$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \qquad \Omega = (0,3) \qquad \text{warunki brzegowe}: \begin{cases} \phi(0) = 5 \\ \phi(3) = 4 \end{cases}$$

obustronny warunek Dirichleta

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \\ 0 & x \in (2,3] \end{cases}$$

Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego:

- mnożymy obustronnie równanie przez funkcję testową v:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} v(x) = 4\pi G\rho(x) v(x)$$

- całkujemy obustronnie na dziedzinie Ω:

$$\int_0^3 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} v(x)\, dx = 4\pi G \int_0^3 \rho(x) v(x)\, dx$$

- całkujemy przez części:

$$\phi'(x) v(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 \phi'(x) v'(x)\, dx = 4\pi G \left(\cancel{\int_0^1 0 \cdot v(x) dx} + \int_1^2 v(x) dx + \cancel{\int_2^3 0 \cdot v(x) dx} \right)$$

- funkcje testowe v zerują się na brzegach dziedziny, więc zostaje:

$$\underbrace{-\int_0^3 \phi'(x) v'(x)\, dx}_{B(\phi, v)} = \underbrace{4\pi G \int_1^2 v(x)\, dx}_{L(v)}$$

- szukamy rozwiązania w formie $\phi = w + u$, gdzie:

$$\underbrace{\phi(0) = 5 \;\wedge\; \phi(3) = 4 \;\wedge\; w(0) = 0 \;\wedge\; w(3) = 0}$$

przyjmujemy więc, że $u(x) = 5 - \frac{1}{3}x$

$u'(x) = -\frac{1}{3}$

- korzystamy z liniowości operatora całkowania:

$$B(\phi, v) = B(w+u, v) = B(w, v) + B(u, v)$$

$$\overline{L}(v) = B(w, v)$$

$$\Rightarrow \overline{L}(v) = L(v) - B(u, v)$$

Funkcje testowe

n - liczba przedziałów h - długość przedziału

Biorąc pod uwagę, że został określony obustronny warunek Dirichleta, elementy brzegowe mogą zostać pominięte

$$V_h = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle$$

$$e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & x \in (hi, h(i+1)] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \qquad e_i' = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{1}{h} & x \in (hi, h(i+1)] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Reprezentacja macierzowa równania

Otrzymujemy następującą reprezentację macierzową naszego układu równań:

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \cdots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}(e_1) \\ \bar{L}(e_2) \\ \vdots \\ \bar{L}(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Uproszczenie $B(u,v)$

Zauważamy, że $\forall_{i,j \in [1,n-1]}\ B(e_i,e_i) = B(e_j,e_j)$ oraz

$\forall_{i,j \in [1,n-1] : |i-j|>1}\ B(e_i,e_j) = 0$ oraz

$\forall_{i,j \in [1,n-1]}\ B(e_i,e_j) = B(e_j,e_i)$