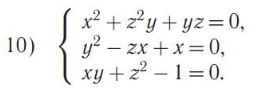
Комп’ютерна алгебра

Самостійна робота №2

Сукованченко Дмитро, ІПС-41

Варіант 10



1. Побудувати базис Гребнера для системи рівнянь, використовуючи алгоритм Бухбергера

Step 1 (left combinations 2):

G: len(G)=3

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: -x\*z + x + y\*\*2

spoly(f, g): -x\*\*2 - x\*y\*\*2 - y\*z\*\*3 - y\*z\*\*2

remainder(spoly, G): -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y (add it to G)

Step 2 (left combinations 4):

G: len(G)=4

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: x\*y + z\*\*2 - 1

spoly(f, g): -x\*z\*\*2 + x + y\*\*2\*z\*\*2 + y\*\*2\*z

remainder(spoly, G): y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2 (add it to G)

Step 3 (left combinations 7):

G: len(G)=5

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

f: -x\*z + x + y\*\*2

g: x\*y + z\*\*2 - 1

spoly(f, g): x\*y + y\*\*3 + z\*\*3 - z

remainder(spoly, G): y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1 (add it to G)

Step 4 (left combinations 11):

G: len(G)=6

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

spoly(f, g): y\*(-x\*\*2\*z\*\*2 - x\*\*2\*z + x\*\*2 - y\*z\*\*5 - y\*z\*\*4)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 5 (left combinations 10):

G: len(G)=6

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

f: -x\*z + x + y\*\*2

g: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

spoly(f, g): y\*(x\*z - x - y\*\*2\*z\*\*2)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 6 (left combinations 9):

G: len(G)=6

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

f: x\*y + z\*\*2 - 1

g: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

spoly(f, g): -x\*y\*z\*\*2 - x\*y\*z + x\*y - z\*\*5 + z\*\*3

remainder(spoly, G): -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1 (add it to G)

Step 7 (left combinations 14):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

spoly(f, g): y\*\*2\*(x\*\*2 + y\*z\*\*4 + y\*z\*\*3)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 8 (left combinations 13):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -x\*z + x + y\*\*2

g: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

spoly(f, g): y\*\*2\*(x\*z - x + y\*\*2\*z)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 9 (left combinations 12):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*y + z\*\*2 - 1

g: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

spoly(f, g): y\*(x\*y + z\*\*4 - z\*\*2)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 10 (left combinations 11):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

g: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

spoly(f, g): y\*\*2\*(z\*\*2 - 1)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 11 (left combinations 10):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): x\*\*2\*(-y\*\*3 - z\*\*3 + z\*\*2 + z - 1) + y\*\*3\*(x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 12 (left combinations 9):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -x\*z + x + y\*\*2

g: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): x\*y\*\*3 + x\*z\*\*4 - x\*z\*\*3 - x\*z\*\*2 + x\*z + y\*\*5

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 13 (left combinations 8):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*y + z\*\*2 - 1

g: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): -x\*z\*\*3 + x\*z\*\*2 + x\*z - x + y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 14 (left combinations 7):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

g: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): y\*\*3\*z\*\*2 + y\*\*3\*z - y\*\*3 + z\*\*6 - z\*\*5 - z\*\*4 + z\*\*3

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 15 (left combinations 6):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

g: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): -y\*\*3 - z\*\*5 + z\*\*4 + z\*\*3 - z\*\*2

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 16 (left combinations 5):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): x\*\*2\*(z\*\*5 - z\*\*4 - 2\*z\*\*3 + 2\*z\*\*2 + z - 1) - z\*\*5\*(x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 17 (left combinations 4):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -x\*z + x + y\*\*2

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): 2\*x\*z\*\*3 - 2\*x\*z\*\*2 - x\*z + x - y\*\*2\*z\*\*4

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 18 (left combinations 3):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: x\*y + z\*\*2 - 1

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): x\*y\*(z\*\*5 - z\*\*4 - 2\*z\*\*3 + 2\*z\*\*2 + z - 1) + z\*\*5\*(-x\*y - z\*\*2 + 1)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 19 (left combinations 2):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: -y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): y\*(z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 20 (left combinations 1):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): y\*\*2\*(-z\*\*4 - z\*\*3 + 2\*z\*\*2 + z - 1)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Step 21 (left combinations 0):

G: len(G)=7

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

f: y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1

g: -z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

spoly(f, g): y\*\*3\*(z\*\*5 - z\*\*4 - 2\*z\*\*3 + 2\*z\*\*2 + z - 1) + z\*\*5\*(-y\*\*3 - z\*\*3 + z\*\*2 + z - 1)

remainder(spoly, G): 0 (ignore)

Отже, шуканий базис:

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

-x\*z + x + y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

-y\*z\*\*3 + y\*z\*\*2 + y\*z - y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

-z\*\*5 + z\*\*4 + 2\*z\*\*3 - 2\*z\*\*2 - z + 1

2. Побудувати редукований базис Гребнера отриманий з першого пункту

Для отримання редукованого базису, необхідно поділити кожен поліном на провідний коефіцієнт, а також відкинути поліноми, у яких провідний терм ділиться на один з провідних термів інших поліномів

Отриманий редукований базис:

x\*\*2 + y\*z\*\*2 + y\*z,

x\*z - x - y\*\*2,

x\*y + z\*\*2 - 1,

y\*z\*\*3 - y\*z\*\*2 - y\*z + y,

y\*\*2\*z\*\*2 - y\*\*2,

y\*\*3 + z\*\*3 - z\*\*2 - z + 1,

z\*\*5 - z\*\*4 - 2\*z\*\*3 + 2\*z\*\*2 + z - 1

Результат збігається з вбудований в функцією бібліотеки SymPy