

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, главы 9, 10].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) решение поставленной задачи; 4) анализ полученных результатов; 5) графический материал (если необходимо); 6) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 9.1-9.6 даны в **ПРИЛОЖЕНИИ 9.А**.

Фрагмент решения задачи 9.5 дан в **ПРИЛОЖЕНИИ 9.В**

Задача 9.1 Методом Ньютона найти минимум и максимум унимодальной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Предусмотреть подсчет числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности.

Задача 9.2. Указанным в индивидуальном варианте методом найти минимумы и максимумы функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Предусмотреть подсчет числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности.

Задача 9.3. Функция $x(t)$ задана неявно уравнением $F(x, t) = 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Построить график зависимости функции $x(t)$ на заданном отрезке $[t_1, t_2]$ и найти ее минимум и максимум с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Задача 9.4. Функция $f(x)$ представлена частичной суммой ряда $f(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$.

Построить график функции на заданном отрезке $[x_1, x_2]$ и найти ее минимумы и максимумы с указанной точностью ε .

Задача 9.5. Найти минимум функции 2-х переменных $f(x, y)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ на прямоугольнике $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать указанную в варианте функцию $f(x, y)$.
2. Построить графики функции и поверхностей уровня $f(x, y)$.
3. По графикам найти точки начального приближения к точкам экстремума.
4. Используя встроенные функции, найти экстремумы функции с заданной точностью (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 9.В**).

Задача 9.6. Указанным в индивидуальном варианте методом найти минимум квадратичной функции $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Для решения задачи одномерной минимизации использовать метод Ньютона. Построить график функции f . Предусмотреть подсчет числа итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9.А.

Схема вариантов к лабораторной работе 9

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	9.1.1, 9.2.1, 9.5.1, 9.6.1	11	9.1.11, 9.3.4, 9.5.11, 9.6.11	21	9.1.21, 9.4.7, 9.5.21, 9.6.21
2	9.1.2, 9.3.1, 9.5.2, 9.6.2	12	9.1.12, 9.4.4, 9.5.12, 9.6.12	22	9.1.22, 9.2.8, 9.5.22, 9.6.22
3	9.1.3, 9.4.1, 9.5.3, 9.6.3	13	9.1.13, 9.2.5, 9.5.13, 9.6.13	23	9.1.23, 9.3.8, 9.5.23, 9.6.23

4	9.1.4, 9.2.2, 9.5.4, 9.6.4	14	9.1.14, 9.3.5, 9.5.14, 9.6.14	24	9.1.24, 9.4.8, 9.5.24, 9.6.24
5	9.1.5, 9.3.2, 9.5.5, 9.6.5	15	9.1.15, 9.4.5, 9.5.15, 9.6.15	25	9.1.25, 9.2.9, 9.5.25, 9.6.25
6	9.1.6, 9.4.2, 9.5.6, 9.6.6	16	9.1.16, 9.2.6, 9.5.16, 9.6.16	26	9.1.26, 9.3.9, 9.5.26, 9.6.26
7	9.1.7, 9.2.3, 9.5.7, 9.6.7	17	9.1.17, 9.3.6, 9.5.17, 9.6.17	27	9.1.27, 9.4.9, 9.5.27, 9.6.27
8	9.1.8, 9.3.3, 9.5.8, 9.6.8	18	9.1.18, 9.4.6, 9.5.18, 9.6.18	28	9.1.28, 9.2.10, 9.5.28, 9.6.28
9	9.1.9, 9.4.3, 9.5.9, 9.6.9	19	9.1.19, 9.2.7, , 9.5.19, 9.6.19	29	9.1.29, 9.3.10, 9.5.29, 9.6.29
10	9.1.10, 9.2.4, 9.5.10, 9.6.10	20	9.1.20, 9.3.7, 9.5.20, 9.6.20	30	9.1.30, 9.4.10, 9.5.30, 9.6.30

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 9

Таблица к задаче 9.1

№	f(x)	a	b	№	f(x)	a	b
9.1.1	$x^2 + 2e^x$	-2	2	9.1.16	$3\cos^2 x - \sqrt{x}$	0	3
9.1.2	$e^x \sin x$	0	4	9.1.17	$4\sqrt{x} - \operatorname{tg} x$	0	1.5
9.1.3	$2x + e^{4-x}$	1	7	9.1.18	$\sin^3 x + \cos^2 x$	0	1.5
9.1.4	$e^x - 2\sin x$	0	2	9.1.19	$x^2 \cos x$	0	2
9.1.5	$x^2 - 2^x$	0	2	9.1.20	$4^x - 8x$	0	2
9.1.6	$2^x - \ln x$	0.1	3	9.1.21	$x^5 - 5^x$	0.5	1.5
9.1.7	$x^3 - e^x$	0	3	9.1.22	$\ln(x) - 5\sin(x)$	1	2
9.1.8	$\sin x - 2\cos x$	1	4	9.1.23	$x^3 - e^x$	-1	0
9.1.9	$x^2 - 2\sin x$	0	3	9.1.24	$\sin x + e^{-x^2}$	-1	2
9.1.10	$e^x \cos x$	0	1.5	9.1.25	$\sin^2 x - \sqrt{x}$	0	1
9.1.11	$-3x + e^{x-1}$	0	4	9.1.26	$2^x \cos x$	-2	2
9.1.12	$x^3 - 3^x$	2	3.5	9.1.27	$e^{x-4} - 4x$	3	8
9.1.13	$e^x - \ln x$	0.1	2	9.1.28	$\ln(x) - 4^x$	0.1	1
9.1.14	$3\cos x - \sin x$	0	5	9.1.29	$2\sin x - 3\cos x$	-1	1
9.1.15	$x^4 - e^x$	0	2	9.1.30	$x^6 - e^x$	0	1

Таблица к задаче 9.2

№	f(t)	x ₁	x ₂	Метод минимизации
9.2.1	$\sin t^2$	0	2	Золотого сечения
9.2.2	$(t+1)\cos t$	0	4	Деления отрезка пополам
9.2.3	$\cos e^t$	1	2	Фибоначчи
9.2.4	$(t^2 - t - 1)/(t^2 + t + 5)$	-1	2	Золотого сечения
9.2.5	$(\sin t)/(t^2 + 1)$	1	4	Деления отрезка пополам
9.2.6	$(t^2 - 3)/(t^2 + 2)$	-1	4	Фибоначчи
9.2.7	$(t^2 - 2)/(e^t)$	0	4	Золотого сечения
9.2.8	$\sin e^t$	0	1.5	Деления отрезка пополам
9.2.9	$t \sin t$	0	5	Фибоначчи

9.2.10	$\cos t^2$	0	2	Золотого сечения
--------	------------	---	---	------------------

Таблица к задаче 9.3

№	$F(x,t)$	t_1	t_2	x_1	x_2	Метод минимизации
9.3.1	$\cos x - x + \sin t$	-1	4	0	2	Золотого сечения
9.3.2	$x^2 + 3\cos t \ln x - t$	2	5	1	3	Деления отрезка пополам
9.3.3	$e^{2x+t} - e^{t^2} - 2\cos x$	0	2	0	2	Фибоначчи

Окончание таблицы к задаче 9.3

9.3.4	$\cos(x^2) - t^2 + x \sin t$	0	1	1	1.5	Золотого сечения
9.3.5	$e^{x+t} - e^{t^2} - 3\cos x$	0	2	0	2	Деления отрезка пополам
9.3.6	$x^3 + x + 6\sin t - t$	0	3	-2	-0.5	Фибоначчи
9.3.7	$x^2 + 5t \sin t - t^2$	4	7	2	8	Золотого сечения
9.3.8	$\cos(x) - (x-2)\sin(xt)$	0	2	0	2	Деления отрезка пополам
9.3.9	$1 - x^2 - (x-4)\sin(xt)$	0	2	0	2	Фибоначчи
9.3.10	$x^4 - 10\sin t + 5x$	0	2	0	2	Золотого сечения

Таблица к задаче 9.4

№	$u_n(x)$	x_1	x_2	n	ε	Метод минимизации
9.4.1	$(-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$	-1	3	300	0.001	Золотого сечения
9.4.2	$(-1)^n \frac{\cos(2nx)}{n^3}$	0	3	250	0.0001	Деления отрезка пополам
9.4.3	$(-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2 - 2.5^2}$	0	3	200	0.01	Фибоначчи
9.4.4	$(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^2 - 1.5^2}$	0	6	350	0.001	Золотого сечения
9.4.5	$\frac{\sin(3nx)}{n^3 - 0.5}$	0	3	300	0.0001	Деления отрезка пополам
9.4.6	$\frac{\sin(2nx)}{n^{4/3}}$	0	4	200	0.001	Фибоначчи
9.4.7	$(-1)^n \frac{\cos(2nx)}{n^{5/2}}$	0	4	350	0.0001	Золотого сечения
9.4.8	$\frac{\sin(2nx)}{n^3 - 0.4^2}$	0	4	250	0.001	Деления отрезка пополам
9.4.9	$(-1)^n \frac{\sin(3nx)}{n^2}$	0	2	200	0.001	Фибоначчи
9.4.10	$(-1)^n \frac{10\sin(nx)}{n^{3/2}}$	0	8	300	0.0001	Золотого сечения

Таблица к задаче 9.5

№	$f(x,y)$	x_1	x_2	y_1	y_2
9.5.1	$x^2 + 2y^2 - 4x - 4\sin y$	-2	3	-2	4
9.5.2	$x^4 + 3y^2 + \sin y \cdot e^{-x}$	-1	1	-0.5	0.5
9.5.3	$x^2 + 2y^2 + 4\sin x \cos(y-1)$	-2	0	0	2

9.5.4	$x^2 + 2y^2 + \sin x - \cos(y + 5)$	-2	2	-2	2
9.5.5	$x^2 + y^2 + xe^{\sin y}$	-2	0	0	2

Окончание таблицы к задаче 9.5

9.5.6	$4x^2 + y^2 + 3\sin x - \cos(y + 1)$	-2	0	-1	1
9.5.7	$3x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$	-2	2	-2	2
9.5.8	$x^2 + 2y^2 + e^x \cos(y - 1)$	-2	1	-1	1
9.5.9	$x^2 + 3y^2 - 7\sin x - y$	-2	4	-4	4
9.5.10	$x^2 + y^2 + x + e^{-y}$	-2	1	-2	1
9.5.11	$x^2 + 3y^2 + ye^{\sin x}$	-1	1	-2	1
9.5.12	$x^2 + 4y^2 - 3\sin(x^2 + e^{-y})$	0	2	-2	2
9.5.13	$2x^2 + y^2 - \cos(x - 1 + y)$	0	2	-2	2
9.5.14	$3x^2 + 2y^4 + y \cos(e^{2x})$	-1	1	-1	1
9.5.15	$2x^2 + y^2 + \cos(x + y - 2)$	-2	2	-2	2
9.5.16	$x^2 + 2y^2 - 4\sin x - \sin y$	-2	4	-2	4
9.5.17	$2x^2 + y^4 + x \cos(e^y)$	-1	1	-1	1
9.5.18	$6x^2 + y^2 + 3x + \sin(x + y)$	-2	2	-2	2
9.5.19	$x^4 + 3y^2 - 2xy - \sin x$	-2	2	-2	2
9.5.20	$x^4 + 3y^2 + y + e^{-x}$	-1	1	-1	1
9.5.21	$x^2 + 3y^2 + \sin(x - y + 3)$	-2	2	-2	2
9.5.22	$x^2 + 2y^2 - 3\sin x - xy$	-2	2	-2	2
9.5.23	$2x^2 + y^2 + (x + y)e^{\cos x}$	-2	0	-2	0
9.5.24	$5x^2 + y^2 + 3x \cos(2y - x)$	-1	1	-1	1
9.5.25	$2x^2 + y^2 - 3x + e^{-y}$	0	2	0	2
9.5.26	$x^2 + 2y^2 - 7\sin x + \cos(x + 2)$	1	3	0	2
9.5.27	$x^2 + 3y^2 - 5\sin x + xy$	-2	2	-2	2
9.5.28	$x^2 + 3y^2 + \cos(x + y - 5)$	-2	2	-2	2
9.5.29	$5x^2 + y^2 + e^{x+1} \sin y$	-2	2	-2	2
9.5.30	$5x^2 + 2y^2 + ye^{\sin 3x}$	-1	1	-1	1

Таблица к задаче 9.6

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}	$2a_{13}$	$2a_{23}$	Метод
9.6.1	2.5	1	2	-13	-4.5	Покоординатный спуск
9.6.2	3	1	1	-5	-10.5	Наискорейший спуск
9.6.3	3	1	1	-5.5	-6.5	Сопряженных направлений
9.6.4	4	1	0.5	-4.5	-3.5	Сопряженных градиентов
9.6.5	4	0.5	0.5	-9.3	-3.5	Покоординатный спуск
9.6.6	2.5	1	2	-5	-10.5	Наискорейший спуск

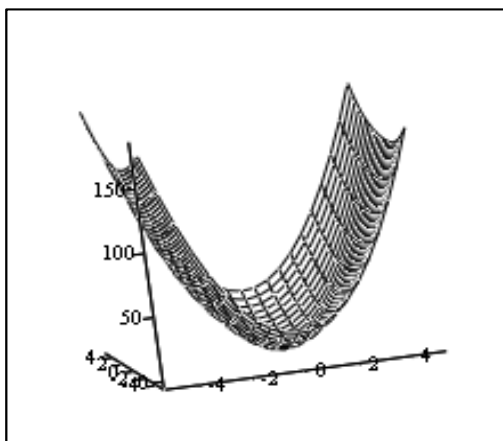
9.6.7	1	0.5	2.5	-2	-10.5	Сопряженных направлений
9.6.8	1	0.5	2.5	-3.5	-6.5	Сопряженных градиентов
9.6.9	2.5	-1	2	-12	0.5	Покоординатный спуск
9.6.10	2.5	-1	2	0	-9.5	Наискорейший спуск
9.6.11	3	-1	1	-6.5	-3.5	Сопряженных направлений
9.6.12	3	-1	1	-1.5	-2.5	Сопряженных градиентов
9.6.13	4	-0.5	0.5	-6.5	-2.5	Покоординатный спуск
9.6.14	4	-0.5	0.5	-2.2	-1.8	Наискорейший спуск
9.6.15	0.5	-0.5	2.5	0	-9.5	Сопряженных направлений
9.6.16	0.5	-0.5	2.5	-2.5	-3.5	Сопряженных градиентов
9.6.17	2.5	1	2	12	0.5	Покоординатный спуск
9.6.18	2.5	1	2	0	-10	Наискорейший спуск
9.6.19	3	1	1	6.5	-2.5	Сопряженных направлений
9.6.20	3	1	1	-1.5	-2.5	Сопряженных градиентов
9.6.21	4	0.5	0.5	6.5	-2.5	Покоординатный спуск
9.6.22	4	0.5	0.5	2.2	-1.8	Наискорейший спуск
9.6.23	0.5	0.5	2.5	0	-9.5	Сопряженных направлений
9.6.24	0.5	0.5	2.5	2.5	-3.5	Сопряженных градиентов
9.6.25	2.5	-1.0	2.0	7.0	4.0	Покоординатный спуск
9.6.26	3.5	1.5	0.5	-1.5	-2.5	Наискорейший спуск
9.6.27	4.5	-1.5	2	3.5	7	Сопряженных направлений
9.6.28	0.5	-0.5	3.5	-2.5	5	Сопряженных градиентов
9.6.29	1.5	1	2.5	4	-7	Покоординатный спуск
9.6.30	0.5	0.5	2	2	-2	Наискорейший спуск

ПРИЛОЖЕНИЕ 9.В**Фрагмент решения задачи 9.5.0**

Задание функции 2-х переменных:

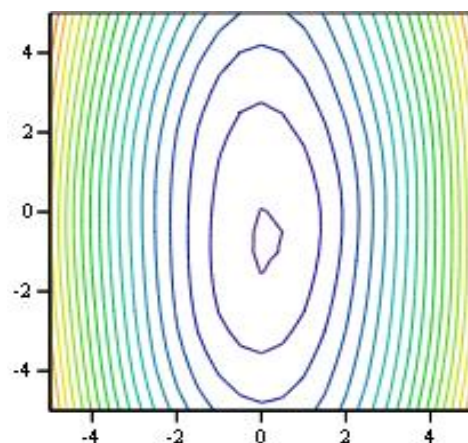
$$f(x, y) := 6 \cdot (x - 0.3)^2 + (y + 0.4)^2 + 3 \cdot (x - 0.3) + \sin(y - x)$$

График функции



f

Поверхности уровня функции



f

Задание начального приближения для поиска минимума
функции 2-х переменных

$$x := 0 \quad y := 0$$

Точность для блока Given Minimize

$$\text{TOL} := 10^{-6}$$

Нахождение точки минимума функции 2-х переменных с помощью встроенного блока
Given Minimize

Given

$$P := \text{Minimize}(f, x, y)$$

Полученное приближенное решение

$$P = \begin{pmatrix} 0.10565 \\ -0.733899 \end{pmatrix}$$