PROBLÈMES D'ANALYSE POUR LA PRÉPARATION À L'EXAMEN NATIONAL

PROBLÈME 1(DEVOIR BLANC 2017, BELKHATIR).

- PARTIE I -

1/ Montrer que pour tout réel $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$$

2/ Montrer pour tout réel $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{3}$$

3/ En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

- PARTIE II -

Soit f la fonction sur $]0,+\infty[$ par $f(1)=1$ et pour tout réel x strictement positif différent de 1,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner leurs interprétations géométriques.
2/a/ Montrer que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
b/ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ puis interpréter géométriquement le résultat.
3/a/ Montrer que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et que pour tout réel strictement positif différent de 1,

$$f'(x) = \frac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

b/ Montrer que pour tout réel strictement positif différent de 1,

$$(x-1)-x\ln x < 0$$

puis dresser le tableau des variations de la fonction f.
4/ Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé direct (en indiquant la tangente en $A(1,f(1))$).
5/ Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique $a_n > 0$ tel que $f(a_n) = 1+\dfrac{1}{n}$.
6/a/ Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, $0 < a_n < 1$.
b/ Montrer que la suite $(a_n)_{n>0}$ est strictement croissante puis déduire qu'elle converge.
c/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
d/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-a_n) = 2$ puis déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^n = \frac{1}{e^2}$$

- PARTIE III -

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(0)=0$ et pour tout réel x strictement positif,

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1/a/ Montrer que pour tout réel $x>0$ différent de 1,

$$\frac{2x\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln x$$

b/ Montrer que la fonction F est continue à droite en 0. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.
2/a/ Montrer que pour tout $x>1$,

$$\ln x \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x\ln(x+1)$$

b/ Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)/x$ puis donner leurs interprétations géométriques.
3/a/ Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(1)=1$ et pour tout $x>0$ différent de 1, on a

$$F'(x) = \frac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction F sur $[0,+\infty[$ (en justifiant votre réponse).

PROBLÈME 1(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/ Soit $x>-1$ un réel non nul, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(t+1)^2-2t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\int_0^x (t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{2t+1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\int_0^x (t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{2(t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\int_0^x (t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x 2-\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^x + \Big[\ln(t+1)\Big]_0^x\right]\\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x>-1$ non nul on a

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}+\frac{1}{2}}$$

2/ Supposons d'abord que $-1<x<0$, et soit $t\in]x,0]$, on a

$$0 < x+1 \leq t+1 \leq 1$$

Donc par passage à l'inverse, on trouve

$$1 \leq \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

En multipliant par $t^2 \geq 0$, on trouve

$$t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+1}$$

Et puisque $x < 0$, on a

$$\int_0^x \frac{t^2}{x+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$$

c-à-d

$$\frac{x^3}{3(x+1)} \leq \int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^3}{3}$$

En multipliant par $1/x^2 > 0$, on obtient

$$\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{3}$$

Si on suppose dans le second cas que $x \geq 0$, on montre similairement l'inégalité souhaitée. On conclut que pour tout $x > -1$ non nul on a

$$\boxed{\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{3}}$$

3/ Soit $x > -1$ un réel non nul, on a d'après la question **2/**,

$$\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x}{3}$$

En retranchant $-1/2$, on obtient

$$\frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

Et d'après la question **1/** on sait que $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} + \frac{1}{2}$, et alors

$$\frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} \leq \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

et ceci pour tout $x \in]-1, +\infty[$ non nul, en faisant tendre x vers 0, et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

- PARTIE II -

1/ On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$$

Et d'une autre part on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Finalement on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Et ceci est équivalent à dire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2/a/ Il est clair que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est continue sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ par opérations. Il reste à étudier la continuité de f en 1, ce qui est immédiat car on sait que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 = f(1)$$

On conclut que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

b/ Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)-t}{t^2} \qquad (t = x-1)
\end{aligned}$$

et cette limite vaut $-1/2$ d'après la question **3/** de la première partie. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}}$$

Et ceci est équivaut à dire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $(1, f(1))$ de coefficient directeur $-1/2$.

3/a/ La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ par opérations et on a pour tout $x > 0$ différent de 1,

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2}$$

Donc f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et on a pour tout $x > 0$ différent de 1,

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2}}$$

b/ On définit la fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$h(x) = x - 1 - x\ln x$$

La fonction h est dérivable (par opérations) sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

Donc le tableau des variations de la fonction h est comme suit

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|$ -1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

De ce tableau on tire que la valeur maximale de h est 0 est elle est prise uniquement pour le réel $x_0 = 1$, on en déduit que pour tout $x > 0$ différent de 1 on a $h(x) < 0$, i.e. pour tout $x > 0$ différent de 1 on a

$$\boxed{(x-1)-x\ln x<0}$$

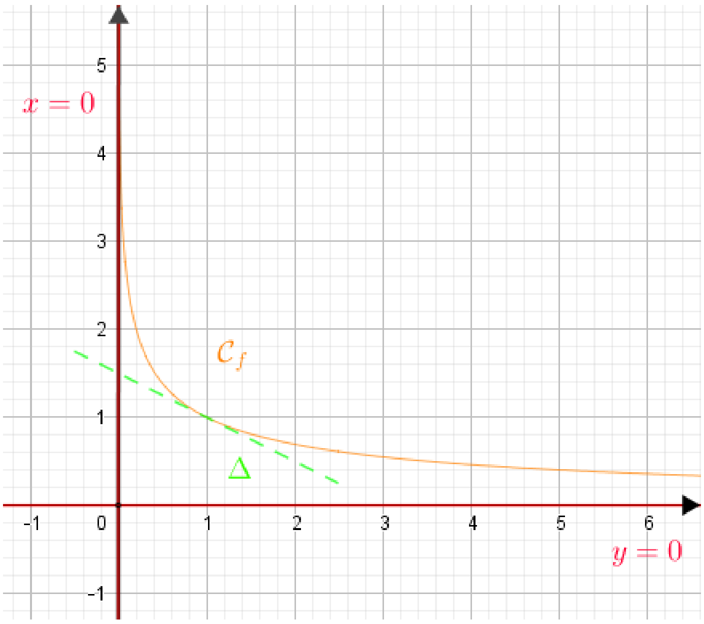
On déduit que pour tout $x>0$ différent de 1 on a

$$\boxed{f'(x)<0}$$

et alors le tableau des variations de la fonction f est comme suit

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

4/



5/ Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x\mapsto f(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc f est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$, puisque $1+1/n\in]0,+\infty[$, alors $1+1/n$ admet un unique antécédent par la fonction f qu'on va appeler a_n. D'où :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists! a_n>0),\quad f(a_n)=1+\frac{1}{n}}$$

6/a/ On sait déjà que $a_n>0$, il suffit donc de montrer que $a_n<1$ pour tout entier naturel non nul. Mais par décroissance stricte de la fonction f, ceci est équivaut à dire que $f(a_n)>f(1)$ pour tout entier naturel non nul n, c-à-d $1+1/n>1$ pour tout entier naturel non nul n, et ceci est vrai. On en déduit que

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*),\quad 0<a_n<1}$$

b/ On sait que la fonction f est strictement décroissante, donc pour trouver la monotonie de la suite $(a_n)_{n>0}$, il suffit de déterminer le signe de la différence $f(a_{n+1})-f(a_n)$ pour tout entier naturel non nul n, on a pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}
f(a_{n+1})-f(a_n) &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\
&= -\frac{1}{n(n+1)}<0
\end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel non nul, on a $f(a_{n+1})<f(a_n)$, puisque la fonction f est strictement décroissante, alors pour tout entier naturel non nul $a_{n+1}>a_n$. Ce qui est équivaut à que la suite $(a_n)_{n>0}$ est strictement décroissante.
La suite $(a_n)_{n>0}$ est croissante et majoré par 1 d'après ce qui précède, elle est alors convergente.

c/ D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n>0}$ converge. Appelons l sa limite. Remarquons d'abord que $l\geq a_1>0$ (car pour tout $n>0$, on a $a_n\geq a_1$ et $a_1>0$). On sait que pour tout entier naturel non nul n, on a $f(a_n)=1+1/n$. La continuité de f sur $]0,+\infty[$ permet un passage à la limite, donc $f(l)=1$, mais comme $f(1)=1$ et f est injective (car strictement décroissante), alors $l=1$. Comme conclusion finale,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

d/ D'après la première partie, on sait que

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Un changement de variable $t=1+x$ fournit

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln(t)-(t-1)}{(t-1)^2}=-\frac{1}{2}$$

En posant pour tout $t>0$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln t-(t-1)}{(t-1)^2}+\dfrac{1}{2}$, on trouve

$$\ln(t)=(t-1)-\frac{(t-1)^2}{2}+(t-1)^2\varphi(t)$$

avec $\varphi(t)\to0$ quand $t\to1$, donc pour tout $t>0$ différent de 1, on a

$$f(t)=1-\frac{t-1}{2}+(t-1)\varphi(t)$$

En particulier, pour tout entier naturel $n>0$, on a

$$f(a_n)=1-\frac{a_n-1}{2}+(a_n-1)\varphi(a_n)$$

c-à-d

$$1+\frac{1}{n}=1+\frac{1-a_n}{2}+(a_n-1)\varphi(a_n)$$

Alors en factorisant avec $(1-a_n)$ et en inversant on obtient

$$n(1-a_n)=\frac{1}{1/2-\varphi(a_n)}$$

Un passage à la limite donne

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}n(1-a_n)=2}$$

Pour déduire la limite suivante, il suffit de voir que $f(a_n)=1$ entraîne $\ln(a_n)=a_n-1$, donc $n\ln(a_n)=n(a_n-1)$, alors $\ln(a_n^n)=n(a_n-1)$. On en déduit que $a_n^n=\exp(n(a_n-1))$, puis que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n^n=\frac{1}{e^2}}$$

1/a/ Supposons que $0<x<1$, on a alors pour tout $t\in[x^2,x]$,

$$f(x)\leq f(t)\leq f(x^2)$$

Par décroissance de la fonction f, et en intégrant sur le segment $[x^2,x]$ on obtient

$$(x^2-x)f(x^2)\leq\int_x^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\leq(x^2-x)f(x)$$

c-à-d

$$(x^2-x)\times\frac{2\ln x}{x^2-1}\le F(x)\le(x^2-x)\times\frac{\ln x}{x-1}$$

i.e.

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$$

On montre de manière similaire l'inégalité si on suppose que $x>1$. Comme conclusion on a pour tout $x>0$ différent de 1, l'inégalité

$$\boxed{\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x}$$

b/ D'après la question précédente, on a pour tout $x\in]0,1[$,

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$$

En faisant tendre $x\to 0^+$ et en vertu de $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$, on trouve d'après le théorème des gendarmes que

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)}$$

Ce qui est équivaut à dire que f est continue à droite en $x_0=0$. D'après la question précédente, on sait que pour tout $x\in]0,1[$

$$\frac{F(x)}{x}\le\ln x$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}=-\infty}$$

i.e.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=-\infty$$

Et alors la courbe $\mathcal{C}_F$ admet une demi tangente verticale en $(0,F(0))$ dirigée vers le bas.

2/a/ Soit $x>1$ un nombre réel, on sait que pour tout $t\in[x,x^2]$ on a

$$\ln x\le\ln t\le\ln(x^2)$$

par croissance de la fonction logarithme. En divisant pat $t-1>0$, on obtient

$$\frac{\ln x}{t-1}\le\frac{\ln t}{t-1}\le\frac{2\ln x}{t-1}$$

Donc en intégrant sur le segment $[x,x^2]$,

$$\ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\le F(x)\le 2\ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

D'autre part

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln(t-1)\Big]_x^{x^2}=\ln(x^2-1)-\ln(x-1)=\ln(x+1)$$

Finalement, on a pour tout $x>1$,

$$\boxed{\ln x\ln(x+1)\le F(x)\le 2\ln x\ln(x+1)}$$

b/ D'après la question précédente, on a pour tout $x>1$

$$F(x)\ge\ln x\ln(x+1)$$

Puisque $\ln x\to+\infty$ quand $x\to+\infty$, alors par comparaison on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty}$$

En ce qui concerne la seconde limite, on sait que pour tout $x>1$

$$\frac{\ln x\ln(x+1)}{x}\le\frac{F(x)}{x}\le\frac{2\ln x\ln(x+1)}{x}$$

d'après la question précédente. D'autre par on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}4\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$$

Mais on sait que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$

car

$$\frac{\ln t}{t}\to0\quad\text{quand}\quad t\to\infty$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$$

Donc la fonction $\mathcal{C}_F$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.

3/a/ Montrons d'abord que la fonction F est dérivable en 1. On a d'après la question **1/a/**, pour tout $x>0$ différent de 1,

$$x\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}\le\frac{F(x)}{x-1}\le x\frac{\ln x}{x-1}$$

Puisque

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

Alors

$$\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=1$$

Donc F est dérivable en $x_0=1$ et on a de plus $F'(1)=1$. Supposons maintenant $x>1$, écrivons

$$F(x)=\int_x^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=G(x^2)-G(x)$$

où G est une primitive de f sur $]1,+\infty[$, sachant que les deux fonctions $x\mapsto G(x)$ et $x\mapsto G(x^2)$ sont dérivables sur $]1,+\infty[$ alors la fonction F est dérivable sur $]1,+\infty[$. On montre de manière similaire que la fonction F est dérivable sur $]0,1[$. De plus en gardant les mêmes notations précédentes on a pour tout $x>0$ différent de 1,

$$F'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)=2xf(x^2)-f(x)$$

Un calcul rapide donne

$$\boxed{F'(x)=\frac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}}$$

pour tout réel $x\ne1$ strictement positif.

b/ Trouvons les points ou s'annule la dérivée F' sur $]0,+\infty[$. Soit x un point d'annulation éventuel de F' sur $]0,+\infty[$

$$F'(x)=0\iff(3x-1)\ln x=0\iff x=1/3,1\iff x=1/3$$

D'autre part après détermination su signe de F', on aboutit à

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$F'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
F	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

PROBLÈME 2(DEVOIR BLANC 2018, TAJJIOU).

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

- PARTIE I -

1/a/ Montrer que pour tout nombre réel positif x, il existe un réel $c_x \in]x, 2x[$ tel que

$$f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}$$

b/ En déduire que pour tout $x > 0$,

$$f(2x) - f(x) < 0$$

2/ Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(2x) - f(x) = 0$$

- PARTIE II -

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

1/a/ Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$1 - x \le \frac{1}{1+x} \le 1 - \frac{x}{2}$$

b/ En déduire que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$1 - te^{-t} \le \frac{1}{1+te^{-t}} \le 1 - \frac{te^{-t}}{2}$$

c/ Montrer que pour tout réel positif x,

$$x + f(2x) - f(x) \le F(x) \le x + \frac{1}{2}(f(2x) - f(x))$$

d/ En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, puis que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote de la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ dans un repère orthonormé direct.
e/ Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_F$ et la droite Δ.
2/ Montrer que la fonction F est dérivable à droite en zéro puis déterminer $F'_d(0)$.
3/a/ Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^{-x})}$$

b/ Donner le tableau de variation de la fonction F.
4/ Soit S l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_F$ et la droite Δ et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que

$$0 \le S \le \frac{1}{4}$$

- PARTIE III -

Soit n un entier naturel non nul.
1/a/ Montrer qu'il existe $\alpha_n \in [0, +\infty[$ tel que

$$\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}}\,\mathrm{d}t = e^{-n}$$

b/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est décroissante, puis déduire qu'elle converge.
c/ Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

2/ Soit $(u_n)_{n\ge1}$ la suite numérique définie par

$$u_n = \int_0^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier naturel non nul n.
a/ Montrer qu'il existe $\beta_n \in [0, \alpha_n]$ tel que $u_n = \alpha_n F(\beta_n)$.
b/ Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est croissante, puis déduire qu'elle est convergente en déterminant sa limite.
3/ On considère la suite $(v_n)_{n\ge1}$ définie pour tout $n \ge 1$ par

$$v_n = n\left(F\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - F\left(u_n + \frac{1}{n}\right)\right)$$

a/ En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \left]u_n + \frac{1}{n}, u_n + \frac{2}{n}\right[$,

$$v_n = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n(e^{\lambda_n} - 1)}{(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n)(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n})}$$

b/ En déduire que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

PROBLÈME 2(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/a/ Soit x un réel strictement positif, on a $x < 2x$ et la fonction f est continue sur $[x, 2x]$ est dérivable sur $]x, 2x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, 2x|$ tel que

$$f(2x) - f(x) = xf'(c_x) = x(e^{-c_x} - c_x e^{c_x} - e^{-c_x}) = -xc_x e^{-c_x}$$

Donc pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que

$$\boxed{f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}}$$

b/ Soit $x > 0$ un nombre réel. On sait d'après la question précédente que

$$f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}$$

où $c_x > x > 0$, donc $f(2x) - f(x) < 0$ puisque la quantité $xc_x e^{-c_x}$ est strictement positive.
2/ On sait que pour tout $x > 0$, il existe $c_x > x$ tel que

$$f(2x) - f(x) = -xc_x e^{-c_x}$$

Regardons c_x comme une fonction en x qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ puisque $c_x > x$ pour tout $x > 0$. D'autre part

$$0 < xc_x e^{-c_x} < c_x^2 e^{-c_x}$$

Et $c_x^2 e^{-c_x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (car c_x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$). On conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(2x) - f(x)}$$

- Partie II -

1/a/ Soit x un élément de $[0,1]$. D'abord, il est clair que

$$1-x\leq\frac{1}{1+x}$$

Du fait que $1-x^2\leq 1$ et $1+x>0$. Pour montrer que

$$\frac{1}{1+x}\leq 1-\frac{x}{2}$$

on évalue la différence

$$\begin{aligned}D=&\quad\frac{1}{1+x}-1+\frac{x}{2}\\=&\frac{2-2(1+x)+x(x+1)}{2(1+x)}\\=&\quad\frac{x^2+x-2x}{2(1+x)}\\=&\quad\frac{x(x-1)}{2(1+x)}\\=&\quad-\frac{x(1-x)}{2(1+x)}\end{aligned}$$

Alors $D\leq 0$ et alors $\frac{1}{1+x}\leq 1-\frac{x}{2}$. Comme conclusion on a pour tout $x\in[0,1]$,

$$\boxed{1-x\leq\frac{1}{1+x}\leq 1-\frac{x}{2}}$$

b/ Soit $t\in[0,+\infty[$, si $t=0$, les inégalités sont évidentes. Supposons maintenant que $t>0$. Pour pouvoir appliquer la question précédente, il suffit de montrer que $0\leq te^{-t}\leq 1$, c-à-d $0\leq t\leq e^t$. Ce qui évident puisque $t>0$ et $e^t\geq t+1\geq t$. On conclut que $0\leq te^{-t}\leq 1$ puis que

$$\boxed{1-te^{-t}\leq\frac{1}{1+te^{-t}}\leq 1-\frac{te^{-t}}{2}}$$

pour tout $t\in[0,+\infty[$.

➽ L'inégalité $e^t\geq t+1$ vraie pour tout $t\geq 0$ est à retenir, en effet on peut la montrer facilement par une étude de fonction ou en utilisant un argument de convexité.

c/ Soit $x\geq 0$ un réel positif. Si $x=0$, tout est évident. Sinon, soir $x>0$. En intégrant les inégalités de la question précédente sur le segment $[x,2x]$ on obtient

$$\int_x^{2x}(1+te^{-t})\,\mathrm{d}t\leq F(x)\leq\int_x^{2x}\left(1-\frac{te^{-t}}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Donc

$$x+\int_x^{2x}te^{-t}\,\mathrm{d}t\leq F(x)\leq x-\frac{1}{2}\int_x^{2x}te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Mais remarquons que f est une primitive de la fonction $t\mapsto te^{-t}$, on obtient

$$\int_x^{2x}te^{-t}\,\mathrm{d}t=f(2x)-f(x),\qquad(*)$$

En substituant dans les inégalités précédente ou aboutit à

$$\boxed{x+f(2x)-f(x)\leq F(x)\leq x+\frac{1}{2}(f(2x)-f(x))}$$

pour tout $x\geq 0$.

➽ Pour voir que f est une primitive de te^{-t}, il suffit de dériver la fonction f. Pour les non convaincus, utiliser une intégration par parties pour montrer $(*)$.

d/ On sait que pour tout $x\geq 0$, on a

$$F(x)\geq x+f(2x)-f(x)$$

et que $f(2x)-f(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$, donc par une comparaison on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty}$$

D'après la question précédente, on sait que pour tout $x>0$, on a

$$1+\frac{f(2x)-f(x)}{x}\leq\frac{F(x)}{x}\leq 1+\frac{f(2x)-f(x)}{2x}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ et en comparant, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=1$, et de plus

$$f(2x)-f(x)\leq F(x)-x\leq\frac{f(2x)-f(x)}{2}$$

pour tout $x>0$. En faisant tendre $x\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)-x=0$$

L'interprétation graphique des résultats précédents est que la droite Δ d'équation $y=x$ est une asymptote de $\mathcal{C}_F$.

e/ Soit $x\geq 0$, on a

$$F(x)-x\leq\frac{f(2x)-f(x)}{2}\leq 0$$

Du fait que $f(2x)-f(x)\leq 0$ d'après la première partie.
L'interprétation graphique de ceci est que la courbe $\mathcal{C}_F$ se situe au dessous de la droite Δ sur $[0,+\infty[$.

2/ D'après ce qui précède, on sait que pour tout $x>0$, on a

$$1+\frac{f(2x)-f(x)}{x}\leq\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\leq 1+\frac{1}{2}\times\frac{f(2x)-f(x)}{x}$$

Mais on sait que pour tout $x>0$, il existe $c_x\in]x,2x[$ tel que

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}=-c_xe^{-c_x}$$

mais quand x tend vers 0^+, c_x tend également vers 0 puisque $x<c_x<2x$, de sorte que $\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. On en déduit que

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\to 1$$

quand $x\to 0^+$ en utilisant le théorème des gendarmes. Autrement dit, la fonction F est dérivable à droite en zéro et $F'_d(0)$ vaut 1.

3/a/ Soit G une primitive de la fonction $g:t\mapsto\frac{1}{1+te^{-t}}$ sur $]0,+\infty[$. On écrit

$$F(x)=G(2x)-G(x)$$

pour tout $x>00$. Il est clair que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$

et que

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2g(2x) - g(x) \\
&= \frac{2}{1+2xe^{-2x}} - \frac{1}{1+xe^{-x}} \\
&= \frac{2+2xe^{-x}-1-2xe^{-2x}}{(1+2xe^{-x})(1+xe^{-x})} \\
&= \frac{1+2xe^{-x}-2xe^{-2x}}{(1+2xe^{-x})(1+xe^{-x})} \\
&= \frac{e^{2x}+2xe^{x}-2x}{(e^{2x}+2xe^{x})(1+xe^{-x})} \\
&= \frac{e^{2x}+2x(e^{x}-1)}{(e^{2x}+2xe^{x})(1+xe^{-x})}
\end{aligned}$$

En conclusion la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle dérivable à droite en zéro et sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x>0$,

$$\boxed{F'(x) = \frac{e^{2x}+2x(e^{x}-1)}{(e^{2x}+2xe^{x})(1+xe^{-x})}}$$

b/ On sait que $F'>0$ sur $]0,+\infty[$ puisque pour tout $x>0$, on a $e^{x}-1>0$ par croissance stricte de la fonction exponentielle et que $e^{2x}>0$ et que le dénominateur de F' est toujours strictement positif sur $]0,+\infty[$ et alors le tableau des variations de la fonction est comme suit

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	$\|$	$+$	
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

4/ On sait que S est l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_F$ et la droite Δ et les deux droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. Donc

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 |F(x)-x| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x-F(x)) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Alors d'après la question **3/a/**, on a

$$0 \leq -\int_0^1 \left(\frac{f(2x)-f(x)}{2}\right) \leq S \leq -\int_0^1 \Big(f(2x)-f(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

On va montrer par la suite que le côté de droite est inférieur à $1/4$, i.e.

$$D = -\int_0^1 \Big(f(2x)-f(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}_{E} - \underbrace{\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x}_{F} \leq \frac{1}{4}$$

D'une part

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= [-(x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -2e^{-1}+1+[-e^{-x}]_0^1 \\
&= -2e^{-1}+1-e^{-1}+1 \\
&= 2-3e^{-1}
\end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (2x+1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{(2x+1)e^{-2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{-3e^{-2}+1}{2}\right) - \left[\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{-3e^{-2}+1-e^{-2}+1}{2} \\
&= 1-2e^{-2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D &= E-F \\
&= 1-3e^{-1}+2e^{-2} \\
&\leq 0.25
\end{aligned}$$

Et ceci achève la démonstration. En conclusion, on a

$$\boxed{0 \leq S \leq \frac{1}{4}}$$

- Partie III -

1/a/ L'entier n étant naturel, alors $e^{-n} \in [0,+\infty[$. La fonction F est une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$ (car elle est strictement croissante et continue), et donc il existe un unique antécédent α_n de e^{-n} par la fonction F, autrement dit il existe un unique $\alpha_n \in [0,+\infty[$ tel que $F(\alpha_n)=e^{-n}$. Donc il existe un unique $\alpha_n \in [0,+\infty[$ tel que

$$\boxed{\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}}\,\mathrm{d}t = e^{-n}}$$

b/ On sait que $e^{-n-1} \leq e^{-n}$ par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$F(\alpha_{n+1}) \leq F(\alpha_n)$$

Puisque la fonction F est croissante, alors

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$$

Et ceci pour tout entier naturel n non nul. Autrement dit, la suite (α_{n+1}) est décroissante.
La suite (α_{n+1}) est décroissante et minorée par zéro (par construction), elle est alors convergente.

c/ Appelons α la limite de la suite α_n. On sait que $\alpha \geq 0$ (Un passage à la limite dans l'inégalité $\alpha_n \geq 0$ vraie pour tout $n \geq 1$ montre que $\alpha \geq 0$). Supposons que α est strictement positif. Un passage à la limite dans la relation

$$\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}}\,\mathrm{d}t = e^{-n}$$

montre que

$$\int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+te^{-t}}\,\mathrm{d}t = 0$$

Mais le segment $[\alpha, 2\alpha]$ est non vide (car $\alpha > 0$) et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+te^{-t}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, en particulier sur le segment $[\alpha, 2\alpha]$, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+te^{-t}}$ est nulle sur le segment $[\alpha, 2\alpha]$, en particulier nulle en α, ce qui est impossible. Et ceci achève la démonstration. En conclusion

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0}$$

➽ On a utilisé une propriété très importante, qui s'énonce comme suit. Une fonction est nulle sur un segment dés qu'elle est positive et continue et son intégrale sur ce segment est nulle. Intuitivement l'intégrale d'une fonction strictement positive sur un segment est aussi strictement positive.
➽ Une méthode plus adaptée au programme de la terminale, est de considérer une primitive G de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+te^{-t}} > 0$ qui est strictement croissante (donc injective) car sa dérivée vaut $g > 0$ sur $[0, +\infty[$, et remarquer que $G(\alpha) = G(2\alpha)$ et ceci entraîne que $\alpha = 2\alpha$ par injectivité de G, i.e. $\alpha = 0$.
2/a/ L'entier naturel n étant fixé. Appliquons la formule de la valeur moyenne sur la fonction F (qui est continue -car dérivable- sur $[0, \alpha_n]$), il existe alors $\beta_n \in [0, \alpha_n]$ tel que

$$F(\beta_n) = \frac{\displaystyle\int_0^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha_n - 0} = \frac{\displaystyle\int_0^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha_n} = \frac{u_n}{\alpha_n}$$

Donc il existe $\beta_n \in [0, \alpha_n]$ tel que

$$\boxed{u_n = \alpha_n F(\beta_n)}$$

b/ Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\alpha_{n+1}} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Car la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et la fonction F est positive. Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant croissante, pour prouver qu'elle converge il suffit de prouver qu'elle est majorée. C'est ce qu'on essayera de prouver. La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante, elle alors majorée par u_1. Le caractère positif de la fonction F nous permet d'écrire

$$u_n = \int_0^{\alpha_n} F(t)\mathrm{d}t \leq \underbrace{\int_0^{\alpha_1} F(t)\mathrm{d}t}_{K}$$

Et ceci pour tout entier naturel $n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est alors majorée par K. En conclusion, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
Soit u la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. On sait que $u \geq 1$ (car $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$). Un passage à la limite dans l'égalité vraie pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \int_0^{\alpha_n} F(t)\,\mathrm{d}t$$

entraîne

$$u = \int_0^{\alpha} F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

car $\alpha = 0$ la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

3/ Réécrivons v_n pour tout $n \geq 1$ comme

$$v_n = \frac{F\left(u_n + \dfrac{2}{n}\right) - F\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)}{\left(u_n + \dfrac{2}{n}\right) - \left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)}$$

Et appliquons le théorème des accroissements finis sur la fonction F qui est dérivable sur $\left]u_n + \dfrac{1}{n}, u_n + \dfrac{2}{n}\right[$ et continue sur $\left[u_n + \dfrac{1}{n}, u_n + \dfrac{2}{n}\right]$, on aboutit à l'existence de $\lambda_n \in \left]u_n + \dfrac{1}{n}, u_n + \dfrac{2}{n}\right[$ tel que

$$v_n = \frac{F\left(u_n + \dfrac{2}{n}\right) - F\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)}{\left(u_n + \dfrac{2}{n}\right) - \left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)} = F'(\lambda_n)$$

Autrement dit il existe $\lambda_n \in \left]u_n + \dfrac{1}{n}, u_n + \dfrac{2}{n}\right[$ tel que

$$\boxed{v_n = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n(e^{\lambda_n} - 1)}{(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n)(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n})}}$$

b/ On sait que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_n + \frac{1}{n} \leq \lambda_n \leq u_n + \frac{2}{n}$$

Donc par le théorème des gendarmes, la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge et sa limite vaut $u = 0$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2xe^x)(1 + xe^{-x})}$ étant continue sur $[0, +\infty[$ (par opérations), un passage à la limite dans la relation

$$v_n = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n(e^{\lambda_n} - 1)}{(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n)(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n})}$$

vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$ fournit

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{1 \times 1}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et sa limite vaut

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} v_n = 1}$$

PROBLÈME 3(BACCALAURÉAT JUIN 2009).

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(0) = 0$ et pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$$

- PARTIE I -

Soit $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé direct.
1/a/ Montrer que la fonction f_n est continue à droite en zéro (On peut poser $x = t^n$).
b/ Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en zéro.

c/ Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$$

2/a/ Étudier les variations de la fonction f_1.
b/ Étudier les variations de la fonction f_2.
3/a/ Déterminer la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
b/ Tracer les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (On admet que le point $A(1,1)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_2$).

- PARTIE II -

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ par

$$F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1/a/ Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

b/ En déduire les variations de la fonction F sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
2/a/ Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

b/ Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
c/ Montrer que

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t) = \frac{3}{4}$$

3/ On suppose que la fonction F admet une limite finie l quand x tend vers $-\infty$. Prouver que

$$\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$$

- PARTIE III -

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \int_1^e f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1/a/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_n \geq 0$$

b/ Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1, e]$.
c/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n$$

d/ En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ converge.
2/a/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$$

b/ En déduire l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
3/a/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

b/ Déterminer les limites éventuelles des suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(nu_n)_{n\geq1}$.
4/ Soit a un nombre réel différent de u_1.
On considère la suite $(v_n)_{n\geq1}$ définie par $v_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$$

et pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$d_n = |v_n - u_n|$$

a/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$$

b/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$$

c/ Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$$

d/ En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq1}$ diverge.

PROBLÈME 3(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/a/ Posons $x = t^n$ où $t \geq 0$, on a $x \to 0^+$, alors $t \to 0^+$. On a alors

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} x(1-\ln x)^n = \lim_{t\to0^+}(t - nt\ln t)^n = 0 = f_n(0)$$

car $\lim_{t\to0^+} t\ln t = 0$. Donc la fonction f_n est continue à droite en zéro.
b/ On a

$$\lim_{t\to0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}(1-\ln x)^n = +\infty$$

Puisque $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en zéro.
c/ On a

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -\infty}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)^2 = +\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty}$$

Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=+\infty}$$

2/a/ La fonction f_1 est dérivable sur $]0,+\infty[$ (par opérations) et on a pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$f_1'(x)=(1-\ln x)-1=-\ln x$$

Le tableau des variations de la fonction f_1 est donc comme suit

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2/b/ La fonction f_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$ (par opérations) et on a pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$f_2'(x)=(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)=(1-\ln x)(1-\ln x-2)=\ln^2 x-1$$

Le tableau des variations de la fonction f_2 est donc comme suit

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_1	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

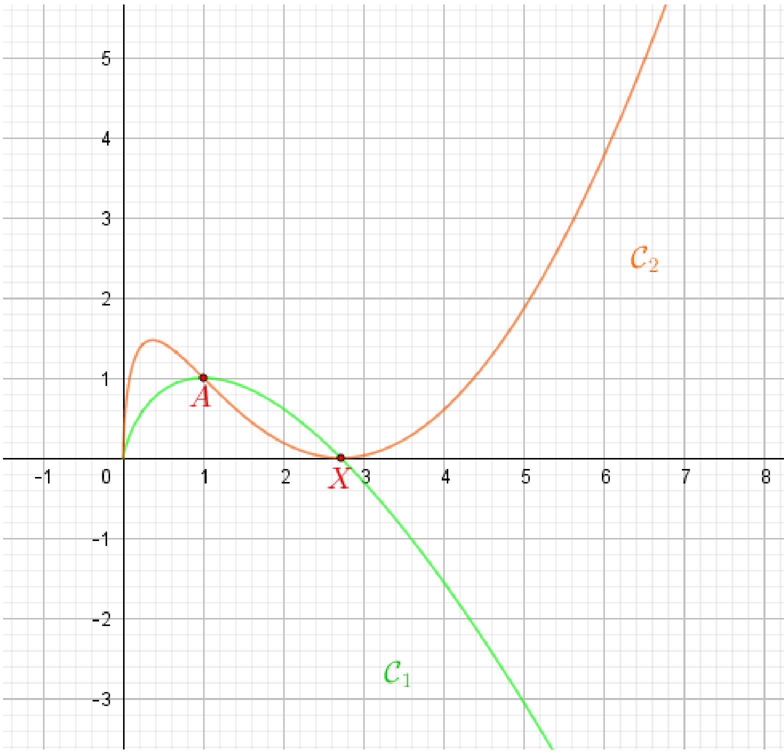
3/a/ Il s'agit de déterminer le signe de la différence f_2-f_1. On a pour tout $x>0$,

$$f_2(x)-f_1(x)=x(1-\ln x)^2-x(1-\ln x)=x(1-\ln x)(1-\ln x-1)$$

$$=x\ln x(\ln x-1)$$

Donc, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent au point $O(0,0)$ et $A(1,1)$ et $X(e,0)$. Sur l'intervalle $]0,1[$ la courbe $\mathcal{C}_2$ se situe au dessus de la courbe $\mathcal{C}_1$, sur l'intervalle $]1,e[$ la courbe $\mathcal{C}_2$ se situe au dessous de la courbe $\mathcal{C}_1$ et finalement sur $]e,+\infty[$ la courbe $\mathcal{C}_2$ se situe au dessus de la courbe $\mathcal{C}_1$.

b/ Les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont comme suit



- PARTIE II -

1/a/ Soit F_1 une primitive de la fonction $t\mapsto\dfrac{f_1(t)}{1+t^2}$ sur $]-\infty,0[$. On sait que pour tout $x<0$

$$F(x)=F_1(1)-F_1(e^x)$$

La fonction F est donc dérivable sur $]-\infty,0[$ (par opérations) et on a pour tout $x<0$,

$$F'(x)=-e^xF_1'(e^x)=-e^x\times\frac{f_1(e^x)}{1+e^{2x}}=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Donc, F est dérivable sur $]-\infty,0[$ et on a pour tout $x<0$,

$$\boxed{F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}}$$

b/ D'après la question précédente, le signe de F' sur $]-\infty,0[$ est celui de $x-1$. Puisque $x-1$ est strictement négative sur $]-\infty,0[$, et alors

x	$-\infty$		0
$F'(x)$		$-$	$\|\|$
F		$\searrow$	0

2/a/ Soit $x<0$ un nombre réel, et soit $t\in[e^x,1]$. On a

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+t^2}\le\frac{1}{1+e^{2x}}$$

En multipliant les termes des inégalités par $f_1(t)\ge 0$, on obtient

$$\frac{f_1(t)}{2}\le\frac{f_1(t)}{1+t^2}\le\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

En intégrant sur les segment $[e^x,1]$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,\mathrm{d}t\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,\mathrm{d}t}$$

vraie pour tout $x<0$.

b/ Il suffit de dériver la fonction donnée pour obtenir le résultat.
c/ On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to-\infty}\left[t^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right]_{e^x}^{1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{4}-e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{4}}$$

3/ D'après la question 2/a/, on a sait que

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x<0$. Sachant que

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{4}$$

alors

$$\boxed{\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}}$$

- PARTIE III -

1/a/ Soit $n\ge 1$ un entier naturel. On sait que pour tout $t\in[1,e]$

$$f_n(t)\ge 0$$

puisque $\ln t\le 1$ si $t\in[1,e]$, donc en intégrant l'inégalité

$$f_n(t)\ge 0$$

sur le segment $[1,e]$, on obtient

$$\boxed{u_n\ge 0}$$

vraie pour tout entier naturel $n\ge 1$. b/ Soit $x\in[1,e]$, on a

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)-f_n(x) &= x(1-\ln x)^{n+1}-x(1-\ln x)^n\\ &= x(1-\ln x)^n(1-1-\ln x)\\ &= -x(1-\ln x)^n\ln x\end{aligned}$$

Puisque la quantité $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ est positive pour $x\in[1,e]$, alors le signe de $f_{n+1}-f_n$ sur $[1,e]$ est celui de $-\ln$ sur $[1,e]$, mais on sait que $-\ln x\le 1$ dés que $x\ge 1$. Comme conclusion, la différence $f_{n+1}-f_n$ est toujours négative.
c/ Soit $n\ge 1$ un entier naturel. On sait d'après la question précédente que our tout $x\in[1,e]$, on a

$$f_{n+1}(x)\le f_n(x)$$

pour tout $x\in[1,e]$. En intégrant l'inégalité sur $[1,e]$ on obtient $u_{n+1}\le u_n$. Finalement, la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est décroissante.
d/ La suite $(u_n)_{n\ge1}$ est décroissante et minorée par zéro, elle est alors convergente.
2/a/ Soit $n\ge 1$ un entier naturel. On a

$$\begin{aligned}u_n &= \int_1^e f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^e t(1-\ln t)^n\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-t^2\frac{(1-\ln t)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e+\frac{2}{n+1}\int_1^e t(1-\ln t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}u_{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier naturel $n\ge 1$, on a

$$\boxed{u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n}$$

b/ Soit S l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. On a

$$\begin{aligned}S &= \int_1^e |f_2(t)-f_1(t)|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^e f_1(t)-f_2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^e f_1(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^e f_2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= u_1-u_2\\ &= u_1+\frac{1}{2}-u_1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S=\frac{1}{2}}$$

3/a/ On sait que pour tout entier naturel $n\ge 2$,

$$\frac{(n+1)u_n-1}{2}=u_{n+1}\ge 0$$

Donc pour tout entier naturel $n\ge 1$, on a $(n+1)u_n\ge 1$, c-à-d

$$u_n\ge\frac{1}{n+1}$$

D'autre part, on a

$$\frac{(n-1)u_n-1}{2}=u_{n+1}-u_n\le 0$$

Donc $(n-1)u_n\le 1$ pour tout entier $n\ge 2$, c-à-d

$$u_n\le\frac{1}{n-1}$$

Finalement, pour tout entier $n\ge 2$, on a

$$\boxed{\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n-1}}$$

b/ D'après la question précédente, on a pour tout entier $n\ge 2$

$$\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n-1}$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$$

Alors, d'après le théorème des gendarmes on déduit

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

D'autre part, on sait que pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1}$$

Sachant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

Donc, par le théorème des gendarmes on déduit

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} nu_n = 1}$$

4/a/ Procédons par récurrence. Pour $n = 1$, l'identité est évidente. Supposons l'identité vraie pour le rang n. On a

$$d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = (n+1) \times \frac{|v_n - u_n|}{2} = \frac{n+1}{2} \times \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$$

$$= \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$$

Donc, par principe de récurrence on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$$

b/ Montrons la proposition par récurrence. Pour $n = 2$, l'inégalité est évidente. Supposons l'inégalité vraie pour le rang n. Pour le rang $n+1$, on a

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq 2(n+1)3^{n-2} \geq 2 \times 3 \times 3^{n-2} = 2 \times 3^{n-1}$$

Donc par le principe de récurrence on a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\boxed{n! \geq 2 \times 3^{n-2}}$$

c/ En utilisant les questions **a/** et **b/**, on trouve

$$d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

Puisque $(3/2)^n$ diverge vers $+\infty$ (car $3/2 > 1$). Alors par comparaison des limites, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty}$$

du fait que $d_1 = |v_1 - u_1| \neq 0$.
d/ Supposons que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge. La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ s'écrit sous forme de la différence de $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ en valeur absolue. Par continuité de la valeur absolue, la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est convergente puisque la différence de deux suites convergentes est aussi convergente, et ceci contredit le résultat de la question précédente. Comme conclusion, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

➽ Á mon avis, le sujet de Juin 2009 est parmi les meilleurs sujets de Baccalauréat sciences mathématiques dans les dix dernières années.

PROBLÈME 4(TAJJIOU, BAC BLANC 2017).

Soit n un entier naturel. On considère la fonction numérique g_n définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $g_n(0) = n$ et pour tout $x > 0$,

$$g_n(x) = n - x \ln x$$

Et soit $\mathcal{C}_{g_n}$ la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé direct.

- PARTIE I -

1/a/ Montrer que la fonction g_n est continue à droite en zéro.
b/ Étudier la dérivabilité de la fonction g_n à droite en zéro.
c/ Calculer $g_n'(x)$ pour tout $x > 0$.
2/ Étudier les variations de fonction g_n.
3/ Étudier la branche infinie en $+\infty$.
4/ Déterminer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_{g_1}$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 1/e$.

- PARTIE II -

On pose $f = g_0$, et soit $n \geq 3$ un entier naturel.
1/ Montrer que l'équation $f(x) = 1/n$ admet exactement deux solutions x_n et y_n tels que

$$0 < x_n < \frac{1}{e} < y_n < 1$$

2/a/ Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
b/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a

$$x_n < \frac{1}{n}$$

puis déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
3/a/ Montrer que pour tout $x > 2$,

$$2 \ln x \leq x$$

puis déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a

$$\frac{1}{n^2} \leq x_n$$

b/ Montrer que pour tout entier $n \geq 3$,

$$\ln x_n \geq -\ln n - \ln 2 - \ln(\ln n)$$

c/ En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$$

4/a/ Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

b/ Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe $c_n \in]y_n, 1[$ tel que

$$\frac{y_n - 1}{\ln y_n} = c_n$$

c/ En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} n(y_n - 1) = -1$$

PROBLÈME 4(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/a/ On a

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \lim_{x\to 0^+} n - x\ln x = n$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, et alors

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = g_n(0)}$$

Donc g_n est continue à droite en zéro.

b/ On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g_n(x)-g_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{n - x\ln x - n}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$$

Donc g_n n'est pas dérivable en zéro à droite pour tout entier naturel n.

c/ Soit $x > 0$, on a

$$g_n'(x) = -\ln x - 1$$

2/ Soit $x > 0$. Le signe de $g_n'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln x + 1$. Le tableau des variations de la fonction g_n est comme suit

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g_n'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g_n	n	$\nearrow$	$n+e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

3/ On a

$$\lim_{x\to +\infty} g_n(x) = -\infty$$

Alors

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n - x\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n}{x} - \ln x = -\infty$$

Donc, la courbe $\mathcal{C}_{g_n}$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dans la direction des axes des ordonnés.

4/ Soit S l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_{\}_\infty}$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
S &= \int_{e^{-1}}^{1} |g_1(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{e^{-1}}^{1} |1 - x\ln x|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{e^{-1}}^{1} 1 - x\ln x\,\mathrm{d}x \qquad (g_1(x) \geq 0) \\
&= [x]_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x \\
&= (1-e^{-1}) - \left[\frac{x^2}{2}\times \ln x\right]_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= (1-e^{-1}) + \frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{e^{-1}}^{1} \\
&= \frac{3}{2} - e^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{e^{-2}}{4} \\
&= \frac{7}{4} - e^{-1} - \frac{e^{-2}}{4}
\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{S = \frac{7}{4} - e^{-1} - \frac{e^{-2}}{4}}$$

- PARTIE II -

1/ Soit $n \geq 3$ un entier naturel. La restriction de f à l'intervalle $]0, e^{-1}[$, c'est une bijection (car continue et strictement croissante), puisque $1/n \in]0, e^{-1}[= f(]0, e^{-1}[$. Donc, $1/n$ admet un unique antécédent x_n par la fonction f sur l'intervalle $]0, e^{-1}[$. De même, on montre qu'il existe un unique $y_n \in]e^{-1}, +\infty[$ solution de l'équation $f(x) = 1/n$ et on voit que $y_n < 1$ puisque $0 = f(1) < f(y_n) = 1/n$ et la fonction f est strictement décroissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Puisque $f_n(e^{-1}) = e^{-1} \neq 0$, alors l'équation admet exactement deux solutions x_n et y_n sur $]0, +\infty[$ tels que

$$\boxed{0 < x_n < e^{-1} < y_n < 1}$$

2/a/ D'abord, on voit que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est bornée. Pour prouver qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est monotone. C'est ce qu'on va prouver par la suite. On remarque que

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Donc, pour tout entier $n \geq 3$ on a

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$$

Puisque les deux réels x_n et x_{n+1} sont des éléments de $]0, e^{-1}[$ et la fonction f est croissante sur cet intervalle, alors $x_{n+1} \leq x_n$ et ceci pour tout entier naturel $n \geq 3$. La suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, comme celle-ci est minorée (car bornée), elle est alors convergente.

b/ Soit $ngeq3$ un entier naturel. Remarquons que $\frac{1}{n} = f(x_n)$, donc pour montrer que $x_n < \frac{1}{n}$, on va prouver que pour tout $x \in]0, e^{-1}[$ on a

$$x < f(x)$$

Soit $x \in]0, e^{-1}[$, on a

$$x < f(x) \iff x < -x\ln x \iff 1 < -\ln x \iff \ln e^{-1} > \ln x$$

Et ceci est vrai, par croissance stricte de la fonction logarithme. D'après ce qui précède, on a pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{n}$$

Puisque $1/n \to 0$ quand $n \to \infty$, le théorème des gendarmes montre que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$$

3/a/ Soit x un réel > 2. On considère la fonction h définie sur $[2, +\infty[$ par

$$h(x) = 2\ln x - x$$

Il s'agit de prouver que $h \leq 0$, on a pour tout $x > 2$

$$h'(x) = \frac{2}{x} - 1 = -\frac{x-2}{x} < 0$$

Et on a

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	0 $\qquad$ $-$
f	$2\ln 2 - 2$ $\searrow$ $-\infty$

Donc la valeur maximale de la fonction h sur $[2, +\infty[$ est $2\ln 2 - 2 < 0$, d'où on a pour tout $x > 2$, $h(x) < 0$. En conclusion, pour tout $x > 2$, on a

$$\boxed{2\ln x \le x}$$

Pour la deuxième partie de la question, on a

$$\frac{1}{n^2} \le x_n \iff f\left(\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n^2}\ln(n^2) \le \frac{1}{n} \iff 2\ln n \le n$$

Et puisque $n > 2$, cette inégalité est vraie d'après ce qui précède. En conclusion, pour tout entier naturel $n \ge 3$ on a

$$\boxed{\frac{1}{n^2} \le x_n}$$

b/ Soit $n \ge 3$ un entier naturel, on a

$$\begin{aligned}
\ln x_n \ge -\ln n - \ln 2 - \ln(\ln n) &\iff \ln x_n \le \ln\left(\frac{1}{2n\ln n}\right) \\
&\iff x_n \le \frac{1}{2n\ln x_n} \\
&\iff x_n \ln x_n \le \frac{1}{2n} \\
&\iff -f(x_n) \le \frac{1}{2n} \\
&\iff f(x_n) \ge -\frac{1}{2n} \\
&\iff \frac{1}{n} \ge -\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Et cette inégalité est bien sur vraie. Comme conclusion, pour tout entier naturel $n \ge 3$, on a

$$\boxed{\ln x_n \ge -\ln n - \ln 2 - \ln(\ln n)}$$

c/ D'une part on sait que pour tout entier $n \ge 3$, on a $\ln x_n \le -\ln n$ (car $x_n \le 1/n$ et la fonction logarithme est croissante sur son domaine de définition). D'autre part, d'après la question précédente, on a

$$\ln x_n \ge -\ln n - \ln 2 - \ln(\ln n)$$

Donc

$$-1 \le \frac{\ln x_n}{n} \le -1 - \underbrace{\frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}}_{\to 0}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1}$$

4/a/ La suite $(y_n)_{n\ge 3}$ est également bornée. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est monotone. Comme la fonction f est strictement décroissante sur le domaine d'arrivée de la suite $(y_n)_{n\ge3}$, il suffit de prouver que la différence $f(y_{n+1}) - f(y_n)$ possède un signe constant. On a

$$f(y_{n+1}) - f(y_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

pour tout entier $n \ge 3$. Donc la suite $(y_n)_{n\ge3}$ converge.
Passons à la deuxième partie de la question, le calcul de la limite de la suite $(y_n)_{n\ge3}$. Soit l la limite de la suite $(y_n)_{n\ge3}$. On a $e^{-1} \le l \le 1$ (car $e^{-1} < y_n < 1$ pour tout entier $n \ge 3$). On sait que pour tout $n \ge 3$ entier, $f(y_n) = 1/n$, la continuité de f permet un passage à la limite et donne $f(l) = 0 = f(1)$ et comme f est injective sur $[e^{-1}, +\infty[$ (car strictement décroissante), donc $l = 0$. En conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = 1}$$

b/ Soit $n \ge 3$ un entier naturel. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $[y_n, 1]$ et dérivable sur $]y_n, 1[$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]y_n, 1[$ tel que

$$\frac{\ln y_n - \ln 1}{y_n - 1} = \frac{1}{c_n}$$

Donc, pour tout entier $n \ge 3$ il existe $c_n \in]y_n, 1[$ tel que

$$\boxed{\frac{y_n - 1}{\ln y_n} = c_n}$$

c/ Remarquons que pour tout entier $n \ge 3$, on a

$$c_n = \frac{y_n - 1}{\ln y_n} = \frac{y_n(y_n - 1)}{y_n \ln y_n} = \frac{y_n(y_n-1)}{-\frac{1}{n}} = -ny_n(y_n - 1)$$

Donc

$$n(y_n - 1) = -\frac{c_n}{y_n}$$

Comme $1 \le c_n \le y_n$ et $y_n \to 1$ quand $n \to \infty$, alors $c_n \to 1$ quand $n \to \infty$ Donc par opérations $c_n/y_n \to 1$ et alors

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n(y_n - 1) = -1}$$

Problème 5(Belkhatir, Bac blanc 2017).

- Partie I -

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + 2\ln x$$

pour tout $x > 0$.
1/ Étudier les branches paraboliques de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2 - x}{x}$$

puis donner le tableau des variations de la fonction f.
3/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2, +\infty[$ et que $\alpha \in]3, 4[$.
4/ Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans repère orthonormé direct.

- PARTIE II -

Soient (a_n) et (b_n) les deux suites définies par leurs termes initiaux $a_0 = 3$ et $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = 1 + 2\ln b_n, \qquad a_{n+1} = 1 + 2\ln a_n$$

1/ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$2 < a_n < \alpha < b_n$$

2/ Montrer que la suite (a_n) est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3/a/ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{2}{3}(b_n - a_n)$$

b/ En déduire que pour tout entier naturel n,

$$0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4/ Montrer que les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

PROBLÈME 5(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/a/ On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - x + 2\ln x = -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $x = 0$ comme asymptote.
D'autre part, on a

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - x + 2\ln x = \lim_{x\to +\infty} 1 - x\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

Déterminons alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - x + 2\ln x}{x} = -1$$

On a

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) + x = \lim_{x\to +\infty} 1 + 2\ln x = +\infty$$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite $y = -x$.

2/ La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par opérations et on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2 - x}{x}$$

Pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x$ puisque $x > 0$, donc le tableau des variations de la fonction f est comme suit

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

3/ On a

$$f([2, +\infty[) =]-\infty, f(2)]$$

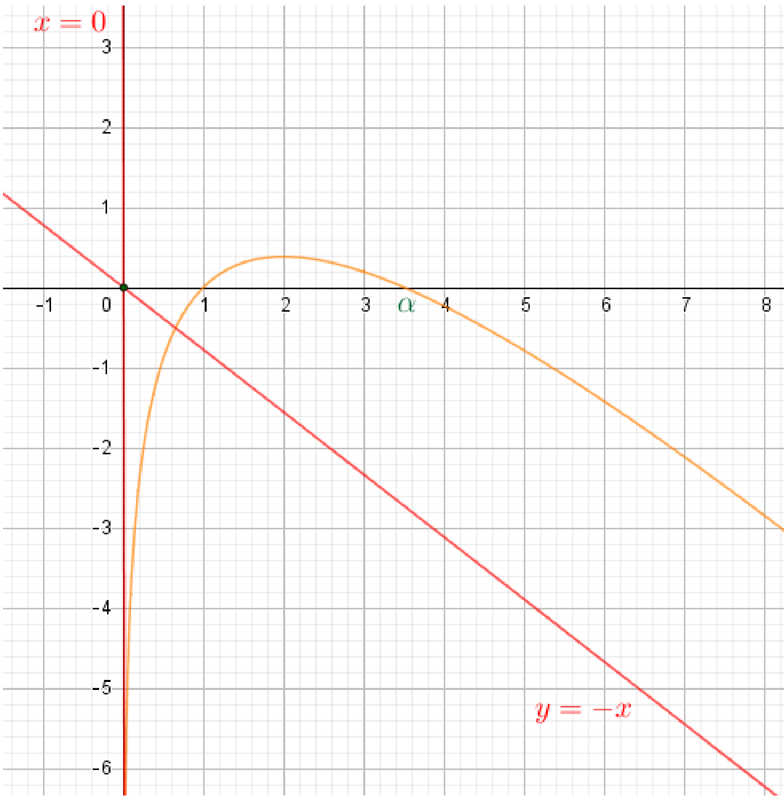
puisque $f(2) = 1 - 2 + 2\ln 2 = 2\ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{4}{e}\right) > 0$, alors $\alpha \in f([2, +\infty[)$ et puisque f est une bijection (car continue et strictement décroissante) de $[2, +\infty[$ vers $f([2, +\infty[)$ et $0 \in f([2, +\infty[)$, alors il existe un unique antécédent α de 0 par la restriction de f à $[2, +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2, +\infty[$ et puisque

$$f(3) \times f(4) < 0 \quad \text{(C'est facile à véridier)}$$

Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\boxed{3 < \alpha < 4}$$

4/ La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé direct.



- PARTIE II -

1/ Montrons le résultat par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident. Supposons le résultat vria pour le rang n, et montrons qu'il est vraie également pour le rang $n + 1$.
Commençons par remarquer que si on pose $h(x) = 2\ln x + 1$ pour tout $x \geq 2$, on a $h(\alpha) = \alpha$ puisque $f(\alpha) = 1 - \alpha + 2\ln\alpha = 0$. De plus la fonction h est strictement croissante sur son domaine de définition. Par conséquent, on a

$$h(2) < h(a_n) < h(\alpha) < h(b_n)$$

mais $h(2) > 2$ et aussi on a $h(a_n)a_{n+1}$, $h(b_n) = b_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$. Donc

$$2 < a_{n+1} < \alpha < b_{n+1}$$

Donc, par principe de récurrence, on conclut que pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{2 < a_n < \alpha < b_n}$$

2/ Montrons par récurrence que la suite (a_n) est strictement croissante. Pour $n = 0$, on a évidemment $a_0 = 3 < 1 + 2\ln 3$ Supposons que pour le rang n, on a $a_n < a_{n+1}$ et montrons que $a_{n+1} < a_{n+2}$. On a

$$a_{n+2} - a_{n+1} = h(a_{n+1}) - h(a_n) = 2(\ln a_{n+1} - \ln a_n) > 0$$

Puisque la fonction logarithme est strictement croissante. On conclut que la suite (a_n) est strictement croissante.
On utilise un méthode similaire pour prouver que la suite (b_n) est strictement décroissante.
3/ Puisque la suite (a_n) est strictement croissante, alors

$$a_0 \le a_n < b_n$$

pour tout entier naturel n, i.e. on a $3 \le a_n < b_n$. Dorénavant, on note h la fonction définie sur $[3, +\infty[$ par $h(x) = 2\ln x + 1$. On va montrer par la suite que pour tout $(x, y) \in [3, +\infty[$, on a

$$|h(x) - h(y)| \le \frac{2}{3}|x - y|, \qquad (*)$$

En effet, la fonction h est dérivable sur son domaine de définition (par opérations) et on a pour tout $x \ge 3$,

$$|h'(x)| = \left|\frac{2}{x}\right| \le \frac{2}{3}$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissement finis, on obtient $(*)$. En particulier, pour $x = a_n$ et $y = b_n$ (n étant fixe), on obtient

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \le \frac{2}{3} \times |a_n - b_n|$$

Puisque pour tout entier naturel n, on a $a_n < b_n$, alors on déduit que pour tout entier naturel n,

$$\boxed{a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{2}{3} \times (b_n - a_n)}$$

b/ Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$b_n - a_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Pour $n = 0$, rien à prouver. Supposons que l'inégalité est vraie pour le rang n. On a

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{2}{3} \times (b_n - a_n) \le \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Et ceci achève la récurrence. Finalement, pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{0 < b_n - a_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

4/ La suite (a_n) est croissante, pourtant la suite (b_n) est décroissante et la limite de leur différence est nulle (en appliquant le théorème des gendarmes dans le résultat de la question précédente). Donc, les deux suites sont adjacentes.
Appelons l leur limite commune, un passage à la limite dans la relation récurrente (puisque la fonction $x \mapsto 1 + 2\ln x$ est continue)

$$a_{n+1} = 2\ln u_n + 1$$

montre que

$$l = 2\ln l + 1$$

Autrement dit $f(l) = 0$. De plus $l \ge 3$ (car la suite (a_n) est minorée par 3), alors

$$f(l) = f(\alpha)$$

Et l'injectivité de f sur $[3, +\infty[$ (car f strictement croissante sur cet intervalle) entraîne $l = \alpha$. Finalement, les deux suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune vaut α le point d'annulation de la fonction f sur $[2, +\infty[$.