FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Musterlösung 10 : — Prädikatenlogik: Normalformen und Unifikation

Es seien auf diesem Übungsblatt a, b Konstanten, f ein einstelliges Funktionssymbol, g, h zweistellige Funktionssymbole, R ein einstelliges Prädikatensymbol, P, Q zweistellige Prädikatensymbole, S ein dreistelliges Prädikatensymbol und $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{x}_1, \mathsf{y}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y}_2$ Variablen.

Präsenzaufgabe 10.1

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 10 Minuten abgeschlossen sein.

Es sei $\sigma = [\mathsf{x}/\mathsf{h}(\mathsf{a}, \mathsf{y})]$ eine (Variablen-)Substitution und $\mathsf{F} = \forall \mathsf{z}\ (\mathsf{Q}(\mathsf{z}, \mathsf{x}) \Rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{R}(\mathsf{x}))$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathsf{F})$ $(= \mathsf{F}_\sigma)$.

Lösung $\sigma(\mathsf{F}) = \forall \mathsf{z}\ (\mathsf{Q}(\mathsf{z}, \mathsf{h}(\mathsf{a}, \mathsf{y})) \Rightarrow \exists \mathsf{x}\ \mathsf{R}(\mathsf{x}))$

Präsenzaufgabe 10.2

1. Geben Sie zu der Formel F eine äquivalente, bereinigte Formel F_1 an. Welche Variablen müssen hierzu warum umbenannt werden? Welche Umbenennungen führen zu einer äquivalenten Formel (warum)? Welche Umbenennungen führen nicht zu einer äquivalenten Formel?

$$\mathsf{F} = \forall \mathsf{x}\ \exists \mathsf{y}\ (\mathsf{S}(\mathsf{x}, \mathsf{f}(\mathsf{y}), \mathsf{z}) \vee \neg \exists \mathsf{y}\ \neg (\forall \mathsf{z}\ \mathsf{R}(\mathsf{z}) \Rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{y}, \mathsf{x})))$$

   Lösung Eine prädikatenlogische Formeln heißt *bereinigt*, sofern es keine Variablen gibt, die in der Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommen, und sofern hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene Variablen stehen. Die Variable z kommt in F sowohl frei als auch gebunden vor. Die Variable y wird doppelt existenzquantifiziert. In beiden Fällen ist folglich eine Umbenennung von Nöten. Im Falle von z führt die Umbenennung der durch den Quantor gebundenen Variable zu einer äquivalenten Formel (‘gebundene Umbenennung’). Die Ersetzung einer freien Variable durch eine andere führt nicht zu einer äquivalenten Formel, aber zu einer erfüllbarkeitsäquivalenten Formel. Bei y reicht es, eine Umbenennung bei einem Quantor (und der eingebetteten Teilformel) vorzunehmen und es ist völlig egal, welche man wählt. Wir benennen hier einfach alle gebundenen Variablen um, indem wir sie durchnumerieren. D.h. wir nehmen an, dass $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y}_1, \mathsf{y}_2, \mathsf{z}_1$ Variablen sind und bilden:

$$\mathsf{F}_1 = \forall \mathsf{x}_1\ \exists \mathsf{y}_1\ (\mathsf{S}(\mathsf{x}_1, \mathsf{f}(\mathsf{y}_1), \mathsf{z}) \vee \neg \exists \mathsf{y}_2\ \neg (\forall \mathsf{z}_1\ \mathsf{R}(\mathsf{z}_1) \Rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{y}_2, \mathsf{x}_1)))$$

2. Geben Sie zu F_1 eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel F_2 an.

   Lösung

   Die freie Variable z wird durch einen Existenzquantor mit maximalem Skopus gebunden (siehe Satz 10.12). Somit erhalten wir die erfüllbarkeitsäquivalente Formel

$$\mathsf{F}_2 = \exists \mathsf{z}\ \forall \mathsf{x}_1\ \exists \mathsf{y}_1\ (\mathsf{S}(\mathsf{x}_1, \mathsf{f}(\mathsf{y}_1), \mathsf{z}) \vee \neg \exists \mathsf{y}_2\ \neg (\forall \mathsf{z}_1\ \mathsf{R}(\mathsf{z}_1) \Rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{y}_2, \mathsf{x}_1)))$$

Alternative: Man könnte auch eine bislang noch ungenutzte Konstante a nehmen und z substituieren.

$$F_2' = \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), a) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

3. Formen Sie F_2 nun zu einer äquivalenten geschlossenen, bereinigten Pränexform (BPF) F_3 um. Benennen Sie bei jedem Umformungsschritt die entsprechende Regel.

   Lösung

$$\begin{array}{rcll}
F_2 & = & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \neg\exists y_2\ \neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \forall y_2\ \neg\neg(\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Dualität} \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \forall y_2\ (\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{doppelte Negation} \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor (\forall z_1\ R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \forall y_2 \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor \exists z_1\ (R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \forall z_1 \\
& \equiv & \exists z\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall y_2\ \exists z_1\ (S(x_1, f(y_1), z) \lor (R(z_1) \Rightarrow Q(y_2, x_1))) & \text{Skopuserweiterung } \exists z_1 \\
& = & F_3 &
\end{array}$$

4. Geben Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform F_4 zu F_3 an. Führen Sie die neu eingeführten Skolemkonstanten und -funktionen samt ihrer Stelligkeit und den jeweils für die Variable substituierten Term auf.

   Lösung Für Variable z setzen wir die Skolemkonstante a ein, für Variable y_1 nutzen wir die einstellige Skolemfunktion h und setzen den damit gebildeten Term $h(x_1)$ ein, für Variable z_1 nutzen wir die zweistellige Skolemfunktion i und setzen den damit gebildeten Term $i(x_1, y_2)$ ein. Insgesamt erhalten wir:

$$F_4 = \forall x_1\ \forall y_2\ (S(x_1, f(h(x_1)), a) \lor (R(i(x_1, y_2)) \Rightarrow Q(y_2, x_1)))$$

Präsenzaufgabe 10.3 Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf **eine** der folgenden Literalmengen $\mathbf{L_i}$ an und bilden Sie damit, wenn möglich, einen Unifikator σ, so dass $|\ \mathbf{L_i}\sigma\ | = 1$. Sind die Literale nicht unifizierbar, so erläutern Sie das Problem.

1. $\mathbf{L_1} = \{\, S(h(x, b), a, z)\ ,\ S(z, x, h(y, b))\,\}$

   Lösung

   $\sigma_0 = [\,]$
   1. $\mathbf{L_1}\sigma_0 = \mathbf{L_1} = \{\, S(h(x, b), a, z)\ ,\ S(z, x, h(y, b))\,\}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_0\ | = 2$
      $\sigma_1 = [z/h(x, b)]$
   2. $\mathbf{L_1}\sigma_1 = \{\, S(h(x, b), a, h(x, b))\ ,\ S(h(x, b), x, h(y, b))\,\}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_1\ | = 2$
      $\sigma_2 = \sigma_1[x/a] = [z/h(x, b)][x/a]$
   3. $\mathbf{L_1}\sigma_2 = \mathbf{L_1}\sigma_1[x/a] = \{\, S(h(a, b), a, h(a, b))\ ,\ S(h(a, b), a, h(y, b))\,\}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_2\ | = 2$
      $\sigma_3 = \sigma_2[y/a] = [z/h(x, b)][x/a][y/a]$
   4. $\mathbf{L_1}\sigma_3 = \mathbf{L_1}\sigma_2[y/a] = \{\, S(h(a, b), a, h(a, b))\,\}$
      $|\ \mathbf{L_1}\sigma_3\ | = 1$

   Es ergibt sich: $\mathbf{L_1}$ ist unifizierbar mit dem Unifikator $\sigma_3 = [z/h(x, b)][x/a][y/a]$.

2. $\mathbf{L_2} = \{\, Q(x, f(x))\,,\, Q(f(y), y)\,\}$
Lösung

$\sigma_0 = [\,]$

1. $\mathbf{L_2}\sigma_0 = \mathbf{L_2} = \{\, Q(x, f(x))\,,\, Q(f(y), y)\,\}$
$|\,\mathbf{L_2}\sigma_0\,| = 2$
$\sigma_1 = [x/f(y)]$
2. $\mathbf{L_2}\sigma_1 = \{\, Q(f(y), f(f(y)))\,,\, Q(f(y), y)\,\}$
$|\,\mathbf{L_2}\sigma_1\,| = 2$

$\mathbf{L_2}$ ist nicht unifizierbar, da y nicht mit $f(f(y))$ unifiziert werden kann.

Übungsaufgabe 10.4

von
4

1. Bilden Sie zu folgender Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform und stellen Sie diese auch in der Mengendarstellung dar. Gehen Sie vor wie in der Präsenzaufgabe 10.2 und geben Sie bei jedem Schritt an, welche Umformung Sie vornehmen und ob das Resultat äquivalent oder erfüllbarkeitsäquivalenz zu der Formel ist, auf die die Umformung angewendet wurde.

$G = \exists x\ (Q(x, y) \vee \forall y\ Q(y, x)) \Rightarrow \exists x\ \forall z\ Q(x, g(z, y))$

Lösung

(a) Bereinigung durch gebundene Umbenennung (Äquivalenzumformung, wir nehmen an, dass x_1, x_2, y_1, z_1 Variablen sind):
$G_1 = \exists x_1\ (Q(x_1, y) \vee \forall y_1\ Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \exists x_2\ \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y))$

(b) Bildung einer geschlossenen Formel durch Voranstellung eines Existenzquantors für freie Variablen (Erfüllbarkeitsäquivalenzumformung):
$G_2 = \exists y\ (\exists x_1\ (Q(x_1, y) \vee \forall y_1\ Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \exists x_2\ \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$

(c) Bildung einer Pränexform durch Skopuserweiterungen (Äquivalenzumformung):

G_2	$=$	$\exists y\ (\exists x_1\ (Q(x_1, y) \vee \forall y_1\ Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \exists x_2\ \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$	
	$\equiv$	$\exists y\ \exists x_2\ (\exists x_1\ (Q(x_1, y) \vee \forall y_1\ Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$	Skopuserweiterung $\exists x_2$
	$\equiv$	$\exists y\ \exists x_2\ (\exists x_1\ \forall y_1\ (Q(x_1, y) \vee Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$	Skopuserweiterung $\exists y_1$
	$\equiv$	$\exists y\ \exists x_2\ \forall x_1\ (\forall y_1\ (Q(x_1, y) \vee Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$	Skopuserweiterung $\exists x_1$
	$\equiv$	$\exists y\ \exists x_2\ \forall x_1\ \exists y_1\ ((Q(x_1, y) \vee Q(y_1, x_1)) \Rightarrow \forall z_1\ Q(x_2, g(z_1, y)))$	Skopuserweiterung $\exists y_1$
	$\equiv$	$\exists y\ \exists x_2\ \forall x_1\ \exists y_1\ \forall z_1\ ((Q(x_1, y) \vee Q(y_1, x_1)) \Rightarrow Q(x_2, g(z_1, y)))$	Skopuserweiterung $\exists z_1$
	$=$	G_3	

(d) Bildung einer Skolemform, Skolemisierung (Erfüllbarkeitsäquivalenzumformung):
Für Variable y setzen wir die Skolemkonstante a ein, für Variable x_2 setzen wir die Skolemkonstante b ein, für Variable y_1 nutzen wir die einstellige Skolemfunktion f und setzen den damit gebildeten Term $f(x_1)$ ein. Insgesamt erhalten wir:

$$G_4 = \forall x_1\ \forall z_1\ ((Q(x_1, a) \vee Q(f(x_1), x_1)) \Rightarrow Q(b, g(z_1, a)))$$

(e) Bildung der KNF der Matrix der Formel (Äquivalenzumformung)

Matrix:		$(Q(x_1, a) \vee Q(f(x_1), x_1)) \Rightarrow Q(b, g(z_1, a))$	Elimination $\Rightarrow$
	$\equiv$	$\neg(Q(x_1, a) \vee Q(f(x_1), x_1)) \vee Q(b, g(z_1, a))$	Dualität / de Morgan
	$\equiv$	$(\neg Q(x_1, a) \wedge \neg Q(f(x_1), x_1)) \vee Q(b, g(z_1, a))$	Distributivität
	$\equiv$	$(\neg Q(x_1, a) \vee Q(b, g(z_1, a))) \wedge (\neg Q(f(x_1), x_1) \vee Q(b, g(z_1, a)))$	

(f) Mengendarstellung Jede Klausel wird als eine Menge von Literalen dargestellt und die KNF als Menge von Klauseln:

$\{\{\neg Q(x_1, a), Q(b, g(z_1, a))\}, \{\neg Q(f(x_1), x_1), Q(b, g(z_1, a))\}\}$

2. Gegeben seien die Klauselnormalformen F und F' mit den Mengendarstellungen $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{F}'$.

$$
\begin{aligned}
F &= \forall x\, \forall y\, ((P(x, y) \lor Q(y, x)) \land (\neg P(x, f(y)) \lor Q(x, y))) \\
F' &= \forall x_1\, \forall y_1\, \forall x_2\, \forall y_2\, ((P(x_1, y_1) \lor Q(y_1, x_1)) \land (\neg P(x_2, f(y_2)) \lor Q(x_2, y_2))) \\
\mathbf{F} &= \{\{P(x, y), Q(y, x)\}, \{\neg P(x, f(y)), Q(x, y)\}\} \\
\mathbf{F}' &= \{\{P(x_1, y_1), Q(y_1, x_1)\}, \{\neg P(x_2, f(y_2)), Q(x_2, y_2)\}\}
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen Sie, dass F und F' äquivalent sind.

Lösung Zunächst stellen wir fest:

$$
\begin{aligned}
\forall x\, \forall y\, (P(x, y) \lor Q(y, x)) &\equiv \forall x_1\, \forall y_1\, (P(x_1, y_1) \lor Q(y_1, x_1)) && \text{Satz 10.9 und Satz 10.4} \\
\forall x\, \forall y\, (\neg P(x, f(y)) \lor Q(x, y)) &\equiv \forall x_2\, \forall y_2\, (\neg P(x_2, f(y_2)) \lor Q(x_2, y_2)) && \text{Satz 10.9 und Satz 10.4}
\end{aligned}
$$

Damit gilt dann:

$$
\begin{aligned}
F &\equiv \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \lor Q(y, x)) \land \forall x\, \forall y\, (\neg P(x, f(y)) \lor Q(x, y)) && \text{Satz 10.2.3 und Satz 10.4} \\
&\equiv \forall x_1\, \forall y_1\, (P(x_1, y_1) \lor Q(y_1, x_1)) \land \forall x_2\, \forall y_2\, (\neg P(x_2, f(y_2)) \lor Q(x_2, y_2)) && \text{s.o. und Satz 10.4} \\
&\equiv F' && \text{Satz 10.2.2 und Satz 10.4}
\end{aligned}
$$

(b) Erläutern Sie an diesem Beispiel, warum bei der Mengendarstellung von Klauselnormalformen das Vorkommen derselben Variable in verschiedenen Klauseln unerheblich ist.

Lösung Bei obigem Beweis zur Äquivalenz von F und F' spielte die spezifische Struktur der Klauseln keine Rolle. Wesentlich ist, dass die Klauseln durch Konjunktion verknüpft sind und die Variablen allquantifiziert sind. Entsprechend ist zu erwarten, dass sich obiger Beweis wie folgt verallgemeinern lässt (in diesem Fall: Vollständige Induktion): Zu jeder Klauselnormalform G gibt es eine äquivalente Klauselnormalform G', bei der zwei verschiedene enthaltene Klauseln keine gemeinsame Variable verwenden. Oder: Zu jeder Klauselnormalform G gibt es eine äquivalente Mengendarstellung $\mathbf{G}$, bei der zwei verschiedene enthaltene Klauseln keine gemeinsame Variable verwenden. Wenn man aber weiß, dass man solche Umbenennungen stets machen kann, dann kann man sich das auch schenken und in den weiteren Verarbeitungsschritten die Variablen verschiedener Klauseln als verschiedene Variablen behandeln. (Das begründet, warum bei der prädikatenlogischen Resolution die Variablen verschiedener Klauseln bei der Unifikation unabhängig voneinander substituiert werden können.)

Übungsaufgabe 10.5 Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die folgenden Literalmengen $\mathbf{L_i}$ an und bilden Sie damit, wenn möglich, einen Unifikator σ, so dass $|\mathbf{L_i}\sigma| = 1$. Sind die Literale nicht unifizierbar, so erläutern Sie das Problem.

von
4

1. $\mathbf{L_3} = \{Q(x, a), Q(h(y, z), y), Q(h(f(u), f(v)), v)\}$

Lösung

$\sigma_0 = [\,]$

1. $\mathbf{L_3}\sigma_0 = \mathbf{L_3} = \{\mathsf{Q}(\mathsf{x},\mathsf{a}), \mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{z}),\mathsf{y}), \mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{u}),\mathsf{f}(\mathsf{v})),\mathsf{v})\}$
   $\mid \mathbf{L_3}\sigma_0 \mid = 3$
   $\sigma_1 = [\mathsf{x}/\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{z})]$
2. $\mathbf{L_3}\sigma_1 = \{\mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{z}),\mathsf{a}), \mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{y},\mathsf{z}),\mathsf{y}), \mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{u}),\mathsf{f}(\mathsf{v})),\mathsf{v})\}$
   $\mid \mathbf{L_3}\sigma_1 \mid = 3$
   $\sigma_2 = \sigma_1[\mathsf{y}/\mathsf{a}]$
3. $\mathbf{L_3}\sigma_2 = \{\mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{a},\mathsf{z}),\mathsf{a}), \mathsf{Q}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{u}),\mathsf{f}(\mathsf{v})),\mathsf{v})\}$
   $\mid \mathbf{L_3}\sigma_2 \mid = 2$

Es ergibt sich: $\mathbf{L_3}$ ist nicht unifizierbar, da $\mathsf{f}(\mathsf{u})$ und a nicht unifizierbar sind.

2. $\mathbf{L_4} = \{\mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{f}(\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{y},\mathsf{w}), \mathsf{Q}(\mathsf{x},\mathsf{x})\}$

   Lösung

   $\sigma_0 = [\,]$

   1. $\mathbf{L_4}\sigma_0 = \mathbf{L_4} = \{\mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{f}(\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{y},\mathsf{w}), \mathsf{Q}(\mathsf{x},\mathsf{x})\}$
      $\mid \mathbf{L_4}\sigma_0 \mid = 3$
      $\sigma_1 = [\mathsf{y}/\mathsf{z}]$
   2. $\mathbf{L_4}\sigma_1 = \{\mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{f}(\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{w}), \mathsf{Q}(\mathsf{x},\mathsf{x})\}$
      $\mid \mathbf{L_4}\sigma_1 \mid = 3$
      $\sigma_2 = \sigma_1[\mathsf{w}/\mathsf{f}(\mathsf{z})]$
   3. $\mathbf{L_4}\sigma_2 = \{\mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{f}(\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{x},\mathsf{x})\}$
      $\mid \mathbf{L_4}\sigma_2 \mid = 2$
      $\sigma_3 = \sigma_2[\mathsf{x}/\mathsf{z}]$
   4. $\mathbf{L_4}\sigma_3 = \{\mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{f}(\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{z},\mathsf{z})\}$
      $\mid \mathbf{L_4}\sigma_3 \mid = 2$

   Es ergibt sich: $\mathbf{L_4}$ ist nicht unifizierbar, da z und $\mathsf{f}(\mathsf{z})$ nicht unifizierbar sind, denn z kommt in $\mathsf{f}(\mathsf{z})$ vor. (Natürlich hätte man es sich auch einfacher machen können und gleich mit $[\mathsf{x}/\mathsf{z}]$ beginnen.)

3. $\mathbf{L_5} = \{\mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{y}),\mathsf{h}(\mathsf{w},\mathsf{z})), \mathsf{Q}(\mathsf{v},\mathsf{h}(\mathsf{u},\mathsf{a})), \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{x}),\mathsf{x})\}$

   Lösung

$\sigma_0 = [\,]$

1. $\mathbf{L_5}\sigma_0 = \mathbf{L_5} = \{Q(f(y), h(w, z)), Q(v, h(u, a)), Q(f(x), x)\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_0\,| = 3$
   $\sigma_1 = [v/f(y)]$
2. $\mathbf{L_5}\sigma_1 = \{Q(f(y), h(w, z)), Q(f(y), h(u, a)), Q(f(x), x)\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_1\,| = 3$
   $\sigma_2 = \sigma_1[w/u]$
3. $\mathbf{L_5}\sigma_2 = \{Q(f(y), h(u, z)), Q(f(y), h(u, a)), Q(f(x), x)\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_2\,| = 3$
   $\sigma_3 = \sigma_2[z/a]$
4. $\mathbf{L_5}\sigma_3 = \{Q(f(y), h(u, a)), Q(f(x), x)\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_3\,| = 2$
   $\sigma_4 = \sigma_3[y/x]$
5. $\mathbf{L_5}\sigma_4 = \{Q(f(x), h(u, a)), Q(f(x), x)\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_4\,| = 2$
   $\sigma_5 = \sigma_4[x/h(u, a)]$
6. $\mathbf{L_5}\sigma_5 = \{Q(f(h(u, a)), h(u, a))\}$
   $|\,\mathbf{L_5}\sigma_5\,| = 1$

Es ergibt sich: $\mathbf{L_5}$ ist unifizierbar, ein allgemeinster Unifikator ist: $[v/f(y)][w/u][z/a][y/x][x/h(u, a)]$

Alternativen ergeben sich z.B. dadurch, dass im Schritt 2 auch die Substitution $[u/w]$ in Frage kommt, da hier zwei Variablen unifiziert werden und man dann wählen kann, welche Ersetzung man vornimmt. Entsprechend im Schritt 4.

Übungsaufgabe 10.6 In dieser Aufgabe geht es um den Unterschied zwischen durch Allquantoren gebundene Variablen und freien Variablen, aber auch die Gemeinsamkeiten dieser Variablen.
Es sei F eine prädikatenlogische Formel.

von
4

1. Beweisen Sie: $\forall x\, F \models F$ (anders gesagt: aus $\forall x\, F$ folgt F.)

   Lösung Zu zeigen ist: Jedes Modell von $\forall x\, F$ ist auch ein Modell von F. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von $\forall x\, F$ und sei $d = \mathcal{A}(x)$. Dann ist nach Def. 9.10 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[x/d]}$ und $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$. damit ergibt sich dann auch $\mathcal{A}(F) = 1$.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Formel F an, so dass $F \not\models \forall x\, F$. (Anders gesagt: $\forall x\, F$ folgt nicht aus F). Dazu gehört auch, dass Sie zeigen, dass für dieses Beispiel die Aussage $F \not\models \forall x\, F$ richtig ist.

   Lösung Es sei Q ein einstelliges Prädikatensymbol und $F = Q(x)$. Weiterhin sei die Struktur $\mathcal{A} = (U, I)$ definiert mit $U = \{3, 6\}$ und $I(x) = 3$, $I(Q) = \{3\}$.

   Dann ist $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(Q(x)) = 1$, da $I(x) = 3 \in I(Q) = \{3\}$ und $\mathcal{A}(\forall x\, F) = \mathcal{A}(\forall x\, Q(x)) = 0$, da $\mathcal{A}_{[x/6]}(Q(x)) = 0$, denn $I_{[x/6]}(x) = 6 \notin I_{[x/6]}(Q) = I(Q) = \{3\}$.

3. Beweisen Sie: Wenn F allgemeingültig (= eine Tautologie) ist, dann ist auch $\forall x\, F$ allgemeingültig.

   Lösung Da eine Formel genau dann allgemeingültig ist, wenn sie nicht falsifizierbar ist ist, zeigen wir hier: Wenn $\forall x\, F$ falsifizierbar ist, dann ist auch F falsifizierbar.

Wenn $\forall x\, F$ falsifizierbar ist, dann gibt es eine Struktur $\mathcal{A} = (U, I)$, die $\forall x\, F$ falsch macht ($\mathcal{A}(F) = 0$). Nach Def. 9.10 gibt es eine x-Variante von $\mathcal{A}$, die F falsch macht. Also ist F ist falsifizierbar.

4. Beweisen Sie: Wenn $\forall x\, F$ allgemeingültig ist, dann ist auch F allgemeingültig.

   Lösung Da aus allgemeingültigen Formeln nur allgemeingültige Formeln folgen (Satz 5.3), ergibt sich die Behauptung aus der Teilaufgabe 1.