سلسلة تمارين حول درس مبادئ في المنطق

التمرين الأول.

1. ليكن $x<1$ و $y<1$ و $z<1$. نعتبر العبارة التالية

$$r: \quad x^2+y^2+z^2<3$$

بين أن العبارة r خاطئة.

2. ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$. بين أن العبارة التالية صحيحة

$$a<\frac{a+b}{2}<b$$

التمرين الثاني. حدد جميع الأعداد الحقيقية x التي تحقق الإستلزام الصحيح التالي،

$$\forall y\in[0,1], \qquad x\geq y \Longrightarrow x\geq 2y$$

التمرين الثالث. نعتبر الحدودية $P(x)=ax^2+bx+c$ حيث a,b و c أعداد حقيقية تحقق $a>0$ و $b\geq\frac{1}{8a}$. بإستعمال إستدلال بفصل الحالات بين أن $P(\Delta)\geq 0$ حيث أن Δ مميز الحدودية P.

التمرين الرابع. أوجد الأعداد الحقيقية x و y و z التي تحقق المعادلة التالية

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}$$

التمرين الخامس.

1. ليكن x عدد صحيح نسبي. بين أن بواقي قسمة x^2 على 4 هي 0 و 1.
2. ليكن x عدد صحيح نسبي. بين أن بواقي قسمة x^2 على 8 هي 0 أو 1 أو 4.
3. إستنتج أنه لا توجد أعداد صحيحة نسبية x و y و z بحيث

$$x^2+y^2+z^2=10^{10}+7$$

التمرين السادس.

1. بين بالخلف أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.
2. بإستعمال إستدلال مماثل بين أن الأعداد الأولية التي تكتب على شكل $4k-1$ غير منتهية.

التمرين السابع. ليكن a و b و c عناصراً من $[2,+\infty[$ بحيث $ab\leq c$. بإستعمال إستدلال بفصل الحالات، بين أن $a+b\leq c$.

التمرين الثامن. بدراسة إشارة $x^8-x^5+x^2-x+1$ في كل من $]-\infty,0]$ و $]0,1[$ و $[1,+\infty[$ إستنتج أن

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad x^8-x^5+x^2-x+1>0$$

التمرين التاسع. ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$. نضع

$$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2$$

بإستعمال إستدلال بالترجع، بين أن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad S_n=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

التمرين العاشر. ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$. نضع

$$S_n=(n+1)(n+2)...(n+n)$$

$$T_n=2^n\times 1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)$$

بإستعمال الإستدلال بالترجع بين أن

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad S_n=T_n$$