

(ب) بين أنه لكل  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد صحيحة طبيعية فإن

$$\left\lfloor \frac{x}{abc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{c} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor$$

**التمرين الخامس.** حل في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  المعادلتان التاليتان

$$(E_1): \quad [2x] = [x]$$

$$(E_2): \quad \left\lfloor \frac{x^2 - 3x + 1}{3} \right\rfloor = \frac{x-1}{3}$$

**التمرين السادس.** نعتبر المجموعة التالية

$$E = \left\{ \frac{1 - n^2 \sqrt{2}}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. بين أن  $\sup E = 1 - \sqrt{2}$ .

2. نفترض أن المجموعة  $E$  مصغورة بالعدد  $k$ .

(أ) بين أن  $k < 0$ .

(ب) بين أنه مهما يكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  فإن

$$\sqrt{2}n^2 + kn - 1 \leq 0$$

3. إستنتج أن  $E$  غير مصغورة.

**التمرين السابع.** نعتبر المجموعة التالية

$$E = \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \mid (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \right\}$$

1. بين أن  $E$  مصغورة بـ 2 ثم حدد الحد السفلي للمجموعة  $E$ .

2. بين أن المجموعة  $E$  ليست مكبورة.

**التمرين الثامن.**

1. (أ) بإستعمال خاصية أرخميدس أثبت كثافة مجموعة الأعداد الجذرية  $\mathbb{Q}$  في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .

(ب) إستنتج أن مجموعة الأعداد الحقيقية الغير الجذرية  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  كثيفة في  $\mathbb{R}$ .

2. بإستعمال إستدلال مماثل أثبت أن مجموعة الأعداد العشرية  $\mathbb{D}$  كثيفة في  $\mathbb{R}$ .

## سلسلة تمارين حول درس الحساب العددي

**التمرين الأول.** ليكن  $a$  و  $b$  و  $c > 0$  أعداداً حقيقية.

1. نفترض أن

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c$$

بين أن  $|a| < c$  و  $|b| < c$ .

2. عكسياً نفترض أن  $|a| < c$  و  $|b| < c$ .

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c$$

**التمرين الثاني.** نعتبر في المجموعة  $\mathbb{R}$  المتراجحة التالية،

$$|x^3| + 2 \leq |x^3 + x + 1|$$

1. ليكن  $x$  عدداً حقيقياً.

بين أنه إذا كان  $x$  حلاً لهذه المتراجحة فإن  $|x+1| \geq 2$ .

2. إستنتج مجموعة حلول هذه المتراجحة.

**التمرين الثالث.** ليكن  $n$  عنصراً من  $\mathbb{N}^*$ . حدد العدد التالي بدلالة  $n$ ,

$$S = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1}}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{n} \right\rfloor$$

**التمرين الرابع.** ليكن  $x$  عنصراً من مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .

$$1. \text{ بين أن } [2x] = [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

2. بين أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا

$$[x] + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = [nx]$$

3. (أ) ليكن  $n$  عنصراً من  $\mathbb{N}^*$ .

بين أن

$$\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x]$$