# FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 6 : — Semantik, Äquivalenz, Normalformen

**Präsenzaufgabe 6.1**

1. Erstellen Sie zu der folgenden aussagenlogischen Formel eine Wahrheitstafel.

$$F = ((A \Leftrightarrow \neg B) \wedge \neg((C \Rightarrow B) \vee A))$$

2. Geben Sie Funktionen $\mathsf{zeilen}, \mathsf{spalten} : \mathcal{L}_{AL} \to \mathbb{N}$ zur Bestimmung der Anzahl der erforderlichen Zeilen und Spalten einer Wahrheitstafel für eine Formel an.

3. Überführen Sie unter Angabe des Übersetzungsschlüssels die folgenden natürlichsprachlichen Sätze in aussagenlogische Formeln. Bei mehreren möglichen Lesarten geben Sie bitte alle an. Versuchen Sie bei der Übersetzung die logische Struktur in der Formel möglichst fein zu repräsentieren. (Bsp: Der Satz “Es ist nicht der Fall, dass Peter ein Mann ist”, sollte z.B. nicht durch $A$ formalisiert werden, da die Negation nicht sichtbar wäre, sondern durch $\neg A$.)

   (a) (Immer) wenn die Sonne scheint, ist Sabine gut gelaunt.
   (b) Sabine geht nur bei schönem Wetter Eis-Essen.
   (c) Peter steht auf, frühstückt und fährt zur Arbeit.
   (d) Sabine und Peter tragen einen Koffer.
   (e) Sabine liebt und hasst Spargel.

**Präsenzaufgabe 6.2**

1. Welche der drei folgenden Formeln ist allgemeingültig, kontingent, erfüllbar, unerfüllbar bzw. falsifizierbar. Welche ist eine Tautologie oder eine Kontradiktion?

   (a) $(A \Rightarrow A)$ (b) $(A \Rightarrow \neg A)$ (c) $(A \Leftrightarrow \neg A)$

2. Bilden Sie zu **einer** der folgenden Formeln eine DNF **und** eine KNF durch Äquivalenzumformungen. Geben Sie bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden.

   (a) $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg D))$
   (b) $(((A \Rightarrow B) \vee \neg C) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg(A \Rightarrow \neg B)))$

**Übungsaufgabe 6.3**

von 4

1. Bilden Sie drei allgemeingültige, drei unerfüllbare, drei kontingente, drei erfüllbare und drei falsifizierbare Formeln, in denen $(A \vee B)$ als Teilformel vorkommt, und zeigen Sie, dass die gebildeten Formeln die geforderten Eigenschaften haben.

2. Widerlegen Sie folgende Äquivalenzbehauptungen, wobei hier $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{A}s_{AL}$ sein sollen.

   (a) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \equiv ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow C))$
   (b) $((A \vee (B \vee C)) \wedge (D \vee (E \vee F))) \equiv ((A \wedge D) \vee ((B \wedge E) \vee (C \wedge F)))$

**Übungsaufgabe 6.4**

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

1. Bilden Sie zu der folgenden Formel eine KNF **und** eine DNF durch Äquivalenzumformungen. Geben Sie bei jeder Umformung an, welche Umformungsregel Sie anwenden.

$$((\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow \mathsf{C})$$

2. Prüfen Sie mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode, ob die resultierenden Formeln tatsächlich äquivalent zur Ursprungsformel sind.

| |
|---|
| |
| von |
| 4 |

**Übungsaufgabe 6.5** Sie haben im Rahmen eines Projektes eine Funktion namens KNF programmiert, die zu einer Formel eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform erzeugt. Nun wird festgestellt, dass man auch die Funktion DNF braucht, die zu einer Formel die äquivalente disjunktive Normalform erzeugt.
Peter Schlauberger hat eine Funktion namens TAUSCH geschrieben, die bei einer Formel in konjunktiver Normalform alle Konjunktionen in Disjunktionen und alle Disjunktionen in Konjunktionen umtauscht und zudem jedes Literal durch das jeweils komplementäre Literal ersetzt. Genauer gesagt erfüllt TAUSCH die folgende Spezifikation:

1. Ist $\mathsf{F}$ eine atomare Formel, dann ist TAUSCH($\mathsf{F}$) $= \neg\mathsf{F}$.

2. Ansonsten gilt für beliebige Formeln $\mathsf{F}$ und $\mathsf{G}$:

   (a) TAUSCH($\neg\mathsf{F}$) $= \mathsf{F}$

   (b) TAUSCH($(\mathsf{F} \wedge \mathsf{G})$) $= ($TAUSCH($\mathsf{F}$) $\vee$ TAUSCH($\mathsf{G}$)$)$

   (c) TAUSCH($(\mathsf{F} \vee \mathsf{G})$) $= ($TAUSCH($\mathsf{F}$) $\wedge$ TAUSCH($\mathsf{G}$)$)$

Peter Schlauberger sagt nun, dass man einfach die konjunktive Normalform einer Formel dieser Funktion unterziehen muss, um die disjunktive Normalform zu erhalten (und lässt dabei den Namen de Morgan fallen).

1. Beweisen Sie, dass die erzeugte Formel tatsächlich in disjunktiver Normalform ist, wenn TAUSCH auf eine konjunktive Normalform angewendet wird.

2. Zeigen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass Peter sich trotzdem irrt, d.h. dass die sequentielle Anwendung TAUSCH(KNF($\mathsf{F}$)) nicht eine DNF zu $\mathsf{F}$ erzeugt.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/teaching/vorlesungen/FGI1_SoSe12