FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 9 : — Prädikatenlogik: Syntax und Semantik

Zur Kompensation des Fehldruckes Für die Kapitel 9 und 10 und den Abschnitt von Kapitel 11 bis einschließlich Seite 17 empfehlen wir die Arbeit mit eigenen Ausdrucken.

Definition 9.1 Seite 9-9
Das Alphabet der Prädikatenlogik besteht aus ...

- den logischen Symbolen
  - Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
  - Quantoren: $\forall$, $\exists$

Definition 9.3 Seite 9-13

F-3 Falls F und G Formeln sind, so sind auch folgende Zeichenketten (komplexe) Formeln: $\neg\mathsf{F}$, $(\mathsf{F} \wedge \mathsf{G})$, $(\mathsf{F} \vee \mathsf{G})$, $(\mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G})$, $(\mathsf{F} \Leftrightarrow \mathsf{G})$

F-4 Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind $\exists\mathsf{x}\ \mathsf{F}$ und $\forall\mathsf{x}\ \mathsf{F}$ (komplexe) Formeln.

- Bezüglich der Formeln $\exists\mathsf{x}\ \mathsf{F}$ und $\forall\mathsf{x}\ \mathsf{F}$ bezeichnen wir x als die Quantorenvariable.

Definition 9.10 Seite 9-47
F*-4 Für jede Variable x, jede Formel F und jede Struktur $\mathcal{A} = (\mathsf{U}, \mathsf{I})$ ist

$$\mathcal{A}(\forall\mathsf{x}\ \mathsf{F}) = \begin{cases} 1 & \text{, falls für alle } \mathsf{d} \in \mathsf{U} \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[\mathsf{x}/\mathsf{d}]}(\mathsf{F}) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\exists\mathsf{x}\ \mathsf{F}) = \begin{cases} 1 & \text{, falls es ein } \mathsf{d} \in \mathsf{U} \text{ gibt mit: } \mathcal{A}_{[\mathsf{x}/\mathsf{d}]}(\mathsf{F}) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 9.1

Die Bearbeitung dieser Aufgabe sollte nach ca. 20 Minuten abgeschlossen sein.

1. Gehen Sie davon aus, dass F_{11} eine prädikatenlogische Formel ist, die aber ohne Berücksichtigung von Benennungskonventionen geschrieben wurde. Geben Sie für die verwendeten Symbole an, welcher syntaktischen Kategorie sie angehören (Variable, Konstante, Funktionssymbol, Prädikatensymbol) und geben Sie für Funktionssymbole und Prädikatensymbole an, in welcher Stelligkeit sie verwendet werden. Für welche Symbole gibt es alternative Lösungen / Mehrdeutigkeiten?

$$\mathsf{F}_{11} = \forall\mathsf{o}\ ((\mathsf{D}(\mathsf{a}, \mathsf{r}(\mathsf{o})) \Rightarrow \mathsf{M}(\mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{o}))) \vee \exists\mathsf{u}\ (\mathsf{K}(\mathsf{F}(\mathsf{u}, \mathsf{o})) \wedge \mathsf{M}(\mathsf{c})))$$

2. Geben Sie für die Formel aus Teilaufgabe 1 den Strukturbaum an.

3. Es seien x, y und z Variablen. Bestimmen Sie für **eine** der beiden Formeln, welche Variable in welcher Position durch welchen Quantor gebunden wird. (Anders gesagt: Bestimmen Sie, welches Variablenvorkommen durch welchen Quantor gebunden wird.) Welche Variablen kommen in der betrachteten Formel (in welcher Position) frei vor?

   (a) $F_{12} = \forall x\ (P(x) \Rightarrow \exists y\ (\exists x\ (Q(x,y) \vee R(z)) \wedge M(x,y,z)))$

   (b) $F_{13} = \exists y\ (Q(y,x) \wedge \forall x\ (\exists x\ Q(x,y) \Rightarrow (R(x) \vee M(x,y))))$

Präsenzaufgabe 9.2

1. Es seien folgende Symbole in der Prädikatenlogik verfügbar:

   - Es seien a, b Konstanten.
   - Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol.
   - Es sei P ein einstelliges Prädikatensymbol.
   - Es sei Q ein zweistelliges Prädikatensymbol.
   - Es seien x, y, z Variablen.

   Weiterhin sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, wobei $U = \{3, 6, 9\}$ und I folgende Abbildungen vornimmt:

	a	b	f	P	Q	x	y	z
I	3	6	$3 \mapsto 6$ $6 \mapsto 9$ $9 \mapsto 9$	$\{6, 9\}$	$\{(3,6), (6,9)\}$	3	3	9

   Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Formeln F_{21} und F_{22} mit Hilfe der Struktur $\mathcal{A}$.

   (a) $F_{21} = Q(a,b) \Leftrightarrow Q(f(a), f(b))$

   (b) $F_{22} = \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x,z))$

2. Zeigen Sie, dass F_{21} und F_{22} kontingent sind, indem Sie Strukturen $\mathcal{A}_a$ und $\mathcal{A}_b$ angeben, so dass gilt: $\mathcal{A}_a(F_{21}) \neq \mathcal{A}(F_{21})$ und $\mathcal{A}_b(F_{22}) \neq \mathcal{A}(F_{22})$. Begründen Sie, dass die angegebene Struktur das Gewünschte leistet.

   Tipp: Modifizieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$ geeignet aber möglichst wenig. Dann können Sie die Begründung ggf. auch angeben, ohne die komplette Tabelle aufzuschreiben.

von
4

Übungsaufgabe 9.3

1. Norbert Namenlos hat nach erfolgreichem Abschluss einer Logikeinführung die Formel F_{32} als Ausgangspunkt der Formalisierung für einen Datenbankentwurf im Rahmen seiner Bachelorarbeit aufgeschrieben. Auch er verzichtet gerne auf die Berücksichtigung von Benennungskonventionen. Bestimmen Sie auch hier die syntaktischen Kategorien der verwendeten Symbole und erläutern Sie, welche Probleme diese Formalisierung aufweist.

$$F_{32} = \forall f\ \exists x\ (R(f, x) \Leftrightarrow (P(f(x)) \wedge P(R, x)))$$

2. Es seien x, y und z Variablen. Bestimmen Sie, welches Variablenvorkommen durch welchen Quantor gebunden wird. Welche Variablen kommen in der betrachteten Formel (in welcher Position) frei vor?

$$F_{33} = \forall x\ (\exists y\ R(x, f(y)) \wedge R(x, y)) \vee \exists z\ (\forall y\ M(x, y, z) \vee \forall z\ P(z))$$

3. Wählen Sie für die in den folgenden Formeln auftretenden Konstanten (a_i) und Prädikatensymbolen (P_i, Q_i, R_i, S_i, T_i) geeignete Übersetzungsschlüssel und übersetzen Sie die Formeln ins Deutsche. Geben Sie ruhig auch Formulierungsalternativen an. Welche Formeln lassen sich nicht gut übertragen? Warum?

   Beispiel: $P_0(a_0) \Rightarrow \exists y\ (R_0(y) \wedge Q_0(a_0, y))$ kann man übertragen als: Wenn Peter (a_0) ein Student (P_0) ist, dann gibt es eine Vorlesung (R_0), die Peter (a_0) besucht (Q_0). oder auch als: Wenn Peter (a_0) Student (P_0) ist, dann besucht (Q_0) er (a_0) eine Vorlesung (R_0).

   (a) $\neg\exists x\ (P_1(x) \wedge R_1(x))$
   (b) $\neg\forall x\ (P_2(x) \Rightarrow R_2(x))$
   (c) $P_3(a_3) \Rightarrow \exists y\ (R_3(y) \wedge Q_3(a_3, y))$
   (d) $P_4(a_4) \wedge \forall y\ (R_4(y) \Rightarrow Q_4(a_4, y))$
   (e) $P_5(a_5) \Rightarrow \forall y\ (R_5(y) \wedge Q_5(a_5, y))$
   (f) $\forall x\ ((P_6(x) \wedge \exists y\ (R_6(y) \wedge Q_6(x, y))) \Rightarrow \exists z\ (S_6(z) \wedge T_6(x, z)))$
   (g) $\forall x\ (P_7(x) \Leftrightarrow (S_7(x) \wedge \forall y\ (R_7(y) \Rightarrow Q_7(x, y))))$
   (h) $\forall x\ (P_8(x) \Leftrightarrow (S_8(x) \wedge \exists y\ (R_8(y) \wedge Q_8(x, y))))$

Übungsaufgabe 9.4

von
8

Es seien folgende Symbole in der Prädikatenlogik verfügbar:

- Es seien P, R einstellige Prädikatensymbole.
- Es sei Q ein zweistelliges Prädikatensymbol.
- Es sei x eine Variable.
- Es sei a eine Konstante.

1. Weiterhin sei $\mathcal{A}_1 = (\mathsf{U}_1, \mathsf{I}_1)$ eine Struktur, wobei $\mathsf{U}_1 = \{3, 6, 9\}$ und I_1 folgende Abbildungen vornimmt:

	P	Q	x
I_1	$\emptyset$	$\{(3,6),(6,6),(6,9)\}$	9

   Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Formel F_{41} mit Hilfe der Struktur $\mathcal{A}_1$.

   $\mathsf{F}_{41} = \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \vee \forall \mathsf{x}\ (\mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{x}) \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{x}))$

2. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Struktur, dass Formel F_{42} keine Kontradiktion ist.

   $\mathsf{F}_{42} = \exists \mathsf{x}\ (\mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{a}) \wedge \neg \mathsf{Q}(\mathsf{a}, \mathsf{x}))$

3. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Struktur, dass die Formeln F_{43} und F_{44} nicht äquivalent sind.

   - $\mathsf{F}_{43} = \exists \mathsf{x}\ (\mathsf{P}(\mathsf{x}) \Rightarrow \mathsf{R}(\mathsf{a}))$
   - $\mathsf{F}_{44} = \exists \mathsf{x}\ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \Rightarrow \mathsf{R}(\mathsf{a})$

4. Zeigen Sie, dass für beliebige prädikatenlogische Formeln F und G die Formeln F_{45} und F_{46} äquivalent sind.

   - $\mathsf{F}_{45} = \exists \mathsf{x}\ \mathsf{F} \vee \exists \mathsf{x}\ \mathsf{G}$
   - $\mathsf{F}_{46} = \exists \mathsf{x}\ (\mathsf{F} \vee \mathsf{G})$