un obbd (Ordered binary decision-diagram) è una rappresentazione di una funzione booleana sotto forma di DAG radicato.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

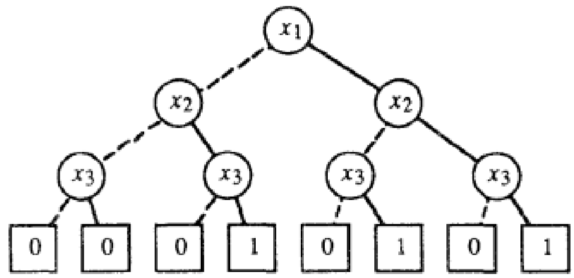

Figure 1: Tavola di verità e albero di decisione di una funzione booleana, archi tratteggiati indicano il caso in cui la variabile sia 0, archi continui indicano il caso in cui la variabile sia 1

Nel caso particolare della figura 1 il grafo in esempio è anche un albero. Ogni vertice non terminale v è etichettato con una variabile $var(v)$ (un parametro della funzione) e ha due figli, $lo(v)$ (arco tratteggiato) che corrisponde al caso in cui il valore di $var(v)$ è 0 e $hi(v)$ (arco continuo) che corrisponde al caso in cui il valore di $var(v)$ è 1, i nodi terminali sono etichettati con 0 o 1. Il valore della funzione, dato un assegnamento delle variabili, è dato dalla foglia del percorso radice-foglia ottenuto percorrendo gli archi secondo i valori assegnati alle variabili. Inoltre le variabili sono ordinate in base a "quale appare prima", nell'esempio della figura 1 l'ordine è $x_1 < x_2 < x_3$. Su un obdd si possono compiere 3 operazioni che non alterano la funzione da esso rappresentata:

rimozione dei nodi duplicati terminali: si eliminano tutti i nodi terminali tranne uno per ogni label e si indirizzano tutti gli archi entranti dei nodi eliminati verso quello rimasto con la stessa label (quindi si avranno due nodi terminali: 1 e 0)

rimozione dei nodi duplicati interni: se esistono due nodi interni v e u con $var(v) = var(u)$, $lo(v) = lo(u)$ e $hi(v) = hi(u)$ allora si elimina uno dei due e si indirizzano tutti i suoi archi entranti verso quello rimanente.

rimozione dei test ridondanti: se esiste un nodo v con $lo(v) = hi(v)$ allora si elimina il nodo v e si indirizzano tutti i suoi archi entranti verso $lo(v)$, (se i due archi uscenti di v portano entrambi verso lo stesso nodo allora controllare il valore di v è inutile)

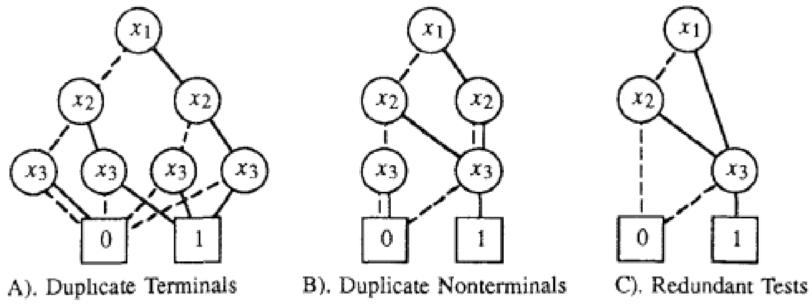

Figure 2: riduzioni applicate all'albero della figura 1

Con $f|_{x_i \leftarrow k}$ indichiamo una resitrizione della funzione f in cui la variabile x_i assume per forza valore $k \in \{0,1\}$, quindi su una funzione $f(x_1, x_2, x_3) \quad f|_{x_1 \leftarrow 0} = f(0, x_2, x_3)$. Inoltre indichiamo con $\cdot$ l'operazione AND, con $+$ l'operazione OR e con $\bar{x}$ la negazione di x Ora possiamo riscrivere una funzione come: $f = (\bar{x} \cdot f|_{x \leftarrow 0}) + (x \cdot f|_{x \leftarrow 1})$, questa scrittura viene chiamata espansione di shannon.

Tramite l'operazione Apply è possibile creare una nuova funzione $f\langle op \rangle g$ dati come argomenti due funzioni f e g(con lo stesso ordine di variabili) e un operatore booleano binario $\langle op \rangle$ (OR, AND, ...). Possiamo sfruttare l'espansione di shannon per riscrivere la funzione: $f\langle op \rangle g = \bar{x} \cdot (f\langle op \rangle g|_{x \leftarrow 0}) + x \cdot (f\langle op \rangle g|_{x \leftarrow 1}) = \bar{x} \cdot (f|_{x \leftarrow 0} \langle op \rangle g|_{x \leftarrow 0}) + x \cdot (f|_{x \leftarrow 1} \langle op \rangle g|_{x \leftarrow 1})$ Da notare che se x è la variabile della radice r di un grafo che rappresenta la funzione f allora la funzione $f|_{x \leftarrow 0}$ è rappresentata dal sottografo radicato in $lo(r)$ analogamente $f|_{x \leftarrow 1}$ è rappresentata dal sottografo radicato in $hi(r)$ quindi avendo due grafi che hanno la stessa variabile come radice possiamo unirli in questo modo

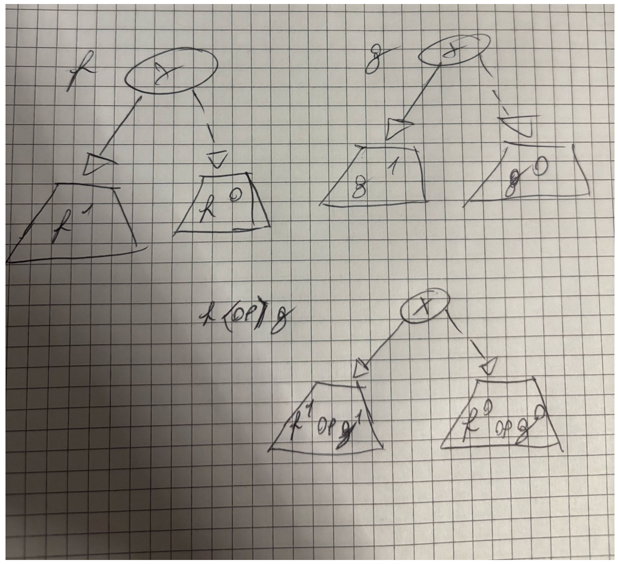

Figure 3: apply con stessa variabile

quindi possiamo scrivere $f\langle op\rangle g = \bar{x}\cdot(f^0\langle op\rangle g^0) + x\cdot(f^1\langle op\rangle g^1)$ procedere ricorsivamente sulle funzioni $(f^0\langle op\rangle g^0)$ e $(f^1\langle op\rangle g^1)$. Intuitivamente è come se il + nell'espansione di shannon della funzione $f\langle op\rangle g$ fosse il nodo decisionale del nuovo obdd.

Se invece le due radici hanno variabili diverse si suppone che una delle due venga prima dell'altra nell'ordine, ad esempio assumiamo che x venga prima di y.

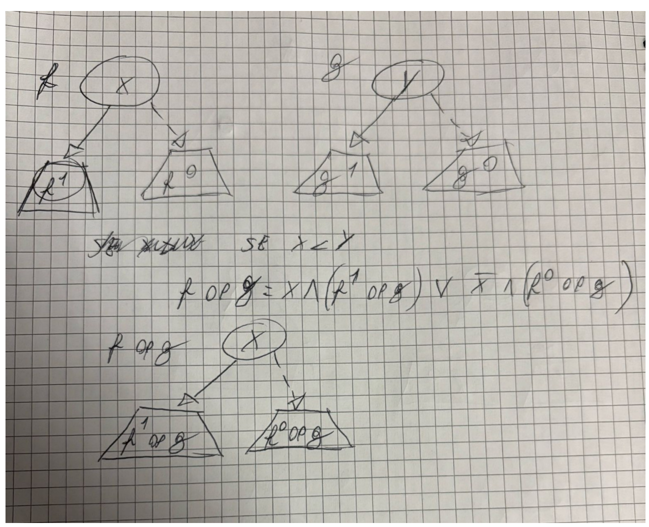

Figure 4: apply con variabili diverse

anche in questo caso si procede ricorsivamente sulle funzioni $(f^0 \langle op \rangle g)$ e $(f^1 \langle op \rangle g)$