

# なんと7と10(と四則演算)だけで任意の整数を表現する

Watson\*

2024年7月13日

**Keywords**— 南東, 式木, 数字パズル, プログラミング

## 1 序文

7月10日はなんと南東の日。

## 2 Theory

### 2.1 定義及び単語

整数項の四則演算式について、この式を中置記法で表したときに全ての奇数番目の整数項が $\pm 7$ であり、かつ全ての偶数番目の整数項が $\pm 10$ であるとき、この式は“南東式”であるとする。ただし、複号は任意である。

これをより厳密にBNF記法で表現すると、次のようになる。

**定義 2.1** (南東式).

$$\begin{aligned} \star &::= + \mid \ominus \mid \times \mid \div \\ \mathcal{N}_{\text{南南}} &::= 7 \mid -7 \mid (\mathcal{N}_{\text{南東}}) \star (\mathcal{N}_{\text{南南}}) \mid (\mathcal{N}_{\text{南南}}) \star (\mathcal{N}_{\text{東南}}) \\ \mathcal{N}_{\text{南東}} &::= (\mathcal{N}_{\text{南南}}) \star (\mathcal{N}_{\text{東東}}) \mid (\mathcal{N}_{\text{南東}}) \star (\mathcal{N}_{\text{南東}}) \\ \mathcal{N}_{\text{東南}} &::= (\mathcal{N}_{\text{東東}}) \star (\mathcal{N}_{\text{南南}}) \mid (\mathcal{N}_{\text{東南}}) \star (\mathcal{N}_{\text{東南}}) \\ \mathcal{N}_{\text{東東}} &::= 10 \mid -10 \mid (\mathcal{N}_{\text{東東}}) \star (\mathcal{N}_{\text{南東}}) \mid (\mathcal{N}_{\text{東南}}) \star (\mathcal{N}_{\text{東東}}) \end{aligned} \tag{1}$$

この規約で定められる $\mathcal{N}_{\text{南東}}$ を南東式全体の集合と定め、 $\mathcal{N}_{\text{南東}}$ の元を**南東式**と呼ぶ。ここで、 $\ominus$ は差の絶対値 $A \ominus B \equiv |A - B|$ をとる演算子とする。

以降、 $\bullet \ominus \bullet$ と $\bullet - \bullet$ を同一視する。

また、式の和集合 $\mathcal{N}_{\text{南南}} \cup \mathcal{N}_{\text{南東}} \cup \mathcal{N}_{\text{東南}} \cup \mathcal{N}_{\text{東東}}$ を**弱南東式**と呼ぶ。弱南東式の初項と末項の組を**型**と呼ぶ。

2弱南東式 $A, B$ を演算子 $\star$ で結んだときに新たな弱南東式になるとき、この2式の型は**適合する**と呼ぶ。このとき、 $B$ は $A$ に**右適合**し、 $A$ は $B$ に**左適合**すると呼ぶ。

弱南東式について、その値が $n$ であるとき、この式を **$n$ の弱南東式**と呼ぶ。

$\star$ の演算を弱南東式の型同士に拡張し、

$$\begin{aligned} \text{甲東} \star \text{南乙} &= \text{甲乙}, \\ \text{甲南} \star \text{甲乙} &= \text{甲乙} \end{aligned} \tag{2}$$

と定める(ただし、甲, 乙は重複を認めてともに南, 東のいずれかとする)。

以降の議論では、絶対値記号を外しても式の値が変わらないときは絶対値記号を外せるものとする。

---

\*全日本なんと南東同好会名古屋支部

**補題 2.1** (1, 0, -1 の南東式表現).

$$(7 - 10) \div (7 - 10) = 1, \quad (3a)$$

$$(7 + 10) - (7 + 10) = 0, \quad (3b)$$

$$(7 - 10) \div (-7 + 10) = -1. \quad (3c)$$

ゆえに、任意の整数  $k \neq 0$  は、 $\text{sgn } k$  の南東式を  $|k|$  個並べて足し合わせることで表現できる。

しかし、これだけでは面白みがないので、最小手数、つまりある整数を南東式で表現する項数の最小数を考えることにする。

## 2.2 漸化式

ここで、南東式中の 7 および 10 の項数を**手数**と定める。例えば  $(7 + 10) - |7 - 10|$  の手数は 4 である。

$t \in \{\text{南東, 東南, 東東, 南南}\}$  とする。 $L[N, t]$  は  $N$  を表現する型  $t$  の弱南東式の最小手数の推定値とする。

$L[N, t]$  が更新されたとき、この数を途中の計算に含む弱南東式の結果の最小手数推定値もまた更新されうる。 $t$  と右適合する型  $u_R$  および左適合する型  $u_L$  について、 $N$  と非負整数  $M$  の組の四則演算の結果  $P_R = N \star M$ ,  $P_L = M \star N$  について  $L[P_L, v_L], L[P_R, v_R]$  ( $v_L = u_L \star t, v_R = t \star u_R$ ) もまた更新されうる。この関係を用いて、下式のように  $L[P, \bullet]$  を更新する。

$$\begin{aligned} L[P, v_L] &\leftarrow \min\{L[P, v_L], L[M, u_L] + L[N, t]\}, \\ L[P, v_R] &\leftarrow \min\{L[P, v_R], L[N, t] + L[M, u_R]\}. \end{aligned} \quad (4)$$

このように、手数の推定値の更新が起きた  $(N, t)$  を順次キューに追加し、キューの先頭から取り出した  $(N', t')$  から更新処理を行う。このキューの処理をキューが空になるまで繰り返す。これによって弱南東式の最小手数を計算できる。

## 2.3 式表現

付属のプログラムでは、各行および各式が指定された  $N$  未満の非負整数のみからなる南東式の最小手数を計算するとともに、その最小手数を実現する南東式の実例を格納する。

$A = B \star C$  なる非負整数  $A, B, C$  について、この順番で適合する  $A, B, C$  の弱南東式をそれぞれ  $F[A], F[B], F[C]$  と表す。

$F[A]$  が  $A$  の弱南東式のうち最小手数であると仮定する。 $F[A] = F[B] \star F[C]$  と分解できるとすると、 $F[B], F[C]$  もまた  $B, C$  の弱南東式のうち最小手数である。

したがって、 $F[A] \equiv F[B] \star F[C]$  の記憶には、 $B, C$  の値、 $F[B], F[C]$  の型、 $\star$  の内容、 $F[A]$  の手数を格納すればよい。ただし、手数の記憶は前章の手数更新に必要である。

南東式の復元には、上で書いたような弱南東式の分解により動的に生成される式木を辿ればよい。この式木は  $A$  を根、7, 10 を葉とする。

付属のプログラムでは、各項にカッコが必要ない場合はそのカッコを外す処理も行っている。

## 3 計算例

以下に、0 から 100 までの各整数について本プログラムで求めた最小手数の南東式の例を示す。ただし、本プログラムでは途中式の値が全て 2047 以下の非負整数となる南東式のための範囲で探索しているため、さらに手数の少ない南東式が存在する可能性があることに注意する。

$$\begin{aligned}
0 &= 7 + 10 - 7 - 10 \\
1 &= (7 + 10 - 7) \div 10 \\
2 &= (7 + 10 + 7 + 10) \div (7 + 10) \\
3 &= |7 - 10| \\
4 &= (7 + 10 - 7) \div 10 + |7 - 10| \\
5 &= 7 \times 10 \div (7 + 10 + 7 - 10) \\
6 &= |7 - 10| + |7 - 10| \\
7 &= 7 \times |(10 - 7) \times (10 - 7) - 10| \\
8 &= 7 \times (10 - 7) - (10 - 7 + 10) \\
9 &= |7 - 10| \times |7 - 10| \\
10 &= ||7 - 10| - (7 - (10 - 7))| \times 10 \\
11 &= 7 \times (10 - 7) - 10 \\
12 &= |7 - 10| \times |7 - 10| + |7 - 10| \\
13 &= |7 - (10 \times 7 - 10) \div |7 - 10|| \\
14 &= 7 + 10 + 7 - 10 \\
15 &= |7 - 10| \times |7 - 10| + |7 - 10| + |7 - 10| \\
16 &= |(7 + 10 - 7) \div 10 - (7 + 10)| \\
17 &= 7 + 10 \\
18 &= (7 + 10 - 7) \div 10 + (7 + 10) \\
19 &= ||7 - 10| \times (7 + 10) - 7 \times 10| \\
20 &= 7 + 10 - 7 + 10 \\
21 &= |7 \times 10 \times 7 \div 10 - 7 \times 10| \\
22 &= |7 - 10| \times (7 - (10 - 7)) + 10 \\
23 &= |7 - (10 - 7) \times 10| \\
24 &= |7 - 10| \times |7 - 10| \times |7 - 10| - |7 - 10| \\
25 &= |7 - 10| \times (7 - (10 - 7)) + (10 - 7 + 10) \\
26 &= |7 - (10 - 7) - (10 - 7) \times 10| \\
27 &= |7 - 10| \times |7 - 10| \times |7 - 10| \\
28 &= (7 - (10 - 7)) \times |10 - 7 - 10| \\
29 &= (7 \times 10 + 7 + 10) \div |7 - 10| \\
30 &= (7 + 10 - 7) \times 10 - 7 \times 10 \\
31 &= 7 \times (10 - 7) + 10 \\
32 &= 7 \times 10 \times 7 \div 10 - (7 + 10) \\
33 &= 7 \times 10 - 7 - (10 - 7) \times 10 \\
34 &= 7 + 10 + 7 + 10 \\
35 &= |7 - (10 \times 7 - 10) \times 7 \div 10|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36 &= 7 \times 10 - 7 - 10 - (7 + 10) \\
37 &= 7 + (10 - 7) \times 10 \\
38 &= |7 \times 10 \times 7 \div 10 - (7 + 10) - 7 \times 10| \\
39 &= (7 + 10) \times 7 - 10 - 7 \times 10 \\
40 &= (7 - (10 - 7)) \times 10 \\
41 &= |7 - |10 - 7 \times 10 \times 7| \div 10| \\
42 &= (7 + 10 + 7 - 10) \times |7 - 10| \\
43 &= ((7 + 10) \times 7 + 10) \div |7 - 10| \\
44 &= ((7 + 10) \times 7 + 10 + |7 - 10|) \div |7 - 10| \\
45 &= (7 + 10 + 7 - 10) \times |7 - 10| + |7 - 10| \\
46 &= 7 \times 10 \times 7 \div 10 - |7 - 10| \\
47 &= 7 \times 10 + 7 - (10 - 7) \times 10 \\
48 &= |7 - 10| \times (7 + 10) - |7 - 10| \\
49 &= 7 \times 10 \times 7 \div 10 \\
50 &= 7 \times 10 + 7 - 10 - (7 + 10) \\
51 &= |7 - 10| \times (7 + 10) \\
52 &= 7 \times 10 \times 7 \div 10 + |7 - 10| \\
53 &= 7 \times 10 - 7 - 10 \\
54 &= |7 - 10| \times (7 + 10) + |7 - 10| \\
55 &= 7 + |10 - 7 \times 10 \times 7| \div 10 \\
56 &= 7 \times 10 - 7 + 10 - (7 + 10) \\
57 &= 7 + (10 + 7 \times 10 \times 7) \div 10 \\
58 &= (7 + 10) \times (7 - (10 - 7)) - 10 \\
59 &= (7 + 10) \times 7 + 10 - 7 \times 10 \\
60 &= (7 + 10 - 7 + 10) \times |7 - 10| \\
61 &= ||7 - 10| \times |7 - 10| - 7 \times 10| \\
62 &= (7 + 10 + 7) \times (10 - 7) - 10 \\
63 &= 7 \times (10 + 7 + 10) \div |7 - 10| \\
64 &= 7 \times 10 + 7 - 10 - |7 - 10| \\
65 &= |7 - 10| \times (7 + 10) + (7 + 10) - |7 - 10| \\
66 &= 7 \times 10 \times 7 \div 10 + (7 + 10) \\
67 &= 7 \times 10 + 7 - 10 \\
68 &= |7 - 10| \times (7 + 10) + (7 + 10) \\
69 &= |(7 + 10 - 7) \div 10 - 7 \times 10| \\
70 &= 7 \times 10 \\
71 &= (7 + 10 - 7) \div 10 + 7 \times 10 \\
72 &= (7 + 10 + 7 + 10) \div (7 + 10) + 7 \times 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
73 &= 7 \times 10 - 7 + 10 \\
74 &= |7 - (10 - 7) \times (10 + 7 + 10)| \\
75 &= (7 + 10) \times 7 - (10 + (7 + 10 + 7) + 10) \\
76 &= 7 \times 10 - 7 + 10 + |7 - 10| \\
77 &= 7 \times (10 + (7 + 10 - 7) \div 10) \\
78 &= (7 + 10) \times (7 - (10 - 7)) + 10 \\
79 &= |7 - 10| \times |7 - 10| + 7 \times 10 \\
80 &= (7 + 10 + 7) \times 10 \div |7 - 10| \\
81 &= 7 \times (10 - 7) + 10 \times 7 - 10 \\
82 &= (7 + 10 + 7) \times (10 - 7) + 10 \\
83 &= (7 + 10 - 7) \times 10 - (7 + 10) \\
84 &= 7 \times 10 + 7 - 10 + (7 + 10) \\
85 &= |7 - 10| \times (7 + 10) + (7 + 10) + (7 + 10) \\
86 &= (7 + 10 - 7) \times 10 - (7 + 10) + |7 - 10| \\
87 &= 7 \times 10 + 7 + 10 \\
88 &= 7 + (10 - 7) \times (10 + 7 + 10) \\
89 &= (7 + 10) \times 7 - (10 - 7) \times 10 \\
90 &= 7 \times 10 - 7 + 10 + (7 + 10) \\
91 &= 7 \times (10 - 7 + 10) \\
92 &= (7 + 10) \times 7 - 10 - (7 + 10) \\
93 &= |7 \times 10 + 7 - (10 + 7) \times 10| \\
94 &= |7 - (10 - 7 + 10) \times 7| + 10 \\
95 &= (7 + 10) \times 7 - 10 - (7 + 10) + |7 - 10| \\
96 &= (7 \times 10 \times 7 \div 10 - (7 + 10)) \times |7 - 10| \\
97 &= (7 + 10 - 7) \times 10 - |7 - 10| \\
98 &= 7 \times (10 \times 7 + 10 \times 7) \div 10 \\
99 &= (7 + 10 + 7 + 10) \times |7 - 10| - |7 - 10| \\
100 &= (7 + 10 - 7) \times 10
\end{aligned}$$

以上より、100 以下の任意の非負整数は、高々 4 組の 7, 10 とそれらの四則演算、カッコと絶対値により表現できるとわかる。

## 4 結びに

今回は南東式の復元について絶対値記号の使用を認めているが、探索空間に負の数を認める、または減算と符号反転の適切な処理を組み込むことで、絶対値記号を使わない南東式を復元することも可能と考えられる。

今回は途中式がすべて非整数となる範囲で南東式の探索を行ったが、このような数式パズルでは一般に、

途中式に非整数が現れることもありうる。また、演算に連結<sup>1</sup>やべき乗、平方根や階乗をも認めていることが多く、途中式に現れる空間は有理数にすら収まらず膨大である。そのような空間での式探索は今回のコードよりも圧倒的に高度な探索アルゴリズムが必要であると考えられる。

それでは皆さん、

$$(7 + 10 - 7 + 10 \times 7 \times 10) \times (7 \times 10 + 7) \times (10 - 7 + 10).$$

---

<sup>1</sup>2 数を 10 進法で左右に連結して大きな別の数とみなす演算。例:  $(7, 10) \mapsto 710$ 。