

# سلسلة تمارين حول درس التطبيقات

**التمرين الخامس.** نعتبر التطبيق  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بما يلي  $f(x, y) = 2x + y$

- بين أن التطبيق  $f$  ليس تباينياً.
- بين أن  $f$  شمولي.
- لتكن المجموعة  $A = \{-1, 2\}$ . حدد  $f(A^2)$  حيث  $A^2$  الجداء الديكارتي  $A \times A$ .

**التمرين السادس.** باعتبار المجموعة  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$  بين أنه لا يوجد تقابل  $f$  من  $\mathbb{N}$  نحو  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**التمرين السابع.** لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و  $(D)$  مستقيماً متجهته الموجهة  $\vec{u}$ . نرسم بالرمز  $t_{\vec{u}}$  للإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}$  و  $S_{\Delta}$  التماثل المحوري الذي محوره  $\Delta$ .

- بين أن  $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ .
- بين أن  $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$  تقابل ثم حدد  $(t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta})^{-1}$ .

**التمرين الثامن.** ليكن  $f$  تطبيقاً من  $\mathcal{P}(E)$  نحو  $\mathcal{P}(E)$  معرفة بما يلي

$$f(X) = X - \{a\}, \quad a \in X$$

$$f(X) = X \cup \{a\}, \quad a \notin X$$

- أحسب  $f \circ f$ .
- ماذا يمكنك أن تستنتج؟

**التمرين التاسع.** لتكن  $E$  و  $F$  و  $G$  و  $H$  أربع مجموعات. نعتبر التطبيقات  $f: E \rightarrow F$  و  $g: F \rightarrow G$  و  $h: G \rightarrow H$ . بين أنه إذا كان  $g \circ f$  تقابلاً و كان  $h \circ g$  تقابلاً فإن  $f$  و  $g$  و  $h$  أيضاً تقابلات.

**التمرين العاشر.** ليكن  $f$  تطبيقاً بحيث لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا

$$(f \circ f \circ f)(x) = 2x - 1$$

**التمرين الحادي عشر.** نعرف التطبيق  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  بما يلي

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

بين أن التطبيق  $f$  تبايني.

**التمرين الأول.** نعتبر التطبيق  $g$  من  $\mathbb{R}^+$  نحو  $[0, 1]$  المعرفة بما يلي

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

- بين أن  $g$  تقابل و حدد تقابله العكسي.
- لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$  نضع  $g^{(n)} = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_n$  مرة مع  $g^{(1)}$ . أحسب  $g^{(2)}$  و  $g^{(3)}$ .
- تضمن صيغة  $g^{(n)}(x)$  ثم أثبت ذلك بإستعمال برهان بالترجع.

**التمرين الثاني.** ليكن  $f$  تطبيقاً من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$  بحيث لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا

$$f(x+1) + 2f(1-x) = 3x - 2$$

حدد  $f(x)$  بدلالة  $x$ .

**التمرين الثالث.** نعتبر المجموعتين  $E = \{a, b, c\}$  و  $F = \{1, 2\}$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  مختلفة مثني مثني.

- حدد جميع التطبيقات المعرفة من  $E$  نحو  $F$  ثم حدد عدد هذه التطبيقات.
- حدد من بين هذه التطبيقات، الشمولية منها و التباينية منها.

**التمرين الرابع.** نعتبر التطبيق  $f$  من  $\mathbb{R}$  نحو  $]0, +\infty[$  المعرفة بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

- أحسب  $f(1)$ .
- بين أن  $f$  غير تبايني.
- بين أن  $f(\mathbb{R}) = ]0, 1]$ .
- حدد هل  $f$  شمولي معلاً جوابك.