ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 14].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) решение поставленной задачи; 4) анализ полученных результатов; 5) графический материал (если необходимо); 6) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 7.1-7.7 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.А.*

Фрагменты решения задач 7.1 и 7.2 в пакете Mathcad даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.В.*

Задача 7.1. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \qquad (1)$$
$$y(t_0) = y_0$$

и оценить погрешность решения задачи.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать исходные данные: функцию *f* правой части, начальное значение y_0.

2. Написать функцию **eyler**, реализующую метод Эйлера, и с помощью этой функции найти приближенное решение задачи Коши с шагом h=0.1 по явному методу Эйлера.

3. Написать функцию **rkfixed,** реализующую метод Рунге-Кутты, и с ее помощью найти приближенное решение задачи Коши с шагом h=0.1 по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности.

4. Найти решение задачи Коши аналитически.

5. Построить таблицы значений приближенных и точного решений. На одном чертеже построить графики приближенных и точного решений.

6. Оценить погрешность приближенных решений двумя способами:

a) по формуле $\varepsilon = \max\limits_{0 \le i \le N} | y(t_i) - y_i |$; здесь $y(t_i)$ и y_i - значения точного и приближенного решений в узлах сетки t_i, $i=1,..N$;

b) по правилу Рунге (по правилу двойного пересчета) (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 7.С*).

7. Выяснить, при каком значении шага $h=h^*$ решение, полученное по методу Эйлера, будет иметь такую же погрешность (см. п. 6а), как решение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты с шагом h=0.1.

УКАЗАНИЕ. В п. 7 рекомендуется провести серию вычислений решения по методу Эйлера, дробя шаг h пополам.

Задача 7.2. Задача Коши для ОДУ 2 порядка

$$mx'' + Hx' + kx = f(t)\ , \ t \in [0, T],$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = v_0$$

описывает движение груза массы *m*, подвешенного к концу пружины. Здесь *x(t)* – смещение груза от положения равновесия, *H* – константа, характеризующая силу сопротивления среды, *k* –коэффициент упругости пружины, *f(t)* – внешняя сила. Начальные условия: x_0 – смещение груза в начальный момент времени t=0, v_0 – скорость груза в начальный момент времени. Промоделировать движение груза на временном отрезке $[0, T]$ при заданных в индивидуальном варианте трех наборах (I, II, III) значений параметров задачи. Для каждого набора по найденной таблице (или графику) решения задачи определить максимальное и минимальное значения функции *x(t)* и моменты времени, в которые эти значения достигаются. Предложить свой вариант задания параметров, при которых характер колебаний груза существенно отличается от рассмотренного ранее.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Заменить исходную задачу эквивалентной задачей Коши для системы ОДУ 1 порядка:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \frac{f(t) - Hx_2 - kx_1}{m} \qquad (2)$$
$$x_1(0) = x_0$$
$$x_2(0) = v_0$$

2. Для каждого варианта выбора параметров решить задачу (2) с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности с шагом h=0.1.
3. Для каждого варианта выбора параметров построить график найденного решения. Сравнить характер движения груза и дать интерпретацию полученного движения.
4. Для каждого варианта выбора параметров определить требуемые в задаче характеристики.

УКАЗАНИЕ. В п. 2 использовать функцию **rkfixed**, написанную для задачи 7.1.

Задача 7.3. Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1 порядка вида (1), используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности и метод, указанный в варианте, с шагами h и $h/2$. Для каждого метода оценить погрешность по правилу Рунге и вычислить уточненное решение (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 7.С*). Построить на одном чертеже графики приближенных решений (с шагом *h / 2*) и графики уточненных решений.

УКАЗАНИЕ. Для нахождения начальных значений, необходимых для начала вычислений многошаговых методов, использовать функцию **rkfixed**, написанную для задачи 7.1.

Задача 7.4. Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 3 порядка

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(t)$$
$$y(A) = b_1,\ \ y'(A) = b_2,\ y''(A) = b_3$$

на отрезке [*A*, *B*], используя метод Рунге-Кутты 4 с шагами h=0.1 и h=0.05 для систем ОДУ 1 порядка. Оценить погрешность по правилу Рунге. Построить график решения, найденного с шагом h=0.05.

УКАЗАНИЕ. Эквивалентная задача Коши для системы ОДУ 1 порядка приведена в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.С.*

Задача 7.5. Дана жесткая задача Коши вида (1). Найти решение задачи с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя функцию **eyler**, написанную для задачи 7.1, найти приближенное решение задачи Коши явным методом Эйлера с шагом h=0.15.
2. Найти решение задачи методом Рунге-Кутты 4 порядка точности с помощью функции **rkfixed**, написанной для задачи 7.1, с шагом h=0.15.
3. Построить графики приближенных и точного решений задачи.
4. Уменьшая шаг, найти решение задачи с заданной точностью ε каждым из методов. Сравнить значения шагов интегрирования, при которых достигается точность *ε*.
5. Объяснить полученные результаты.

Задача 7.6. Даны две задачи Коши для систем ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами на отрезке [0, 1]

$$Y'(t) = AY(t),\ \ Y(0) = Y_0,$$
$$Z'(t) = BZ(t),\ \ Z(0) = Z_0,$$

где *A* и *B* – заданные матрицы, Y_0, Z_0 - заданные векторы. Выяснить, какая из задач является жесткой.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу-функцию нахождения решения системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами по явному методу Эйлера. Используя составленную программу, решить обе задачи с шагом h=0.01. Определить, для какой из задач явный метод неустойчив при данном шаге h.
2. Используя встроенную функцию для нахождения собственных чисел матриц *A* и *B*, найти коэффициенты жесткости обеих систем. Какая из задач является жесткой?
3. Для жесткой задачи теоретически оценить шаг h^*, при котором явный метод Эйлера будет устойчив (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 7.С*).
4. Составить программу-функцию нахождения решения системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами по неявному методу Эйлера. Используя составленную программу, найти решение жесткой задачи с шагом h=0.01. Построить графики компонент полученного решения.
5. Для жесткой задачи экспериментально подобрать шаг h, при котором графики компонент решения, полученного по явному методу Эйлера, визуально совпадают с графиками компонент решения, полученного по неявному методу с шагом h=0.01. Сравнить найденное значение шага

с шагом h*. Объяснить различие поведения явного и неявного методов Эйлера при решении жесткой задачи.

Задача 7.7.[**] Решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1 порядка вида (1) с помощью метода, указанного в индивидуальном варианте, с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. При нахождении решения использовать алгоритм автоматического выбора шага.
УКАЗАНИЕ. В результате работы программы должен создаваться файл, содержащий вектор значений приближенного решения, а также значение шага h, при котором достигается заданная точность ε. Программа по запросу должна выдавать на экран таблицу значений найденного решения в фиксированной 21 точке отрезка $[t_0, T]$ или график найденного решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.А.

Схема вариантов к лабораторной работе 7

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	7.1.1, 7.2.1, 7.5.1	11	7.1.11, 7.2.4, 7.6.4	21	7.1.21, 7.2.8, 7.6.2
2	7.1.2, 7.3.1, 7.6.1	12	7.1.12, 7.2.5, 7.7.4	22	7.1.22, 7.3.8, 7.7.2
3	7.1.3, 7.4.1, 7.7.1	13	7.1.13, 7.3.5, 7.5.5	23	7.1.23, 7.4.8, 7.5.3
4	7.1.4, 7.2.2, 7.6.2	14	7.1.14, 7.4.5, 7.6.5	24	7.1.24, 7.2.9, 7.6.3
5	7.1.5, 7.3.2, 7.5.2	15	7.1.15, 7.2.6, 7.6.6	25	7.1.25, 7.3.9 7.7.3
6	7.1.6, 7.4.2, 7.7.2	16	7.1.16, 7.3.6, 7.7.6	26	7.1.26, 7.4.9, 7.6.4
7	7.1.7, 7.2.3, 7.5.3	17	7.1.17, 7.4.6, 7.5.1	27	7.1.27, 7.2.10, 7.5.4
8	7.1.8, 7.4.3, 7.6.3	18	7.1.18, 7.2.7, 7.6.1	28	7.1.28, 7.4.4, 7.7.4
9	7.1.9, 7.3.3, 7.7.3	19	7.1.19, 7.3.7, 7.7.1	29	7.1.29, 7.3.10, 7.5.5
10	7.1.10, 7.3.4, 7.5.4	20	7.1.20, 7.4.7, 7.5.2	30	7.1.30, 7.4.10, 7.6.5

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 7

Таблица к задаче 7.1

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*
7.1.1	$y/t + t^2$	1	2	0	7.1.16	$-y/t + 3t$	1	2	1
7.1.2	$yctgt + 2t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	0	7.1.17	$\frac{2ty}{1+t^2} + 1 + t^2$	1	2	3
7.1.3	$-y\cos t + \frac{\sin(2t)}{2}$	0	1	0	7.1.18	$\frac{2t-1}{t^2} y + 1$	1	2	1
7.1.4	$-ytgt + \cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+1$	0.5	7.1.19	$-\frac{3y}{t} + \frac{2}{t^3}$	1	2	1
7.1.5	$\frac{y}{t+2} + t^2 + 2t$	-1	0	1.5	7.1.20	$-2ty - 2t^3$	1	2	e^{-1}
7.1.6	$\frac{y}{t+1} + e^t(t+1)$	0	1	1	7.1.21	$y/t - 2/t^2$	1	1	1
7.1.7	$y/t + t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	1	7.1.22	$-ty - t^3$	0	1	3
7.1.8	$-y/t + \sin t$	π	$\pi+1$	$\frac{1}{\pi}$	7.1.23	$\frac{2}{t+1} y + e^t (t+1)^2$	0	1	1
7.1.9	$-\frac{y}{2t} + t^2$	1	2	1	7.1.24	$-2ty + te^{-t^2} \sin t$	0	1	1

---

* Задача 7.7 выполняется на <u>АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ</u>.

*

7.1.10	$-\frac{2t}{1+t^2}y+\frac{2t^2}{1+t^2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	7.1.25	$\frac{2y}{t+1}+(t+1)^3$	0	1	0.5
7.1.11	$\frac{2t-5}{t^2}y+5$	2	3	4	7.1.26	$y\cos t-\sin 2t$	0	1	3
7.1.12	$-y/t+\frac{t+1}{t}e^t$	1	2	e	7.1.27	$4ty-4t^3$	0	1	-0.5
7.1.13	$y/t-2\ln t/t$	1	2	1	7.1.28	$y/t-\ln t/t$	1	2	1
7.1.14	$y/t-12/t^3$	1	2	4	7.1.29	$3t^2y+t^2(1+t^3)/3$	0	1	0
7.1.15	$-2y/t+t^3$	1	2	$-\frac{5}{6}$	7.1.30	$y\cos t+\sin 2t$	0	1	-1

Таблица к задаче 7.2

N		*H*	*k*	*m*	*f(t)*	*x0*	*v0*	*T*
7.2.1	I II III	0.5 -“- -“-	1 -“- -“-	1 -“- -“-	0 $\sqrt{t}$ $\sqrt{t}$	10 0 -10	0 -“- -“-	20 -“- -“-
7.2.2	I II III	1 -“- -“-	1 -“- -“-	0.5 -“- -“-	tsin(t) 0 tsin(t)	0 -“- -“-	0 -10 -50	20 -“- -“-
7.2.3	I II III	1 -“- -“-	5 -“- -“-	0.75 -“- -“-	0 -“- -“-	-10 0 -10	0 10 10	5 -“- -“-
7.2.4	I II III	1 -“- -“-	1 -“- -“-	1 3 6	cos(t) -“- -“-	0 -“- -“-	0 -“- -“-	20 -“- -“-
7.2.5	I II III	0.5 -“- -“-	5 50 0.5	1 -“- -“-	0 -“- -“-	20 -“- -“-	0 -“- -“-	15 -“- -“-
7.2.6	I II III	1 -“- -“-	5 0.5 50	1 -“- -“-	0 -“- -“-	0 -“- -“-	1 -“- -“-	15 -“- -“-
7.2.7	I II III	1 0.1 10	1 -“- -“-	5 -“- -“-	-t -“- -“-	15 -“- -“-	0 -“- -“-	40 -“- -“-
7.2.8	I II III	1 -“- -“-	1 -“- -“-	0.5 5 50	sin(t) -“- -“-	0 -“- -“-	0 -“- -“-	20 -“- -“-
7.2.9	I II III	1 -“- -“-	1 -“- -“-	2 -“- -“-	-cos(0.5t) -cos(2t) 2	0 -“- -“-	0 -“- -“-	20 -“- -“-
7.2.10	I II III	0.5 -“- -“-	1 -“- -“-	0.5 -“- -“-	$-\sqrt{t}$ -“- $\sqrt{t}$	0 0 0	-10 10 10	15 -“- -“-

Таблица к задаче 7.3

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	Метод*
7.3.1	$-ty+(1+t)e^{-t}y^2$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
7.3.2	$-4t^3y+4(t^3+1)e^{-4t}y^2$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка

* Расчетные формулы методов даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.С.*

7.3.3	$-4t^3y+4(1-t^3)e^{4t}y^2$	0	1	-1	Модифицир. метод Эйлера 2 порядка
7.3.4	$y+2ty^2$	0	0.8	0.5	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.5	$-2ty+2t^3y^3$	0	1	$\sqrt{2}$	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
7.3.6	$-ty+(t-1)e^ty^2$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.7	$y+ty^2$	0	0.8	1	Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка
7.3.8	$-y+ty^2$	0	1	1	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
7.3.9	$-ty+0.5(t-1)e^ty^2$	0	1	2	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
7.3.10	$ytgt-(2/3)y^4\sin t$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка III

Таблица к задаче 7.4

N	*A*	*B*	b_1	b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	$f(t)$
7.4.1	0	1.5	1	2.5	6	1	-2	0.25	45.75	$e^{-2t}+3t+1$
7.4.2	0	1.5	1	2.0	4	1	-1.8	0.36	44.28	$e^{-2t}-1.5t+1$
7.4.3	0	1.5	1	2.5	6	1	-1.4	0.64	41.52	$\cos(2t)+3t+1$
7.4.4	0	2.0	1	1.5	2	1	-1.4	1.88	45.24	$\sin(2t)+2t-1$
7.4.5	0	1.5	1	3.0	10	1	-2.4	0.09	48.87	$\sin(t)-7t+2$
7.4.6	0	1.0	1	3.5	9	1	-1	8.8	29.00	$\cos(t)+5t+3$
7.4.7	0	1.5	1	2.8	5	1	-1.5	-1.25	53.375	$e^{-t}+\cos(2t)$
7.4.8	0	1.5	1.5	4.0	10	1	-4.6	3.94	34.28	$e^{-1.5t}+2\sin(3t)$
7.4.9	0	1.5	0	2.5	8	1	-4.1	0.64	42.85	$e^{-2t}+3\sin(2.5t)$
7.4.10	0	1.5	0	3.1	9	1	-3.9	9.43	26.295	$\sin(2t)+2\cos(3t)$

Таблица к задаче 7.5

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	точное решение
7.5.1	$-20y+2t-19.9$	0	1.5	0	$-1+0.1t+e^{-20t}$
7.5.2	$-30y+30\cos(\pi t)-\pi\sin(\pi t)$	0	1.5	0	$\cos(\pi t)-e^{-30t}$
7.5.3	$-25y+1.25t-49.95$	0	1.5	0	$-2+0.05t+2e^{-25t}$
7.5.4	$-20y+20-19e^{-t}$	0	1.5	1	$1-e^{-t}+e^{-20t}$
7.5.5	$-30y+\sin(2t)+30\sin^2(t)$	0	1.5	1	$\sin^2(t)+e^{-30t}$
7.5.6	$-25y-\sin(2t)+25\cos^2(t)$	0	1.5	0	$\cos^2(t)-e^{-25t}$

Таблица к задаче 7.6

N	*A*	Y_0	*B*	Z_0
7.6.1	-1.999 -0.019 -0.063 -1.051	0 1	-10.850 9.787 32.515 -499.55	1 0
7.6.2	-13.237 15.299 33.885 522.183	2 0	-6.905 0.03 -0.145 -6.095	1 5
7.6.3	-0.717 -23.827	1	-1.905 -0.015	1

	114.483 -640.393	2	-0.13 -2.295	0
7.6.4	-17.359 -0.573 5.366 -21.351	2 1	-64.712 -85.344 -128.964 -170.918	1 0
7.6.5	-229.934 301.266 227.624 -303.576	1 1	-2.018 -0.818 -0.082 -1.282	1 1

Таблица к задаче 7.7

N	*f(t,y)*	*t0*	*T*	*y0*	Метод*
7.7.1	$-\frac{2}{3}ty^2+\frac{1}{3}y(\cos(\frac{t}{2}))^2$	0	5	3.4	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
7.7.2	$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin(y)-\frac{1}{4}t^2$	-2	4	1.4	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка
7.7.3	$-\frac{1}{3}y\sqrt{t}+\frac{2}{3}y^2\sin(t)$	2	10	2.2	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
7.7.4	$\frac{1}{2}t^2\cos(y)-\frac{1}{2}ye^{-\frac{t}{6}}$	0	6	1.1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
7.7.5	$\frac{1}{3}t^3\sin(2y)-y^2e^{-\frac{t}{2}}$	-1	6	1.1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка III
7.7.6	$-\frac{1}{3}y\sqrt{t}+\frac{2}{3}y^2\sin(t)$	2	10	2.2	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.В.

Фрагмент решения задачи 7.1.0

Задача Коши: *y'(t)=2ty, t*0=0*, T=1,*
y(0)*=1.*

Исходные данные:
Правая часть:
$f(t,y) := 2\cdot t\cdot y$
Начальное значение:
$y_0 := 1$
Концы отрезка:
$t0 := 0 \qquad T := 1$
Шаг сетки:
$h := 0.2$
Число узлов сетки:
$N := \frac{T - t0}{h} \qquad N = 5$

Функция, реализующая явный метод Эйлера; возвращает вектор решения:

```
eyler(f, y0, t0, h, N) := | y_0 ← y0
                          | for  i ∈ 0.. N − 1
                          |    y_{i+1} ← y_i + h·f(t0 + i·h, y_i)
                          | y
```

---

* Расчетные формулы методов даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 7.С.*

Входные параметры:
f - функция правой части;
y0 - начальное значение;
t0 - начальная точка отрезка;
h - шаг сетки;
N - число узлов сетки.

Вычисление решения по методу Эйлера:

$$yE := eyler\left(f, y_0, t0, h, N\right)$$

Вычисление решения по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности:

$$yRK4 := rkfixed(y, t0, T, N, f)$$

входные параметры:
y - вектор начальных значений;
t0- начальная точка отрезка;
T - конечная точка отрезка;
N - число узлов сетки;
f - функция правой части. Функция **rkfixed** возвращает матрицу, первый столбец которой содержит узлы сетки, а второй - приближенное решение в этих узлах.

Точное решение:

$$Y(t) := e^{t^2}$$

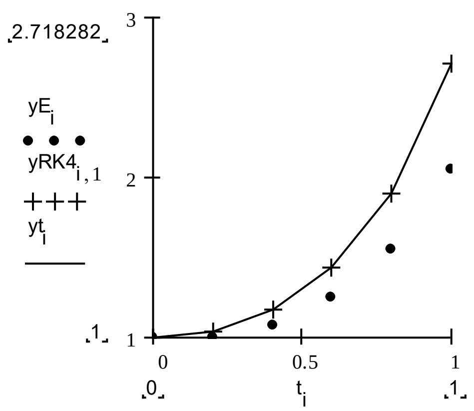
Точное решение в узлах сетки:

$$i := 0..N \qquad t_i := t0 + i \cdot h \qquad yt_i := Y\left(t_i\right)$$

Решение по методу Эйлера   Решение по методу Рунге-Кутты   Точное решение

$$yE = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.08 \\ 1.253 \\ 1.553 \\ 2.051 \end{bmatrix} \qquad yRK4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 1.041 \\ 0.4 & 1.174 \\ 0.6 & 1.433 \\ 0.8 & 1.896 \\ 1 & 2.718 \end{bmatrix} \qquad yt = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.040811 \\ 1.173511 \\ 1.433329 \\ 1.896481 \\ 2.718282 \end{bmatrix}$$

Графики приближенных и точного решений



Вычисление погрешности по правилу Рунге:
Вычисление приближенных решений с шагом *h*/2:

$h2 := \dfrac{h}{2}$ $\qquad N2 := \dfrac{T - t0}{h2}$ $\qquad N2 = 10$

$yEh2 := eyler\left(f, y_0, t0, h2, N2\right)$ $\qquad yRK4h2 := rkfixed(y, t0, T, N2, f)$

Вычисление погрешностей:

$i := 0 .. N$

$zE_i := \left| yE_i - yEh2_{2 \cdot i} \right|$ $\qquad zRK4_i := \dfrac{\left| (yRK4^{\langle 1 \rangle})_i - (yRK4h2^{\langle 1 \rangle})_{2 \cdot i} \right|}{15}$

Значение погрешностей:

$\max(zE) = 0.284$ $\qquad \max(zRK4) = 1.088 \cdot 10^{-5}$

Фрагмент решения задачи 7.2.0

Исходные данные:

$H(t) := 0 \quad K := 1 \quad m := 1 \quad f(t) := 0 \quad X0 := 10 \quad V0 := 0 \quad t0 := 0 \quad T := 5$

Шаг сетки:

$h := 0.5$

Число узлов сетки:

$N := \dfrac{T - t0}{h}$ $\qquad N = 10$

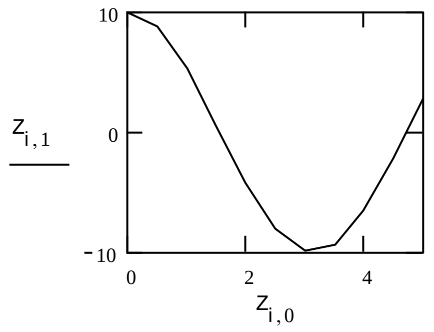
Формирование вектора правой части системы ОДУ и вектора начальных условий для применения встроенной функции **rkfixed**:

$f1(t, x1, x2) := x2$ $\qquad f2(t, x1, x2) := \dfrac{f(t) - H(t) \cdot x2 - K \cdot x1}{m}$

$x := \begin{bmatrix} X0 \\ V0 \end{bmatrix}$ $\qquad D(t, x) := \begin{bmatrix} f1\left(t, x_0, x_1\right) \\ f2\left(t, x_0, x_1\right) \end{bmatrix}$ $\qquad Z := rkfixed(x, t0, T, N, D)$

График решения

$i := 0 .. N$



$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0.5 & 8.776 & -4.792 \\ 1 & 5.406 & -8.41 \\ 1.5 & 0.714 & -9.971 \\ 2 & -4.151 & -9.093 \\ 2.5 & -8 & -5.991 \\ 3 & -9.892 & -1.424 \\ 3.5 & -9.363 & 3.49 \\ 4 & -6.545 & 7.549 \\ 4.5 & -2.127 & 9.762 \\ 5 & 2.811 & 9.586 \end{bmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.С

Правило Рунге практической оценки погрешности (правило двойного пересчета):

$y(t_i) - y_i^{h/2} \approx \varepsilon_i^{h}$, где $\varepsilon_i^{h} = \dfrac{y_i^{h/2} - y_i^{h}}{2^p - 1}$, i=1, … , N, p – порядок метода, а вычисления ведутся в узлах сетки t_i.

Уточненное решение вычисляется по формуле: $y_{i,уточн.} = y_i^{h/2} + \varepsilon_i^{h}$, i=1,…, N.

Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка:

Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}[\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}])$$

Модифицированный метод Эйлера 2 порядка:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}))$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка I:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}), \quad k3 = hf(t_i + h, y_i - k1 + 2k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k1 + 4k2 + k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка II:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k1}{3}), \quad k3 = hf(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k1 + 3k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка III:

$$k1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}), \quad k3 = hf(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k1 + 3k2 + 4k3)$$

Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}))$$

Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2}))$$

Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) -$$

$$-9f(t_{i-3}, y_{i-3})\Big]$$

Сведение ОДУ 3 порядка к системе ОДУ 1 порядка (для задачи 7.4):

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = \frac{f(t) - a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_3 y_1}{a_0}$$
$$y_1(A) = b_1, \quad y_2(A) = b_2,\ y_3(A) = b_3.$$

Условие устойчивости явного метода Эйлера для системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами $Y'(t) = MY(t),\ Y(t_0) = Y_0$:

$h \le 2 / \max\limits_i |\operatorname{Re}\lambda_i|,$ где λ_i, i=1, …, n, – собственные числа матрицы M порядка n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.