FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 1 : Formale Sprachen und Endliche Automaten

Präsenzaufgabe 1.1: Wir betrachten den Monoid $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Betrachte die Teilmengen $X, Y \subseteq \Sigma^*$ mit $X = \{a, ab, \epsilon\}$ und $Y = \{c, bc, ac\}$.

1. Bestimmen Sie Σ^2.

   Lösung: Die Notation ist nicht ganz eindeutig, da wir sie sowohl für das kartesische Produkt $\Sigma \times \Sigma$ als auch für das Komplexprodukt $\Sigma \cdot \Sigma$ verwenden.

   Im Kontext eines Alphabetes Σ ist typischerweise das Komplexprodukt $\Sigma \cdot \Sigma$ gemeint.

   $\Sigma \cdot \Sigma = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

   Das kartesische Produkt ergibt sich zu $\Sigma\times\Sigma = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

   Wir erkennen, dass beide Produktmengen isomorph sind. Das dies nicht mehr gilt, wenn wir von Alphabeten zu beliebigen Mengen übergehen, zeigen die beiden folgenden Teilaufgaben.

2. Bestimmen Sie $X \times Y$ und $|X \times Y|$.

   Lösung: $X \times Y = \{(a, c), (a, bc), (a, ac), (ab, c), (ab, bc), (ab, ac), (\epsilon, c), (\epsilon, bc), (\epsilon, ac)\}$

   $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = 3 \cdot 3 = 9.$

3. Bestimmen Sie $X \cdot Y$ und $|X \cdot Y|$.

   Lösung: $X \cdot Y = \{ac, abc, aac, \underline{abc}, abbc, abac, c, bc, \underline{ac}\} = \{ac, abc, aac, abbc, abac, c, bc\}$
   Doppelte Einträge sind unterstrichen.

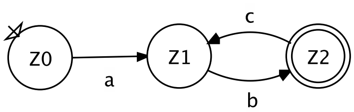
   $|X \cdot Y| = 7$

4. Bestimmen Sie X^+ und X^*.

   Lösung: $X^+ = \{w \mid w = a...a(ab)a...a(ab)a...a \cdots a...a(ab)a...a\} = (\{a\}^*\{ab\})^*\{a\}^* = \{a\}^*(\{ab\}\{a\}^*)^*\{a\}^*$
   $X^+ = X^+ \cup \{\epsilon\} = X^*$

Präsenzaufgabe 1.2:

1. Geben Sie die formale Notation des folgenden DFA A_1 an und bestimmen Sie $L(A_1)$.

A_1: 

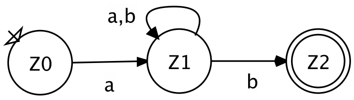
Lösung: $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, z_0, F)$ mit $Q = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{z_2\}$ und $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist definiert durch $(z_0, a) \mapsto z_1$, $(z_1, b) \mapsto z_2$ und $(z_2, c) \mapsto z_1$ (für alle anderen Argumente ist δ undefiniert).

Akzeptierte Sprache:

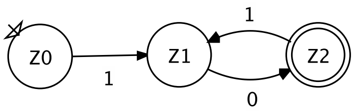
$$L(A_1) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : w = ab(cb)^n\} = \{ab\}\{cb\}^*$$

2. Sei $M_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und endet mit } b\}$.
Konstruieren Sie einen NFA A, so dass $L(A) = M_1$ gilt.

Lösung: Der NFA A_3 aus Teilaufgabe (4) akzeptiert diese Sprache.

A_3: 

3. Gegeben ist der folgende DFA A_2. Sei $M_2 = \{10\}\{10\}^*$. Beweisen Sie $L(A_2) = M_2$, indem Sie zwei Inklusionen beweisen.

A_2: 

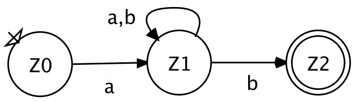
Lösung: Für den Beweis sind zwei Inklusionen zu zeigen: $L(A_2) \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq L(A_2)$.

(a) Behauptung: $L(A_2) \subseteq M_2$, d.h. jedes Wort, das A_2 akzeptiert, ist in M_2.
Induktion über die Länge $n = |w|$ des akzeptierten Wortes w.
- Ind.Beginn für $n = 0$: Da A_2 kein Wort w der Länge 0 akzeptiert (der Start- ist kein Endzustand), ist nichts zu zeigen.
- Ind.Annahme: Die Behauptng gelte für alle Worte $|w| \leq n$.
- Ind.Schritt von n zu $n+1$: Wenn A_2 das Wort w mit $|w| = n+1$ akzeptiert, dann endet das Wort in z_2 und das letzte Zeichen war eine 0. Dann war das vorletzte Zeichen eine 1 und wir waren entweder im Startzustand z_0 oder in z_2. Im ersten Fall war das Wort $w = 10$ und dies ist in M_2; im zweiten Fall haben wir ein Wort der Form $w = w'10$ und w' wurde akzeptiert.
Da $|w'| = n - 1 \leq n$, ist die Ind.Annahme anwendbar und w' ist in M_2, und dann ist auch $w = w'10$ in M_2.

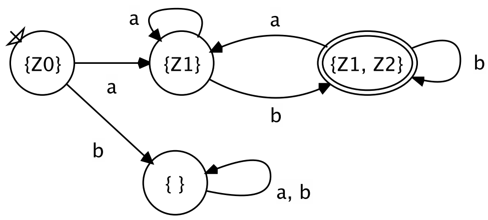
Also gilt die Ind.Behauptung für alle n, d.h. für alle akzeptierten Worte.

(b) $M_2 \subseteq L(A_2)$, d.h. jedes Wort aus M_2 führt in A_2 in einen Endzustand.
Sei $w = (10)(10)^n$. Nach dem Lesen von 10 befindet sich A_2 im Endzustand z_2. Ein weiteres 10 führt von z_2 wieder zu z_2. Also auch die n-fache Wiederholung. Also werden alle Worte aus M_2 akzeptiert.

4. Konstruieren Sie den Potenzautomaten (nach dem 2. Verfahren, das nur die initial Zusammenhangskomponente erzeugt) zu folgenden NFA A_3.

A_3: 

Lösung: Die initiale Zusammenhangskomponente des Potenzautomaten ergibt sich wie folgt. Beachten Sie, dass der Potenzautomat stets vollständig ist.



Übungsaufgabe 1.3: Sei Σ ein Alphabet und $X, Y, Z \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen.

von 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Gleichungen, indem Sie zwei Inklusionsbeziehungen beweisen oder ein Gegenbeispiel angeben.

1. $(X \cup Y) \cdot Z = (X \cdot Z) \cup (Y \cdot Z)$
2. $(X \cdot Y) \cup Z = (X \cup Z) \cdot (Y \cup Z)$
3. $(X^*)^* = X^*$
4. $(X \cup Y)^* = X^* \cup Y^*$
5. Als Bonusaufgabe (1 Extrapunkt): $(X \cdot Y)^* \cdot X = X \cdot (Y \cdot X)^*$

Übungsaufgabe 1.4:

von 4

1. Geben Sie einen NFA A_1 an, der die folgende Sprache akzeptiert:

   $L_1 := \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält eine gerade Anzahl von 0 und eine ungerade Anzahl von 1 }\}$

2. Geben Sie einen NFA A_2 an, der die folgende Sprache akzeptiert:

   $$L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ in jedem Anfangsstück } u \text{ von } w \text{ gilt: } 0 \leq |u|_a - |u|_b \leq 3\}$$

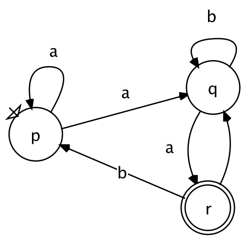
   Hierbei bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl des Auftretens des Zeichens x in einem Wort w.

Geben Sie zu jedem Zustand q der Automaten eine inhaltliche Interpretation an, d.h. eine Eigenschaft, die gilt, wenn das bislang eingelesene Anfangsstück des Wortes nach q geführt hat.

Übungsaufgabe 1.5:

von 4

1. Konstruieren Sie den Potenzautomaten zu folgendem NFA A.



A:

2. Sei δ die Überführungsfunktion eines vollständigen DFA und δ^* seine Erweiterung (vgl. Def. 13.2).

   Beweisen Sie für alle Zeichen $x \in \Sigma$, Worte $w \in \Sigma^*$ und alle Zustände $q \in Q$:

   $$\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$$

   Hinweis: Verwenden Sie eine Induktion über $|w|$.

Informationen und Unterlagen zur Veranstaltung unter:

http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/teaching/vorlesungen/FGI1_SoSe12.shtml