔ Wiedersprüche manifestieren sich im Endlichen.

➔ Jeder Widerspruch hat eine endliche Basis.

- Bei Behandlung der Prädikatenlogik wird der Endlichkeitssatz eingesetzt.

Endlichkeitssatz – Beweisskizze

Beweis (5.18)

- Es sei **M** eine Formelmenge.

Teil 1: Wenn **M** erfüllbar ist, dann ist jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar.

- Ergibt sich aus Beobachtung 5.14

Teil 2: Wenn jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar ist, dann ist **M** erfüllbar.
Überblick über den Beweis

- Wir bilden eine Folge von Teilmengen $\mathbf{M_i}$ von **M**,
so dass jede Formel aus **M** in unendlich vielen $\mathbf{M_i}$ vorkommt.
- Wir zeigen: Zu jedem $\mathbf{M_i}$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathbf{M'_i}$,
so dass $\mathbf{M_i}$ und $\mathbf{M'_i}$ genau dieselben Modelle haben.
- Damit finden wir eine Folge von Belegungen $\mathcal{A}_i$, die jeweils Modelle für die $\mathbf{M_i}$ sind, sich aber bei der Bewertung der Aussagensymbole widersprechen können.
- Wir bilden daraus eine neue Folge von Belegungen $\mathcal{A}'_i$, die jeweils Modelle für die $\mathbf{M_i}$ sind, und bei der Bewertung der Aussagensymbole keine Unterschiede aufweisen.
- Wir definierten daraus eine Belegung $\mathcal{A}$ und zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Modell für **M** ist.

Zum Selbststudium: Endlichkeitssatz – Beweis (2)

Es sei **M** eine Formelmenge, so dass jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar ist.

- Es sei $A_1, \ldots A_i, \ldots$ eine Folge aller Aussagensymbole.

  [Abzählbarkeit der Aussagensymbole, Def. 2.1]
- Für jedes $n \geq 1$ wird nun folgende Formelmenge $\mathbf{M_n}$ gebildet:

  $\mathbf{M_n} := \{F \in \mathbf{M} \mid F$ enthält kein Aussagensymbol außer $A_1, \ldots A_n\}$
  - Jede Formel $F \in \mathbf{M}$ kommt in unendlich vielen $\mathbf{M_n}$ vor.
  - Es gilt: $\mathbf{M_1} \subseteq \mathbf{M_2} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M_n} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}$
  - Zu $A_1, \ldots A_n$ gibt es 2^n unterscheidbare Belegungen.

    Es gibt in $\mathbf{M_n}$ höchstens 2^{2^n} Formeln mit verschiedenen Wahrheitswertverläufen.
- Wir wählen eine Menge $\mathbf{M'_n} \subseteq \mathbf{M_n}$,

  so dass es für jede Formel $F \in \mathbf{M_n}$ eine Formel $G \in \mathbf{M'_n}$ mit $F \equiv G$ gibt und

  so dass keine zwei Formeln in $\mathbf{M'_n}$ äquivalent sind.
  - Jedes Modell für $\mathbf{M'_n}$ ist ein Modell für $\mathbf{M_n}$. (Def. 3.3)
  - $\mathbf{M'_n}$ hat höchstens 2^{2^n} Elemente (und ist endlich!).
- Nach Voraussetzung besitzt $\mathbf{M'_n} \subseteq \mathbf{M}$ damit ein Modell, wir nennen es $\mathcal{A}_n$.
  - $\mathcal{A}_n$ ist auch ein Modell für $\mathbf{M_n}$ und für alle $\mathbf{M_i}$ mit $i < n$.

Zum Selbststudium: Endlichkeitssatz–Definition eines Modells (1)

- Wenn es nur endliche viele Aussagensymbole in **M** gibt –sagen wir $A_1, \ldots, A_m$– dann ist $\mathbf{M} = \mathbf{M_m}$ und wir sind mit $\mathcal{A} := \mathcal{A}_m$ als Modell von **M** fertig.
- Wenn nicht, dann haben wir eine unendliche Folge $\mathcal{A}_i$ von Modellen für die Mengen $\mathbf{M_i}$
  - Die $\mathcal{A}_i$ können einzelnen Aussagensymbolen verschiedene Wahrheitswerte zuordnen.
- Der nächste Schritt: Die Definition einer Folge von Modellen $\mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_n, \ldots$, die in der Wahrheitswertzuordnung weitgehend übereinstimmen.
  - Die Entscheidung über die Zuordnung richtet sich nach der Mehrheit der Modelle.
  - Die Folge von Indexmengen $\mathbf{I_n}$ protokolliert, welche Belegungen der Folge $\mathcal{A}_i$ für alle behandelten Aussagensymbolen mit der Mehrheit übereinstimmen.

Stufe 0: $\mathcal{A}'_0(A_i) = \mathbf{1}$, für alle i $\qquad \mathbf{I_0} := \{1, 2, \ldots\}$

Stufe $n > 0$: $\mathcal{A}'_n(A_k) = \mathcal{A}'_{n-1}(A_k)$, für $k < n$;

$$\mathcal{A}'_n(A_n) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ falls es unendlich viele Indizes } i \in \mathbf{I_{n-1}} \text{ mit } \mathcal{A}_i(A_n) = \mathbf{1} \text{ gibt} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{A}'_n(A_i) = \mathbf{1}$, für $i > n$ $\qquad \mathbf{I_n} := \{i \in \mathbf{I_{n-1}} \mid \mathcal{A}_i(A_n) = \mathcal{A}'_n(A_n)\}$

- Die $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_n, \ldots$ sind Modelle für $\mathbf{M_1} \subseteq \mathbf{M_2} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M_n} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}$
- Die $\mathbf{I_n}$ enthalten unendlich viele Elemente, insbesondere für jedes n noch Indizes $i > n$.

Zum Selbststudium: Endlichkeitssatz–Definition eines Modells (2)

- Der letzte Schritt: Definition eines Modells $\mathcal{A}$ für **M** aus der Folge $\mathcal{A}'_i$

$$\mathcal{A}: \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$
$$\mathcal{A}(A_n) = \mathcal{A}'_n(A_n), \text{ für alle n}$$

Behauptung: $\mathcal{A}$ ist ein Modell für **M**.

Wir müssen also zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Modell für jede Formel F aus **M** ist.

- Sei F eine beliebige Formel aus **M**.
  - F kann nur endlich viele Aussagensymbole haben.
    Den größten Index eines Aussagensymbols von F nennen wir k.
  - Dann ist $F \in \mathbf{M_k} \subseteq \mathbf{M_{k+1}} \subseteq \ldots$
    und $\mathcal{A}'_k, \mathcal{A}'_{k+1}, \ldots$ sind Modelle für $\mathbf{M_k}$ und damit auch für F.
  - $\mathcal{A}$ stimmt mit $\mathcal{A}'_k$ für alle Aussagensymbole $A_1, \ldots, A_k$ überein.

    $$\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}'_k(A_1), \ldots, \mathcal{A}(A_k) = \mathcal{A}'_k(A_k)$$

    Damit ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für F.

Zum Selbststudium: Endlichkeitssatz: Anmerkungen

zur Definition eines Modells für M

- Der Beweis des Endlichkeitssatzes ist nicht konstruktiv.
- Die falls-Bedingung der Konstruktionsvorschrift ist nicht algorithmisch effektiv, denn es wäre eine unendliche Menge von Indizes zu prüfen, und auf der Basis dieser Prüfung eine Berechnung durchzuführen.
- Diese Berechnung kann – gegebenenfalls – selbst wieder eine nicht-endliche Anzahl von Berechnungsschritten beinhalten.

➔ gedankliche Konstruktion
➔ Existenzbeweis in mathematischer Tradition
➔ nicht programmierbares Konstruktionsverfahren

Zum Selbststudium: Exkurs: Nicht-konstruktive Beweise

Theorem:

Es gibt Lösungen der Gleichung $x^y = z$,
mit z rational, und x und y irrational, d.h. $z \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Beweis:

$\sqrt{2}$ ist irrational und $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational oder irrational.

- Fall 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational.
  Sei $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2}$, dann ist $z = x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational nach Voraussetzung (Fall 1).
- Fall 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational.
  Sei $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$, dann ist $z = x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\bullet\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

Beobachtungen / Anmerkungen

1. Der Beweis liefert die Existenz einer Lösung der Gleichung $x^y = z$ (unter den geforderten Bedingungen), ohne dass eine Lösung angegeben (konstruiert) würde. Der Beweis zeigt, dass eine der beiden Lösungen die Bedingungen erfüllt, lässt aber offen, welche.
2. Intuitionistische / Konstruktivistische Mathematik sieht konstruktive Beweisverfahren als notwendig an. [Zur Vertiefung (Master-Studiengang Informatik oder Mathematik): M. Dummett (1977). *Elements of intuitionism*. Oxford: Clarendon Press.]

Eine Anwendung des Endlichkeitssatzes

Satz 5.19

- Es seien $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ verschiedene Aussagensymbole und
  $\mathbf{M} := \{A_1 \vee A_2, \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3, A_2 \vee A_3, \neg A_2 \vee \neg A_3 \vee \neg A_4, \ldots\}$
  $= \{A_i \vee A_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg A_i \vee \neg A_{i+1} \vee \neg A_{i+2} \mid i \in \mathbb{N}\}$
  Dann ist **M** erfüllbar.

Beweis

- Aufgrund des Endlichkeitssatzes reicht es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von **M** erfüllbar ist.
- Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion über den größten Index eines Aussagensymbols in der Teilmenge.
- *Induktionsanfang:* Ist der größte Index eines Aussagensymbols in $\mathbf{M'} \subseteq \mathbf{M}$ kleiner als 3, dann ist **M'** erfüllbar, denn die leere Menge und $\{A_1 \vee A_2\}$sind erfüllbar.
- *Induktionsannahme:* Alle Teilmengen von **M**, bei denen der größte Index eines Aussagensymbols $< k$ ist, sind erfüllbar.

Induktionsschritt (5.19)

- *Induktionsschritt*: Sei **M'** eine endliche Teilmenge von **M**, so dass k der größte Index eines Aussagensymbols in **M'** ist.
  - Sei **M"** := $\{F \in \mathbf{M'} \mid A_k$ ist keine Teilformel von $F\}$
  - Gemäß Induktionsannahme hat **M"** hat ein Modell $\mathcal{A}''$.
  - Wir definieren die Belegung $\mathcal{A}'$ wie folgt:

i < k–2 $\quad \mathcal{A}'(A_i) = \mathcal{A}''(A_i)$

$$\mathcal{A}'(A_{k-2}) = \begin{cases} \mathcal{A}''(A_{k-2}), \text{ falls } A_{k-2} \text{ in } \mathbf{M''} \text{ vorkommt} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}'(A_{k-1}) = \begin{cases} \mathcal{A}''(A_{k-1}), \text{ falls } A_{k-1} \text{ in } \mathbf{M''} \text{ vorkommt} \\ \mathbf{0}, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}'(A_k) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ falls } \mathcal{A}''(A_{k-1}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{1}, \text{ sonst} \end{cases}$$

i > k (dann kommt A_i nicht in **M'** vor) $\quad \mathcal{A}'(A_i) = \mathbf{0}$

  - Gemäß dieser Definition ist $\mathcal{A}'$ ein Modell von **M"** und von $\{A_{k-1} \vee A_k, \neg A_{k-2} \vee \neg A_{k-1} \vee \neg A_k\}$. Damit ist $\mathcal{A}'$ auch ein Modell von **M'**.

Resümee: Also hat jede endliche Teilmenge von **M** ein Modell.

Wichtige Konzepte in diesem Foliensatz

- (logische) Folgerung: zwischen Formeln, zwischen Formelmengen und Formeln
- Beziehung von Folgerung zu Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit, Äquivalenz
- Endlichkeitssatz / Kompaktheit (Wiedersprüche manifestieren sich im Endlichen)