Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$

1. *Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ contient toutes les matrices nilpotentes, alors $\mathscr{H}$ contient une matrice inversible.*
2. *Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ rencontre $GL_n(\mathbb{C})$.*

1. Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc en particulier $\mathscr{H}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que les matrices $(E_{i,j})_{i\neq j}$ sont des matrices nilpotentes, comme $\mathscr{H}$ est stable par combinaison linéaire, alors la matrice

$$E = E_{n,1} + E_{1,2} + E_{2,3} + ... + E_{n-1,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est un élément de $\mathscr{H}$ qui est clairement inversible.

2. Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, par définition $\mathscr{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ. Si $\mathscr{H}$ contient toutes les matrices nilpotentes, c'est fini en vertu de la première question. Sinon, soit N une matrice nilpotente qui n'appartienne pas à $\mathscr{H}$. Par conséquent, $\varphi(N) \neq 0$. Si $I_n \in \mathscr{H}$, c'est fini, sinon supposons que $\varphi(I_n) = 0$. Cherchons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $I_n - \lambda N \in \mathscr{H}$, i.e. $\varphi(I_n - \lambda N) = 0$, ce qui est équivalent à $\lambda = \varphi(I_n)/\varphi(N) \neq 0$. Puisque N est nilpotent, alors $I_n - \lambda I_n$ est inversible, c'est classique.