PROBLÈMES SUR LES NOMBRES COMPLEXES POUR LA PRÉPARATION À L'EXAMEN NATIONAL

PROBLÈME 1(DEVOIR BLANC 2017, BELKHATIR).

- PARTIE I -

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(E), \quad z^2 - (1+5i)z - 8 + 4i = 0$$

1/ Déterminer les racines carrés du nombre complexe $8 - 6i$.
2/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E).

- PARTIE II -

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = -1+3i$.
1/ Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
2/ On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre A et de rapport -2.
a/ Déterminer l'écriture complexe des transformations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{H}$.
b/ Montrer que l'écriture complexe de la transformation $F = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$ est

$$z' - i = -2i(z - i)$$

c/ Soit C' l'image du point C par la transformation F.
Montrer que les points A, B et C' sont colinéaires.
3/ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points A, B, C et M soient cocycliques.

PROBLÈME 1(SOLUTION PROPOSÉE).

- PARTIE I -

1/ L'idée est d'écrire $8 - 6i$ sous forme d'un carré d'un nombre complexe. Remarquons que

$$(3-i)^2 = 9 - 1 - 6i = 8 - 6i$$

Donc les racines carrés du nombres complexe sont

$$\boxed{\{\delta_1, \delta_2\} = \{3 - i, -3 + i\}}$$

2/ Le discriminant de l'équation (E) est

$$\delta = (1+5i)^2 + 4(8-4i) = -24 + 10i - 16i + 32 = 8 - 6i$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont

$$z_1 = \frac{1+5i-\delta_1}{2}, \qquad z_2 = \frac{1+5i+\delta_1}{2}$$

c-à-d

$$z_1 = 2+2i, \qquad z_2 = -1+3i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

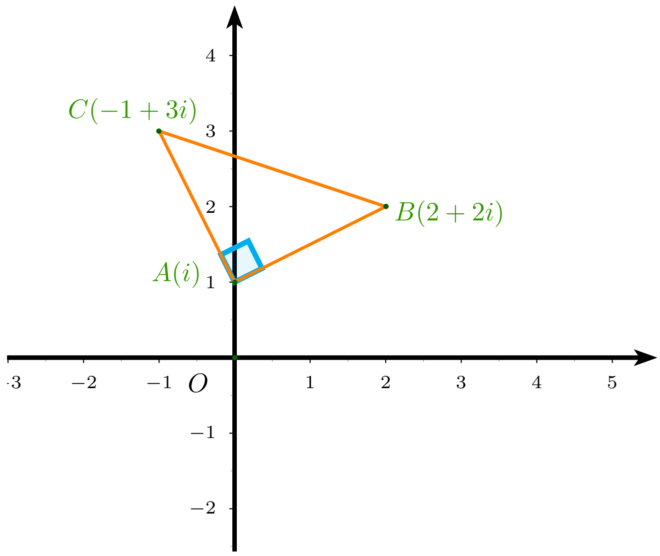
$$\boxed{S = \{2+2i, -1+3i\}}$$

- PARTIE II -

1/ Le triangle ABC est rectangle est isocèle en A si et seulement si $AB = AC$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} &= \frac{i - 2 - 2i}{i + 1 - 3i} \\ &= \frac{-2 - i}{1 - 2i} \\ &= -i \times \frac{2i - 1}{2i - 1} \\ &= -i \end{aligned}$$

Donc $|z_A - z_B| = |z_A - z_C|$ et $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Autrement dit, on a $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, et ceci est équivalent à dire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.



2/a/ Déterminons l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}$. Soit $M(z)$ un point du plan complexe, et soit $M'(z')$ l'image du point M par la rotation $\mathcal{R}$. On a alors

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) + i = i(z - i) + i = iz + i + 1$$

Donc

$$\boxed{z' = iz + i + 1}$$

Pour l'homothétie $\mathcal{H}$. Soit $M(z)$ un point du plan complexe, et soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par l'homothétie $\mathcal{H}$. On a alors

$$z' = -2(z - i) + i = -2z + 3i$$

Donc

$$\boxed{z' = -2z + 3i}$$

b/ Soit $M(z)$ un point du plan complexe. Trouvons $M_{\mathcal{F}}(z_{\mathcal{F}})$ l'image du point $M(z)$ par la transformation $\mathcal{F}$. Appelons f l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z \mapsto z_{\mathcal{F}}$, et définissons similairement les applications r et h. On a

$$z_{\mathcal{F}} = f(z) = r \circ h(z) = r(h(z)) = ih(z) + i + 1 = -2i(z - i) + i$$

Donc l'écriture complexe de la transformation $\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$ est

$$\boxed{z' = -2i(z - i) + i}$$

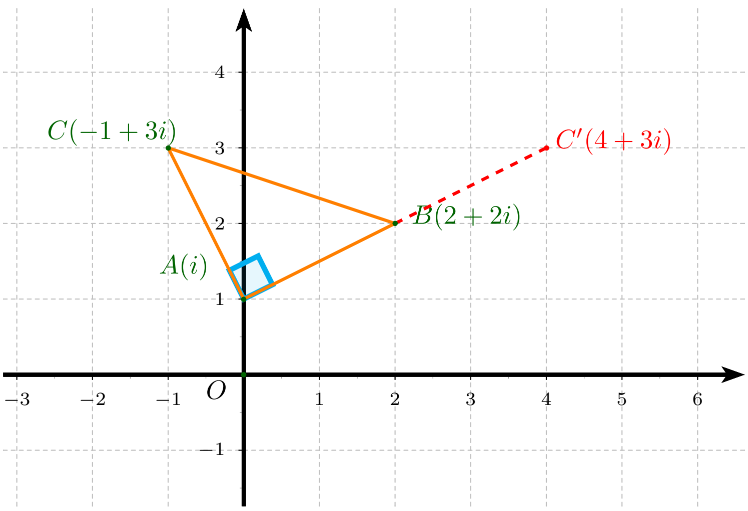
c/ Déterminons d'abord $z_{C'}$ l'affixe du point C'. On a

$$z_{C'} = -2i(z_C - i) + i = -2i(-1+2i) + i = 3i + 4$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_{C'}}{z_A - z_B} &= \frac{i - 3i - 4}{i - 2 - 2i} \\ &= \frac{-2i - 4}{-2 - i} \\ &= 2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

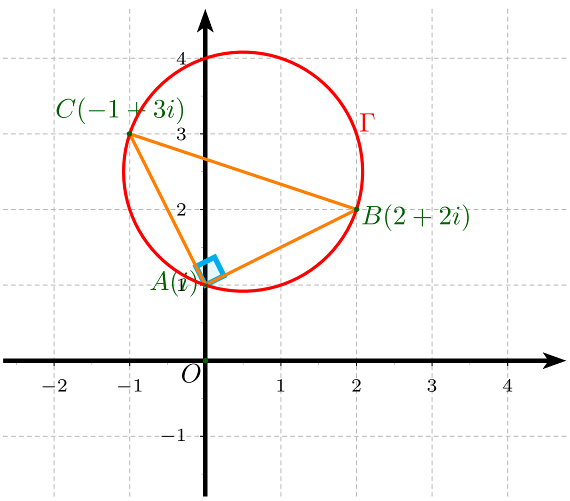
Donc les points A, B et C' sont colinéaires.



➽ On pourrait montrer que les points A, B et C' en utilisant un raisonnement direct (sans calcul).
➽ On pourrait également remarquer que B est le milieu de $[AC']$, par conséquent les points A, B et C' doivent être colinéaires.
3/ Soit Γ l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe pour lesquels A, B, C et M sont cocycliques. Puisque les points A, B et C ne sont pas colinéaires, on a

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\iff \frac{z - z_C}{z - z_B} \times \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}^* \\ &\iff \frac{z - z_C}{z - z_B} \in i\mathbb{R}^* \quad \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^*\right) \end{aligned}$$

Et ceci est équivaut à dire que le triangle MBC est rectangle en M. Par conséquent, Γ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point $A(i)$.



Problème 2(Devoir Blanc 2018, Belkhatir).
Les parties I et II sont indépendantes.
Soit θ un nombre réel appartenant à $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

- Partie I -

Soient z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(E), \quad z^2 + 2iz - 1 + ie^{i\theta} = 0$$

1/ Sans résoudre l'équation (E), montrer que

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

2/ Déterminer la valeur de θ pour laquelle $1 - i$ est solution de (E), puis écrire dans ce cas les solutions de (E) sous forme trigonométrique.
3/ Déterminer en fonction de θ les solutions de l'équation (E).

- Partie II -

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle dont les bases sont $[BC]$ et $[AD]$. On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre C et d'angle θ et on pose $A' = \mathcal{R}(A)$ et $B' = \mathcal{R}(B)$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [A'D]$ et $[B'C]$. On munit le plan complexe du repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que a est l'affixe de C et $b + ic$ est l'affixe de D avec a, b et c trois nombres réels.
1/ Vérifier que l'affixe de B est $-a$ et que l'affixe de A est $-b + ic$.
2/ Montrer que l'affixe de A' est $a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta}$ et que l'affixe de B' est $a(1 - 2e^{i\theta})$.
3/ Prouver que

$$\frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a+b}{2a} + \frac{ic}{2a} \times \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

puis déduire que les points I, J et K sont alignés.

Problème 2(Solution proposée).

- Partie I -

1/ Les solutions de l'équation (E) étant z_1 et z_2, on a alors $z_1 \times z_2 = -1 + ie^{2i\theta}$. Par conséquent,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \arg(-1 + ie^{2i\theta}) \pmod{2\pi}$$

Or,

$$\begin{aligned} -1 + ie^{2i\theta} &= e^{i\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \\ &= e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= 2i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \underbrace{2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}_{>0} e^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\boxed{\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}}$$

2/ Le nombre complexe $1-i$ est solution de l'équation si et seulement si

$$(1-i)^2+2i(1-i)-1+ie^{2i\theta}=0$$

si et seulement si

$$-2i+2i+2-1+ie^{2i\theta}=0$$

si et seulement si

$$e^{2i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Puisque $2\theta\in\left]0,\dfrac{3\pi}{2}\right[\subset[0,2\pi[$, alors $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$, et ceci est équivaut à dire que

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

3/ Le discriminant de l'équation (E) s'écrit

$$\Delta=-4+4-4ie^{2i\theta}=4e^{i\left(2\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}=\left(2e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}\right)^2$$

Donc, les solutions de l'équation (E) sont

$$z_1=\frac{-2i-2e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}}{2}=-i-e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$$

Et

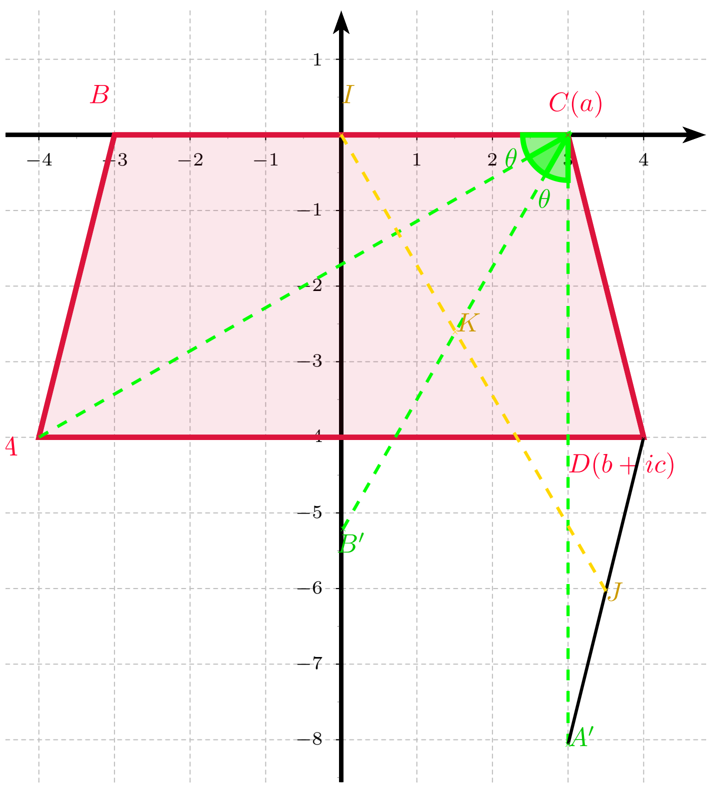
$$z_2=-i+e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$\boxed{S=\left\{-i-e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)},-i+e^{i\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}\right\}}$$

- Partie II -

La figure ci-dessous illustre les données de l'exercice.



1/ On sait que l'affixe du point I est $z_I=0$ et que I est le milieu du segment $[BC]$, donc

$$0=z_I=\frac{z_B+z_C}{2}$$

Par conséquent, on a

$$z_b=-z_c=-a$$

Donc l'affixe z_B du point B est

$$\boxed{z_b=-a}$$

Pour l'affixe z_A du point A, remarquons que A est le symétrique du point C par rapport à l'axe imaginaire, puisque $z_C=b+ic$, alors

$$\boxed{z_A=-b+ic}$$

2/ Soit $z_{A'}$ l'affixe du point A'. On sait que A' est l'image du point A par la rotation de centre C et d'angle θ, donc

$$z_{A'}=e^{i\theta}(z_A-z_C)+z_C$$

Un calcul rapide montre que

$$\boxed{z_{A'}=a(1-e^{i\theta})+(-b+ic)e^{i\theta}}$$

On montre dde même que

$$\boxed{z_{B'}=a(1-2e^{i\theta})}$$

3/ On a

$$\begin{aligned}\frac{z_J-z_I}{z_K-z_I}&=\frac{\dfrac{z_D+z_{A'}}{2}-z_I}{\dfrac{z_C+z_{B'}}{2}-z_I}\\&=\frac{\dfrac{b+ic+a(1-e^{i\theta})+(-b+ic)e^{i\theta}}{2}-0}{\dfrac{a+a(1-2e^{i\theta})}{2}-0}\\&=\frac{(a+b)(1-e^{i\theta})+ic(1+e^{i\theta})}{2a(1-e^{i\theta})}\\&=\frac{a+b}{2a}+\frac{ic}{2a}\times\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

Finalement, comme désiré on a obtenu,

$$\boxed{\frac{z_J-z_I}{z_K-z_I}=\frac{a+b}{2a}+\frac{ic}{2a}\times\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}}$$

Remarquer que la quantité

$$\frac{a+b}{2a}+\frac{ic}{2a}\times\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

est un nombre réel. En effet, on sait déja que $\dfrac{a+b}{2a}$ et $\dfrac{c}{2a}$ sont des nombre réels. On pose $Z=i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On va montrer par la suite que Z est un nombre réel, autrement dit $\overline{Z}=Z$.

$$\begin{aligned}Z=\overline{Z}&\iff i\times\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=-i\times\frac{1+e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}\\&\iff\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=-\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\end{aligned}$$

Et ceci est vrai. En conclusion, les points I,J et K sont alignés.

➽ L'objectif de cet exercice était de montrer que les points I,J et K sont alignés en utilisant les nombres complexes.

PROBLÈME 3(APMT 2017).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et θ un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

1/a/ Déterminer en fonction de θ, le nombre complexe m tel que

$$m\cos\theta + \overline{m}\sin\theta = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b/ Écrire m sous sa forme trigonométrique.

2/ Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe m quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que

$$\operatorname{Re}(m) > \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(m) > \frac{1}{2}$$

3/ Soient r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et A le point d'affixe $\sqrt{2}$. On pose $B = h \circ r(A)$.

a/ Montrer que les deux droites (OB) et (AB) sont orthogonales.

b/ Montrer que OB est la valeur minimale du module de m quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

4/ Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z tel que

$$|z\cos\theta + \overline{z}\sin\theta| = 1$$

Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, Γ passe par quatre points fixes et cocycliques qu'on déterminera.

5/a/ Déterminer pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, l'ensemble $\Gamma \cap \mathcal{H}$.

b/ Construire dans le même repère $\mathcal{H}$ et Γ pour $\theta = 0$.

PROBLÈME 3(SOLUTION PROPOSÉE).

1/a/ Écrivons $m = x + iy$, on a alors

$$x\cos\theta + x\sin\theta + iy\cos\theta - iy\sin\theta = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

c-à-d

$$(x\cos\theta + x\sin\theta) + i(y\cos\theta - y\sin\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Autrement dit

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta + \sin\theta)}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta - \sin\theta)}$$

En conclusion,

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta + \sin\theta)} + i\frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta - \sin\theta)}}$$

2/ Écrivons m sous sa forme trigonométrique. Mentionnons que sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\sin < \cos$ (Il suffit d'étudier la fonction tangente). On a

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta + \sin\theta)} + i\frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta - \sin\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\right] \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta \\ &= \underbrace{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}_{>0} \end{aligned}$$

Et que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \underbrace{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}_{>0}$$

Donc l'écriture trigonométrique du nombre complexe m est

$$\boxed{m = \left[\frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}, \theta + \frac{\pi}{4}\right]}$$

2/ Il s'agit de montrer que

$$\frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta + \sin\theta)} > \frac{1}{2}$$

Et que

$$\frac{\sqrt{2}}{2(\cos\theta - \sin\theta)} > \frac{1}{2}$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$\cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta - \sin\theta < \sqrt{2} \qquad (*)$$

Ce qui est immédiat en remarquant que

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 2$$

En conclusion, on obtient

$$\boxed{\operatorname{Re}(m) > \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(m) > \frac{1}{2}}$$

➽ On pourrait montrer les inégalités de $(*)$ en utilisant des études de fonctions.

3/a/ Commençons par déterminer l'affixe b du point B. On sait d'après le texte de l'exercice que

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2} - 0\right) + 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Pour montrer que les droites $(0B)$ et (AB) sont orthogonales, il suffit de prouver que

$$\arg\left(\frac{b-a}{b-o}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \qquad (*)$$

avec o, a et b les affixes respectifs des points O, A et B. On a

$$\frac{b-a}{b-o} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{i-1}{i+1}$$

Il est facile de vérifier que $\frac{i-1}{i+1}$ est imaginaire pur. D'où $(*)$, finalement on a prouvé que les droites (OB) et (AB) sont orthogonales.

b/ D'abord $OB = |b| = 1$. Il s'agit de montrer que 1 est la valeur minimale de $|m|$ quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on sait que

$$|m| = \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

Mais la valeur maximale que peut prendre la fonction $\theta \mapsto \cos 2\theta$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ est 1 pour $\theta = 0$. D'où le résultat.

4/ Remarquons que les points P_1, P_2, P_3 et P_4 d'affixes respectifs $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont d'abord des points de l'ensemble Γ (car leurs affixes vérifient $|z\cos\theta + \overline{z}\sin\theta| = 1$, de plus les points P_1, P_2, P_3 et P_4 vérifient tous l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ (Ils appartiennent donc tous au cercle de centre O et de rayon 1), par conséquent ils sont cocycliques. Finalement, Γ passe par quatre points cocycliques P_1, P_2, P_3 et P_4 et fixes puisqu'ils ne dépendent pas de θ.

➽ Le lecteur attentif remarquera que les points P_1, P_2, P_3 et P_4 viennent du contexte de l'exercice.
➽ La nature géométrique de l'ensemble Γ est une ellipse.

5/a/ Puisque pour tout $m \in \mathcal{H}$, on a $m\cos\theta + \overline{m}\sin\theta = e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors $|m\cos\theta + \overline{m}\sin\theta| = 1$. Donc $\mathcal{H} \subset \Gamma$. Par conséquent,

$$\boxed{\Gamma \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}}$$

pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

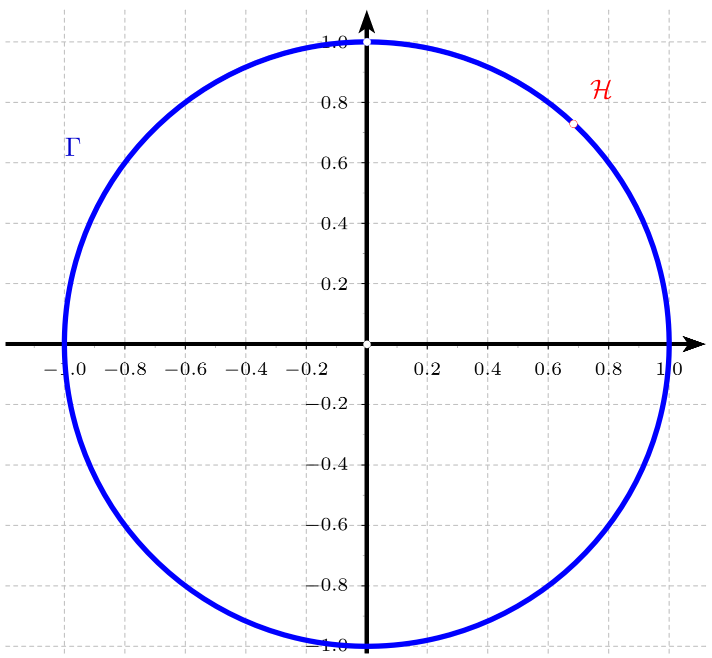
b/ On a d'abord

$$\Gamma = \{M(z) \in \mathcal{P} / \quad |z| = 1\}$$

Et

$$\mathcal{H} = \{e^{i\frac{\pi}{4}}\}$$

Donc



Problème 4(Devoir blanc 2017, Belkhatir).

Soit a un nombre réel non nul. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = (1 + ia)z - 2ia$$

1/ Montrer que l'équation

$$(E), \quad f(z) = z$$

admet une unique solution ω dans l'ensemble $\mathbb{C}$ qu'on doit déterminer.
Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on considère les deux ensembles

$$D = \{M(z) \in \mathcal{P}, \quad f(z) \in \mathbb{R}\}$$

Et

$$\Delta = \{M(z) \in \mathbb{R}, \quad f(z) \in i\mathbb{R}\}$$

2/a/ Montrer que D et Δ sont deux droites qu'on doit déterminer leurs équations.
b/ Montrer que les droites D et Δ sont orthogonales puis déterminer l'affixe du point de leur intersection.
3/ On pose $\theta = \arctan(a)$. Montrer que pour tout point $M(z)$ de $\mathcal{P}$ tel que $z \neq \omega$, on a

$$\Omega M' = \frac{1}{\cos\theta} \times \Omega M, \qquad \overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

tel que Ω et le point d'affixe ω et M' le point d'affixe $f(z)$.
4/ Montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \{M(z) \in \mathcal{P}, \quad |f(z) - \omega| = 1\}$$

est un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r = \cos\theta$.
5/ Montrer que l'ensemble

$$\Gamma' = \left\{M(z) \in \mathcal{P}, \quad |f(z)| = \frac{1}{\cos\theta}\right\}$$

est un cercle de rayon $r = 1$ et de centre A_0 d'affixe $z_0 = 2\sin^2\theta + i\sin(2\theta)$.

Problème 4(Solution proposée).

1/ On a

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff f(z) = z \\ &\iff (1 + ia)z - 2ia = z \\ &\iff iaz = 2ia \\ &\iff z = 2 \end{aligned}$$

Donc l'équation (E) admet une unique solution $\omega = 2$.
2/a/ On a en posant $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} M(z) \in D &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff (1 + ia)z - 2ia = (1 - ia)\overline{z} + 2ia \\ &\iff z + iaz - 2ia = \overline{z} - ia\overline{z} + 2ia \\ &\iff x + iy + iax - ay - 2ia = x - iy - iax - ay + 2ia \\ &\iff y + ax - 2a = -y - ax + 2a \\ &\iff 2y = -2ax + 4a \\ &\iff y = -ax + 2a \end{aligned}$$

Donc D est la droite d'équation cartésienne

$$\boxed{(D): \quad y = -ax + 2a}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
M(z)\in\Delta &\iff f(z)\in i\mathbb{R}\\
&\iff f(z)=-\overline{f(z)}\\
&\iff f(z)+\overline{f(z)}=0\\
&\iff (1+ia)z-2ia+(1-ia)\overline{z}+2ia=0\\
&\iff (z+\overline{z})+ia(z-\overline{z})=0\\
&\iff 2x-2ay=0\\
&\iff y=\frac{1}{a}x
\end{aligned}$$

Donc Δ est la droite d'équation cartésienne

$$\boxed{\Delta:\quad y=\frac{1}{a}x}$$

Puisque le produit des deux coefficients directeurs des deux droites D et Δ vaut -1, alors les deux droites D et Δ sont orthogonales.
Soit $z_0=x_0+iy_0$ l'affixe du point X d'intersection des deux droites D et Δ. On sait que $y_0=-a^2y_0+2a$, puis $y_0=\dfrac{2a}{1+a^2}$ et $x_0=\dfrac{2a^2}{1+a^2}$. Donc l'affixe du point d'intersection des deux droites est

$$\boxed{z_0=\frac{2a^2}{1+a^2}+i\frac{2a}{1+a^2}}$$

3/ Commençons par montrer que

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M}=\frac{1}{\cos\theta}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega M'}{\Omega M} &= \frac{|f(z)-\omega|}{|z-\omega|}\\
&= \frac{|f(z)-f(\omega)|}{|z-\omega|}\\
&= \left|\frac{(1+ia)(z-\omega)}{z-\omega}\right|\\
&= |1+ia|\\
&= \sqrt{1+a^2}\\
&= \sqrt{1+\tan^2\theta}\\
&= \frac{1}{|\cos\theta|}\\
&= \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\Omega M'=\frac{1}{\cos\theta}\times\Omega M}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})} &\equiv \arg\left(\frac{f(z)-\omega}{z-\omega}\right) \pmod{2\pi}\\
&\equiv \arg(1+ia) \pmod{2\pi}\\
&\equiv \arctan(a) \pmod{2\pi}\\
&\equiv \theta \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})}\equiv\theta \pmod{2\pi}}$$

➽ Une propriété à retenir, si $z=x+iy$ la forme algébrique du nombre complexe z avec $x\neq 0$, alors $\arg(z)\equiv\arctan(y/x) \pmod{2\pi}$ si $x>0$ et $\arg(z)\equiv\arctan(y/x)+\pi \pmod{2\pi}$ si $x<0$.

4/ On sait que

$$\begin{aligned}
z\in\Gamma &\iff |f(z)-\omega|=1\\
&\iff |f(z)-f(\omega)|=1\\
&\iff |(z-\omega)(1+ia)|=1\\
&\iff |z-\omega|=\frac{1}{|1+ia|}\\
&\iff |z-\omega|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\\
&\iff |z-\omega|=\cos^2\theta
\end{aligned}$$

Donc Γ est le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r=\cos\theta$.

5/ En écrivant $z=x+iy$, on a

$$\begin{aligned}
z\in\Gamma' &\iff |f(z)|=\frac{1}{\cos\theta}\\
&\iff |(1+ia)z-2ia|=\frac{1}{\cos\theta}\\
&\iff |x+iy+iax-ay-2ia|=\frac{1}{\cos\theta}\\
&\iff (x-ay)^2+(y+ax-2a)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\\
&\iff (x-2\sin^2\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2=1
\end{aligned}$$

Et ceci après simplification et regroupement en remarquant que $a=\tan\theta$.
Comme conclusion, Γ' est le cercle de centre A_0 d'affixe $2\sin^2\theta+2i\sin\theta$ et de rayon $r=1$.