FGI-1 – Formale Grundlagen der Informatik I

Logik, Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 4 : Kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten

Präsenzaufgabe 4.1: Sei $L = \{a^{k+l}b^k c^l \mid k, l \geq 1\}$.

1. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$, so dass $L(G) = L$.

   Lösung: Eine lineare Grammatik ist:

$$\begin{aligned} S &\to aCc \\ C &\to aCc \mid B \\ B &\to aBb \mid ab \end{aligned}$$

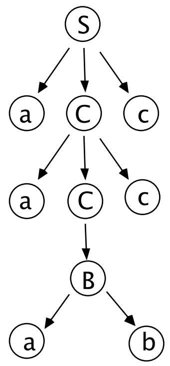
2. Ist Ihre Grammatik linear? Wenn nein, konstruieren Sie eine.
3. Konstruieren Sie eine Ableitung für das Wort $w = aaabcc$. Ist Ihre Ableitung eine Linksableitung? Eine Rechtsableitung?

   Lösung: Eine (Links-)Ableitung ist:

$$S \Longrightarrow aCc \Longrightarrow aaCcc \Longrightarrow aaBcc \Longrightarrow aaabcc$$

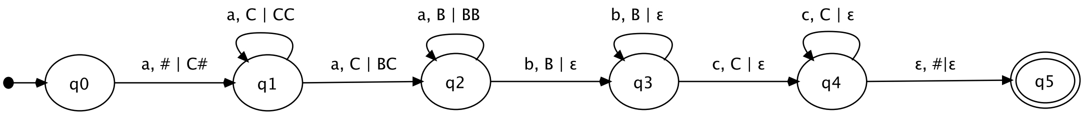
4. Konstruieren Sie einen Ableitungsbaum für $w = aaabcc$.

   Lösung:



5. Konstruieren Sie einen PDA A mit $L(A) = L$.

   Lösung: Der folgende PDA für $L = \{a^{k+l}b^k c^l \mid k, l \geq 1\}$ merkt sich zunächst die Anzahl $l > 0$ im Zustand q_1 und danach die Anzahl $k > 0$ im Zustand q_2. Hierbei ist wichtig, dass in q_1 im richtigen Moment geraten wird, von k auf l zu wechseln, d.h. von q_1 nicht mehr wieder nach q_1, sondern nach q_2 zu wechseln. Im Zustand q_3 wird dann der Keller wieder abgebaut und zwar um genau die k-fach vorhandenen B. Hierbei wird jeweils ein b gelesen. Im Zustand q_4 wird dann der Keller wieder abgebaut und zwar um genau die l-fach vorhandenen C. Hierbei wird jeweils ein c gelesen. Genau dann, wenn der Keller komplett geleert wurde und das Kellerbodenzeichen $\#$ sichtbar wird, geht der PDA in den Endzustand q_5 über, wobei auch noch der Keller geleert wird. Wir haben somit eine Möglichkeit, jedes Wort aus L zu akzeptieren: $L \subseteq L(A)$.



Umgekehrt sehen wir sofort, dass jedes akzeptierbare Wort aus $\{a\}\{a\}^+\{b\}^+\{c\}^+$ sein muss, da wir entlang eines Pfades im Zustanddiagramm, der uns von q_0 zu q_5 führt, nur solche Eingaben lesen können. Wird ein Wort $w = a^i b^j c^k$ akzeptiert gilt also $i > 1, j > 0, k > 0$. Wir lesen weiterhin ab, dass wir für jedes gelesene a ein Symbol auf den Keller hinzufügen. Da wir den Übergang von q_4 nach q_5 nur machen können, wenn wir das Kellerbodenzeichen lesen, muss also $|w|_a = |w|_b + |w|_c$ gelten, womit folgt, dass $i = j + k$ gilt, d.h. $w \in L$. Also $L(A) \subseteq L$.

6. Geben Sie eine Erfolgsrechung für $w = aaabcc$ an.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, aaabcc, \perp)\\
&\vdash (q_1, aabcc, C\perp)\\
&\vdash (q_1, abcc, CC\perp)\\
&\vdash (q_2, bcc, BCC\perp)\\
&\vdash (q_3, cc, CC\perp)\\
&\vdash (q_4, c, C\perp)\\
&\vdash (q_4, \epsilon, \perp)\\
&\vdash (q_5, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

Präsenzaufgabe 4.2:

1. Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$ mit den Produktionen:

$$S \to aSb \mid ab$$

Beweisen Sie, (a) $L(G) \subseteq M := \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ und (b) $M \subseteq L(G)$.

Lösung:

(a) $L(G) \subseteq M := \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Wir zeigen per Induktion über die Länge n der Ableitung, dass für jedes n gilt: Wenn $S \overset{n}{\Longrightarrow} u$ gilt, dann gilt entweder $u = a^n S b^n$ oder $u = a^n b^n$.

- Ind.Anfang $n = 1$. Die einzig möglichen Ableitungen der Länge $n = 1$ sind $S \Longrightarrow aSb$ und $S \Longrightarrow ab$. Also hat u die Form $u = a^1 S b^1 \in M$ bzw. $u = a^1 b^1 \in M$ und die Behauptung gilt.
- Ind.Annahme: Die Behauptung gelte für alle Ableitungen Länge kleiner oder gleich n.
- Ind.Schritt: Eine Ableitung der Länge $n+1$ hat die Form $S \overset{n}{\Longrightarrow} u \Longrightarrow v$. Nach IA gilt entweder $u = a^n S b^n$ oder $u = a^n b^n$. Da u noch eine Ableitung erlaubt, muss $u = a^n S b^n$ sein.
  Beide Produktionen sind anwendbar: $u = a^n S b^n \Longrightarrow a^n(aSb)b^n = a^{n+1} S b^{n+1}$ bzw. $u = a^n S b^n \Longrightarrow a^n(ab)b^n = a^{n+1} b^{n+1}$. Dies ist die Behauptung für $n+1$.

Somit gilt die Ind.Behauptung für alle n.
Also gilt: Wenn ein Terminalwort $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$ ableitbar ist, dann existiert ein n, so dass $S \overset{n}{\Longrightarrow} w$ gilt und dann ist mit obiger Aussage $w = a^n b^n$ und damit in M.

(b) $M \subseteq L(G)$

Sei $w = a^n b^n \in M$ für ein beliebiges, aber festes $n \geq 1$. Dann kann w folgendermaßen abgeleitet werden:

$$\underbrace{S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a^{n-1}Sb^{n-1}}_{(n-1)\text{-mal}} \Longrightarrow a^n b^n$$

Dieses Argument ist unmittelbar einleuchtend, kann aber noch durch Induktion formalisiert werden.

2. Reduzieren Sie mit dem Verfahren der Vorlesung die folgende Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$.

$$\begin{aligned}
&S \to Ca \\
&A \to bA \mid B \\
&B \to aBb \\
&C \to Cac \mid CC \mid c \\
&D \to A \mid BA \mid a
\end{aligned}$$

Lösung:

(a) Produktive Symbole:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \Sigma \\
M_1 &= M_0 \cup \{C, D\} \\
M_2 &= M_1 \cup \{S\} \\
M_3 &= M_2
\end{aligned}$$

Grammatik $G' = (\Sigma, N', P', S)$ mit $N' = \{S, C, D\}$ und:

$$\begin{aligned}
&S \to Ca \\
&C \to Cac \mid CC \mid c \\
&D \to a
\end{aligned}$$

(b) Erreichbare Symbole:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \{S\} \\
M_1 &= M_0 \cup \{C\} \\
M_2 &= M_1
\end{aligned}$$

Grammatik $G'' = (\Sigma, N'', P', S)$ mit $N' = \{S, C\}$ und:

$$\begin{aligned}
&S \to Ca \\
&C \to Cac \mid CC \mid c
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.3: KFG, PDA.

von
6

1. Ein Palindrom ist ein Wort w, das vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist: $w = w^{rev}$. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten A mit

$$L(A) = L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom }\}$$

   Argumentieren Sie schlüssig, warum Ihr Kellerautomat A alle Worte aus L akzeptiert und keine weiteren.

2. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$, wobei gilt:

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \begin{array}{l}\text{auf einen a-Block folgen beliebig viele b's} \\ \text{und dann genausoviele c's wie zuvor a's}\}\end{array}$$

   Beweisen Sie die Gleichheit $L(G) = L$, indem Sie zwei Mengeninklusionen zeigen.

Übungsaufgabe 4.4: Konstruieren Sie (mit dem Verfahren der Vorlesung) zu folgender Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$ die Chomsky-Normalform!

von
6

$$\begin{array}{l} S \to BCD \mid a \\ A \to aBD \mid aDb \mid CSSD \\ B \to bB \mid aC \mid bD \\ C \to Cc \mid \epsilon \\ D \to \epsilon \mid AC \end{array}$$

Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Darstellung.

Bonusaufgabe 4.5:

von
6

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L = \{a^k b^l \mid l = k^2, k > 0\}$ nicht kontextfrei ist.

2. Zeigen Sie, dass es keine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L$ geben kann, wobei:

$$L := \{w = \{0,1\}^* \mid \; w \text{ enthält genausoviele 0 wie 1}\}$$