FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 12 : Entscheidbarkeit

Präsenzaufgabe 12.1:

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit!
2. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Auf- und Abzählbarkeit!
3. Nennen Sie jeweils ein Beispiel für eine entscheidbare, nicht entscheidbare, aufzählbare und nicht aufzählbare Sprache. Ordnen Sie Ihre Sprachen auch unter dem jeweils anderen Begriff ein.

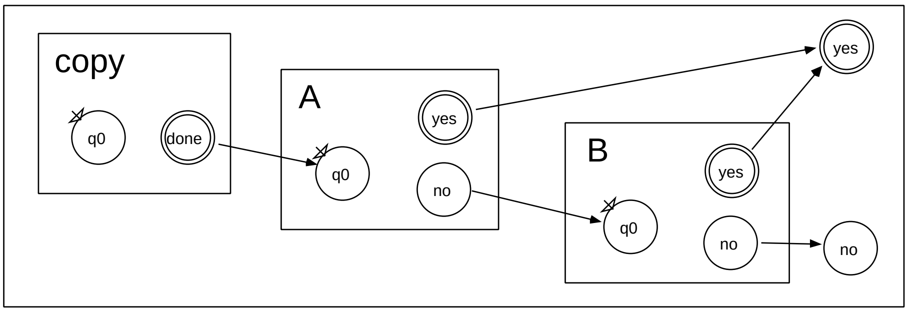
Präsenzaufgabe 12.2:

1. Die Familie der aufzählbaren Sprachen: $\mathcal{R}e$ ist in Bezug auf Vereinigung abgeschlossen.

   Alice hat folgende Konstruktionsskizze angegeben, um dies nachzuweisen. Bob meint: „Ich ahne, was Du meinst. Das klappt aber so nicht".

   (a) Erläutern Sie die Konstruktionsskizze.

   (b) Was könnte Bob meinen?



2. Ist Alices Konstruktion, die zeigen sollte, dass $\mathcal{R}e$ bzgl. Vereinigung abgeschlossen ist, korrekt für die Familie der entscheidbaren Sprachen $\mathcal{R}ec$?

Präsenzaufgabe 12.3: Wir definieren die Sprache

$$L := \{\langle M, w, n\rangle \mid \text{ es gibt für die NTM } M \text{ mindestens } n \text{ Erfolgsrechnungen auf dem Wort } w \}.$$

Zeigen Sie, dass die Sprache L nicht entscheidbar ist, indem sie ein unentscheidbares Problem auf L reduzieren.

Übungsaufgabe 12.4: Seien $L_1, \ldots, L_k$ Sprachen über dem Alphabet Σ mit den folgenden Eigenschaften:

von
6

- Die Sprachen sind disjunkt: Für alle $i \neq j$ gilt $L_i \cap L_j = \emptyset$.
- $L_1 \cup \ldots \cup L_k = \Sigma^*$, d.h. jedes Wort ist in einer der Sprachen.
- Jede Sprache $L_i, i = 1..k$ ist aufzählbar.

Zeige, dass jede Sprache $L_i, i = 1..k$ entscheidbar ist.

Hinweis: Es muss nicht das Zustandsdiagramm einer L_i entscheidenden TM angegeben werden. Es reicht, die Arbeitsweise der entscheidenden TM zu beschreiben.

Übungsaufgabe 12.5: Wir definieren die Sprache

von
6

$$L_\epsilon := \{\langle M \rangle \mid \text{ die TM } M \text{ halt auf dem leeren Wort } \epsilon\}$$

1. Zeigen Sie, dass die Sprache L_ϵ nicht entscheidbar ist, indem sie ein unentscheidbares Problem auf L_ϵ reduzieren.
2. Erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Bonusaufgabe 12.6: Sei $f : \Sigma^* \to \Lambda^*$ eine totale(!) Funktion, von der wir zunächst nicht annehmen, dass sie Turing-berechenbar ist.

von
6

Sei \$ ein Zeichen, dass weder in Σ noch in Λ vorkommt. Definiere $L_f := \{w\$u \mid w \in \Sigma^*, u = f(w)\}$.

1. Zeigen Sie: Wenn $f : \Sigma^* \to \Lambda^*$ eine Turing-berechenbare Funktion ist, dann kann man eine DTM A konstruieren, die L_f akzeptiert und die auf allen Eingaben terminiert.

   Es reicht aus, wenn Sie die Arbeitsweise von A beschreiben.

   Hinweis: Erläutern Sie zunächst, dass es eine DTM B_f geben muss, die f berechnet. Konstruieren Sie mit Hilfe von B_f die DTM A. Konstruieren Sie A als DTM mit zwei Spuren.

2. Sei A eine DTM, die L_f akzeptiert und auf allen Eingaben stets terminiert. Zeigen Sie, dass f Turing-berechenbar ist, indem Sie eine DTM B_f konstruieren, die $f : \Sigma^* \to \Lambda^*$ berechnet.

   Es reicht aus, wenn Sie die Arbeitsweise von B_f beschreiben.

   Hinweis: Verwenden Sie drei Spuren und enumerieren Sie alle Teilworte $u \in \Lambda^*$ lexikalisch auf.